

7934

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO



FACULTAD DE CIENCIAS

**"PROGRAMACION LINEAL
EN EL CONTEXTO DE
MATROIDES ORIENTADOS"**

**TESIS PROFESIONAL
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
ACTUARIO
PRESENTA
ABDON SANCHEZ ARROYO**



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Introducción	2
I.- Programación Lineal	4
1.- Definiciones y el problema de programación lineal clásico	4
2.- Dualidad	7
3.- Esquema de Tucker	9
II.- Teoría de Matroides	23
1.- Generalidades	23
2.- Operaciones con Matroides	29
3.- Dualidad en Matroides	31
III.- Matroides Orientados	34
1.- Introducción	34
2.- Digrafoides	34
3.- Vectores elementales	40
4.- Teoría de Matroides Orientados	45
IV.- Programación Lineal en el contexto de Matroides Orientados	56
1.- Introducción	56
2.- El problema de Programación Lineal en el contexto de Matroides Orientados	56
3.- El teorema principal de la Programación Lineal.	64
V.- Conclusiones	...	67
Apéndice A Teoría de Gráficas	69
Apéndice B Fundamentos de Álgebra Lineal	72
Bibliografía	76

- 2 -

INTRODUCCION

El objetivo principal del presente trabajo es estudiar los aspectos combinatorios de la teoría de dualidad en Programación Lineal, utilizando, para este fin, las propiedades combinatorias de algunos resultados de la teoría de Gráficas, de los vectores elementales de subespacios ortogonales de \mathbb{R}^n , y por último las de los Matroides Orientados.

Es posible que en algunos temas se incluya material que no haya sido utilizado para los fines primordiales del presente trabajo, pero es preciso notar que fue necesario establecer con claridad los conceptos, que aún sin ser utilizados directamente, revisten una importancia fundamental tanto en el desarrollo histórico de los temas como en la formalización de los mismos. Así surgieron otros objetivos del trabajo, tales como: establecer una introducción a la teoría de matroides o una introducción al estudio de digrafoides, de esta forma pueden listarse los temas analizados en el contenido de la tesis.

Por ejemplo, en el desarrollo del tema de los matroides orientados se realiza un seguimiento del tema, desde que se iniciaron los trabajos sobre el mismo, hasta su axiomatización como teoría. Este seguimiento se lleva a cabo debido a que de esta forma es posible apreciar con exactitud las propiedades combinatorias de la Programación Lineal, en los distintos contextos que son analizados (Digráficas, Vectores Elementales y Matroides Orientados).

La tesis se inicia estableciendo en el capítulo I los resultados fundamentales de la Programación Lineal, mediante el esquema de Tucker [27].

En el capítulo II se exponen los resultados más importantes de la teoría de matroides. Si se desea profundizar al respecto puede consultarse Welch [30], se formulan en esencia dos definiciones de matroide y se establecen algunas propiedades de estas estructuras.

Al inicio del capítulo III se analiza el origen del concepto de matroide orientado, que fue presentado por Tutte en [24] y Minty en [22], y una extensión a estos resultados que fue establecida por Rockafellar en [25] y por Fulkerson en [13]. Este capítulo finaliza estableciendo la teoría de Matroides Orientados basándose principalmente en el artículo de Bland [2] y considerando solo una definición de matroide orientado.

En el capítulo IV se establece el problema de programación lineal en el contexto de matroides orientados y se extienden los principales resultados de dualidad a este contexto; finaliza el presente trabajo realizando un capítulo de comentarios y conclusiones acerca de las propiedades combinatorias de la Programación Lineal y dos apéndices acerca de teoría de Gráficas y de los fundamentos del Algebra Lineal.

I. PROGRAMACION LINEAL

1).- Definiciones y el Problema de Programación Lineal

La Programación Lineal es una de las técnicas de optimización más importantes desarrolladas en el campo de la Investigación de Operaciones. El auge de su desarrollo teórico se inició por una variedad de aplicaciones en estudios económicos e industriales.

El problema de Programación Lineal (P.P.L.), en su forma general, consiste en encontrar el óptimo (ya sea máximo o mínimo) de una función lineal de variables sujetas a restricciones lineales (ecuaciones o desigualdades). En términos algebraicos el problema es:

$$\begin{aligned}
 & \max(\min) \quad z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\
 (1.1.1) \quad & \dots \dots \dots \sum_{j=1}^{s_n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\
 & \quad \quad \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

donde a_{ij} , b_i y c_j son reales y además solo se usa un símbolo en cada restricción de (1.1.1); z es llamada la función objetivo del problema.

Existen formulaciones equivalentes del problema, las cuales son:

Forma canónica:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad z = c \cdot x \\
 & \quad \quad \quad s. a \\
 (1.1.2) \quad & \dots \dots \dots \quad \Lambda \cdot x \leq b \\
 & \quad \quad \quad x \geq 0
 \end{aligned}$$

Forma estandar:

$$\max z = c \cdot x$$

s.a

(1.1.3)

$$A \cdot x = b$$

$$x \geq 0$$

donde $A = (a_{ij})$ es una matriz real de dimensión $m \times n$;

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^t \in \mathbb{R}^m ;$$

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n ;$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n .$$

Una solución factible es un vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ que satisface las restricciones asociadas al P.P.L.

Una solución básica factible es una solución factible tal que las columnas asociadas a las variables diferentes de cero -- son linealmente independientes. Una base asociada a esta solución es un conjunto de r columnas linealmente independientes -- que contiene a las columnas asociadas a la solución.

Una solución factible óptima es una solución factible x^* que optimiza la función objetivo, esto es, $c \cdot x^* \geq c \cdot x$ para toda x solución factible.

Un conjunto convexo C es aquel que cumple que para todo x' y x'' en C y para todo λ en $(0,1)$ se tiene que el punto $\lambda x' + (1-\lambda)x''$ esta en C .

Un vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un punto extremo de un conjunto convexo si no existen dos puntos b' y b'' en dicho conjunto tales que $x = \lambda b' + (1-\lambda)b''$ con λ en $(0,1)$.

Es fácil demostrar que el conjunto de soluciones factibles del P.P.L. es un conjunto convexo.

Teorema 1.1.- Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ una solución básica factible del problema (1.1.3), donde las primeras k -- componentes son mayores que cero y las restantes son cero. Entonces el punto x es un punto extremo del conjunto de soluciones factibles del problema (1.1.3)

Dm.- Sea C el conjunto de soluciones factibles del problema (1.1.3) y sea x una solución básica factible. Supongase que x no es un punto extremo de C. Entonces existe x' y x'' en C tal que $x = \lambda x' + (1 - \lambda)x''$ con λ en $(0,1)$, es decir, $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = \lambda(x'_1, \dots, x'_n) + (1 - \lambda)(x''_1, \dots, x''_n) = (\lambda x'_1 + (1 - \lambda)x''_1, \dots, \lambda x'_n + (1 - \lambda)x''_n)$.

Por igualdad de vectores se tiene que :

$$\lambda x'_{k+1} + (1 - \lambda)x''_{k+1} = 0 ;$$

$$\lambda x'_{k+2} + (1 - \lambda)x''_{k+2} = 0 ;$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\lambda x'_n + (1 - \lambda)x''_n = 0 ,$$

como $\lambda \in (0,1)$ y $x' \geq 0, x'' \geq 0$ se tiene:

$$x'_i = x''_i \quad \text{para } i = k+1, \dots, n \quad \dots\dots\dots(1)$$

Ahora como x' y $x'' \in C$, se tiene que :

$$A^1 x'_1 + A^2 x'_2 + \dots + A^k x'_k = b \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$A^1 x''_1 + A^2 x''_2 + \dots + A^k x''_k = b \quad \dots\dots\dots(3)$$

restando (2) de (3) se obtiene:

$$A^1(x'_1 - x''_1) + A^2(x'_2 - x''_2) + \dots + A^k(x'_k - x''_k) = 0 .$$

De la independencia de A^1, A^2, \dots, A^k se sigue que :

$$x'_i = x''_i \quad \text{para } i = 1, \dots, k .$$

Lo cual junto con (1) establece una contradicción ya que se había supuesto que x' y x'' eran puntos distintos de C. Por lo tanto x es un punto extremo de C.

c.s.q.d.

Una técnica para encontrar la solución óptima del problema (1.1.3) es el método simplex propuesto por Dantzig en [2]. Este método es una demostración constructiva de los siguientes teoremas:

Teorema 1.2.- Para el problema (1.1.3) se cumple exactamente una de las tres proposiciones alternativas siguientes:

- (a) Existe una solución óptima
- (b) No existe solución factible ($C = \emptyset$)
- (c) No existe óptimo finito (existe una sucesión de puntos $\{x^i\} \in C$, tal que $c \cdot x^i$ tiende a infinito, cuando i tiende a infinito).

Teorema 1.3.- Si el problema (1.1.3) tiene una solución óptima, entonces tiene una solución básica factible óptima.

2).- Dualidad.

Consideremos el P.P.L. en su forma canónica (1.1.2) (el cual se llamará problema primal). Definimos su dual como el siguiente P.P.L. :

$$\begin{array}{ll}
 & \min \quad w = y \cdot b \\
 & \text{s.a} \\
 (1.2.1) \quad \dots\dots & y \cdot A \geq c \\
 & y \geq 0
 \end{array}$$

donde $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in R^m$, es el vector de variables duales.

Si determinamos el dual de (1.2.1) obtendremos el problema (1.1.2). Por esto se dice que los problemas en cuestión son un par de problemas duales o simplemente un par dual.

A continuación daremos los principales resultados sobre dualidad en Programación Lineal, para lo cual se consideran

los problemas (1.1.2) y (1.2.1).

Lema 1.1.- Si x & y son soluciones factibles de los problemas (1.1.2) y (1.2.1) respectivamente, entonces $c \cdot x \leq y \cdot b$.

Dm.- Como x & y son soluciones factibles, se tiene por (1.2.1) que $c \leq y \cdot A$ entonces $c \cdot x \leq y \cdot A \cdot x$, ya que $x \geq 0$.

Por (1.1.2), $A \cdot x \geq b$ entonces $y \cdot A \cdot x \geq y \cdot b$, ya que $y \geq 0$. Por lo tanto $c \cdot x \leq y \cdot A \cdot x \leq y \cdot b$.

c.s.q.d.

Corolario.- Si x & y son soluciones factibles a los problemas (1.1.2) y (1.2.1) respectivamente, tales que $c \cdot x = y \cdot b$ entonces x & y son soluciones óptimas.

Dm.- Supongase que x no es óptima, entonces existe x' tal que $c \cdot x' > c \cdot x = y \cdot b$. Así, $y \cdot b < c \cdot x'$ lo cual contradice al lema 1.1. Por lo tanto, x es solución óptima.

c.s.q.d.

Un tratamiento análogo puede realizarse para y .

A continuación, se enuncian los teoremas fundamentales de la teoría de dualidad, los cuales serán demostrados en la siguiente sección, cuando sean analizados desde un punto de vista combinatorio.

Teorema 1.4.- Dado un par de problemas duales como (1.1.2) y (1.2.1), exactamente una de las siguientes proposiciones se satisface:

- i).- Ninguno de los problemas tiene solución
- ii).- Un problema tiene al menos una solución factible pero no tiene óptimo finito y el otro problema no tiene soluciones factibles.

iii).- Los dos problemas tienen soluciones factibles y soluciones óptimas.

Teorema 1.5.- Dado un par de problemas duales como (1.1.2) y (1.2.1), una condición suficiente y necesaria para que una solución factible x (ó y) de uno de los problemas sea óptima es que exista una solución factible y (ó x) del otro problema tal que $c \cdot x = y \cdot b$.

3).- Esquema de Tucker.

Los resultados anteriores se sintetizarán en un esquema que fue dado por Tucker en [27], en el cual se analiza el aspecto combinatorio de estos teoremas. Considérese el siguiente par de problemas duales :

$$\max u = c_1 x_{m+1} + c_2 x_{m+2} + \dots + c_n x_{m+n}$$

s.a

$$a_{11}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_{m+n} \leq b_1$$

$$\begin{matrix} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{matrix}$$

$$a_{m1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_{m+n} \leq b_m$$

$$\text{con } x_{m+j} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\min v = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$$

s.a

$$a_{11}y_1 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1$$

$$\begin{matrix} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{matrix}$$

$$a_{1n}y_1 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n$$

$$\text{con } y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

Introduciendo variables de holgura en ambos problemas, estos pueden escribirse como :

$$\begin{aligned}
 & \max u \\
 & \text{s. a} \\
 & a_{11}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_{m+n} + x_1 = b_1 \\
 & \quad \vdots \qquad \qquad \qquad \quad \vdots \qquad \qquad \quad \vdots \qquad \quad \vdots \\
 & a_{1m}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_{m+n} + x_m = b_m \\
 & c_1x_{m+1} + \dots + c_nx_{m+n} + 0 = u \\
 & x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m+n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \min v \\
 & \text{s. a} \\
 & a_{11}y_1 + \dots + a_{m1}y_m - y_{m+1} = c_1 \\
 & \quad \vdots \qquad \qquad \qquad \quad \vdots \qquad \qquad \quad \vdots \qquad \quad \vdots \\
 & a_{1n}y_1 + \dots + a_{mn}y_n - y_{m+n} = c_n \\
 & b_1y_1 + \dots + b_my_m - 0 = v \\
 & y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m+n
 \end{aligned}$$

Despejando las variables de holgura en ambos problemas se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \max u \\
 & \text{s. a} \\
 & a_{11}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_{m+n} - b_1 = -x_1 \\
 & \quad \vdots \qquad \qquad \qquad \quad \vdots \qquad \qquad \quad \vdots \qquad \quad \vdots \\
 & (1.3.1) \dots \dots \dots a_{m1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_{m+n} - b_m = -x_m \\
 & \quad \vdots \qquad \qquad \qquad \quad \vdots \qquad \qquad \quad \vdots \qquad \quad \vdots \\
 & c_1x_{m+1} + \dots + c_nx_{m+n} - 0 = u \\
 & x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m+n
 \end{aligned}$$

Al izquierda (1.3.3) se le asocian las soluciones básicas siguientes:

Para el problema renglón :

$$\begin{aligned} x_i &= b_i & i &= 1, \dots, m ; u = d \\ x_{m+j} &= 0 & j &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

Para el problema columna:

$$\begin{aligned} y_{m+j} &= c_j & j &= 1, \dots, n ; v = d \\ y_i &= 0 & i &= 1, \dots, m . \end{aligned}$$

Si consideramos el teorema de dualidad en términos del par dual (1.3.1) y (1.3.2), tendremos cuatro proposiciones mutuamente excluyentes:

- Existen soluciones factibles para los problemas renglón y columna con solución óptima y con $v=u$.
- Existen soluciones factibles para el problema (1.3.1) sin haber soluciones factibles para el problema (1.3.2) y u es no-acotado por arriba.
- Existen soluciones factibles para el problema (1.3.2) sin haber soluciones factibles para el problema (1.3.1) y v es no-acotado por abajo.
- No existen soluciones factibles ni para (1.3.1), ni para (1.3.2).

Dos esquemas establecidos en la forma (1.3.3) son equivalentes si toda solución del sistema renglón o columna de ecuaciones de uno, es una solución del problema renglón o columna del otro esquema.

Así, esquemas equivalentes representan un par dual en términos de diferentes particiones de variables.

Dos esquemas equivalentes están relacionados por una cadena de transformaciones elementales, utilizando una entrada como referencia, a la cual se le llama pivote .

Considerese el esquema siguiente, donde la entrada a_{pk} es el pivote:

(1.3.5)

$$\begin{array}{c}
 x_{m+1}, \dots, x_{m+k}, \dots, x_{m+n} \quad | \quad 1 \\
 \hline
 \begin{array}{l}
 y_1 \\
 \vdots \\
 y_p \\
 \vdots \\
 y_m \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_{11}, \dots, a_{1k}, \dots, a_{1n} \\
 \vdots \\
 a_{p1}, \dots, a_{pk}, \dots, a_{pn} \\
 \vdots \\
 a_{m1}, \dots, a_{mk}, \dots, a_{mn} \\
 \hline
 -c_1, \dots, -c_k, \dots, -c_n
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 -b_1 \\
 \vdots \\
 -b_p \\
 \vdots \\
 -b_m \\
 \hline
 d
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 = -x_1 \\
 \vdots \\
 = -x_p \\
 \vdots \\
 = -x_m \\
 \hline
 = -u
 \end{array}
 \end{array}$$

$= y_{m+1}, \dots, = y_{m+k}, \dots, = y_{m+n} = v$

El esquema equivalente asociado a este pivote es:

(1.3.6)

$$\begin{array}{c}
 x_{m+1}, \dots, x_p, \dots, x_{m+n} \quad | \quad 1 \\
 \hline
 \begin{array}{l}
 y_1 \\
 \vdots \\
 y_{m+k} \\
 \vdots \\
 y_m \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_{11} - \frac{a_{p1}a_{1k}}{a_{pk}}, \dots, -\frac{a_{1k}}{a_{pk}}, \dots, a_{1n} - \frac{a_{1k}a_{pn}}{a_{pk}} \\
 \vdots \\
 \frac{a_{p1}}{a_{pk}}, \dots, \frac{1}{a_{pk}}, \dots, \frac{a_{pn}}{a_{pk}} \\
 \vdots \\
 a_{m1} - \frac{a_{m1}a_{pk}}{a_{pk}}, \dots, -\frac{a_{mk}}{a_{pk}}, \dots, a_{mn} - \frac{a_{mk}a_{pn}}{a_{pk}} \\
 \hline
 -e_1 + \frac{c_k a_{p1}}{a_{pk}}, \dots, \frac{c_k}{a_{pk}}, \dots, -c_n + \frac{c_k a_{pn}}{a_{pk}}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 b_1 - \frac{b_p a_{1k}}{a_{pk}} \\
 \vdots \\
 \frac{b_p}{a_{pk}} \\
 \vdots \\
 b_m - \frac{b_p a_{mk}}{a_{pk}} \\
 \hline
 d + \frac{b_p c_k}{a_{pk}}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 = -x_1 \\
 \vdots \\
 = -x_{m+k} \\
 \vdots \\
 = -x_m \\
 \hline
 = u
 \end{array}
 \end{array}$$

$= y_{m+1}, \dots, = y_p, \dots, = y_{m+n} = v$

La equivalencia de estos dos esquemas es una consecuencia inmediata del método de Gauss para solución de ecuaciones lineales.

Ahora, iniciando con un esquema de la forma (1.3.3) se puede generar una sucesión de esquemas equivalentes y a cada esquema se le asocia una solución básica. Si un esquema obtenido en la sucesión, tiene la siguiente forma :

(1.3.7)

$$\begin{array}{r}
 y_{k1} \\
 \vdots \\
 y_{pm} \\
 1
 \end{array}
 \begin{array}{|c}
 x_{p(m+1)} \dots x_{p(m+n)} \\
 \hline
 \\
 \\
 \\
 \hline
 + \quad + \quad \dots \quad + \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 1 \\
 - \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 - \\
 \delta
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 = - x_{p1} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 = - x_{pm} \\
 = u
 \end{array}$$

$= y_{k(m+1)} \dots = y_{k(m+n)} = v$

donde + y - son valores no negativos y no positivos respectivamente, se le asocia a dicho esquema la siguiente solución :

Para (1.3.1) : $x_{p(m+j)} = 0 \quad j = 1, \dots, n$
 $-x_{pi} = - \quad i = 1, \dots, m$

Para (1.3.2) : $y_{k(m+j)} = 0 \quad j = 1, \dots, n$
 $y_{ki} = + \quad i = 1, \dots, m$

como estas soluciones son factibles y $u = v = \delta$, por el lema 3.1 las soluciones son óptimas.

Teorema I.6.- Dado un esquema de la forma:

(1.3.8)

$$\begin{array}{r}
 y_1 \\
 \vdots \\
 y_m \\
 1
 \end{array}
 \begin{array}{|c}
 x_{m+1} x_{m+2} \dots x_{m+n} \\
 \hline
 a_{11} \quad a_{12} \dots a_{1n} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \hline
 a_{r1} \quad a_{r2} \dots a_{rn} \\
 \hline
 c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 b_1 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 b_m \\
 d
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 = - x_1 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 = - x_m \\
 = u
 \end{array}$$

$= y_{m+1} = y_{m+2} \dots = y_{m+n} = v$

Este teorema, el cual sera demostrado mas adelante, es llamado el teorema principal, y es una versión del teorema (1.4).

El esquema (i) es equivalente a cuando el primal y el dual tienen soluciones factibles, cumpliendose la condición de que $\max u = \min v$.

En el esquema (ii), el problema columna tiene soluciones factibles y en este caso, poniendo $y_k = \lambda > 0$ y el resto de las y 's en el lado izquierdo del esquema igual a cero, se demuestra que v es no acotado por abajo ya que un decremento en y_k implica un decremento en v . A la vez (ii) demuestra que el problema renglon no tiene soluciones factibles, ya que una ecuación expresa a $-x_k$ (restringida a ser no positiva), como la suma de constantes positivas y una combinación lineal de variables mayores que cero.

La forma (iii) es análoga a la forma (ii) sólo se intercambia el papel de los problemas columna y renglon del comentario anterior.

La forma (iv) demuestra que ambos problemas no tienen soluciones factibles.

Con lo anterior, podemos deducir los teoremas centrales de la Programación Lineal de una manera sencilla; así, el teorema de existencia (teorema (1.4)) y el teorema de dualidad (teorema 1.5) son consecuencia del teorema principal, debido a que (i), (ii), (iii), y (iv) son mutuamente exclusivas en el teorema.

Corolario 1.- Dado un esquema de la forma:

$$(1.3.9) \dots\dots\dots \begin{array}{l} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} x_{m+1}, \dots, x_{m+n+1} \\ \boxed{\begin{array}{ccc} a_{11}, \dots, a_{1(n+1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1}, \dots, a_{r(n+1)} \\ \hline c_1, \dots, c_{n+1} \end{array}} \end{array} \begin{array}{l} = -x_1 \\ \vdots \\ = -x_m \\ = u \end{array} \\ = y_{m+1}, \dots, y_{m+n+1}$$

Existe un esquema equivalente que se obtiene en un número finito de pivoteos (con ningún pivote en el último renglón) que tiene una de las siguientes formas:

$$(v) \dots \begin{array}{c} \boxed{} \\ \hline + \dots + \end{array} = 0$$

$$(vi) \dots \begin{array}{c} x_p \\ \vdots \\ \vdots \\ \hline - \\ y_p \end{array} = 0$$

Dm.- Suponga el teorema principal valido e identifiquese a x_{m+n+1} con 1 y a y_{m+n+1} con v en (1.3.8), entonces si (i), (iii) o (iv) es el resultado del teorema entonces (v) o (vi) se obtienen directamente. Si sucede (ii) y (v) no se tiene todavía, tenemos un esquema de la forma :

$$\begin{array}{c}
 x_{m+n+1} \\
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 + \dots + & +^* \\
 \hline
 + \dots + & - \\
 \hline
 \end{array} \\
 \text{1} \qquad \qquad \qquad = v \\
 \qquad \qquad \qquad = y_{m+n+1}
 \end{array}$$

Si se pivotea sobre la entrada con asterisco, se tiene el resultado en la forma (v).

Este corolario establece que el sistema columna de (1.3.9) tiene solución con y 's ≥ 0 , (forma (v)) o no la tiene (forma (vi)). Es claro que el corolario se satisface si en (1.3.9); (v) y (vi) sustituímos las matrices transpuestas negativas, lo cual nos hace llegar al siguiente corolario:

Corolario 2.- Dado un esquema :

$$\begin{array}{c}
 x_{m+2} \dots x_{m+n+1} \quad 1 \\
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 a_{11} \dots a_{1(n+1)} & b_1 \\
 \vdots & \vdots \\
 a_{m+1,1} \dots a_{m+1,n+1} & b_{m+1} \\
 \hline
 \end{array} \\
 \text{(1.3.10) } \dots \begin{array}{l} y_1 \\ \vdots \\ y_{m+1} \end{array} \qquad \qquad \qquad = \begin{array}{l} -x_1 \\ \vdots \\ -x_{m+1} \end{array} \\
 \qquad \qquad \qquad = y_{m+2} \dots = y_{m+n+1} = v
 \end{array}$$

Existe un esquema equivalente que se obtiene en un número finito de pasos (con ningún pivote en la última columna) que tiene una de las siguientes formas:

$$\begin{array}{c}
 \text{(vii) } \dots \dots \dots \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 & - \\
 \hline
 & \vdots \\
 \hline
 & - \\
 \hline
 \end{array} \\
 \qquad \qquad \qquad = v
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{(viii) } \dots y_k \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 + \dots + & + \\
 \hline
 & \\
 \hline
 \end{array} = -x_k \\
 \qquad \qquad \qquad = v
 \end{array}$$

Los cuales tendrían una inmediata conclusión en el siguiente ;

Corolario 3.- Dado un esquema :

$$(1.3.11) \dots \begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_{m+1} \end{array} \begin{array}{c} x_{m+2} \dots x_{m+n+2} \\ \boxed{\begin{array}{ccc} a_{11} \dots a_{1(n+1)} \\ \vdots \\ a_{(m+1)1} \dots a_{(m+1)(n+1)} \end{array}} \end{array} = \begin{array}{c} -x_1 \\ \vdots \\ -x_{m+1} \end{array}$$

$=y_{m+2} \qquad =y_{m+n+2}$

Existe un esquema equivalente que se obtiene en un número finito de pasos que tiene una (o ambas) de las formas :

$$\begin{array}{c} \vdots \\ y_k \\ \vdots \end{array} \boxed{\dots \dots \dots} + \dots + \dots = \begin{array}{c} \vdots \\ -x_k \\ \vdots \end{array}$$

$$\dots \dots x_p \dots \dots$$

$$\dots \dots \boxed{\begin{array}{c} - \\ \vdots \\ - \end{array}} \dots \dots$$

$\dots \dots = y_p \dots$

Supongamos que (1.3.3) es un esquema cuya solución básica asociada al problema renglón es factible, i.e., la columna correspondiente al 1 tiene componentes no negativas (excluyendo la entrada última). Se puede dar un procedimiento para elegir el pivote, en el cual se encuentra una mejor solución al problema renglón (se puede dar también para el problema columna).

Supongase que se tiene un esquema de la forma:

$$(1.3.12) \dots \begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_m \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} x_{m+1} \dots x_{m+n} \quad 1 \\ \boxed{\begin{array}{cc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \\ \hline c_1 & \dots & c_n & d \end{array}} \end{array} = \begin{array}{c} -x_1 \\ \vdots \\ -x_m \\ v \end{array}$$

$=y_{m+1} \dots =y_{m+n} =v$

donde 1, 2, ... ,m+n es una permutación de los subíndices 1,2,...,m+n y (1.3.12) es equivalente a (1.3.8).

Un método simplex para el problema renglón puede darse como sigue.

Se tiene que $b_i \leq 0$ para toda $i = 1, \dots, m$, si (1.3.12) no está en la forma (i), entonces existe $c_j < 0$ para algún j ; de aquí, puede haber dos casos :

- (1).- toda entrada en la columna de $c_j < 0$ es estrictamente negativa, i.e., $a_{ij} < 0$ $i = 1, \dots, m$, donde se concluye que estamos en la forma (iii)
- (2).- existe al menos a_{kj} que cumple con:

$$\frac{b_k}{a_{kj}} = \max_s \left\{ \frac{b_s}{a_{sj}} : a_{sj} > 0 \right\} ,$$

y se pivotea sobre este a_{kj}

si $b_k < 0$ se tiene que el nuevo valor de la esquina inferior derecha es estrictamente menor que el valor que tenía en (1.3.12), ya que por la regla de pivoteo, d se transforma en $d - b_k c_j / a_{kj} = \hat{d}$ y se cumple que $d > \hat{d}$.

Se termina en un número finito de pasos si en (1.3.12) se tiene que $b_i < 0$; pero si ocurre degeneración, i.e., $b_i = 0$ para algún i , entonces una buena regla para elegir el c_j será:

$$c_j = \min_k c_k .$$

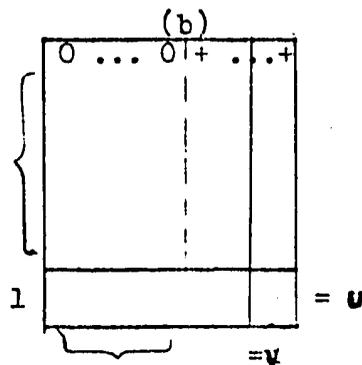
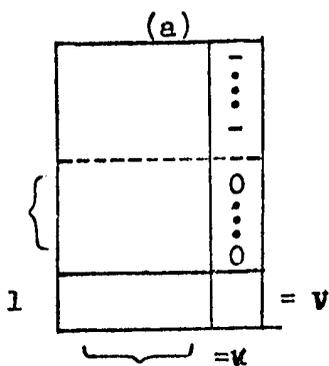
Análogamente puede darse el método simplex para el problema columna, puede consultarse dicho método en Lemke [24].

Antes de iniciar la demostración del teorema principal, se dará un enfoque de cómo encontrar soluciones básicas factibles.

Para obtener un esquema con soluciones básicas factibles asociadas al problema renglón (si se considera el esquema transpuesto se puede obtener un esquema con soluciones básicas factibles asociadas al problema columna), supondremos en (1.3.12) que $b_i > 0$ para algún i y reorganizando los renglones del esquema tal que $b_i \leq 0$ para $i \leq k$ y $b_i > 0$ para $i > k$, reemplazando a b_i por sus signos, el esquema (1.3.12) puede verse como :

$$(1.3.13) \dots \begin{array}{l} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{array} \begin{array}{|ccc|c} x_{m+1} & \dots & x_{m+n} & 1 \\ \hline a_{11} & \dots & a_{1n} & - \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} & - \end{array} \begin{array}{l} = -x_1 \\ \vdots \\ = -x_k \end{array}$$

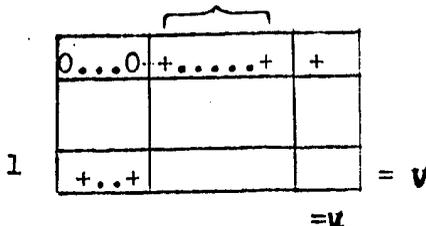
(1.3.16)



equivalente al esquema (1.3.8) en un número finito de pasos.

Si se tiene (1.3.16b), aplicando el corolario 1 al subesquema de (1.3.16b) cuyos renglones y columnas están entre llaves (son menores que $m+n+2$), obtenemos un esquema de la forma (ii), (iv) o de la siguiente forma:

(1.3.17).....

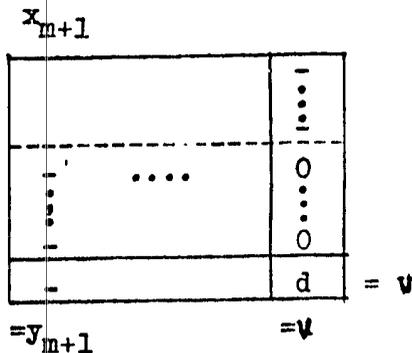


equivalente a (1.3.8). Un pivoteo sobre (1.3.17), con pivote en el renglón que está abajo de las columnas con llaves y a_{ij} elegido tal que:

$$c_j/a_{ij} = \min_s \left\{ c_s/a_{is} : c_s < 0 \right\},$$

nos conduce a la forma (i).

Si se tiene (1.3.16a), aplicamos el corolario 1 al subesquema cuyos renglones están en llaves (son menores que $m+n+2$), obtenemos un esquema de la forma (i), (iii) o de la siguiente forma (después de reorganizar las columnas):



equivalente a (1.3.8), donde la columna correspondiente a la variable independiente x_{m+1} contiene una o más entradas positivas; pero un pivoteo usando el método simplex por renglón aplicado a (1.3.18), con pivote en la columna correspondiente a x_{m+1} , dá como resultado un esquema equivalente con la entrada d de la esquina estrictamente menor. Y si se sigue aplicando el método, siempre se tendrá esa mejoría, además como estamos en el caso de no degeneración, después de un número finito de pasos, se tiene el esquema equivalente de la forma (i) o (ii). La inducción en este punto se usó para demostrar que no hay soluciones factibles para el problema columna u obtener un esquema que permita mejorar el valor de la esquina inferior derecha, y esto concluye la demostración.

II. TEORIA DE MATROIDES

1).- Generalidades.

La palabra Matroide fue introducida en 1935 por Harold Whitney para denotar un concepto que generaliza los de gráficas y dependencia lineal, pero fue Wan Der Waerden en su libro "Algebra Moderna" que enfocó su trabajo a la dependencia lineal y algebraica quien inició los trabajos de los matroides. En [24] Rado analiza las propiedades combinatorias de los matroides; Tutte en [29] y Fulkerson en [13] estudian ciertos tipos de matroides: transversales, regulares, binarios, etc. .

En 1970, Jack Edmonds descubre propiedades de los matroides esenciales en la optimización combinatoria y durante esa década los matroides se convierten en un concepto central de la optimización por dos razones: a) su generalidad para expresar problemas de optimización combinatoria (ver Edmonds [10] y [11]; Lawler [19], [20]; Korte [16], [17]). b) la conveniencia de usarlos como marco combinatorio para explicar ciertos aspectos del Algebra Lineal y de la Programación Lineal (ver Fulkerson [13]; Rockafellar [25]; Minty [22]; Eland [2]; Las Vergnas [18]; Folkman y Lawrence [12], etc.). En esta tesis se trata el segundo aspecto que por cierto es el menos conocido.

Existen varias definiciones equivalentes de un matroide, en este trabajo sólo se verán dos, empezando con la siguiente:

Un matroide es una pareja (E, F) , donde E es un conjunto finito y F una colección de subconjuntos de E que satisface:

$$(2.1.1) \quad \emptyset \in F$$

$$(2.1.2) \quad V \in F \text{ y } U \subseteq V \implies U \in F$$

$$(2.1.3) \quad \text{Si } U \& V \in F \text{ con } |U| = |V| + 1 \implies \exists x \in U \setminus V \\ \text{tal que } V \cup \{x\} \in F .$$

F es llamada la familia de subconjuntos independientes.

Si $A \subseteq E$ y $A \notin F$, A es llamado conjunto dependiente.

Sea $A \subseteq E$, una base de A es un subconjunto de A independiente maximal. Una base del matroide $M = (E, F)$ es una base de E .

Es claro que si $A \in F$, es posible exhibir una base B del matroide tal que $A \subseteq B$, a continuación se verá un teorema que sirve para resaltar este hecho.

Teorema 2.1. - Sea $M = (E, F)$ un matroide y $U, V \in F$ con $|U| < |V|$
 $\Rightarrow \exists W \subseteq V \setminus U$ tal que $U \cup W \in F$ & $|U \cup W| = |V|$

Dm. - Sea $W_0 \subseteq V \setminus U$ & $W_0 \cup U \in F$ tal que para todo $W \subset V \setminus U$ con $W \cup U \in F$ se tiene $|W \cup U| \leq |W_0 \cup U|$ i.e. $|W_0 \cup U|$ es maximal.

Si $|U \cup W_0| < |V| \Rightarrow \exists V_0 \subseteq V$ tal que $|V_0| = |U \cup W_0| + 1$ y como $V \in F \Rightarrow V_0 \in F$.

Por (2.1.3) $\exists x \in V_0 \setminus U \cup W_0$ tal que $U \cup W_0 \cup \{x\} \in F$, lo cual es una contradicción ya que $|U \cup W_0 \cup \{x\}| > |U \cup W_0|$ y ésta se escogió maximal. Así $|U \cup W_0| \geq |V|$ y como $|U \cup W_0| \leq |V|$ porque $W_0 \subseteq V \setminus U$, se tiene que $|U \cup W_0| = |V|$

c.s.q.d.

Corolario 1. - Sea $M = (E, F) \Rightarrow$ todas las bases de M tienen la misma cardinalidad

Dm. - Sean B' & B'' dos bases de M tales que $|B'| < |B''|$, por teorema anterior $\exists W \subseteq B'' \setminus B'$ tal que $B' \cup W \in F$, lo cual es una contradicción, ya que B' es maximal independiente, por lo tanto $|B'| = |B''|$.

c.s.q.d.

Para un matroide $M = (E, F)$ se define la función rango como sigue :

$$\rho: 2^E \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$\rho(A) = \max \{ |U| \mid U \subseteq A \text{ & } U \in F \}$$

El rango del matroide es el rango de E

Un subconjunto $A \subseteq E$ es cerrado si para todo $x \in E \setminus A$ se tiene que $\rho(A \cup \{x\}) = \rho(A) + 1$, i.e., no es posible incrementar el conjunto sin incrementar su rango.

Si $x \in E$ & $A \subseteq E$ y se cumple que $\rho(A \cup \{x\}) = \rho(A)$, diremos que x depende de A ($x \sim A$), de aquí definiremos el operador cerradura como sigue :

$$\sigma: 2^E \longrightarrow 2^E$$

$$\sigma(A) = \{ x \in E \mid x \sim A \text{ i.e. } \rho(A \cup \{x\}) = \rho(A) \}$$

Algunas de las propiedades de la función rango y la función cerradura son las que a continuación se listan.

Prop.(R.1) $\rho(\emptyset) = 0$, su demostración es obvia, por definición de la función rango.

Prop.(R.2) $\rho(U) \leq \rho(U \cup \{y\}) \leq \rho(U) + 1$ donde $U \subseteq E$, $y \in E$

Dm.- sea $|A| = \rho(U)$ & $|B| = \rho(U \cup \{y\})$ donde $A \subseteq U, B \subseteq U \cup \{y\}$

P.D. $|A| \leq |B|$

Si $|A| > |B| \implies B$ no es maximal independiente de $U \cup \{y\}$, lo que es una contradicción ya que se había supuesto que $\rho(U \cup \{y\}) = |B|$ por lo tanto $|A| \leq |B|$

P.D. $|B| \leq |A| + 1$

como $A \subseteq U$, existen dos casos:

Si $A \cup \{y\} \notin F \implies |B| = |A|$

Si $A \cup \{y\} \in F \implies |B| = |A| + 1$, de donde $|B| \leq |A| + 1$
c.s.q.d.

Prop.(R.3) Si $\rho(U \cup \{y\}) = \rho(U \cup \{z\}) = \rho(U) \implies \rho(U \cup \{y, z\}) = \rho(U)$

Dm.- Sea $\rho(U) = |A|$ con $A \subseteq U$, como $\rho(U \cup \{y\}) = |A| \implies A \cup \{y\}$ no está en F & como $\rho(U \cup \{z\}) = |A| \implies A \cup \{z\} \notin F$, de aquí que $A \cup \{y\} \cup \{z\} \notin F$, i.e., $\rho(U \cup \{y, z\}) = |A| = \rho(U)$
c.s.q.d.

Prop.(R.4) $\rho(A) + \rho(B) \geq \rho(A \cup B) + \rho(A \cap B) \quad \forall A, B \subseteq E$

Dm.- Sea $\rho(A \cup B) = p$, $\rho(A \cap B) = q$ & $X \subseteq A \cap B$ con $|X| = q$, por el teorema 2.1 $\exists Y \supseteq X$ tal que $|Y| = p$ & $Y \in F \implies Y$ puede escribirse como $Y = X \cup V \cup W$, donde $V \subseteq A \setminus B$ & $W \subseteq B \setminus A$.

Así, $X \cup V \subseteq A$, $X \cup V \in F$, $X \cup W \subseteq B$ & $X \cup W \in F$, de donde:

$$\begin{aligned} \rho(A) + \rho(B) &\geq |X \cup V| + |X \cup W| = 2|X| + |V| + |W| = \\ &= |Y| + |X| = \rho(A \cup B) + \rho(A \cap B) \end{aligned}$$

c.s.q.d.

Con estas propiedades de la función rango puede darse otra definición de matroide la cual puede verse en [B]. Las propiedades de la función cerradura son:

Prop.(S.1) $A \subseteq \sigma(A)$

Dm.- Sea $X \in A \implies A \cup \{x\} = A$ i.e. $\rho(A \cup \{x\}) = \rho(A) \implies x \in \sigma(A)$, por lo tanto $A \subseteq \sigma(A)$

c.s.q.d.

Prop. (S.2) $A \subseteq B \Rightarrow \sigma(A) \subseteq \sigma(B)$ con $A \& B \subseteq E$

Dm.- Sea $x \in \sigma(A) \Rightarrow \rho(A \cup \{x\}) = \rho(A)$

P.D. $x \in \sigma(B)$, i.e., $\rho(B \cup \{x\}) = \rho(B)$ pero

$$\rho(B \cup \{x\}) = \rho(A \cup (B \setminus A) \cup \{x\}) = \rho(A \cup \{x\}) + \rho(B \setminus A) = \rho(A) + \rho(B \setminus A) = \rho(B)$$

por lo tanto $x \in \sigma(B)$

c.s.q.d.

Prop. (S.3) $\sigma(A) = \sigma(\sigma(A))$

Para demostrar la igualdad se deben demostrar las contenciones hacia los dos lados.

P.D. $\sigma(A) \subseteq \sigma(\sigma(A))$, aplicando (S.1) con $B = \sigma(A)$ se obtiene el resultado deseado.

P.D. $\sigma(\sigma(A)) \subseteq \sigma(A)$, sea $y \in \sigma(\sigma(A)) \Rightarrow \rho(\sigma(A) \cup \{y\}) = \rho(\sigma(A))$

si $y \in \sigma(A) \Rightarrow \sigma(\sigma(A)) \subseteq \sigma(A)$

si $y \notin \sigma(A) \Rightarrow \rho(\sigma(A) \cup \{y\}) = \rho(A) + 1$ lo cual es una contradicción ya que $\rho(\sigma(\sigma(A))) = \rho(A)$ y se tendría que $y \notin \sigma(\sigma(A))$

Por lo tanto $y \in \sigma(A)$ y de aquí $\sigma(\sigma(A)) = \sigma(A)$.

c.s.q.d.

Como una analogía con teoría de gráficas es posible definir circuito de un matroide $M = (E, \mathcal{C})$ como un subconjunto de E dependiente minimal. La colección de circuitos del matroide la denotaremos por \mathcal{C} .

Dos propiedades fundamentales de \mathcal{C} son :

(2.1.4) Si $X \& Y \in \mathcal{C}$ con $X \neq Y \Rightarrow X \not\subseteq Y \& Y \not\subseteq X$

La demostración de esta propiedad es obvia por la definición de circuito.

(2.1.5) Si $X \& Y \in \mathcal{C} \& z \in X \cap Y \Rightarrow \exists X_0 \subseteq (X \cup Y) \setminus \{z\}$, donde $X_0 \in \mathcal{C}$.

Dm.- Supongamos $X \& Y \in \mathcal{C}$ tal que X_0 no existe en \mathcal{C} , es decir $(X \cup Y) \setminus \{z\}$ es independiente $\Rightarrow \rho(X \cup Y \setminus \{z\}) = |X \cup Y| - 1$

Por (2.1.4) $\rho(X) = |X| - 1$, $\rho(Y) = |Y| - 1$ & $\rho(X \cap Y) = |X \cap Y|$

Por (R.4) $\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y) \geq \rho(X \cup Y \setminus \{z\}) + \rho(X \cap Y)$

ya que por (R.2) $\rho(X \cup Y) \geq \rho(X \cup Y \setminus \{z\})$.

Sustituyendo valores se tiene :

$$|X| + |Y| - 2 \geq |X \cup Y| + |X \cap Y| - 1, \text{ como } |X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| \Rightarrow$$

$$|X| + |Y| - 2 \geq |X| + |Y| - |X \cap Y| + |X \cap Y| - 1 \Rightarrow -2 \geq -1 \text{ lo cual es}$$

una contradicción por lo tanto $\exists X_0 \in \mathcal{C}$ tal que $X_0 \subseteq X \cup Y \setminus \{z\}$

c.s.q.d.

Estas propiedades de los circuitos implican la definición de Matroide en términos de circuitos dada por Whitney en [31], la demostración de esta implicación puede verse en Welsh [30]. La definición es la siguiente:

Sea E un conjunto finito y \mathcal{F} una familia de subconjuntos de E entonces $M = (E, \mathcal{F})$ es un matroide si y sólo si satisface:

$$(2.1.6) \text{ Si } C_1 \neq C_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow C_1 \not\subseteq C_2 \text{ \& } C_2 \not\subseteq C_1$$

$$(2.1.7) \text{ Si } C_1, C_2 \in \mathcal{F} \text{ tales que } z \in C_1 \cap C_2 \text{ \& } x \in C_1 \setminus C_2 \Rightarrow \exists C_3 \in \mathcal{F} \text{ tal que } x \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{z\}$$

Con esta definición se trabajará en el Capítulo III.

Lema 2.1.- Si A es independiente en $M = (E, \mathcal{F})$ para todo $x \in E \setminus A$ $A \cup \{x\}$ contiene a lo mas un circuito.

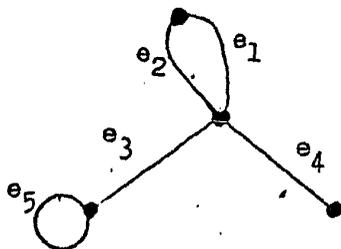
Dm.- Sea $A \in \mathcal{F}$ tal que existe $x \in E \setminus A$ con $C_1 \neq C_2$ & $C_1 \cup C_2 \subseteq A \cup \{x\}$ por ser A independiente $x \in C_1 \cap C_2$ y por (2.1.5) $\exists C_3$ tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\} \subseteq A$, lo cual es una contradicción ya que $A \in \mathcal{F}$.

Por lo tanto $A \cup \{x\}$ contiene a lo más un circuito.

c.s.q.d.

Algunos ejemplos de Matroides son:

1).- Sea $G = (X, V)$ una gráfica no dirigida, sea $E=V$ definiendo $\mathcal{F} = \{U \subseteq V \mid U \text{ no contiene un ciclo}\}$, entonces $M = (E, \mathcal{F})$ es un matroide. Vgr.



$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{e_1, e_2, e_3, e_4\}, \{e_1, e_3\}, \{e_2, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_2, e_4\}, \{e_1, e_4, e_3\}, \{e_2, e_3, e_4\}\}$$

$$\mathcal{C} = \{e_5, \{e_2, e_1\}\}$$

las bases del matroide son $\beta = \{\{e_1, e_3, e_4\}, \{e_2, e_3, e_4\}\}$

2).- Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$ con entrada en los reales sean A^1, A^2, \dots, A^n las columnas de A . Sea $E = \{A^1, A^2, \dots, A^n\}$ definimos $\mathcal{F} = \{U \subseteq E \mid U \text{ es un conjunto linealmente independiente}\}$ así $M = (E, \mathcal{F})$ es un matroide ya que cumple las condiciones (2.1.2) y (2.1.3), (2.1.1).

3).- Sea E un conjunto finito i.e. $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ y sea
 $F = \{A \subseteq E \mid |A| \leq k, k \leq n\}$
de aquí $M = (E, F)$ es un matroide.

2).- Operaciones con Matroides

Las operaciones más comunes en la teoría de matroides son: el aniquilamiento, la restricción, el truncamiento, la suma directa y la suma. Con estas operaciones es posible construir nuevos matroides, algunos autores les llaman a los matroides generados, menores de matroides.

Consideremos un matroide $M = (E, \mathcal{F})$ y sea $T \subseteq E$ definimos $\mathcal{F}(E \setminus T) = \{ U \mid U \subseteq T, U \in \mathcal{F} \}$, es decir, todos los subconjuntos independientes contenidos en T , es fácil verificar que $\mathcal{F}(E \setminus T)$ es una colección de subconjuntos de E que satisfacen (2.1.1), (2.1.2) y (2.1.3) y de aquí el matroide $M \setminus T = (T, \mathcal{F}(E \setminus T))$ es llamado la restricción de M a T . Algunos autores le llaman el aniquilamiento de $E \setminus T$ en M .

Es fácil verificar que :

- Si U es dependiente en M y $U \subseteq T$ entonces U es dependiente en $M \setminus T$
- El rango de $M \setminus T$ es $\rho(M \setminus T) = \rho(T)$
- Los circuitos de $M \setminus T$ son los circuitos de M contenidos en T

Consideremos el ejemplo siguiente sobre la gráfica :

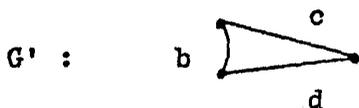


Sea $M = (E, \mathcal{F}) = (E, \mathcal{C})$ donde

$$E = \{ a, b, c, d, e \} \quad \mathcal{F} = \{ \emptyset, a, b, c, d, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\} \}$$

$$\mathcal{C} = \{ \{a, b\}, \{e\}, \{a, c, d\}, \{c, b, d\} \}$$

Sea $T = \{ b, c, d \}$ el matroide $M \setminus T = (T, \mathcal{F}(E \setminus T))$ está dado por $\mathcal{F}(E \setminus T) = \{ \emptyset, b, c, d, \{b, c\}, \{c, d\}, \{b, d\} \}$ y $\mathcal{C}(E \setminus T) = \{ \{b, c, d\} \}$. El cual es la restricción de M a T . También es llamado el aniquilamiento de $E \setminus T$ en M debido a la analogía que existe con teoría de gráficas ya que si se considera el conjunto $E \setminus T = \{ e, a \}$ y se aniquila de la gráfica obtenemos :



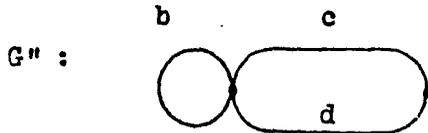
la cual nos genera el matroide antes descrito.

La contracción de un matroide de E a T será denotado como $M \cdot T$ donde M es un matroide sobre E y $T \subseteq E$. La familia de subconjuntos independientes de $M \cdot T$ se define como:

$$F(M.T) = \{U \mid U \subset T \text{ tal que } \exists Y \text{ base de } E \setminus T \text{ en } M \text{ s.t. } U \cup Y \in F\}$$

Si consideramos el ejemplo anterior con $T = \{b, c, d\}$, tendremos por definición que $F(M.T) = \{\emptyset, \{c\}, \{d\}\}$, así $M.T = (T, F(M.T))$ es la contracción de E a T en M .

Haciendo en la gráfica G del ejemplo anterior la contracción de E a T obtendremos :



De aquí se sigue que :

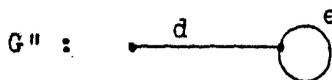
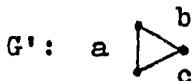
- Si G es una gráfica y $T \subseteq E(G) \implies M(G.T) = M(G).T$
- Los ciclos de $G.T$ son los conjuntos minimales de la forma $C \cap T$, donde C es un ciclo de G .
- Los circuitos de $M.T$ son los conjuntos minimales de la forma $C \cap T$ donde C es un circuito de M .

El truncamiento es la operación que se considera como sigue : sea $M = (E, F)$ un matroide y $k \leq \rho(E)$ un entero positivo entonces el matroide truncado a k tiene su familia de conjuntos independientes como $F_k = \{U \mid U \in F \text{ y } |U| \leq k\}$ al cual se le denota por $M_k = (E, F_k)$, con la función rango definida por $\rho(A) = \min(k, \rho(A))$.

Sean $M' = (E', F')$ y $M'' = (E'', F'')$ dos matroides donde $E' \cap E'' = \emptyset$ definimos la suma directa $M' \oplus M''$ de M' y M'' como el matroide sobre $E' \cup E''$ cuya familia de conjuntos independientes esta dada por $F = \{U \cup Y \mid U \in F' \text{ y } Y \in F''\}$. La función rango de $M' \oplus M''$ se define como:

$$\rho_{M' \oplus M''}(A) = \rho_{M'}(A \cap E') + \rho_{M''}(A \cap E'')$$

Por ejemplo para los matroides inducidos por las gráficas



$$M' = (E', F')$$

$$M'' = (E'', F'')$$

$$E' = \{a, b, c\}$$

$$E'' = \{e, d\}$$

$$F' = \{\emptyset, \{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

$$F'' = \{\emptyset, d\}$$

Así $M' \oplus M'' = (E' \cup E'', F)$ donde:

$$F = \{\emptyset, \{a, b, c, d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

Este matroide es precisamente el asociado a la gráfica G cuyos componentes conexos son G' y G'' .

Para definir la suma lo único que cambia es que E' y E'' no necesariamente son disjuntos (pueden ser inclusive iguales). La suma de M' y M'' se denota por M' v M'' = (E' ∪ E'', F) donde F se define como en la suma directa. Por ejemplo :

$$\begin{array}{ll} M' = (E, F) & M'' = (E'', F'') \\ E' = \{a, b\} & E'' = \{a, c\} \\ F' = \{\emptyset, a, b, \{a, b\}\} & F'' = \{\emptyset, a\} \end{array}$$

Así M' v M'' = (E' ∪ E'', F) esta dado por

$$E' \cup E'' = \{a, b, c\} \quad F = \{\emptyset, a, b, \{a, b\}\}$$

3).- Dualidad en Matroides

Considérese un matroide M = (E, F) y sea $\beta = \{B \mid B \text{ es base de } M\}$ la familia de bases del matroide, sea $\beta^* = \{E \setminus B \mid B \in \beta\}$ entonces β^* es la colección de bases de un matroide M* definido como M* = (E, F*), donde $F^* = \{U \mid \exists B^* \in \beta^* \text{ s.t. } U \subseteq B^*\}$, el cual es llamado el matroide dual de M. Es fácil verificar las siguientes propiedades de M*:

- Si $x \in E$ & $\{x\} \notin F \Rightarrow x \in B^* \forall B^* \in \beta^*$
- El rango de M* es $\rho_{M^*}(E) = |E| - \rho(M)$
- $(M^*)^* = M$
- Las funciones rango de M y M* (ρ y ρ^* respectivamente) están relacionadas por la igualdad :

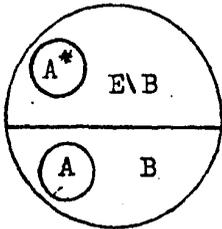
$$\rho^*(E \setminus A) = |E| - \rho(E) - |A| + \rho(A)$$

Se entenderá por corango de M el rango de M*, una cobase de M como una base de M*, un cocircuito de M como un circuito de M* y así análogamente para todos los términos usados en la teoría de matroides.

Teorema 2.2.- Sea M un matroide, A & A* ⊆ E con A ∩ A* = ∅ y A ∈ F, A* ∈ F* ⇒ ∃ B y B* bases de M y M* respectivamente con A ⊆ B, A* ⊆ B* y B ∩ B* = ∅

Dm.- Se tiene que $A \cap A^* = \emptyset \implies A \subseteq E \setminus A^*$, de donde $|A| < |E \setminus A^*|$, como $A^* \in F^*$ se tiene que $E \setminus A^* \in F$, por teorema 2.1 podemos extender A a una base B de M con cardinalidad $|B| = |E \setminus A^*|$, la base de M^* es $B^* = E \setminus B$, las cuales cumplen con las condiciones del teorema.

c.s.q.d.



Una manera más de expresar a las bases de M se menciona en el siguiente teorema.

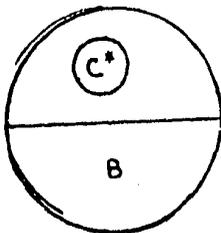
Teorema 2.3.- Un subconjunto $U \subseteq E$ es una base de $M \iff U \cap C^* \neq \emptyset$ para todo C^* cocircuito de M y es minimal respecto a esta propiedad

Dm.- \implies) Sea B una base de $M = (E, F)$, supóngase C^* cocircuito de M tal que $B \cap C^* = \emptyset$, de aquí $C^* \subseteq E \setminus B$ lo que contradice la independencia de $E \setminus B$ en M^* . Para ver que es minimal supon^gamos que $B \cap C^* \neq \emptyset$, pero existe $U \subset B$ tal que $U \cap C^* \neq \emptyset$ para todo C^* cocircuito de M .

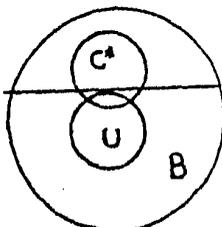
De aquí se tiene que $E \setminus U$ no contiene algún cocircuito de M , i.e., $E \setminus U$ es independiente en M^* y además $E \setminus B \subseteq E \setminus U$ lo cual es una contradicción ya que $E \setminus B$ es una base de M^* , por lo tanto no existe dicho U

c.s.q.d.

Realizando una ilustración

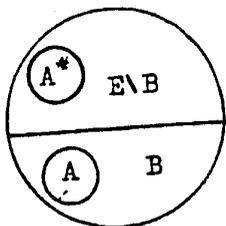


$B \cap C^* = \emptyset \implies C^* \subseteq E \setminus B$ contradicción por ser $E \setminus B$ base de M^*



$E \setminus U \supseteq C^* \quad \forall C^* \text{ cocircuito de } M \implies E \setminus U \in F^* \text{ pero } E \setminus B \subset E \setminus U, \text{ contradicción por ser } E \setminus B \text{ base}$

Dm.- Se tiene que $A \cap A^* = \emptyset \implies A \subset E \setminus A^*$, de donde $|A| < |E \setminus A^*|$, como $A^* \in F^*$ se tiene que $E \setminus A^* \in F$, por teorema 2.1 podemos extender A a una base B de M con cardinalidad $|B| = |E \setminus A^*|$, la base de M^* es $B^* = E \setminus B$, las cuales cumplen con las condiciones del teorema. c.s.q.d.



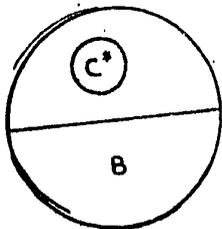
Una manera más de expresar a las bases de M se menciona en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.- Un subconjunto $U \subset E$ es una base de $M \iff U \cap C^* \neq \emptyset$ para todo C^* cocircuito de M y es minimal respecto a esta propiedad

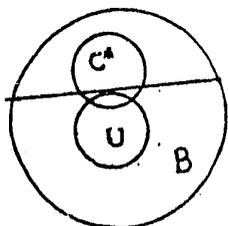
Dm.- \implies) Sea B una base de $M = (E, F)$, supóngase C^* cocircuito de M tal que $B \cap C^* = \emptyset$, de aquí $C^* \subseteq E \setminus B$ lo que contradice la independencia de $E \setminus B$ en M^* . Para ver que es minimal suponemos que $B \cap C^* \neq \emptyset$, pero existe $U \subset B$ tal que $U \cap C^* \neq \emptyset$ para todo C^* cocircuito de M .

De aquí se tiene que $E \setminus U$ no contiene algún cocircuito de M , i.e., $E \setminus U$ es independiente en M^* y además $E \setminus B \subseteq E \setminus U$ lo cual es una contradicción ya que $E \setminus B$ es una base de M^* , por lo tanto no existe dicho U c.s.q.d.

Realizando una ilustración



$B \cap C^* = \emptyset \implies C^* \subset E \setminus B$ contradicción por ser $E \setminus B$ base de M^*



$E \setminus U \supseteq C^* \quad \forall C^*$ cocircuito de $M \implies E \setminus U \in F^*$ pero $E \setminus B \subset E \setminus U$, contradicción por ser $E \setminus B$ base

\Leftarrow) Sea $U \subseteq E$ tal que $U \cap C^* \neq \emptyset$ para todo C^* cocircuito de M
 $\Rightarrow C^* \not\subseteq E \setminus U$ para todo C^* cocircuito de $M \Rightarrow E \setminus U \in \mathcal{F}^*$,
 i.e., $E \setminus U$ es independiente, como U es minimal respecto a
 esta propiedad $\Rightarrow E \setminus U$ es un subconjunto maximal indepen-
 diente de M^* es decir $E \setminus U$ es cobase de M de donde U es
 base de M .

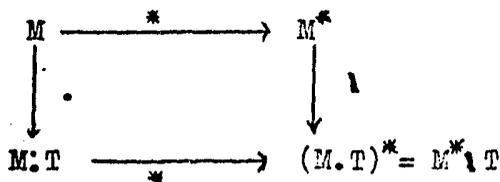
c.s.q.d.

Teorema 2.4 Si \mathcal{C} es la colección de circuitos de un matroide sobre
 $E \Rightarrow$ los miembros de \mathcal{C} son los subconjuntos minimales
 tales que $C \neq \emptyset$ $C \in \mathcal{C}$, $|C \cap C^*| \neq 1$ para todo C^* cocir-
 to de M .

Dm. Supongamos que $|C \cap C^*| = 1$ i.e. $x \in E$ tal que $C \cap C^* = \{x\} \Rightarrow$
 $C \setminus \{x\} \in \mathcal{C}$ de aquí $E \setminus (C \setminus \{x\}) \in \mathcal{F}^*$ lo cual es una contradicción
 ya que $C^* \subseteq E \setminus (C \setminus \{x\})$, por lo tanto $|C \cap C^*| \neq 1$ para todo co-
 circuito de M .

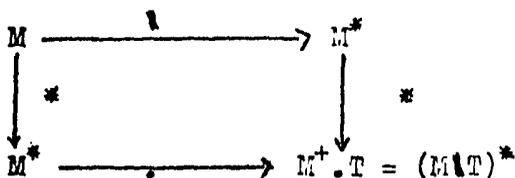
c.s.q.d.

Consideremos a continuación las operaciones vistas en la sec-
 ción anterior, en particular la contracción de E a T y la restric-
 ción las cuales cumplen el siguiente esquema, considerando a la
 dualidad como otra operación.



donde la flecha indica la operación que se realiza y el final de
 dicha operación, una demostración de este hecho puede consultarse
 en Welsh [30].

Si se hace un cambio de M por M^* y en el orden de las opera-
 ciones obtendríamos el esquema :



el cual también se demuestra en [30].

III. MATROIDES ORIENTADOS

1).- Introducción

Las primeras nociones de orientabilidad en matroides, se pueden ubicar en los artículos de Tutte [27] y Minty [22]. La idea fundamental de "orientar" un matroide proviene de tratar de generalizar ciertas propiedades de gráficas dirigidas, tales como el lema de coloración de Minty [4] lo bien como las propiedades de los vectores elementales, expuestas por Rockafellar en [25].

2).- Digrafoïdes

El estudio de estas estructuras, se inicia cuando Minty en sus trabajos sobre gráficas descubre el lema de arcos coloreados, mediante el cual fue posible definir axiomáticamente el concepto de grafoïde. Estructura que es un caso especial de Matroïde (como se mostrará a continuación) y una generalización de gráfica. Además, así como una gráfica no orientada puede orientarse (orientando cada arista) para obtener una digráfica, se pensó que la definición de grafoïde podía ser extendida para comprender el caso donde se consideran digráficas, estas estructuras recibieron el nombre de digrafoïdes.

Se empieza el análisis del trabajo de Minty con el siguiente lema:

Lema 3.1.- Sea $G = (X, U)$ una gráfica donde las aristas se colorean de rojo, blanco y azul. Suponga que la arista e_j está coloreada de rojo, entonces exactamente una de las siguientes propiedades se cumple:

- (a) existe un ciclo rojo y blanco que contiene la arista e_j
- (b) existe un cociclo rojo y azul que contiene la arista e_j

Este lema será demostrado más adelante, para una forma más general de este resultado. Basándose en las propiedades combinatorias de este lema y extendiéndolas a estructuras más generales, surge de manera natural la definición de grafoïde.

Un grafoïde es una terna (E, K, D) , donde E es un conjunto finito, cuyos elementos llamaremos aristas del grafoïde, K y D son -

familias de subconjuntos de E , cuyos elementos serán llamados los circuitos y cocircuitos del grafoide respectivamente, y los cuales satisfacen las siguientes propiedades:

(3.1.1) para $X \in K$ & $Y \in D$, $|X \cap Y| \neq 1$

(3.1.2) para cualquier partición $\{R, B, A\}$, de E con $|R| = 1$, se tiene que:

(a) $\exists X \in K \rightarrow R \subseteq X$ & $X \subseteq R \cup B$

ó bien,

(b) $\exists Y \in D \rightarrow R \subseteq Y$ & $Y \subseteq R \cup A$

pero no ambas.

(3.1.3) ningún circuito contiene otro circuito propiamente, y ningún cocircuito contiene otro cocircuito propiamente.

Lema 3.2.- Si (E, K, D) es un grafoide entonces K es la familia de circuitos de un matroide.

Dm.- Considérese la definición de matroide en términos de circuitos dada en el capítulo II.

La condición (2.1.6) se satisface automáticamente por (3.1.3).

Para demostrar la condición (2.1.7), considérese X_1 & $X_2 \in K$, tales que $x \in X_1 \cap X_2$ & $y \in X_1 \setminus X_2$. Tomándose la partición $-- R = \{y\}$, $B = (X_1 \cup X_2) \setminus \{x, y\}$ & $A = E \setminus (X_1 \cup X_2 \setminus \{x\})$ se tiene, por (3.1.2) que:

- si sucede (a), existe $X \in K$ tal que $y \in X$ & $X \subseteq B \cup R$ entonces $y \in X$ & $X \setminus y = (X_1 \cup X_2) \setminus \{x, y\}$, entonces $y \in X \subseteq (X_1 \cup X_2) \setminus x$ por lo tanto, (E, K) es un matroide.

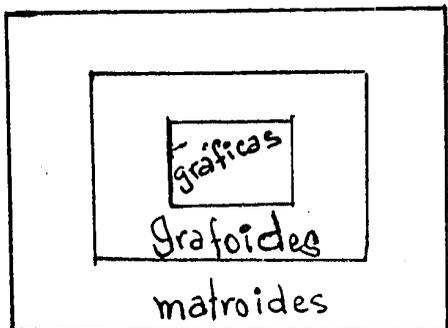
- si sucede (b), existe $Y \in D$ tal que $y \in Y$ & $Y \subseteq A \cup R$, i.e., $y \in Y$ & $y \in Y \subseteq E \setminus ((X_1 \cup X_2) \setminus \{x\})$, de donde existen dos ca-

sos: i) $x \in Y$ pero como $x \in X_1 \cap X_2 \Rightarrow Y \cap X_2 = \{x\}$, $|Y \cap X_2| = 1$, lo cual contradice a (3.1.1).

ii) $x \notin Y$ pero como $y \in Y$ se tiene $Y \cap X_1 = \{y\}$, i.e., $-- |Y \cap X_1| = 1$ lo cual contradice a (3.1.1).

Por lo tanto, la alternativa (b) no sucede y esto concluye la demostración. Para demostrar que (E, D) es un matroide se realiza el mismo desarrollo, solo que en lugar de K , se considera a D .

En base a lo anterior, es posible establecer el siguiente esquema:



con el cual se tienen las siguientes proposiciones:

- Toda gráfica, tiene estructura de grafoide pero no todo grafoide es una gráfica.
- Todo grafoide es un matroide, pero no todo matroide es un grafoide.

Para no crear confusiones al respecto, considérense los siguientes ejemplos:

1).- El grafoide (E, K, D) , donde $E = \{1, 2, \dots, n\}$ y $A = (a_{ij})$ una matriz real de $m \times n$, $W^1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$, $W = \{(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y = \lambda A, \lambda \in \mathbb{R}^m\}$; Y las familias de circuitos y cocircuitos dadas por:
 $K = \{C \mid C \subseteq E, \exists x \in W^1, x_i \neq 0 \text{ para todo } i \in C\}$, C minimal,
 $D = \{D \mid D \subseteq E, \exists y \in W, y_j \neq 0 \text{ para todo } j \in D\}$, D minimal,
 Este grafoide no es una gráfica.

2).- El matroide sobre $E = \{x_1, x_2, \dots, x_7\}$ tal que las bases de M son todos los conjuntos de cardinalidad 3, exceptuando
 $a : \{x_1, x_2, x_6\}, \{x_1, x_4, x_7\}, \{x_1, x_3, x_5\}, \{x_2, x_3, x_9\}$
 $\{x_2, x_5, x_7\}, \{x_3, x_6, x_7\}, \{x_4, x_5, x_6\}$.

Tomando la siguiente partición, $R = \{x_1\}$, $B = \{x_4, x_7\}$ y $A = \{x_5, x_6, x_2, x_3\}$, se tiene:

a) $\exists X = \{x_1, x_4, x_7\} \in K \rightarrow x_1 \in X \subseteq RUB$

b) $\exists Y \subseteq \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6\}, Y \in D \rightarrow x_1 \in Y \subseteq RUA$.

Por lo tanto las dos alternativas se satisfacen; para notar la existencia del cocircuito considérese la siguiente base del matroide $B_1 = \{x_3, x_4, x_7\}$, considerando la cobase respectiva se tiene que $E \setminus B_1 = B_1^* = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$, de aquí exis

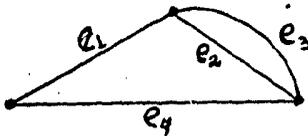
te $Y \subseteq B_1^* \cup \{x_3\}$ con $x_1 \in Y$.

Lo cual demuestra, que no todo matroide es un grafoide. Una exposición más profunda acerca de este matroide, conocido como el matroide de FANO, puede verse en Walsh [30].

Supóngase que los circuitos y cocircuitos de un grafoide (E, K, D) se numeran del 1, ..., c & 1, ..., d respectivamente.

Se define la matriz de incidencia de los circuitos de un grafoide como $c_{ij} = 1$, si la arista e_j está en el circuito i ; y $c_{ij} = 0$ en otro caso. Análogamente se define la matriz de incidencia de los cocircuitos.

Ejemplo 3. Considérese el grafoide proveniente de la gráfica:



Las familias K y D son:

$$K = \{\{e_1, e_2, e_4\}, \{e_1, e_3, e_4\}, \{e_2, e_3\}\},$$

$$D = \{\{e_1, e_4\}, \{e_1, e_2, e_3\}, \{e_2, e_3, e_4\}\}.$$

Las matrices de incidencia son:

$$C = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & , & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \end{matrix}.$$

Con estas definiciones se inició el proceso de orientar grafoides de la siguiente manera.

Un grafoide es orientable si es posible cambiar algunos de los 1's en sus matrices de incidencia C & D a (-1)'s, de tal forma que cada renglón de C sea ortogonal a cada renglón de D.

Así, para el ejemplo anterior se tiene, considerando los cambios siguientes que:

$$C = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & , & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \end{matrix}$$

Que el grafoide (E, K, D) es orientable; puede verificarse fácilmente que el cambio de signos corresponden a una orientación de la gráfica.

Ahora se dará un resultado de gráficas.

Lema 3.3.- Sea $G = (X, E)$ una gráfica, sean C & D un ciclo y un ciclo respectivamente, entonces $|C \cap D| \neq 1$

La demostración de este resultado, puede verse en Berge [1] y aquí no es analizada debido a su fácil comprensión.

Ayudados en este resultado, se prosigue a demostrar el siguiente lema que es la extensión del lema 3.1.

Lema 3.4.- Sea $G = (X, E)$ una gráfica dirigida con los arcos coloreados de rojo, blanco y azul, supóngase que e_j está coloreado de rojo, entonces exactamente una de las siguientes propiedades se cumple:

- (a) existe un ciclo rojo y blanco que contiene el arco e_j y todos los arcos rojos orientados en el mismo sentido de e_j
- (b) existe un cociclo rojo y azul que contiene el arco e_j y todos los arcos rojos orientados en el mismo sentido de e_j .

Dm.- Sea $e_j = (a, b)$, construyase recursivamente un conjunto S de la siguiente manera;

- (i) $b \in S$;
- (ii) si $(x, y) \in R$ & $x \in S \Rightarrow y \in S$;
- (iii) si $(x, y) \in B$ & $x \in S \Rightarrow y \in S$;
- (iv) si $(x, y) \in B$ & $y \in S \Rightarrow x \in S$;

aplicando las reglas recursivamente hasta no poder incrementar a S , se tienen dos casos:

- si $a \in S$ entonces, por construcción de S , existe una trayectoria T de b a a formada por arcos blancos y rojos, y tal que los arcos rojos están todos dirigidos en la dirección de b hacia a . Así, $T \cup \{e_j\}$ es el ciclo mencionado en (a).

- si $a \notin S$, considérese el cociclo (S, \bar{S}) ; por el lema 3.3,

solo una condición se cumple. De aquí, que exactamente (a) ó (b) se satisface.

c.s.q.d.

Este lema sentó las bases para dar la definición de grafoide dirigido.

Un digrafoide es una estructura que consiste de:

- (a) un grafoide (E, K, D)
- (b) una partición de cada circuito y cocircuito en dos subconjuntos que satisface el axioma siguiente;

(3.1.4) para algún circuito X & cocircuito Y , sean X^+, X^- la partición de X & Y^+, Y^- la partición de Y , entonces se cumple que --- -- ----
 $|X^+ \cap Y^+| + |X^- \cap Y^-| = |X^- \cap Y^+| + |X^+ \cap Y^-|$

donde la condición (3.1.4), se conoce como la condición de ortogonalidad.

Así, para el ejemplo (3) se tiene:

$$X_1 = \{e_1, e_2, e_4\}$$

$$Y_1 = \{e_1, e_4\}$$

$$X_2 = \{e_1, e_3, e_4\}$$

$$Y_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$X_3 = \{e_1, e_2\}$$

$$Y_3 = \{e_2, e_3, e_4\}$$

Consideremos las siguientes particiones:

$$X_1^+ = X_1$$

$$X_1^- = \emptyset$$

$$Y_1^+ = \{e_1\}$$

$$Y_1^- = \{e_4\}$$

$$X_2^+ = \{e_1, e_4\}$$

$$X_2^- = \{e_3\}$$

$$Y_2^+ = \{e_2\}$$

$$Y_2^- = \{e_1, e_3\}$$

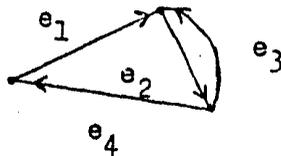
$$X_3^+ = X_3$$

$$X_3^- = \emptyset$$

$$Y_3^+ = \{e_3, e_4\}$$

$$Y_3^- = \{e_2\}$$

Puede verificarse fácilmente que las particiones anteriores satisfacen la condición (3.1.4), la cual nos conduce a la siguiente gráfica:



con lo cual debe notarse que la definición de digrafoide no se refiere a una orientación en particular, sino que a todas las posibles orientaciones de la gráfica, notando claramente que al especi

ficar la orientación a usar, se especifica completamente el digrafoide en cuestión y que dos orientaciones distintas al menos en un arco de la gráfica, pueden conducir a dos digrafoides distintos.

La primera idea de orientar grafoides en términos del cambio en algunos signos en los elementos de sus matrices de incidencia, fue uno de los principales motivos que condujeron a Rockafellar - en [25] y Fulkerson en [31] a realizar un estudio análogo, considerando cualquier matriz en lugar de matrices de incidencia (como lo hizo Minty).

3).- Vectores Elementales

Como se vió en la sección anterior, el trabajo de Minty sugería fuertemente la existencia de una estructura que generalizará - el concepto de digrafoide, en la misma forma en la que la estructura de matroide generaliza la de grafoide. Esta inquietud motivó a Fulkerson y a Rockafellar a tratar de generalizar las propiedades de los digrafoides a otras estructuras, que se llamaron antes de definirse "matroides orientados". El paso natural fue considerar los matroides generados por matrices cualesquiera, no necesariamente - por matrices de incidencia.

Cabe mencionar que en el caso de Fulkerson su enfoque fue a través de la Teoría de Redes, mientras que en el caso de Rockafellar fue a través de la estructura combinatoria de los vectores elementales de un subespacio vectorial. En esta sección se seguirá esencialmente el trabajo de Rockafellar.

Sea E un conjunto finito, i.e., $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, se denotará por \mathbb{R}^E el espacio de todas las funciones lineales $x: E \rightarrow \mathbb{R}$. Para $e_j \in E$, se denota por x_j el valor de la función lineal evaluada en e_j , x_j recibe el nombre de componente de x asociado a e_j .

Se define el soporte de x , como el conjunto $S(x) = \{e_j / x(e_j) \neq 0\}$ sea distinto de \emptyset . Sea W un subespacio vectorial de \mathbb{R}^E

y sea $x \in W$, se dice que x es un vector elemental de W , si su soporte es minimal con respecto a la inclusión, i.e., no contiene propiamente el soporte de otro vector no cero de W .

Lema 3.5.- El conjunto Λ de soportes de los vectores elementales de un subespacio W , es el conjunto de circuitos de un matroide.

Dm.- Λ satisface la condición (1.2.6) por constar de subconjuntos

minimales bajo inclusión.

Sean $S(x) \ \& \ S(y) \in \mathcal{A}$, sea $e_j \in S(x) \cap S(y) \ \& \ e_i \in S(x) \setminus S(y)$ definamos $z = y_j x - x_j y$;

de aquí, $z_j = y_j x_j - x_j y_j = 0 \ \& \ z_i = y_j x_i \neq 0 \implies e_j \notin S(z), e_i \in S(z)$.

Sea $e_k \notin S(x) \cup S(y) \setminus \{e_j\} \implies x_k = 0 \ \& \ y_k = 0 \implies z_k = 0$, i.e., $e_k \notin S(z)$, de aquí se tiene que $S(z) \subseteq S(x) \cup S(y) \setminus \{e_j\}$.

Además, $z \in W$ por ser combinación lineal de $x \ \& \ y$ que están en W . Considérese el siguiente conjunto:

$U = \{v \in W / S(v) \subseteq S(z) \ \& \ e_i \in S(v)\}$; se tiene que $U \neq \emptyset$, - porque $z \in U$, por lo tanto, existe un elemento minimal de U bajo la inclusión de soportes (i.e.; $v, w \in U, v \prec w$ si $S(v) \subseteq S(w)$)

Sea u uno de tales elementos minimales de U , u cumple con las siguientes propiedades;

- 1) $e_j \notin S(u)$ puesto que $e_j \notin S(z)$;
- 2) $e_i \in S(u)$ puesto que $u \in U$;
- 3) $u \in W$ pues $u \in U$;
- 4) $S(u) \subseteq S(z) \subseteq S(x) \cup S(y) \setminus \{e_j\}$.

Por lo tanto, $\exists u \in R, e_i \in S(u) \subseteq S(x) \cup S(y) \setminus \{e_j\}$
c.s.q.d.

Es facil verificar que dos vectores que tienen el mismo soporte, sus componentes difieren por una constante.

Un conjunto marcado S de E es un subconjunto de E particionado en dos subconjuntos $S^+ \ \& \ S^-$, i.e., $S = S^+ \cup S^-$, $S^+ \cap S^- = \emptyset$, diremos - que S contiene a e_i positiva o negativamente si $e_i \in S^+$ ó $e_i \in S^-$ - respectivamente.

A cada vector $x \in \mathbb{R}^n$ se le puede asociar un conjunto marcado - de E de la siguiente manera:

$$S^+(x) = \{e_i \in E / x_i > 0\}, \ S^-(x) = \{e_i \in E / x_i < 0\}$$

el cual se llamará el soporte marcado de x .

Un soporte marcado de un subespacio vectorial W es el soporte marcado de algún elemento de W , un soporte marcado de W es elemental si el soporte respectivo no marcado es elemental.

Se dice que $x \ \& \ x' \in \mathbb{R}^n$ son disonantes si $\exists e_i \in E$ tal que --- $x_i \cdot x'_i < 0$ y están en armonía (i.e., son no disonantes) si para -- toda $i = 1, \dots, n \ x_i \cdot x'_i \geq 0$

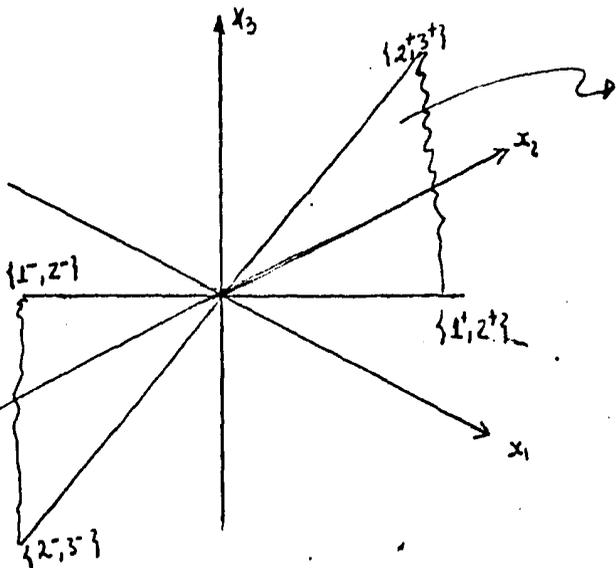
Con las definiciones anteriores es posible enunciar los principales teoremas de vectores elementales, los cuales por su cor--

plejidad no serán demostrados en esta sección.

Teorema 3.1.- Sea x distinto de cero en un subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^n \implies \exists x^1, x^2, \dots, x^r \in W$ vectores elementales tales que:

- (a) $x = x^1 + x^2 + \dots + x^r$;
- (b) para toda $e_j \in E$, $x_j^i - x_j^j \geq 0$;
- (c) $S(x^i) \subseteq S(x) \quad \forall i=1, \dots, r$;
- (d) $S(x^j) \not\subseteq \bigcup_{i \neq j} S(x^i) \quad \forall j=1, \dots, r$;
- (e) $r \leq \dim W$.

Este teorema puede verse como una extensión del resultado de gráficas respecto a circulaciones en circuitos elementales, pero - también puede verse como un resultado de análisis convexo; para lo cual considérese el siguiente ejemplo:



$$W : (x_1, x_1 + x_2, x_2)$$

Así el punto $x_0 = (8, 4, -4)$ se

Puede expresar como:

$$x_0 = (8, 8, 0) + (0, -4, -4)$$

(Cumpléndose

$$\{1, 2, 3\} = S(x_0) \supseteq \{2^+, 1^+\}$$

$$\{1, 2, 3\} \supseteq \{2^-, 3^+\}$$

$$\{1, 2\} \not\subseteq \{2, 3\}$$

$$\{2, 3\} \not\subseteq \{1, 2\}$$

Considerando conjuntos marcados, es posible definir armonía y disonancia en términos de conjuntos marcados. Sean S_1, \dots, S_r conjuntos en armonía dos a dos, la unión armónica de S_1, \dots, S_r está dada por el conjunto:

$$S^+ = S_1^+ \cup S_2^+ \cup \dots \cup S_r^+ ; \quad S^- = S_1^- \cup S_2^- \cup \dots \cup S_r^-$$

En términos de vectores elementales, lo que se considera es, el soporte marcado del vector $x = x_1 + x_2 + \dots + x_r$, lo cual conduce al siguiente resultado.

Teorema 3.2.- Todo $S \subseteq E$ es un soporte marcado \iff es la unión armónica de soportes elementales marcados.

En relación con el teorema de flujo máximo-cortadura mínima, Hoffman en [15] estableció el teorema de factibilidad para redes en términos de circulaciones, donde cada componente de la circulación estaba restringida a estar en cierto intervalo I_i , que era tomado como $[0, K_i]$, donde K_i es la capacidad del arco e_i . A continuación se formula dicho teorema en el contexto de los vectores elementales de un subespacio W de \mathbb{R}^n .

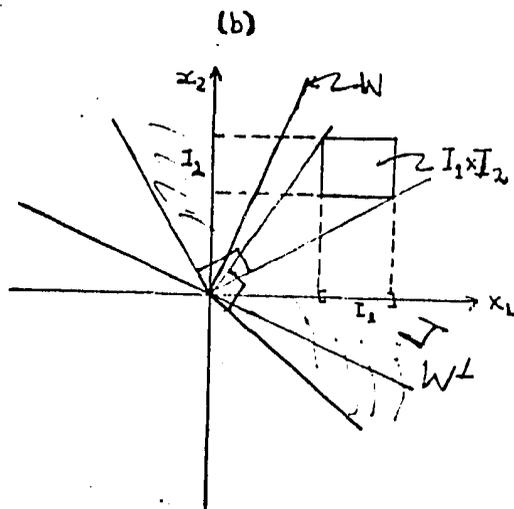
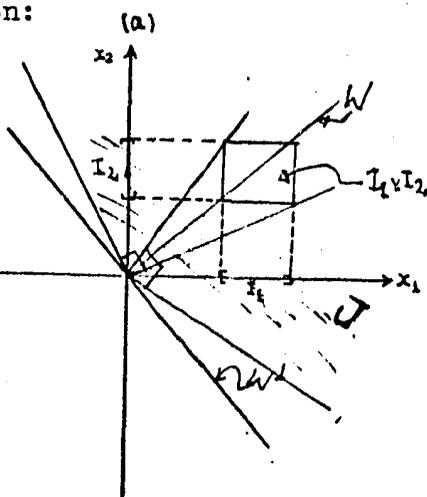
Teorema 3.3.- Sean I_1, \dots, I_n intervalos reales arbitrarios, considerese $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ & $J = \{y / y \cdot x > 0, x \in I\}$ entonces,

(a) $\exists x \in W \cap I$

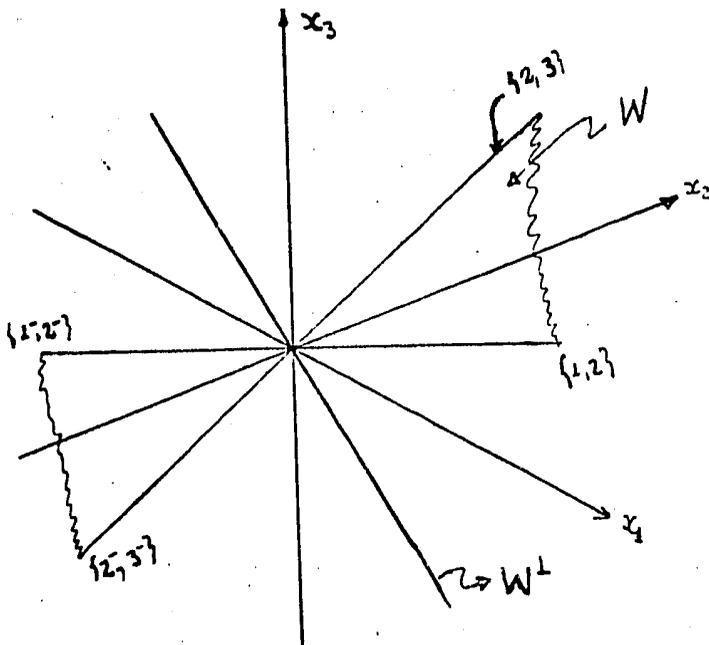
ó bien

(b) $\exists y \in W^\perp \cap J$

Para clarificar este teorema considérese la siguiente ilustración:



Teorema 3.4.- Considérese un coloreo de E en rojo, blanco y azul, entonces existe un soporte marcado S de W , pintado de rojo y azul, y un soporte S' de W^\perp pintado de rojo y blanco tal que $S \cap S' = \emptyset$, pero todo elemento rojo está contenido positivamente en S ó S' .



Corolario 3.1.- Existen vectores no negativos $x \in W$ & $y \in W^\perp$ los cuales son complementarios, i.e., $x_i y_i = 0$ & $x_i + y_i > 0$, para toda $i = 1, \dots, n$

Despues de los resultados anteriores, enunciaremos el Lema de los arcos coloreados de Minty en una forma general, en el contexto de soporte de vectores elementales.

Teorema 3.5.- Considérese un coloreo de los elementos de E de rojo, blanco y azul (R, B & A respectivamente. Sea $e_0 \in R$, entonces;

(a) $\exists S$ soporte elemental marcado de $W \rightarrow e_0 \in S$, $S \subseteq R \cup B$ & $S \cap R \subseteq S^+$.

ó bien,

(b) $\exists S_0$ soporte elemental marcado de $W^\perp \rightarrow e_0 \in S_0$ tal que $S_0 \subseteq R \cup A$ & $S_0 \cap R \subseteq S_0^+$.

Corolario 3.3.- Cada elemento de E puede estar en algún soporte elemental de W ó de W^\perp pero no en ambos.

4).- Teoría de Matroides Orientados

La teoría de matroides orientados fue iniciada formalmente por Bland y las Vergnas en [4] y Folkman y Lawrence en [12]; basados fundamentalmente en los trabajos realizados por Minty en [22], Fulkerson en [13], Rockafellar en [25]. Existen varias definiciones de matroide orientado, si se desea consultar alguna de ellas puede verse Bland y las Vergnas en [4].

En el presente trabajo solo se usará una definición de matroide orientado para lo cual considérese un conjunto finito E , donde $E = \{e_1, \dots, e_n\}$. Un conjunto marcado X de E , es una pareja (X^+, X^-) , donde $X^+, X^- \subset E$ & $X^+ \cap X^- = \emptyset$; el conjunto subyacente de X , es definido como el conjunto $\underline{X} = X^+ \cup X^-$. El opuesto del conjunto X es el conjunto marcado $(-X)$, cuyos componentes son $(-X)^+ = X^-$ y $(-X)^- = X^+$, diremos que $X = \pm X_1$ si $X = X_1$ ó $X = -X_1$. Denotaremos por \mathcal{C} a la colección de conjuntos marcados de E y por $\underline{\mathcal{C}}$ a la colección de conjuntos subyacentes de los elementos de \mathcal{C} i.e.

$$\mathcal{C} = \{X_1, X_2, \dots, X_p\} \quad \& \quad \underline{\mathcal{C}} = \{\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_p\}.$$

Sean \mathcal{C} & \mathcal{C}^* colecciones de conjuntos marcados en E , $M = (E, \mathcal{C})$ & $M^* = (E, \mathcal{C}^*)$ es un par dual de matroides orientados, si se cumplen las siguientes condiciones:

(3.4.1) \mathcal{C} y \mathcal{C}^* son los circuitos y cocircuitos de un par dual de matroides $\underline{M} = (E, \underline{\mathcal{C}})$ y $\underline{M}^* = (E, \underline{\mathcal{C}}^*)$

(3.4.2) si $X \in \mathcal{C} \Rightarrow -X \in \mathcal{C}$,
si $Y \in \mathcal{C}^* \Rightarrow -Y \in \mathcal{C}^*$;

(3.4.3) si X_1 & $X_2 \in \mathcal{C}$ & $\underline{X}_1 = \underline{X}_2 \Rightarrow X_1 = \pm X_2$,
si Y_1 & $Y_2 \in \mathcal{C}^*$ & $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 \Rightarrow Y_1 = \pm Y_2$;

(3.4.4) si $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{C}^*$ & $\underline{X} \cap \underline{Y} \neq \emptyset \Rightarrow$
 $(X^+ \cap Y^+) \cup (X^- \cap Y^-) \neq \emptyset$ & $(X^+ \cap Y^-) \cup (X^- \cap Y^+) \neq \emptyset$.

Según la definición se dirá que $M = (E, \mathcal{C})$ & $M^* = (E, \mathcal{C}^*)$ són un par dual de matroides orientados, M & M^* son matroides orientados, \mathcal{C} & \mathcal{C}^* son orientaciones respectivas de los matroides \underline{M} & \underline{M}^* subyacentes a M & M^* y los conjuntos marcados $X \in \mathcal{C}$ & $Y \in \mathcal{C}^*$ son llamados los circuitos y cocircuitos orientados de \underline{M} .

X & $Y \in E$ son ortogonales sí:

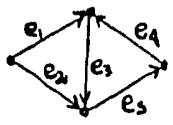
(3.4.5) $\underline{X} \cap \underline{Y} = \emptyset$

ó bien, sí

$$(3.4.6) \quad (X^+ \cap Y^+) \cup (X^- \cap Y^-) \neq \emptyset \quad \& \quad (X^- \cap Y^+) \cup (X^+ \cap Y^-) \neq \emptyset$$

Si X & Y satisfacen (3.4.6) diremos que X & Y son disonantes, lo cual generaliza la disonancia en el contexto de vectores elementales.

Ejemplo 4. Considérese la digráfica siguiente:



Las colecciones de conjuntos subyacentes están dadas por:

$$\underline{Q} = \{ \underline{X}_1, \underline{X}_2, \underline{X}_3 \} \quad \& \quad \underline{Q}^* = \{ \underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \underline{Y}_3, \underline{Y}_4 \}$$

donde,

$\underline{X}_1 = \{ e_1, e_2, e_3 \}$	$\underline{Y}_1 = \{ e_1, e_2 \}$
$\underline{X}_2 = \{ e_3, e_4, e_5 \}$	$\underline{Y}_2 = \{ e_4, e_5 \}$
$\underline{X}_3 = \{ e_1, e_2, e_4, e_5 \}$	$\underline{Y}_3 = \{ e_1, e_3, e_4 \}$
	$\underline{Y}_4 = \{ e_2, e_3, e_5 \}$

es claro que $\underline{M} = (E, \underline{Q})$ y $\underline{M}^* = (E, \underline{Q}^*)$ son un par dual de matroides duales, los cuales son precisamente los generados por la gráfica subyacente (sin orientación) de la gráfica considerada.

Para encontrar las orientaciones de los matroides anteriores, nos basaremos en la orientación de la gráfica considerada, recordando:

$$\underline{Q} = \{ \underline{X}_1, -\underline{X}_1, \underline{X}_2, -\underline{X}_2, \underline{X}_3, -\underline{X}_3 \}$$

$$\underline{Q}^* = \{ \underline{Y}_1, -\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, -\underline{Y}_2, \underline{Y}_3, -\underline{Y}_3, \underline{Y}_4, -\underline{Y}_4 \}$$

donde:

$\underline{X}_1 = (\underline{X}_1^+, \underline{X}_1^-)$	con:	$\underline{X}_1^+ = \{ e_1, e_3 \}$	$\&$	$\underline{X}_1^- = \{ e_2 \}$
$\underline{X}_2 = (\underline{X}_2^+, \underline{X}_2^-)$		$\underline{X}_2^+ = \{ e_3, e_4, e_5 \}$	$\&$	$\underline{X}_2^- = \emptyset$
$\underline{X}_3 = (\underline{X}_3^+, \underline{X}_3^-)$		$\underline{X}_3^+ = \{ e_1, e_5 \}$	$\&$	$\underline{X}_3^- = \{ e_2, e_4 \}$
$\underline{Y}_1 = (\underline{Y}_1^+, \underline{Y}_1^-)$		$\underline{Y}_1^+ = \{ e_1, e_2 \}$	$\&$	$\underline{Y}_1^- = \emptyset$
$\underline{Y}_2 = (\underline{Y}_2^+, \underline{Y}_2^-)$		$\underline{Y}_2^+ = \{ e_4 \}$	$\&$	$\underline{Y}_2^- = \{ e_5 \}$
$\underline{Y}_3 = (\underline{Y}_3^+, \underline{Y}_3^-)$		$\underline{Y}_3^+ = \{ e_3 \}$	$\&$	$\underline{Y}_3^- = \{ e_1, e_4 \}$
$\underline{Y}_4 = (\underline{Y}_4^+, \underline{Y}_4^-)$		$\underline{Y}_4^+ = \{ e_5 \}$	$\&$	$\underline{Y}_4^- = \{ e_2, e_3 \}$

Y considerando los inversos de estos conjuntos quedan conformados los matroides orientados en cuestión.

Sea $S \subset E$ y sea $\hat{\underline{Q}}$ obtenido de \underline{Q} , reemplazando cada $\underline{X} \in \underline{Q}$ por el conjunto marcado $\hat{\underline{X}}$ cuyas componentes son:

$$\hat{\underline{X}}^+ = (\underline{X}^+ \setminus S) \cup (\underline{X}^- \cap S) \quad \& \quad \hat{\underline{X}}^- = (\underline{X}^- \setminus S) \cup (\underline{X}^+ \cap S)$$

Obteniendo \hat{Q}^* de \hat{Q} similarmente, se dice que $\hat{Q}(\hat{Q}^*)$ se obtiene de $\hat{C}(\hat{C}^*)$ por la reorientación de \hat{E} . En el caso de matroides representables por una matriz, la operación consiste en multiplicar por (-1) determinadas columnas de la matriz.

En seguida se demostrará un teorema que generaliza el lema de los arcos coloreados de Minty para matroides orientados. Este teorema especializado al caso en que \hat{O} y \hat{O}^* son colecciones de cortes elementales marcados de subespacios K y K^+ se reduce al teorema 3.5 de la sección anterior.

Teorema 3.6.- Si $M = (E, \hat{O})$ y $M^* = (E, \hat{O}^*)$ es un par dual de matroides Orientados y para algún $e \in E$ y una partición de E en subconjuntos R, A, B y $e \in R$ solo una de las siguientes alternativas se cumple:

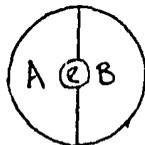
(a) existe $X \in \hat{O}$ tal que $e \in X \subseteq R \cup B$ y $X^- \cap R = \emptyset$

ó

(b) existe $Y \in \hat{O}^*$ tal que $e \in Y \subseteq R \cup A$ y $Y^- \cap R = \emptyset$

Dm.- (a) y (b) no pueden cumplirse simultáneamente ya que se tendría que: $e \in X^+ \text{ y } e \in Y^+ \Rightarrow e \in X^+ \cap Y^+ \Rightarrow (X^+ \cap Y^+) \cup (X^- \cap Y^-) \neq \emptyset$, pero $Y^- \cap R = \emptyset \Rightarrow X^+ \cap Y^- = \emptyset$. Como $X^- \cap R = \emptyset \Rightarrow Y^+ \cap X^- = \emptyset \Rightarrow (X^+ \cap Y^-) \cup (X^- \cap Y^+) = \emptyset$, lo que contradice al axioma (3.3.4).

La demostración se realizará por inducción sobre $p = |R|$. Si $p = 1$, la partición tiene la siguiente forma:



Sea B_B una base de B , entonces existen dos casos excluyentes:
 caso 1) $B_B \cup \{e\} \in \hat{E} \Rightarrow$ por el teorema 2.1, $\exists B_M \in \hat{C}$ tal que $e \in B_M$. Sea $B_M^* = E \setminus B_M$ una cobase de $M \Rightarrow \exists Y \in B_M^* \cup \{e\}$ tal que $e \in Y \in \hat{O}^*$, con lo cual solo faltaría mostrar que $Y \subseteq R \cup A$; supongamos lo contrario i.e., $\exists e_i \in B$ tal que $e_i \in Y$, por construcción de B_M^* se tiene que $e_i \notin B_B \Rightarrow \exists X \in B_B \cup \{e_i\}$ tal que $e_i \in X \subseteq B_B \cup \{e_i\} \Rightarrow X \cap Y = \{e_i\}$, lo que contradice al teorema 2.4. Por lo tanto $\nexists e_i \in B$ tal que, $e_i \in Y$, de aquí que $Y \subseteq R \cup A$.

caso 2) $B_B \cup \{e\} \notin F \Rightarrow \exists X \in \mathcal{C}$ tal que $X \subseteq B_B \cup \{e\} \subseteq R \cup B$
 Si el circuito ó cocircuito orientado tiene a e orientado negativamente entonces solo se reorienta a e en el circuito o cocircuito en cuestión.

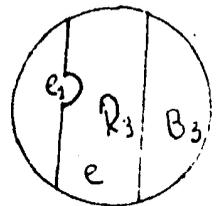
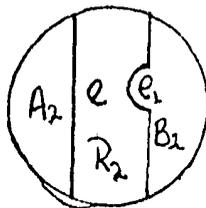
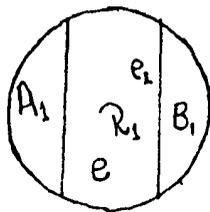
Por lo tanto, para $|p| = 1$ el teorema se cumple.

Supongamos válido el resultado para toda partición R, B, A de E, con $|R| = p$, para $p \geq 1$.

P. D. que vale para $|R| = p+1$

Sea R_1, A_1, B_1 una partición de E con $e \in R_1$ y $|R_1| = p+1$, para la cual el resultado no se cumple.

Sea $e_1 \in R_1$ con $e_1 \neq e$ y sean $R_2 = R_1 \setminus e_1, R_3 = R_1 \setminus e_1, \dots$
 $B_2 = B_1 + e_1, B_3 = B_1, A_2 = A_1, A_3 = A_1 + e_1$



de donde, por ser $|R_2| = p$, (a) ó (b) se satisface respecto a R_2, W_2, B_2 por hipótesis de inducción.

Si se cumple (b) para R_2, W_2 y B_2 implica que existe $Y \in \mathcal{C}^*$ tal que $e \in Y \subseteq R_2 \cup A_2$ y $Y^- \cap R_2 = \emptyset$; como $R_1 = R_2 \cup \{e_1\} \Rightarrow R_2 \cup A_2 \subseteq R_1 \cup A_2$; y como $e \in Y \subseteq R_2 \cup A_2 \subseteq R_1 \cup A_2 = R_1 \cup A_1$, i.e..

$e \in Y \subseteq R_1 \cup A_1$; ahora se tiene que $Y^- \cap R_2 = \emptyset$ esto es; $Y^- \cap R_1 \setminus e_1 = \emptyset$, con lo cual existen dos casos:

caso 1) si $e_1 \notin Y^- \Rightarrow Y^- \cap R_1 = \emptyset$ de aquí la condición (b) se satisface para la partición R_1, A_1, B_1

caso 2) si $e_1 \in Y^- \Rightarrow Y^- \cap R_1 = \{e_1\}$ considerando al conjunto: $\hat{Y}^+ = Y^+ \cup \{e_1\}, \hat{Y}^- = Y^- \setminus e_1$

es decir, reorientamos e_1 y se muestra la existencia de este circuito de \mathcal{C}^* , el cual hace que se satisfaga el resultado (b) para la partición R_1, A_1, B_1 .

Se puede observar que se tiene una contradicción ya que para

R_1, A_1, B_1 se había supuesto que el teorema no era válido. Por lo tanto para R_2, A_2, B_2 se debe satisfacer la condición (a) i.e. $\exists X \in \mathcal{Q}$ tal que $e \in X \subset R_2 \cup B_2$ & $X^- \cap R_2 = \emptyset$, y como - (a) no se cumple para R_1, A_1, B_1 , se tiene que $X^- \cap R_1 \neq \emptyset$ -

$$\text{pero } X^- \cap R_1 = X^- \cap (R_2 \cup \{e_1\}) = (X^- \cap R_2) \cup (X^- \cap \{e_1\}) = \text{----} \\ \emptyset \cup (X^- \cap e_1) \neq \emptyset \implies e_1 \in X^- \quad \& \quad e \in X^+ \quad \dots (i)$$

Similarmente ahora, como $|R_3| = p$, entonces el teorema se satisface para esta partición.

Pero, si (a) se satisface para R_3, A_3, B_3 , haciendo un tratamiento homólogo puede demostrarse que se cumple para R_1, A_1, B_1 lo cual contradice la suposición.

De aquí debe cumplirse (b) para R_3, A_3, B_3 , i.e., $\exists Y \in \mathcal{Q}^*$ tal que $e \in Y \subset R_3 \cup A_3$ & $Y^- \cap R_3 = \emptyset$, pero como (b) no se cumple para R_1, A_1, B_1 se tiene que $Y^- \cap R_1 \neq \emptyset$ ya que $R_3 \cup A_3 = A_1 \cup R_1$, pero $Y^- \cap R_1 = Y^- \cap (R_3 \cup e_1) = (Y^- \cap R_3) \cup (Y^- \cap \{e_1\}) \neq \emptyset$

$$\text{pero } Y^- \cap R_3 = \emptyset \implies Y^- \cap \{e_1\} \neq \emptyset$$

de aquí, $e_1 \in Y^-$ & $e \in Y^+$ (ii).

De (i) y (ii) se tiene que $e \in Y^+$ & $e \in X^+ \implies X \cap Y \neq \emptyset$

$$\left. \begin{array}{l} \text{pero } X^+ \cap Y^- = \emptyset \\ X^- \cap Y^+ = \emptyset \end{array} \right\} \implies (X^+ \cap Y^-) \cup (X^- \cap Y^+) = \emptyset, \text{ lo cual con} \\ \text{tradice la condición (3.3.4). Con -}$$

la cual concluimos el teorema, i.e., el teorema es válido para R_1, W_1, B_1 .

c.s.q.d.

Para la partición $R = E$, $W = \emptyset$ el teorema 3.6 se convierte en el siguiente corolario:

Corolario 3.- $\forall e \in E$ sólo una de las siguientes alternativas se satisface:

(a) $\exists X \in \mathcal{Q}$ tal que $e \in X^+$ & $X^- = \emptyset$

ó

(b) $\exists Y \in \mathcal{Q}^*$ tal que $e \in Y^+$ & $Y^- = \emptyset$

Este corolario contiene el lema de Farkas. Para verificar ésto, es suficiente con tomar el matroide orientado cuyos circuitos son los soportes de los vectores elementales de un subespacio vectorial de la forma $W = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = 0\}$.

Debido a la dificultad de establecer los resultados acerca de los vectores elementales de la sección anterior en términos de circuitos de un matroide orientado, será necesario definir estructu-

ras generadas por circuitos y cocircuitos elementales.

La cerradura marcada de \mathcal{C} se define como sigue:

$$K(\mathcal{O}) = \{ Z \in \mathcal{C} / Z \text{ y } Y \text{ son ortogonales } \forall Y \in \mathcal{O}^+ \}$$

Por la definición de matroide orientado es claro que $\mathcal{O} \in K(\mathcal{O})$ y que $K(\mathcal{O}) = -K(\mathcal{O})$ y además $\phi = (\phi, \bar{\phi}) \in K(\mathcal{O})$. De una manera análoga se define la cerradura marcada de \mathcal{C}^* .

Se dirá que Z_1 conforma a Z_2 si $Z_1^+ \subseteq Z_2^+$ y $Z_1^- \subseteq Z_2^-$. Un conjunto marcado Z tiene una descomposición conformal en circuitos de \mathcal{M} si existen $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{O}$, tal que $Z = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ y cada X_i conforma a Z .

Sean X_1, X_2 y X_3 conjuntos marcados, X_3 conforma a (X_1, X_2) si $X_3^+ \subseteq X_1^+ \cup X_2^+$ y $X_3^- \subseteq X_1^- \cup X_2^-$.

Sean Z_1 y $Z_2 \in \mathcal{O}$ la composición de Z_1 y Z_2 es el conjunto $Z = Z_1 \circ Z_2$, cuyas componentes són $Z^+ = Z_1^+ \cup (Z_2^+ \setminus Z_1^+)$ y $Z^- = Z_1^- \cup (Z_2^- \setminus Z_1^-)$, es claro que esta operación es asociativa pero no conmutativa, además $Z = Z_1 \cup Z_2$.

Teorema 3.7.- La cerradura marcada de \mathcal{M} está formada por los conjuntos marcados que tienen una descomposición conformal en circuitos de \mathcal{M} .

Dm.- Sea $\mathcal{L}(\mathcal{O}) = \{ X / X \text{ tiene una descomposición conformal} \}$, sea $Z \in \mathcal{O}$ tal que $Z^- \neq \emptyset$, sea \hat{Z} el conjunto marcado cuyas componentes son $\hat{Z}^+ = Z$ y $\hat{Z}^- = \emptyset$ y sean $\hat{\mathcal{O}}$ y $\hat{\mathcal{O}}^*$ el par dual de orientaciones obtenidas bajo la reorientación de Z^- , es decir, si $X \in \mathcal{O}$, $Z^- \cap X \neq \emptyset \implies \hat{X}^+ = (X^+ \setminus Z^-) \cup (X^- \cap Z^-)$ y $\hat{X}^- = (X^- \setminus Z^-) \cup (X^+ \cap Z^-)$, de aquí se tiene que:

$$Z \in K(\mathcal{O}) \iff \hat{Z} \in K(\hat{\mathcal{O}}) \quad \text{y}$$

$$Z \in \mathcal{L}(\mathcal{O}) \iff \hat{Z} \in \mathcal{L}(\hat{\mathcal{O}})$$

con lo cual, es suficiente probar el teorema cuando Z es no negativo i.e. $Z^- = \emptyset$.

Si $Z^+ = Z = \emptyset \implies$ el teorema se satisface.

Supóngase que $Z^+ = Z \neq \emptyset$, sea $R = Z$, $B = \emptyset$ y $A = E \setminus Z$; si satisface la alternativa (b) del teorema 3.6 se tiene para algún $e \in Z$ que, $\exists Y \in \mathcal{C}^*$ tal que $e \in Y \subseteq R \cup A = Z \cup (E \setminus Z)$ y $Y^- \cap Z^+ = \emptyset$; y como $Z^- = \emptyset \implies (Y^- \cap Z^+) \cup (Z^- \cap Y^+) = \emptyset$ y $Y \cap Z \neq \emptyset \implies Z$ y Y son no ortogonales, i.e., $Z \notin K(\mathcal{O})$, lo que es una contradicción ya que $Z \in \mathcal{O}$, por lo tanto la alternativa (b) no la satisface, de donde se debe satisfacer la alternati-

va (a). Sin pérdida de generalidad supongamos que:

$Z = Z^+ = \{e_1, \dots, e_k\} = R$ entonces, para todo $e_i \in Z$ existe $X_i \in \mathcal{C}$ tal que $e_i \in X_i \subseteq R \cup B = Z^+ & X_i \cap Z^+ = \emptyset$, entonces tenemos, $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k \subseteq Z^+ & Z^+ \subseteq X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$, por lo tanto tenemos que $Z = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$; por lo tanto tenemos que $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$.

c.s.q.d.

Un corolario del teorema anterior estaría establecido así:

Corolario 3.7.1.- Sean $L = (E, \mathcal{C})$ & $M = (E, \mathcal{C}^*)$ matroides duales orientados $\Rightarrow \exists X \in K(\mathcal{C})$ & $Y \in K(\mathcal{C}^*)$ tal -- que $\underline{X} \cup \underline{Y} = E$ & $\underline{X} \cap \underline{Y} = \emptyset$

Lema 3.7.- $K(\mathcal{C})$ es cerrada bajo la composición de conjuntos marcados.

Dm.- Sean X_1 & $X_2 \in K(\mathcal{C})$ y considérese $X = X_1 \circ X_2$

P. D. $X \in K(\mathcal{C})$

Supongamos $X \notin K(\mathcal{C}) \Rightarrow \exists Y \in \mathcal{C}^*$ tal que:

$$(1) (X^+ \cap Y^+) \cup (X^- \cap Y^-) = \emptyset \quad \&$$

$$(2) (X^- \cap Y^+) \cup (X^+ \cap Y^-) = \emptyset$$

$$\begin{aligned} \text{De (1) tenemos, } (X^+ \cap Y^+) &= (X_1^+ \cup (X_2^+ \setminus X_1^+)) \cap Y^+ = \\ &= (X_1^+ \cap Y^+) \cup ((X_2^+ \setminus X_1^+) \cap Y^+) = \emptyset \\ &\Rightarrow X_1^+ \cap Y^+ = \emptyset \end{aligned}$$

$$\text{Por el mismo razonamiento } X^- \cap Y^- = \emptyset \Rightarrow X_1^- \cap Y^- = \emptyset$$

$\Rightarrow \underline{X}_1 \cap \underline{Y} = \emptyset \Rightarrow X_1$ & Y son no disonantes, de la misma manera X_2 & Y son no disonantes y $\underline{X}_2 \cap \underline{Y} = \emptyset$, lo que es una contradicción ya que $X_1 \in K(\mathcal{C})$.

ahora, $(\underline{X}_1 \cap \underline{Y}) \cup (\underline{X}_2 \cap \underline{Y}) = \emptyset = (\underline{X}_1 \cup \underline{X}_2) \cap \underline{Y} = \underline{X} \cap \underline{Y}$, por lo tanto, $X \in K(\mathcal{C})$.

c.s.q.d.

En la sección anterior se analiza en el teorema la existencia de un vector elemental en el subespacio W ó W^+ restringido a que, cada componente del vector se encuentre en un cierto intervalo I_j , $I_j = [a_j, b_j]$, en el contexto de matroides orientados $L = (E, \mathcal{C})$ & $L^* = (E, \mathcal{C}^*)$ se encontraran condiciones suficientes y necesarias para exhibir la existencia de un conjunto marcado $X \in K(\mathcal{C})$, sujeto a las restricciones del signo de cada elemento, para lo cual considérese una partición I de E en subconjuntos: $I(0)$, $I(+)$, $I(-)$, -- $I(-,0)$, $I(0,+)$ y $I(-,0,+)$; diremos que I es una restricción de E .

y para un conjunto marcado Z se tiene que $Z \in I$ si:

$$Z^+ \in I(+) \cup I(0,+) \cup I(-,0,+) \quad \& \quad Z^- \in I(-) \cup I(-,0) \cup I(-,0,+) \quad \&$$

$$\underline{Z \cdot I > 0} \text{ si } Z^+ \in I(0) \cup I(+) \cup I(0,+), \quad Z^- \in I(0) \cup I(-) \cup I(-,0) \quad \&$$

$$(Z^+ \cap I(+)) \cup (Z^- \cap I(-)) \neq \emptyset.$$

Teorema 3.8.- Sean $M = (E, \mathcal{Q})$ & $M^* = (E, \mathcal{Q}^*)$ matroides duales orientados y sea I una restricci3n de E entonces exactamente una de las siguientes condiciones se satisfacen:

(a) $\exists X \in K(\mathcal{Q})$ tal que $X \in I$

3 b i 3 n

(b) $\exists Y \in \mathcal{Q}^*$ tal que $Y \cdot I > 0$

Dm.- Supongamos que $e \in I(-) \cup I(-,0)$, sean $\hat{\mathcal{Q}}$ & $\hat{\mathcal{Q}}^*$ orientaciones obtenidas de \mathcal{Q} & \mathcal{Q}^* , reorientando e , y sea \hat{I} obtenida de I al remover e de $I(-)$ 3 $I(-,0)$ a $I(+)$ 3 $I(+,0)$ respectivamente, se sigue que la alternativa (a) 3 la (b) se satisface para $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^*$ e I si y solo si se satisface para $\hat{\mathcal{Q}}, \hat{\mathcal{Q}}^*$ e \hat{I} , donde podemos sup3ner sin perdida de generalidad que $I(-) = I(-,0) = \emptyset$. Si $I(+)=\emptyset \Rightarrow \emptyset \in K(\mathcal{Q})$ y satisface (a) y (b), por lo tanto, supongamos que $I(+)\neq\emptyset$ y S.P.G. que:

$I(+)=\{e_1, \dots, e_k\}$. Ahora, aplicando el teorema 3.6 con la partici3n $R = I(+) \cup I(0,+)$, $B = I(-,0,+)$ & $A = I(0)$; si la alternativa (b) es la que se cumple para $e \in I(+)$ se tendr3a que $\exists Y \in \mathcal{Q}^*$ tal que $e \in Y \subset R \cup A$ & $Y^- \cap R = \emptyset$, i.e.,

$$e \in Y \subset I(+) \cup I(0,+) \cup I(0) \quad \& \quad Y^- \cap (I(+) \cup I(0,+)) = \emptyset$$

$\Rightarrow Y^- = \emptyset \subset I(0) \cup I(-) \cup I(0,-)$ & $Y^+ \in I(+) \cup I(0,+) \cup I(0)$ como $Y^+ \cap I(+)\neq\emptyset$, se tiene que $Y \cdot I > 0$, i.e., se satisface (b) de 3ste teorema.

Ahora, si la que se cumple en el teorema 3.6 es (a) tendr3amos para todo $e_j \in I(+)$ que, $\exists X_j \in K(\mathcal{Q})$ tal que $e_j \in X_j \subset R \cup W$ y $X_j^- \cap R = \emptyset$, para $j = 1, 2, \dots, k$,

i.e., $e_j \in X_j \subset I(+) \cup I(0,+) \cup I(-,0,+)$

$$(I(+) \cup I(0,+)) \cap X_j^- = \emptyset ; \quad e_j \in X_j^+$$

y se tiene que $X = X_1 \circ X_2 \dots \circ X_k$ satisface la alternativa (a) del teorema.

c.s.q.d.

Corolario 3.8.1.- Si $X_1, X_2 \in K(\mathcal{Q})$ & $e \in (X_1^+ \cap X_2^-) \cup (X_1^- \cap X_2^+)$

$\Rightarrow \exists X_3 \in K(\mathcal{Q})$ tal que $e \notin X_3$ &
 $(X_1 \cup X_2) \setminus ((X_1^+ \cap X_2^-) \cup (X_1^- \cap X_2^+)) \subseteq X_3$ & X_3 con-
 forma a (X_1, X_2) .

Aplicando el teorema 3.8 al Corolario 3.8.1 tenemos el sigui-
 ente:

Corolario 3.8.2.- Si $X_1, X_2 \in K(\mathcal{Q})$, $e_k \in (X_1^+ \cap X_2^-) \cup (X_1^- \cap X_2^+)$ &
 $e_l \in (X_1^+ \setminus X_2^-) \cup (X_1^- \setminus X_2^+)$ \Rightarrow existe un circuito
 orientado $X_3 \in \mathcal{Q}$ tal que $e_k \notin X_3$, $e_l \in X_3$ & X_3 --
 conforma a (X_1, X_2) .

En caso de que X_1 & X_2 sean circuitos orientados, el corola-
 rio 3.8.2 resulta ser una propiedad para circuitos orientados, la
 cual implica la definición de Matroide definida para circuitos --
 (2.1.6) para los circuitos del Matroide subyacente \underline{M} , lo cual per-
 mite dar una axiomatización más elegante de Matroide Orientado, --
 ver Bland [4].

Los siguientes corolarios del teorema 3.8 fueron presentados
 en la sección 2 de este capítulo para vectores elementales. Son una
 extensión a los teoremas de complementariedad ortogonal de sub-
 espacios de \mathbb{R}^n .

Corolario 3.8.3.- Sean $M = (E, \mathcal{Q})$ & $M^* = (E, \mathcal{Q}^*)$ un par dual de
 Matroides Orientados y sea R, B, A una partición
 de $E \Rightarrow$ existen $X \in K(\mathcal{Q})$, $Y \in K(\mathcal{Q}^*)$ tales que
 $X \subseteq R \cup B$, $Y \subseteq R \cup A$, $X \cap Y = \emptyset$ & $R \subseteq X^+ \cup Y^+$

Dm.- Dada la partición para algún $e \in R$, seleccionamos $X_1 \in K(\mathcal{Q})$
 tal que $X_1 \subseteq R \cup B$, $X_1^- \cap R = \emptyset$ & $|X_1^- \cap R|$ es maximal.

Sea $I(+) = R \setminus X_1^-$, $I(-, 0, +) = A$, $I(0) = X_1^- \cup B$, tomando en el -
 teorema 3.8 \mathcal{Q}^* en lugar de \mathcal{Q} & \mathcal{Q} en lugar de \mathcal{Q}^* se tiene:
 si se satisface (a) entonces, $\exists Y \in K(\mathcal{Q}^*)$ tal que $Y \subseteq I$, i.e.,
 $Y^+ \subseteq I(+) \cup I(0, +) \cup I(-, 0, +)$ & $Y^- \subseteq I(-) \cup I(-, 0) \cup I(-, 0, +)$
 $\Rightarrow Y^+ \subseteq (R \setminus X_1^-) \cup A$; $Y^- \subseteq A$

de aquí se tiene que $Y \subseteq R \cup A$, por definición de la partición,
 $\nexists e_j \in X_1^-$ tal que $e_j \in Y^+$, y como $Y^- \subseteq A \Rightarrow X_1^- \cap Y = \emptyset$,
 $R \subseteq X^+ \cup Y^+$, i.e., se demuestra el corolario.

Si tal Y no existe, i.e., se cumple la condición (b) en el teo-
 rema 3.8 tenemos que existe $X_2 \in \mathcal{Q}$ tal que $X_2 \cdot I > 0$, por defini-

ción tenemos;

$$X_2^+ \in I(+) \cup I(0,+) \cup I(-,0,+) \implies X_2^+ \in (R \setminus \underline{X}_1) \cup A$$

$$X_2^- \in I(-) \cup I(-,0) \cup I(-,0,+) \implies X_2^- \in A \cup (\underline{X}_1 \cup B)$$

$$(X_2^+ \cap I(-)) \cup (X_2^- \cap I(-)) \neq \emptyset \implies (X_2^+ \cap R \setminus \underline{X}_1) \cup (X_2^- \cap \emptyset) \neq \emptyset$$

$$\implies X_2^+ \cap R \setminus \underline{X}_1 \neq \emptyset$$

$$\underline{X}_2 \cap A = \underline{X}_2 \cap I(-,0,+) = \emptyset$$

$$\underline{X}_2 \cap R \setminus \underline{X}_1 = \underline{X}_2 \cap I(+) = \emptyset$$

$$y \quad X_2^+ \cap I(+) = X_2^+ \cap (R \setminus \underline{X}_1) \neq \emptyset$$

$$\text{pero } X = X_1 \circ X_2; \quad X^+ = X_1^+ \cup (X_2^+ \setminus X_1^-); \quad X^- = X_1^- \cup (X_2^- \setminus X_1^+)$$

$$\text{se tiene: } X^- \cap R = \emptyset, \quad \underline{X} = \underline{X}_1 \cup \underline{X}_2 \in R \cup B$$

pero $|\underline{X} \cap R| > |\underline{X}_1 \cap R|$ que es una contradicción, ya que $|\underline{X}_1 \cap R|$ era maximal.

Por lo tanto, se cumple solo (b) para la restricción dada.
c.s.q.d.

Corolario 3.8.4.- Sean $e', e'' \in E$ con $e' \neq e''$, entonces existe $X \in K(\mathcal{O})$ tal que $e' \in X^+$ y $X^- \in \{e''\}$ si y solo si no existe $Y \in \mathcal{C}^*$ tal que $e' \in Y^+$, $e'' \notin Y$, $Y^- = \emptyset$

Dm.- Sea $I(+) = \{e'\}$, $I(-,0,+) = \{e''\}$, $I(0,+) = E \setminus \{e', e''\}$
Si se cumple (a) del teorema 3.8, se tiene que existe $X \in K(\mathcal{C})$ tal que $X \in I$ i.e.

$$\left. \begin{array}{l} X^+ \in I(+) \cup I(0,+) \cup I(-,0,+) \\ X^- \in I(-) \cup I(-,0) \cup I(-,0,+) \end{array} \right\} \implies X^+ \in \{e'\} \cup E \setminus \{e', e''\} \cup \{e''\}$$

$$\implies e' \in X^+, X^- \in \emptyset \cup \emptyset \cup e'', \text{ donde } X^- \in \{e''\}$$

de donde no se cumple (b) (ya que se cumplio (a))

i.e., no existe $Y \in \mathcal{C}^*$ tal que $Y \cdot I > 0$

$$Y^+ \in I(0) \cup I(+) \cup I(0,+) \implies Y^+ \in \{e'\}$$

$$Y^- \in I(0) \cup I(-) \cup I(-,0) \implies Y^- = \emptyset$$

de donde, $e'' \notin Y$. Con lo cual queda demostrada la implicación así (\implies).

Si se cumple (b), existe $Y \in \mathcal{C}^*$ tal que $Y \cdot I > 0 \implies Y^+ \in \{e'\}$
 $Y^- = \emptyset$
 $e'' \in Y$

de donde, por ser (a) y (b) exclusivas no se cumple (a) i.e. no existe $X \in K(\mathcal{O})$ que cumpla condiciones del teorema.

c.s.q.d.

Si M y M^* se asocian con problemas de programación lineal, se tendrá que el corolario 3.8.4 puede verse como el teorema de dualidad debil de programación lineal. Y el siguiente teorema, como el teorema de dualidad fuerte.

Teorema 3.9.- Sean $M = (E, \mathcal{O})$ y $M^* = (E, \mathcal{O}^*)$ un par dual de matroides orientados y sean $e', e'' \in E$ con $e' \neq e''$, entonces exactamente una de las alternativas siguientes se cumple:

- (a) existe $X \in \mathcal{O}$ tal que $e' \notin X$, $e'' \in Y^+$ y $X^- = \emptyset$ ó existe $Y \in \mathcal{O}^*$ tal que $e' \in Y^+$, $e'' \notin Y^-$ y $Y^- = \emptyset$
- (b) existe $X_1 \in \mathcal{O}$ y $Y_1 \in \mathcal{O}^*$ tal que $e' \in X_1^+$, $X_1^- \in \{e''\}$, $e'' \in Y_1^+$, $Y_1^- \in \{e'\}$ y $X_1 \cap Y_1 \in \{e', e''\}$.

Por la complejidad de la prueba de este teorema se deja su demostración, ya que ésta se logra generalizando el metodo simplex en el contexto de Matroides Orientados, lo cual es un paso muy complicado, para consultas al respecto puede verse Bland [2].

IV. PROGRAMACION LINEAL EN EL CONTEXTO DE MATROIDES ORIENTADOS

1).- Introducción

En este capítulo se llevará a cabo un tratamiento del problema de Programación Lineal en su forma estándar, hasta expresarlo (así como su dual) en términos de subespacios vectoriales ortogonales, con el fin de expresar dichos problemas en términos de los soportes elementales de los subespacios generados, introduciéndolos así al contexto de Matroides Orientados.

Un trabajo similar al que se pretende aquí, fue realizado en el capítulo I, cuando se estableció el esquema de Tucker, la diferencia radica en que el esquema (1.3.3) fue generado a través de dos problemas duales establecidos en su forma canónica mientras -- que en este capítulo se inicia el tratamiento con el problema primal en su forma estándar.

Es posible que se piense que se está llevando a cabo un trabajo duplicado, pero esto no ocurre ya que con este tratamiento se tienen dos enfoques distintos que conyuvan al entendimiento del problema en el contexto de Matroides Orientados.

Prosigue el capítulo exponiéndose de una forma clara las principales definiciones de Programación Lineal en términos de elementos de los Matroides Orientados, concluyendo este capítulo cuando se establece el teorema 1.6 (Teorema Principal de la Programación Lineal) en este contexto, el cual fue desde el inicio el objetivo principal de este trabajo.

2).- El Problema de Programación Lineal en el Contexto de Matroides Orientados.

Considere el P.P.L. en su forma estándar

$$\text{Max } (c_1, \dots, c_n) \cdot (x_1, \dots, x_n)^t$$

s.a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

Introduciendo la variable $x_0 = (c_1, \dots, c_n) (x_1, \dots, x_n)^t$, el problema puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } x_0 \\
 & \text{s.a} \\
 (4.1.1) \quad & \dots \begin{bmatrix} 1, & -c_1, & \dots, & -c_n \\ 0, & a_{11}, & \dots, & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0, & a_{m1}, & \dots, & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \\
 & x_1, \dots, x_n \geq 0
 \end{aligned}$$

Utilizando la variable auxiliar x_{n+1} el problema (4.1.1) quedaría así:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } x_0 \\
 & \text{s.a} \\
 & \begin{bmatrix} 1, & -c_1, & \dots, & -c_n \\ 0, & a_{11}, & \dots, & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0, & a_{m1}, & \dots, & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - x_{n+1} \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & x_{n+1} = 1 \\
 & x_1, \dots, x_n \geq 0
 \end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } x_0 \\
 & \text{s.a} \\
 (4.1.2) \quad & \dots \begin{bmatrix} 1, & -c_1, & \dots, & -c_n, & 0 \\ 0, & a_{11}, & \dots, & a_{1n}, & -b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0, & a_{m1}, & \dots, & a_{mn}, & -b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & x_{n+1} = 1 \\
 & x_1, \dots, x_n \geq 0
 \end{aligned}$$

El problema dual de (4.1.2) es:

$$\begin{aligned} \text{Min } & \lambda_{m+1} \\ \text{s.a. } & \lambda_0 = 1 \end{aligned}$$

$$(4.1.3) \dots (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \begin{bmatrix} -c_1, \dots, -c_n \\ a_{11}, \dots, a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1}, \dots, a_{mn} \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\lambda_{m+1} = (\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m) = 0$$

donde $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1})$ son las variables duales.

Para expresar el problema (4.1.3) en términos de elementos del espacio vectorial \mathbb{R}^{n+2} , se introduce el vector:

$$(y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \begin{bmatrix} 1, -c_1, \dots, -c_n, 0 \\ 0, a_{11}, \dots, a_{1n}, -b_1 \\ \vdots \\ 0, a_{m1}, \dots, a_{mn}, -b_m \end{bmatrix}$$

Utilizando esta expresión y denotando por A a la matriz y a el vector $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ se definen dos subespacios vectoriales del espacio \mathbb{R}^{n+2} de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} W &= \{y = (y_0, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2} / \lambda A = y\} \\ W^\perp &= \{x = (x_0, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2} / Ax = 0\} \end{aligned}$$

Estos subespacios son ortogonales, es decir que para todo $x \in W^\perp$ & $y \in W$, se tiene que $x \cdot y = 0$

De esta forma, los problemas (4.1.2) & (4.1.3) quedan establecidos respectivamente como:

$$(4.1.4) \dots \begin{aligned} \text{Max } & x_0 \\ \text{s.a. } & \\ & x_{n+1} = 1 \\ & x \in W^\perp \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

$$(4.1.5) \dots \begin{aligned} \text{Min } & y_{n+1} \\ \text{s.a. } & \\ & y_0 = 1 \\ & y \in W \\ & y_1, \dots, y_n \geq 0 \end{aligned}$$

Puede observarse que un vector $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ es solución del problema (4.1.1) si y solo si el vector $(x_0, x_1, \dots, x_n, 1)$ que esta en \mathbb{R}^{n+2} es solución de (4.1.2). Análogamente, los puntos extremos del poliedro (\hat{P}) , formado por las restricciones de (4.1.1), estan en correspondencia uno a uno con los puntos extremos del poliedro (P) , formado por las restricciones del problema (4.1.2).

Observese que P puede expresarse como $P = H \cap W \cap O$, donde H es el hiperplano $x_{n+1} = 1$, W^\perp es el subespacio generado por el problema primal y O es el primer ortante de \mathbb{R}^n es decir $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Tomando en cuenta la definición de cono del Apéndice B es posible verificar que $C = W^\perp \cap O$ es un cono.

Usando esta representación de P se probaran una serie de proposiciones que permiten expresar los puntos y rayos de P como vectores elementales de W^\perp .

Proposición 4.1.- d es rayo de P si y solo si $d \in C$ & $[d]^\perp \cap H = \emptyset$

Dm.- \Leftarrow) Sea $d \in C$ tal que $[d]^\perp \cap H = \emptyset$ entonces:

- (i) $d_i \geq 0$ ya que $d \in O$
- (ii) $Ad = 0$ ya que $d \in W^\perp$
- (iii) $d_{n+1} = 0$ porque $[d]^\perp \cap H = \emptyset$

Sean $x \in P$ & $\lambda \geq 0$, sea $y = x + \lambda d$

por (iii) $y_{n+1} = x_{n+1} = 1 \Rightarrow y \in H$

por (ii) $Ay = 0 = Ax + \lambda Ad \Rightarrow y \in W^\perp$

por (i) $d_i \geq 0$, $x_i \geq 0$ & $\lambda \geq 0 \Rightarrow y_i = x_i + \lambda d_i \geq 0 \Rightarrow y \in O$, por lo tanto d es un rayo de P .

\Rightarrow) Sea d un rayo de P y sea $x \in P$ entonces para toda $\lambda \geq 0$ $x + \lambda d \in P$

como $x + \lambda d \in P$, se tiene que $x_{n+1} + \lambda d_{n+1} = 1$, por lo tanto

$\lambda d_{n+1} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ó $d_{n+1} = 0$, si $\lambda = 0$, $x + \lambda d = x \in P$

si $d_{n+1} = 0$ entonces $[d]^\perp \cap H = \emptyset$.

Sea $S(d)$ y $S(x)$ los soportes de d y x respectivamente.

sea $i \in S(d) \cap S(x)$. Como $x + \lambda d \in P$ para toda $\lambda \geq 0$ se tiene

que $x_i + \lambda d_i \geq 0$, y como es para toda λ se tiene que λd_i puede crecer como se quiera, de aqui se sigue que $d_i \geq 0$

es decir $d \in C$.

como $x + \lambda d \in P$ entonces $A(x + \lambda d) = Ax + \lambda Ad = 0$, como $x \in P$

$Ax = 0$, por lo tanto $\lambda Ad = 0$, entonces $\lambda = 0$ ó $Ad = 0$, si $\lambda = 0$

$x+\lambda d = x \in P$, de aquí $Ad = 0$ es decir $d \in W^\perp$.

Por lo tanto d es un rayo extremo de $P \iff d \in C$ & $[d]^\perp \cap H = \emptyset$
c.s.q.d.

Como una generalización del resultado anterior puede demostrarse la siguiente proposición.

Proposición 4.2.- d es rayo extremo de P si y solo si d es rayo extremo de C & $[d]^\perp \cap H = \emptyset$

Dm.- Sea d un rayo extremo de P por la proposición 4.1 $d \in C$ y $[d]^\perp \cap H = \emptyset$, de aquí resulta que lo único que hay que demostrar es que d es rayo extremo de C .

Sea $C' = \text{Rayos}(P) = \{d \in C \mid d_{nn} = 0\}$, entonces basta con demostrar que d no se puede expresar como combinación lineal no negativa de los rayos de $C \setminus C'$, lo cual es obvio porque para todo $d', d'' \in C \setminus C'$ se tiene que $d'_{nn} \neq 0$ y $d''_{nn} \neq 0$.

El inverso es obvio ya que se tomaría un rayo extremo de C tal que es elemento de C' .

por lo tanto un rayo extremo de P es un rayo extremo de C que cumple con $[d]^\perp \cap H = \emptyset$.

c.s.q.d.

Para establecer la relación existente entre los rayos extremos del cono y los vectores elementales de W^\perp se establece la siguiente proposición.

Proposición 4.3.- d es rayo extremo de C si y solo si d es un vector elemental no negativo de W^\perp .

Dm.- \Rightarrow) Sea d un rayo extremo de C y considere el soporte $S(d)$ del rayo.

Supongase que $S(d)$ no es minimal entonces existe $e' \neq 0$ vector elemental de W^\perp tal que $S(e') \subseteq S(d)$.

Sea $e'' = d - e'$, claramente e' puede ser escogido de tal manera que $e'' \geq 0$, por otra parte $e' \in W^\perp$ ya que es combinación lineal de elementos de W^\perp .

Despejando se obtiene $d = e' + e''$ lo cual contradice la definición de rayo extremo.

Por lo tanto d es un vector elemental no negativo de W^\perp

⇐) Sea d un vector elemental de W^1 no negativo y suponga que d no es rayo extremo de C entonces existen $d_1, d_2 \in C$ tal que $d = d_1 + d_2$ como $d_i \geq 0 \quad i = 1, 2$ se tiene que: $S(d_i) \subseteq S(d)$ lo cual contradice el hecho de que d es un vector elemental no negativo de W^1 , por lo tanto d es rayo extremo de C .

c.s.q.d.

De los resultados obtenidos en las proposiciones (4.2) y (4.3) se obtiene la demostración automática del siguiente resultado:

Proposición 4.4.- d es rayo extremo de P si y solo si d es un vector no negativo y elemental de W que satisface con $[d]^1 \cap H = \emptyset$.

Con el cual se obtiene la caracterización de los rayos extremos del poliedro P en términos de los vectores no negativos y elementales de W^1 .

Para obtener la caracterización de los puntos extremos del poliedro P será necesario demostrar la proposición siguiente.

Proposición 4.5.- d es un punto extremo de P si y solo si d es rayo extremo de C y $[d]^1 \cap H \neq \emptyset$

Sea d un punto extremo de P entonces $d \in C$ y $[d]^1 \cap H \neq \emptyset$, solo bastaría demostrar que d es rayo extremo de C , pero como no se puede expresar a d como combinación lineal no negativa de elementos de C , el resultado se satisface.

El inverso se demuestra de una forma obvia ya que como d es rayo extremo de C no puede ser expresado como combinación lineal de elementos de C y en particularde los elementos de P .

Es claro que utilizando las proposiciones (4.3) y (4.5) se obtiene inmediatamente el siguiente resultado que caracteriza los puntos extremos, que por el teorema 1.1 las soluciones básicas del problema de Programación Lineal, como vectores elementales del subespacio W^1 .

Proposición 4.6.- d es un punto extremo de P si y solo

si d es un vector elemental no negativo de W tal que $[d]^+ \cap H \neq \emptyset$

Demostradas las proposiciones anteriores, se procederá a establecer las principales definiciones de Programación Lineal en el Contexto de Matroides Orientados.

Así, una solución factible al problema (4.1.4) es un vector de la forma $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}=1)$, lo cual en términos del Matroide generado por los soportes marcados elementales de W^+ es equivalente a un conjunto marcado $X \in K(\mathcal{Q})$ que satisface que $e_{n+1} \in X^+ & X^- \subseteq \{e_i\}$. Los conjuntos marcados que satisfacen esta propiedad son llamados conjuntos marcados Primal factibles. De una forma análoga, puede notarse que una solución dual factible corresponde a un conjunto marcado $Y \in K(\mathcal{Q}^*)$ que satisface: $e_0 \in Y^+ & Y^- \subseteq \{e_{n+1}\}$ lo cual genera la definición de conjunto marcado Dual factible.

La siguiente definición a considerar es la solución básica factible (ó soluciones extremas, por el teorema 1.1), la cual por las proposiciones anteriores (particularmente la 4.6) se tiene que, los conjuntos marcados básicos para los matroides orientados son los conjuntos marcados que satisfacen:

(4.1.6a) $X \in \mathcal{Q}, e_{n+1} \in X^+ & X^- \subseteq \{e_i\}$

(4.1.6b) $(X \setminus e_{n+1}) \cup \{e_0\}$ es independiente en M .

Realizando un análisis en el contexto de la Programación Lineal, la definición anterior de conjunto marcado básico queda establecido como:

La condición (4.1.6a) se refiere a que el vector elemental correspondiente a X sea primal factible, como $X \in \mathcal{Q}$ se garantiza que el vector considerado sea elemental lo que por la proposición 4.6 es un punto extremos del poliedro.

La condición (4.1.6b) es análoga a la siguiente: existe una base B de M tal que $e_{n+1} \notin B, e_0 \in B & X \setminus e_{n+1} \subseteq B$; i.e. existe un conjunto B' de columnas de A en (4.1.1) que forman una base del espacio generado por las columnas de A y contiene a A^0 la columna de A asociada a la función objetivo x , si b está en el espacio generado por

por las columnas de A (lo cual se sigue al tener $e_{n+1} \in X$), de aquí se tiene una expresión única para \underline{b} como combinación lineal de las columnas de A que están en B' .

De donde se desprende que existe un vector básico único (x_0, \dots, x_n) que satisface: $\underline{b} = A(x_0, \dots, x_n)^T$, $s(x_0, x_1, \dots, x_n) \subseteq \{i / A^i \in B'\}$, y además $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ de donde $\bar{s}(x_0, \dots, x_n) \subseteq \{e_0\}$.

Realizando un estudio análogo pero ahora sobre el problema (4.1.3), el cual es el dual de (4.1.2), es posible observar que las soluciones básicas factibles del dual (utilizando la expresión del problema como en (4.1.5)), corresponden a conjuntos marcados de Q^* que satisfacen:

(4.1.7a) $Y \in Q^*$, $e_0 \in Y^+$ & $Y^- \subseteq \{e_{n+1}\}$

(4.1.7b) $(Y \setminus e_0) + e_{n+1}$ es independiente en M^* .

Para establecer las condiciones de optimalidad en el contexto de matroides orientados, es necesario considerar la optimalidad en términos del esquema de Tucker, para lo cual antes de establecer las condiciones de optimalidad, será necesario establecer la definición de complementaridad en el contexto de matroides orientados.

Un par de conjuntos marcados $X \in K(Q)$ & $Y \in K(Q^*)$ son complementarios si $X \cap Y = \{e_0, e_{n+1}\}$. Si X es primal factible (Y dual factible) y existe un conjunto marcado Y dual (X primal factible) tal que X & Y son complementarios entonces X es primal optimal (Y es dual optimal).

Esta definición en el contexto de matroides orientados establece la "optimalidad" para un par de problemas duales en términos de complementaridad.

En términos de Programación Lineal, la solución óptima es encontrada al ir aumentando las bases, con columnas asociadas a variables x_j que en iteraciones anteriores del método simplex no se encuentran en la base. Mediante esta idea puede establecerse una caracterización en el contexto de matroides orientados de conjuntos aumentantes de la siguiente forma:

Dado un conjunto primal factible $X_1 \in K(Q)$ se dirá que $X_2 \in K(Q)$ es aumentante con respecto a X_1 si $e_0 \notin X_2$ & $e_{n+1} \in X_2^+$ & $X_2 \subseteq X_1^+$

Con lo cual un par dual de problemas de Programación Lineal quedan establecidos en el Contexto de Matroides Orientados como -- sigue:

Dados $M = (E, \mathcal{Q})$ & $M^* = (E, \mathcal{Q}^*)$ un par de matroides orientados, el problema consiste en encontrar conjuntos marcados $X \in K(\mathcal{Q})$ & $Y \in K(\mathcal{Q}^*)$ que sean primal optimal y dual optimal respectivamente.

Es preciso notar que en Programación Lineal es de interés encontrar tanto el valor de la función objetivo como el vector con el que se logra dicho óptimo, mientras que en el contexto de Matroides Orientados lo que se desea es encontrar el soporte marcado del vector elemental que satisface la condición de optimalidad; tomando en cuenta que alguna componente de dicho vector es la que se refiere a la función objetivo.

3).- Teorema Principal de la Programación Lineal

Para el desarrollo de esta sección serán considerados dos subespacios ortogonales de \mathbb{R}^N de la siguiente forma:

Sean $z \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^n$ & $A = (a_{ij})_{m \times n}$ una matriz dada.

Sea $W = \{y = (z_1, \dots, z_m, w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^{m+n} \mid zA = w\}$

$W^\perp = \{x = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_m^0, w_1^0, \dots, w_n^0) \in \mathbb{R}^{m+n} \mid w^0 A^T = -z^0\}$

Es claro que W & W^\perp son subespacios de \mathbb{R}^N , para demostrar que son ortogonales consideré $x \in W^\perp$ & $y \in W$. P.D. $x \cdot y = 0$

$$\begin{aligned} x \cdot y &= z \cdot z^0 + w \cdot w^0 = z(-w^0 A^T) + (zA) \cdot w^0 = \\ &= -z_1(w_1^0 a_{11} + \dots + w_n^0 a_{1n}) - \dots - z_m(w_1^0 a_{m1} + \dots + w_n^0 a_{mn}) + \\ &\quad + w_1^0(z_1 a_{11} + \dots + z_m a_{m1}) + \dots + w_n^0(z_1 a_{1n} + \dots + z_m a_{mn}) = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto W & W^\perp son ortogonales.

Estos subespacios son los que se representan mediante el esquema de Tucker en la sección 3 del capítulo I (esquema 1.3.3), tomando en cuenta las siguientes consideraciones:

- Para W .- los vectores (z_1, \dots, z_m) & (w_1, \dots, w_n) están representados en el esquema (1.3.3) por $(y_1, y_2, \dots, y_m, 1)$ & $(y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{m+n}, 1)$ respectivamente.

- Para W^\perp .- los vectores (z_1^0, \dots, z_m^0) & (w_1^0, \dots, w_n^0) son representados en el esquema como $(x_1, \dots, x_m, 1)$ & $(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}, 1)$ respectivamente.

Puede notarse que los subespacios en el esquema (1.3.3) están en un espacio de dimensión $n+m+2 = \bar{m}_1 + n_2 = N$.

El teorema (1.6) puede verse como una versión constructiva de los teoremas de dualidad en programación lineal, pero utilizando el hecho de que un par de problemas duales generan un par de subespacios ortogonales este teorema puede ser analizado como un resultado de los soportes elementales marcados de subespacios ortogonales. Y considerando cualquier matroide orientado como fue definido en el capítulo III, puede verse como un teorema fundamental de los matroides orientados (Teorema 3.9)

Así, el renglón correspondiente a y_k en (ii) del resultado del teorema principal, corresponde a un vector elemental de una base de W , cuyo soporte es elemental y no negativo de W que contiene al e_j de la última columna.

Tomando los posibles resultados del teorema principal (1.6) y considerando al resultado (i) como alternativa (a) y los resultados (ii), (iii) ó (iv) como la alternativa (b), se tiene que el teorema (1.6) queda establecido como:

Teorema 4.1.- Distíngase dos elementos de E , uno negro y otro gris (considerados como el e_j del último renglón y el e_j correspondiente a la última columna del esquema de Tucker) y píntense los otros elementos de blanco; entonces una y solo una de las alternativas siguientes se cumple:

(a) Existe un soporte elemental marcado S de W que contiene el elemento negro positivamente y un soporte elemental marcado S' de W^\perp que contiene el elemento gris positivamente, tal que ningún elemento blanco se encuentra en $S \cap S'$ negativamente, y ningún elemento blanco se encuentra en ambos a la vez.

(b)-Existe un soporte elemental marcado no negativo de W que contiene al elemento gris, pero no contiene al elemento negro, ó

-existe un soporte elemental marcado no negativo de W^\perp que contiene al elemento negro, pero no con

tiene al elemento gris ó
-existen ambos.

Esta manera de expresar al teorema principal de la programación lineal es una forma particular del teorema 3.9 para matroides orientados, considerando como conjuntos marcados de los matroides duales a los soportes marcados elementales de W & W^1 .

En términos de conjuntos marcados el teorema 3.9 establece que si existen conjuntos marcados primal y dual factibles entonces existen un par de conjuntos marcados complementarios tal que se pueden exhibir conjuntos marcados optimales.

Para encontrar el vector que optimiza el par dual de problemas de programación lineal, se utiliza el método simplex de Dantzig del cual se estableció una versión en la sección 3 del capítulo I para ser aplicada a problemas establecidos en el formato de Tucker, de lo anterior es posible pensar en un "método simplex" en el contexto de Matroides Orientados, para encontrar conjuntos marcados optimales. Esta idea surgió cuando Rockafellar en [25], estableció la teoría y fundamentos de los vectores elementales, pero fue Bland en [3]

quien inicio los trabajos sobre este campo, estableciendo una regla de pivoteo, para encontrar conjuntos marcados optimales, muy parecida al método simplex para encontrar el óptimo a problemas lineales.

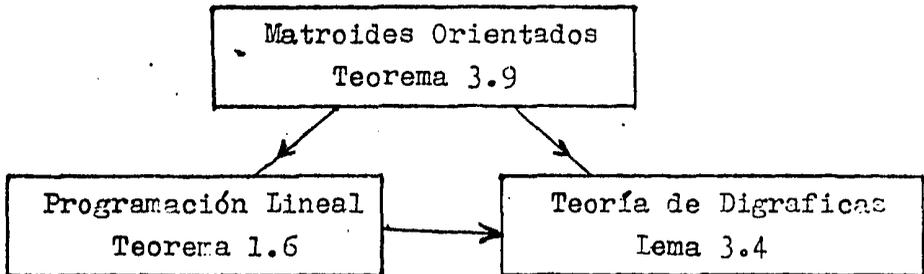
CONCLUSIONES

El presente trabajo fue enfocado al estudio de los aspectos combinatorios del teorema principal de la Programación Lineal, lo anterior se hizo posible estudiando los orígenes de la axiomatización y estructura de los Matroides Orientados. Estas estructuras fueron adecuadas al propósito del presente trabajo, pues algunos teoremas de Programación Lineal son equivalentes, en su aspecto combinatorio, a resultados establecidos para Matroides Orientados.

Los inicios de la axiomatización de los Matroides Orientados fueron realizados por Minty en el contexto de digrafoídes [22], lográndose una extensión a subespacios ortogonales de R^n mediante el trabajo de Rockafellar en [25], en el cual se mencionaba que todo lo referente a estos subespacios debería ser válido para estructuras aún no definidas, llamadas por él Matroides Orientados. La extensión de tan importantes resultados fue lograda por Bland en [2], donde culmina la axiomatización de los Matroides Orientados. Cabe mencionar que en forma independiente Lawrence y Folkman [12] y Las Vergnas [18] consiguieron axiomatizaciones equivalentes.

Un trabajo muy importante y fundamental realizado por Bland en [2] es la extensión del método simplex a un método similar pero en el contexto de Matroides Orientados.

Así, como conclusiones del presente trabajo es posible esquematizar lo analizado en el mismo, con el siguiente esquema:



Si se considera el teorema 3.9 para el caso donde los Matroides Orientados están formados por los soportes elementales de dos subespacios ortogonales, como conjuntos marcados, se obtiene el teorema 1.6, tomando como alternativa (a) del teorema 3.9 la alternativa (i) del teorema 1.6 y como la (b) las (ii), (iii) y (iv) de 1.6, de esta forma se tiene el resultado deseado en el contexto de la Programación Lineal.

Si se consideran los Matroides Orientados definidos por los circuitos y cocircuitos de una digráfica obtenemos el lema de los arcos coloreados de Minty directamente del teorema 3.9.

En el esquema se muestra que en las tres teorías existe el mismo resultado fundamental exhibiéndose así que éste es de origen combinatorio.

Cabe hacer énfasis que existe una categoría, paralela a la tratada aquí, en el contexto de Matroides, Gráficas y Algebra Lineal en cual se pueden expresar resultados similares a los del lema 3.1 para subespacios vectoriales y para Matroides en general.

La diferencia fundamental entre las dos categorías de resultados es que la expuesta aquí, contempla el concepto de orientabilidad, mientras que en la otra no.

Apéndice A

TEORIA DE GRAFICAS

Una gráfica es un par (X, U) donde $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es el conjunto de nodos o vértices y $U \subseteq X \times X$ llamado el conjunto de aristas.

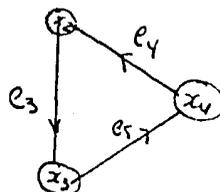
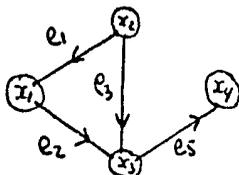
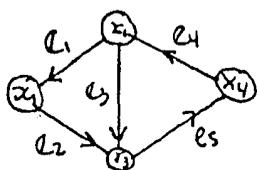
Una subgráfica de una gráfica $G = (X, U)$ es una gráfica $G' = (X_S, U_S)$ donde $X_S \subset X$ & $(x_i, x_j) \in U_S$ si y solo si: $x_i \in X_S, x_j \in X_S, (x_i, x_j) \in U$.

Una gráfica parcial de una gráfica $G = (X, U)$, es $G_P = (X, U_P)$ donde $U_P \subset U$
Ejemplos A1

$G : (X, U)$

$G_P : (X, U_P)$

$G_S = (X_S, U_S)$



$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$U = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

$U_P = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

$X_S = \{x_2, x_3, x_4\}$

$U_S = \{e_3, e_4, e_5\}$

Si $u_k = (x_i, x_j)$, x_i es llamado el vértice inicial de u y x_j el vértice final, además x_i sera llamado predecesor de x_j y a x_j sucesor de x_i , en términos de conjuntos quedarán:

$\Pi^+(x_i) = \{x_j \in X / \exists \text{ el arco } (x_i, x_j) \text{ en } U\}$

$\Pi^-(x_j) = \{x_i \in X / \exists \text{ el arco } (x_i, x_j) \text{ en } U\}$

al conjunto $\Pi(x_i) = \Pi^-(x_i) \cup \Pi^+(x_i)$ se le llamará el conjunto de vecinos de x_i

El grado interior de un vertice x_i se define como la cardinalidad de $\Pi^-(x_i)$, analogamente se define el grado exterior, así como el grado de un vertice:

$g^-(x_i) = |\Pi^-(x_i)|$, $g^+(x_i) = |\Pi^+(x_i)|$,

$g(x_i) = |\Pi(x_i)|$

Un camino es una sucesión de arcos y vertices $(x_{i_1}, e_{i_1}, x_{i_2}, \dots$

..., $x_{i_k}, e_{i_k}, x_{i_{k+1}}$, donde el vertice final del arco e_{i_j} es $x_{i_{j+1}}$ y el vertice inicial x_{i_j} .

Una trayectoria ó cadena es una sucesión $(x_{i_1}, e_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}, e_{i_k}, x_{i_{k+1}})$, los vertices terminales del arco e_{i_k} son los que lo encuadran en la sucesión.

Así, por ejemplo en el ejemplo A.1, las sucesiones $(x_1, e_1, x_2, e_2, x_3, e_3, x_4)$ & $(x_2, e_3, x_3, e_2, e_4)$ son un camino y una trayectoria respectivamente.

Una gráfica $G : (X, U)$ es una gráfica conexa si $\forall x_i, x_j \in X$ se tiene una trayectoria que los une.

Un circuito es un camino cuyo vertice inicial y final coinciden, un ciclo es una trayectoria cuyos vertices extremos coinciden en el ejemplo A.1: $(x_2, e_3, x_3, e_5, x_3, e_4, x_2)$ es un circuito y $(x_2, e_3, x_3, e_2, x_1, e_1, x_2)$ es un ciclo.

Un cocircuito es un conjunto minimal de separación, es decir un conjunto que al borrarse de la grafica incrementa el número de componentes conexas de la gráfica. En el ejemplo A.1, el conjunto $\{e_1, e_3, e_4\}$ es un cocircuito.

Un árbol es una gráfica conexa y sin ciclos.

La matriz de incidencia de una gráfica se define como sigue:

$$A = (a_{ij}), \text{ donde } a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si el arco } u_i \text{ no incide al nodo } x_j \\ -1 & \text{si } x_j \text{ es vertice final del arco } u_i \\ 1 & \text{si } x_j \text{ es vertice inicial del arco } u_i \end{cases}$$

Una propiedad muy importante de los circuitos y cocircuitos de una gráfica es el Lema 3.1, el cual se conoce como el Lema de los arcos coloreados de Minty.

Existen varios problemas combinatorios en el contexto de la teoría de gráficas, uno de los principales e importantes es el problema de flujo máximo el cual se presenta a continuación:

Sea $G : (X, U)$ una gráfica donde se tienen dos nodos especi-

ficos x_0 conocido como el origen y x_f conocido como el vertice final, a cada arco (x_i, x_j) se le asocia una capacidad $q_{ij} \in \mathbb{R}$. Se define un flujo como una función $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x_i, x_j) = f_{ij}$

Si $U = \{e_1, \dots, e_n\}$ se dice que el vector $f = (f^1, f^2, \dots, f^n)$ es un flujo factible si:

$$(A.2) \dots \sum_{x_j \in P^+(x_i)} f_{ij} - \sum_{x_k \in P^-(x_i)} f_{ki} = \begin{cases} \alpha & \text{si } x_i = x_0 \\ -\alpha & \text{si } x_i = x_f \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El problema de flujo maximo consiste en maximizar α sujeto a las restricciones establecidas en (A.2)

Se define una cortadura (A, A') como un conjunto de arcos (x_i, x_j) tales que $x_i \in A$ & $x_j \in A'$ y además se cumple con que $x_0 \in A$ & $x_f \in A'$, con $A, A' \subseteq X$, $A \cap A' = \emptyset$ & $A \cup A' = X$.

La capacidad de una cortadura (A, A') se define como $\sum_{(x_i, x_j) \in (A, A')} q_{ij}$

Teorema A.1.- En una gráfica $G : (X, U)$ el valor del flujo máximo es igual a la capacidad de la cortadura mínima.

Este teorema fue demostrado siguiendo un proceso de etiquetaje, el cual fue establecido como el algoritmo de flujo máximo y fue realizado por Ford y Fulkerson en [14].

Apéndice B: Fundamentos del Algebra Lineal

Un vector x es un conjunto ordenado $x = (x_1, \dots, x_n)$, donde $x_i \in \mathbb{R}$ y x_i es llamada la i -ésima componente de x .

El conjunto de todos los n -vectores sera denotado por \mathbb{R}^n , para el cual se definen las siguientes operaciones:

suma: $x \& y \in \mathbb{R}^n$ entonces $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

producto por escalares: $\lambda \in \mathbb{R} \& x \in \mathbb{R}^n$ entonces $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

Dichas operaciones satisfacen las siguientes propiedades ; sean $x, y, z \in \mathbb{R}^n \& \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- (B.1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asociatividad)
- (B.2) $x + y = y + x$ (conmutatividad)
- (B.3) $\exists (-x) \cdot x + (-x) = 0$ (existencia del neutro aditivo)
- (B.4) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (distributividad de vectores)
- (B.5) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (distributividad de escalares)
- (B.6) $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x$ (asociatividad de escalares)
- (B.7) $1 \cdot x = x$ (existencia del neutro multiplicativo)

Estas propiedades pueden tomarse como axiomas de un sistema algebraico abstracto, a dichos sistemas se les conoce como espacios vectoriales.

Un subconjunto W en un espacio vectorial U es llamado subespacio lineal o subespacio si es cerrado sobre las operaciones suma y el producto por escalares es decir:

si $x, y \in W$ entonces $x + y \in W$

si $x \in W \& \lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\lambda x \in W$

El conjunto de vectores $x^1, x^2, \dots, x^n \in W$ es linealmente dependiente si existen números $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ no todos cero tal que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x^i = 0$. Si el conjunto de vectores no son dependientes son llamados independiente.

Un vector y es una combinación lineal de los vectores x^1, \dots, x^n si $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i$ para algunos numeros $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Si S es un subconjunto de un espacio vectorial U , el rango de S es el número maximo de vectores independientes que pueden elegirse de S . Si r es el rango de S un conjunto con relementos independientes es llamado una base de S .

Un subespacio lineal de \mathbb{R}^n cuya dimensión es $n-1$ es llamado un hiperplano.

La tercera operación definida sobre \mathbb{R}^n es la que sigue : sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ se define el producto interno de x y y como $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$

Una matriz de $m \times n$ es un arreglo rectangular de números a_{ij} $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

la cual será denotada por $A = (a_{ij})$, el vector $A_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ es llamado el i -ésimo renglón de A , el m -vector $A^j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})$ es llamado la j -ésima columna de A .

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$, sea $x = (x_1, \dots, x_n)$ un n -vector y sea $y = (y_1, \dots, y_m)$ un m -vector, el producto $y \cdot A$ es un n -vector definido como : $yA = y_1 A_1 + \dots + y_m A_m = (A^1 \cdot y, \dots, A^m \cdot y)$, y el producto Ax es un m -vector definido como sigue:

$$Ax = x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = (A^1 \cdot x, \dots, A^n \cdot x).$$

Algunas propiedades de esta operación son :

$$(B.8) \quad A(x + x') = Ax + Ax' \quad , \quad (y + y')A = yA + y'A$$

$$(B.9) \quad A(\lambda x) = \lambda(Ax) \quad , \quad (\lambda y)A = \lambda(yA)$$

$$(B.10) \quad y(Ax) = (yA)x$$

Teorema B.1.- Sea A una matriz de $m \times n$ y de rango r , el conjunto de soluciones de la ecuación $yA = 0$ es un subespacio lineal de dimensión $(r-r)$.

Si W es un subespacio de \mathbb{R}^n , el subespacio dual u ortogonal de W es el conjunto $W^* = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid x \cdot y = 0 \text{ para todo } x \in W \}$, es claro que $\text{rang}(W) + \text{rang}(W^*) = n$.

Una solución $y = (y_1, \dots, y_m)$ del sistema de ecuaciones $\sum_{i=1}^m y_i \cdot A_i = b$ denomina de $S \subseteq \{1, \dots, m\}$ si $y_i = 0$ para $i \notin S$, y una solución del sistema es solución básica si los vectores A_i son independientes para $i \in S$.

Teorema B.2.- si la ecuación $\sum_{i=1}^m y_i A_i = b$ tiene una solución no negativa entonces tiene una solución básica no negativa

Un subconjunto de \mathbb{R}^n es llamado un cono convexo si es cerrado sobre la suma y la multiplicación de escalares es decir:

$$\text{si } x, y \in C \text{ entonces } x + y \in C$$

$$\text{si } x \in C, \lambda \geq 0 \text{ entonces } \lambda x \in C$$

Algunos ejemplos de conos son:

a).- El conjunto de todos los vectores nonegativas de \mathbb{R}^n (primer ortante).

b).- $\{b\}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \lambda b, \lambda \geq 0\}$ conocido como el rayo $\{b\}^+$

c).- $C = \{y \in \mathbb{R}^m \mid yA \leq 0\}$

Si C_1 & C_2 son conos convexos entonces $C_1 + C_2 = \{x \mid x = x_1 + x_2, x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$ y $C_1 \cap C_2$ tambien son conos convexos.

Si C es un cono convexo el cono dual C esta definido por $C^* = \{y \mid xy \leq 0 \text{ para todo } x \in C\}$

A continuacion se da unas ilustraciones que esquematan los conos anteriores.

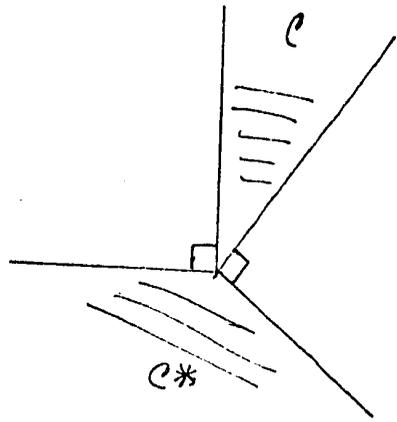
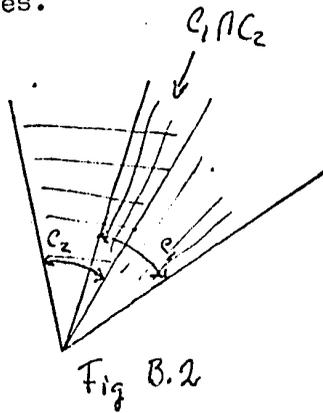
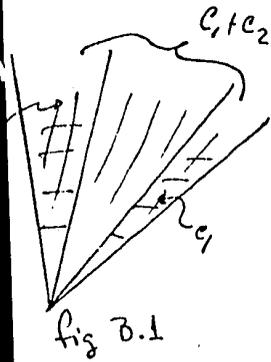


Fig B.3

El cono convexo C es llamado cono finito si es la suma de un número finito de rayos es decir: $C = [a_1]^+ + [a_2]^+ + \dots + [a_n]^+$ donde $[a_i]^+$ es un rayo.

Lema B.1.- el conjunto de todas las soluciones a la ecuación $Ax = 0$ es un cono finito.

Lema B.2.- La intersección de un subespacio lineal " " con el primer ortante de \mathbb{R}^n es un cono finito.

x es un vector extremo de C si no puede escribirse de la forma $x = x' + x''$ con $x', x'' \in C$, donde x' & x'' son independientes.

Si C es el cono generado por las soluciones de la desigualdad $yA = 0$ un vector extremo es llamado una solución extrema.

Los vectores A_1, \dots, A_m son llamados positivamente independientes si la ecuación $\sum_{i=1}^m y_i A_i = 0$, no tiene una solución semipositiva.

Teorema B.2.- Si A tiene rango m entonces toda solución de $yA \leq 0$ es una combinación no negativa de soluciones extremas.

El vector $x \in \mathbb{R}^n$ es una combinación convexa de los vectores x_1, \dots, x_k si $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ donde $\lambda_i \geq 0 \forall i$ & $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ la cáscara convexa (ó envolvente convexa) de $X = \langle X \rangle$, es el conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos de X.

Si X es finito entonces $\langle X \rangle$ es llamado un politopo convexo

Lema B.2.- Si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces $X = \langle X \rangle$ si y solo si X es convexa

Sea K un conjunto convexo y $x \in K$, x es llamado punto extremo o un vértice de K si para $x', x'' \in K$ & $0 < \lambda < 1$ entonces $x = \lambda x' + (1-\lambda)x''$ implica que $x = x' = x''$.

En términos geométricos, un punto extremo de K es un punto que no es punto interior de algún segmento de K, un conjunto convexo no necesariamente tiene puntos extremos, aún en el caso en que sea acotado por ejemplo en el plano, $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ no tiene puntos extremos.

Teorema B.2.- Si K es un politopo convexo y \dot{K} es el conjunto de sus puntos extremos entonces $K = \langle \dot{K} \rangle$

BIBLIOGRAFIA

Berge C.

- [1] "Graphs and Hipergraphs". North-Holland Publishing Company (1973).

Bland R.

- [2] "a combinatorial abstraction of linear programming". Journal of Combinatorial Theory, series B-23.(1977) pp 33-57
- [3] "New pivoting rules for the simplex method". Math. of Operations Research, Vol. 2, No. 2 (1977)

Bland R.- Las Vergnas M.

- [4] "Orientability of Matroids". Journal of Combinatorial Theory, series B-24.(1977) pp94-123

- [5] "Minty colorings and orientations of matroids". Annal of the N. Y. academic of sciences, Vol. 319 (1979) pp 86-96

Bondy A.

- [6] "Graph Theory". Macmillan Press LTD (1976)

Canion P.

- [7] "Modules Unimodulaires". Journal of Combinatorial Theory, 4 (1968) pp 301-362

Clausen J.

- [8] "Matroid and Combinatorial Optimization". Datalogisk Institut (1977)

Dantzig G. B.

- [9] "Linear Programming and Extensions". Princenton University Press. Princenton N.J. (1963)

Edmonds J.

[10] "Submodular functions, matroids and certain polyhedra". Proc. Int. Conf. on Combinatorics (Calgary). Gordon & Breach (N. York) (1970) pp 69-87.

[11] "Matroid and the greedy algorithm". Math. Programming 1 (1971) pp 127-136.

Folkman J. - Lawrence J.

[12] "Oriented Matroids". Journal of Combinatorial Theory, series B-25, (1978) pp 199-236

Fulkerson D.R.

[13] "Networks, Frames and Blocking Systems". Lectures in applied mathematics, Vol. 11 (1968) pp 303-334. Amer. Math. Soc. Providence R.I.

Fulkerson D.R. - Ford I.R.

[14] "Flow in the networks". Princeton University Press. Princeton N.J. (1962).

Hoffman A.

[15] "Some recent applications of the theory of linear inequalities to extremal combinatorial analysis". Proc. Sympos. Appl. Math (Bellman & Hall Jr, Eds), Vol. 10, American Math. Soc. Prov. R.I. (1960)

Korte

[16] "computational relations between various definitions of matroids and independence systems". Reporte 79144-OR, Institut fur Okonometrie und Operations Research, University of Bonn, W. Germany (1979)

[17] "complexity of matroid property algorithms". Reporte 79124-OR, Institut fur Okonometrie und Operations Research, University of Bonn, W. Germany (1979)

Las Vergnas M.

[18] "Matroides Orientables". C.R. Acad. Sci. (Paris) 280A (1975) pp 61-64.

Lawler E.

- [19] "Combinatorial Optimization: Matroids and Networks". (to be published by Holt, Rinehart, & Winston). N. York (1975)

- [20] "optimal matroid intersection ". Combinatorial Structures and their Applications. Gordon & Breach (New York), (1970) pp 233-235.

Lerke C. E.

- [21] "The dual method of solving linear programming problem". Naval Res. Logist. Quart. 1 (1954) pp 36-47

Minty G.

- [22] "on the axiomatic foundation of the theories of directed linear graph, electrical network and network programming". Journal Mathematical Mechanics. 15 (1966) pp 485-520

Mc Kee T.A.

- [23] "Logical and Matroidal Duality on Combinatorial Linear Programming". Department of Mathematics. Wright State University, Dayton Ohio 45435

Rado R.

- [24] " a theorem on independence relations ". Quart. J. Math. (Oxford), 13 (1942) pp 83-89.

Rockafellar R.T.

- [25] "The elementary vector of a subspace of R ". in proc. chapel hill conf. (Bose & Dowling eds) University of North Carolina Press, (1969) pp 104-127

Simmonard M.

- [26] "Linear Programming". Prentice-Hall (1966).

Tucker W. - Balinski M.L

- [27] "Duality theory of linear programs. a constructive approach with applicattions". Siam Review Vol. II No. 3 (1969)

Tutte W.T.

- [28] "a class of abelian groups". Can. J. Math. 8 (1956)pp 13-28
- [29] " Lectures on Matroids". J. Res. Nat. Bur. Standard Sect. B69 (1965) pp 1-47.

Welsh D.J.A.

- [30] "Matroid Theory". Academic Press (1976)

Whitney H.

- [31] "on the abstract properties of linear dependence". American Journal Mathematical, 57 (1935), pp 507-553

LISTA DE ABREVIATURAS

Dm.	Demostración.
i.e.	Es decir ó esto es.
P.P.L.	Problema de Programación Lineal.
c.s.q.d.	Como se quería demostrar.
&	Y.
P.D.	Por demostrar.
S.P.G.	Sin perdida de generalidad
<u>XXXXX</u>	Definición del concepto XXXXX.