Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

Probabilidades, Anualidades y Seguros de Grupo

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A

RENE RENSOLI CASTAÑEDA

MEXICO, D. F. 1984

I N D I C E

INTRODUCCION

A través de los años uno de los problemas más fuertes que afrontan todos los estudiantes, y en especial los de la carrera de Actuaría, es la marcada diferencia que existe entre los conocimientos teóricos que reciben en las aulas y los conocimientos prácticos que como profesionistas deben aplicar al ingresar a los distintos centros de trabajo.

Por ello la elaboración del presente tiene como finalidad brindar a los estudiantes de Cálculo Actuarial II un apoyo académico que conjunte a la vez, una base teórica fuerte; que en ocasiones resulta difícil obtener debido a la carencia de textos de esta naturaleza, y la dificultad de adquirir los pocos existentes, ya sea por la escasa oferta y su alto costo en el mercado; y las técnicas que las compañías de seguros nacionales utilizan en la práctica.

Para cumplir con este objetivo el presente trabajo consta de cinco capítulos; en los tres primeros se establecen las bases teóricas que soportan los conceptos prácticos y ejemplos incluídos en los dos últimos.

En el primer capítulo se encuentra una breve historia del seguro de vida, que incluye información importante sobre los inicios del seguro de vida y de grupo en nuestro País, y una descripción sobre los planes de seguro de grupo y colectivos que existen en México y sus características principales.

En el segundo y tercer capítulo se incluye la teoría inherente al cálculo de probabilidades que corresponde al grupo de vida conjunta, de último sobreviviente y el grupo de vida generalizado.

En el cuarto capítulo se presenta la teoría inherente al cálculo de valores presentes de anualidades, Primas y Reservas Actuariales, junto con un ejemplo práctico sobre la cotización de un seguro de grupo.

En el quinto y último capítulo se encuentra un breve tratado sobre la Elaboración y Utilización de una Tabla de Decremento Múltiple.

El trabajo cuenta también con tres anexos que sirven como apoyo a su contenido.

Capítulo 1: "Principios y Características del Seguro de Grupo

1.1 Breve Historia del Seguro de Vida.

El origen del Seguro de Vida no se ha definido con exactitud, los primeros informes datan del Siglo XVII A.C., en el florecimiento de la Cultura Babilónica, debido a que en el Código de Hamurabi se encuentra un plan de adopción llamado " Plan de Adopción-Anualidad ", el cual establecía que un ciudadano de Babilonia podía adoptar un hijo, adquiriendo de esta manera un plan de vejez en el que el menor adoptado, se compromete legalmente a sostener económicamente al padre durante su vejez y hasta el momento de ocurrir la muerte de este último.

En los albores de la Cultura Griega algunas sectas religiosas recolectaban cuotas mensuales entre sus seguidores, con lo que se comprometían a tomar la responsabilidad espiritual y económica del funeral de la persona; los ingresos obtenidos de la recolección eran administrados por los sacerdotes, y en algunas ocasiones estos se encargaban de cubrir las necesidades económicas más apremiantes de la familia del difunto.

Como es conocido ampliamente el Pueblo Romano adoptó las artes, costumbres, ciencias y filosofía de los Griegos; y la idea de las sociedades religiosas para solventar los gastos del funeral no fué la excepción, con la salvedad de que se generalizó el pago de las necesidades apremiantes a los familiares del difunto.

En la época de apogeo del Imperio Romano se establecio-un sistema de seguro de vida para los soldados que morían en batalla, así como un pago de pensiones por incapacidad y vejez para - los integrantes del ejército.

Durante la Edad Media, al igual que las distintas ramas del conocimiento humano, el seguro de vida no sufrió cambio alguno conservándose la tradición de las sectas religiosas, y en algunos-pueblos el seguro de vida, vejez e incapacidad para integrantes - del ejército.

El primer caso de expedición de una póliza de seguro de vida se remonta al año de 1536, cuando un corredor de seguros marítimos, llamado Richard Martin, que trabajaba para la Compañía llamada "Old Drury Ale House Of London", sugirió a sus socios incluir el seguro de vida en su empresa, y con base en su experiencia emitió una póliza de vida a un compañero de trabajo de nombre William Gybbons, quien debió pagar una prima de 80 libras por una suma asegurada de 2,000 libras pagadera en caso de morir en el transcurso - de un año. William Gybbons falleció en mayo de 1537, por lo que - la compañia tuvo que pagar a sus beneficiarios la cantidad establecida.

Esta experiencia hizo que las compañías aseguradoras de aquella época no considerarán como negocio el seguro de vida. Por esta razón fué hasta el año de 1698 cuando la compañía "Mercers Of London" inaguró el primer plan de seguro de vida; éste plan con-sistía en pagar anualidades vitalicias a los beneficiarios del asegurado a partir del momento en que ocurría su muerte.

El riesgo y la prima aplicados en este plan fueron calculados en una tabla de mortalidad tomada del libro "The certainty and Eternity of Hell torment", escrito por el Dr. William Assheton

La "Security Society For Widows And Orphans", fundada en 1699 es considerada como la primera Institución de seguro de vida que existió en la historia. La cual estaba formada por 2,000 miembros que contribuían con la cantidad de 1.20 libras semanalmente generándose un fondo de 2,400 libras, que se pagaba a los beneficiarios al momento de la muerte de cada miembro.

La Organización del seguro de vida de esta Sociedad Mutualista incluyó rasgos modernos como la selección de asegurados, la exclusión de ciertos riesgos (militares, etc) y un período de gracia para el pago de las primas.

En el año de 1706, por decreto de la Reina Ana se formó la "Amicable Society For a Perpetual Assurapce Office", que era una compañía que ofrecía el seguro de vida entera en forma distinta a- la que se acostumbraba, pues los pagos de las sumas aseguradas va- riaban de acuerdo a la mortalidad y a la experiencia obtenida, y - fue hasta después de 100 años que la Sociedad intento contratar co berturas con una cantidad nominal fija garantizada, la "Amicable"- fué la primera y última corredora de seguros de vida individual do minante, esta compañía se fusionó mas tarde con la "Norwich Union- Life Office".

La compañía de seguros de vida mas antigua y existente- en la actualidad es la "Society For The Equitable Assurance Of Li- ves And Survivorships" conocida comunmente como "Old Equitable", - fundada en el año de 1756. Por, Simpson y Dodson, los que no esta ban de acuerdo con los dos tipos de seguro de vida existentes, el- temporal sin posibilidad de renovación y el seguro de vida entera.

Esta compañía instituyó prácticas y procedimientos que- influyeron notablemente y que a la fecha siguen vigentes, entre - ellos se puede citar, el establecimiento de una prima nivelada, en período de 30 días para el pago de primas, un período de 3 meses - de reinstalación y el reembolso de primas; la gran diferencia en - tre la "Old Equitable" y las compañías de seguro modernas es la - ausencia de agentes, esta compañía vende seguros a las personas -

que van a comprarlo directamente a sus oficinas.

La "Scotish Widows Fund" y la "Equitable Assurance Company Of Edinburgh" crearon en el año de 1851 los valores garantizados y el pago de dividendos en forma de seguro adicional, los que constituyen una de las opciones modernas.

Durante los años de las colonias de América los seguros eran contratados por corredores europeos, primordialmente ingleses El seguro de vida en América se desarrolló hasta después de la Independencia de los Estados Unidos de Norteamérica, no obstante -- existen registros de una oficina pública de seguros abierta en Philadelphia en 1721, la que administraba seguros marítimos, y ocasionalmente seguros de vida; este tipo de oficinas pasaron a ser comunes en varias ciudades de la Costa del Atlántico, y la póliza que emitían era un seguro de vida temporal por 6 ó 12 meses que era el tiempo de duración del viaje por mar a Europa.

En algunos casos, se encuentran contratos de seguro de vida, pero solamente cubrían algunos riesgos fuera de lo común, y todos bajo el plan temporal.

Los seguros fueron vistos con desagrado en América hasta que en el año de 1809 la Corte de Massachusetts expidió un docu mento para normar y legalizar las operaciones del Seguro de Vida.

En el año de 1794 la "Insurance Company Of North América" fué la primera Corporación Comercial que instituyó el seguro de vida en América, expidiendo solamente 6 pólizas en 5 años.

La primera compañía comercial que contrató exclusivamente seguros de vida fué la "Pennsylvania Company For Insurance On Lives And Granting Annuities", la cual expidió su primera póliza en 1812, con el tiempo esta empresa pasó a ser un banco y una financiera, pero su mayor aportación es que fué la primera compañía que aseguró a sus clientes bajo primas calculadas con bases científicas.

En el transcurso del siglo XIX se consolidó el negocio del seguro de vidas, gracias a la obra del Dr. Elizur Wright, graduado en matemáticas en la Universidad de Yale.

El Dr. Wright negoció por mucho tiempo con las pólizas de vida de los esclavos, las cuales eran vendidas por sus dueños al no poder seguir pagando las primas correspondientes, al paso del tiempo el Dr. Wright formó parte de la Legislatura de Massachusetts en donde hizo importantes aportaciones al seguro de vida, como son la institución de la reserva legal, el reembolso de un porcentaje de la prima a quienes cancelaban sus pólizas y el primer - reglamento sobre la compra-venta de seguros de vida.

Wright fué el primer comisionado de seguros de Massachusets, sus reportes anuales y sus contribuciones legislativas fueron los instrumentos que sentaron las bases científicas del seguro de vida y establecieron los cimientos para el desarrollo de este - negocio.

En el año de 1906 la Legislatura de New York emite el - "New York Insurance Code", que era un decreto que regulaba al seguro de vida en el estado y que más tarde fué utilizado para elaborar y emitir las leyes de regulación del seguro de vida para toda- la Unión Americana.

Durante la primera mitad del siglo XX el seguro de vida tuvo una de sus más grandes crisis, ya que en el transcurso de la- Primera Guerra Mundial, aumentó considerablemente el número de -- muertes esperadas, lo que hizo que las compañías tuvieran que pagar más reclamaciones de lo normal, originando esto grandes pérdidas para las mismas, que además aumentaron el precio de las primas debido a que el riesgo era mayor y existía la necesidad de aumentar sus reservas, pero a esto siguió una disminución de ventas que agravó la crisis.

La depresión de 1929, al igual que en otras ramas del - comercio, los seguros de vida pasaron bastantes problemas, un gran número de pólizas fueron canceladas exigiendo reembolso de reser-- vas en efectivo y a corto plazo, lo que implicó para las compañías de seguros un endeudamiento excesivo y un incremento de pérdidas,- pero el seguro de vida salió adelante en cuanto la depresión llegó a su fin.

Durante la Segunda Guerra Mundial las compañías de segu ros no tuvieron los problemas que afrentaron en la primera, porque en 1940, poco antes de que los Estados Unidos entraran a la guerra el congreso había decidido otorgar un seguro de vida a todos los - integrantes de las fuerzas armadas, calculando que al final de la- guerra el gobierno pagó reclamaciones por más de 125 billones de - Dólares, siendo un gran gasto para el gobierno pero que mantuvo a- las empresas de seguros privadas en un nivel de reclamaciones espe rado.

El seguro de vida colectivo o de grupo se originó en - los primeros años del siglo XX, como un reemplazo científico de la antigua costumbre de "pasar el sombrero" para beneficio de la viu- da de un compañero de trabajo y sus hijos. Al paso del tiempo el- concepto básico se ha ampliado y el término seguro de vida colecti vo o de grupo abarca hoy en día una amplia gama de programas y pla nes de seguro que incluyen seguros de vida, seguridad social, beneficio por retiro, pensiones, etc.

La primera póliza de seguro de grupo contratada fué expedida por la "Equitable Life Assurance Society Of New York" en junio de 1911 y fué comprada por la "Pontasote Leather Company", la que adquirió un plan de vida de grupo para sus empleados.

Desde 1912 a la fecha, la contratación de seguros de grupo, ha tenido en los Estados Unidos un incremento extraordinario, al grado, que en la actualidad se puede asegurar que la mitad de los trabajadores y empleados de este país poseen un certificado de seguro de grupo.

En México se tienen indicios de operaciones de seguros, que datan del siglo XIX, estos eran contratados por compañías extranjeras, que gozaban de absoluta libertad, fué hasta 1893, en el gobierno del General Porfirio Díaz, cuando se empezó a ejercer un control parcial sobre las instituciones de seguro establecidas en nuestro país, dicho control fué enfocado principalmente desde un punto de vista fiscal.

En el transcurso de la Revolución y en los años posteriores, el gobierno tuvo una abierta intervención en el reglamento de la organización y funcionamiento de las Empresas Aseguradoras.

En el sexenio del General Lázaro Cárdenas (1934-1940) - se emitió el primer reglamento sobre seguros, el que otorgaba en - uno de sus apartados la formalidad contractual a las pólizas emitidas por las compañías de seguros.

En el año de 1935 se limita la intervención de Compa -- ñías Extranjeras en el Mercado Nacional de Seguros y la participación de capital extranjeros en las Instituciones Mexicanas de Seguros.

La póliza más antigua de que se tiene noticia, en el ramo de seguro de grupo en México, fué emitida en septiembre de 1936 por la compañía "Seguros de México" y fué contratada por la "Compañía Mexicana de Aviación", para asegurar el personal de tierra y - vuelo.

Las siguientes pólizas de seguro de grupo fueron emitidas por la misma compañía al año siguiente, y las compradoras fueron "Seguros Azteca" y "Compañía Cerillera la Central", adquiriendo ambas un plan de seguro de vida de grupo para sus empleados.

El seguro de Grupo ha tenido un desarrollo favorable en nuestro país al grado que al final de la década de los setentas el número de personas que poseían un Certificado de Grupo rebasa los-13 millones, y las pólizas emitidas bajo este plan equivalían al -138% del total de pólizas emitidas en seguro individual.

1.2 Características y Principios del Seguro de Vida Colectivo y/o de Grupo.

El Seguro de Vida Colectivo y/o de Grupo es una combinación de la seguridad individual y la social, mediante este tipo de coberturas, un gran número de personas quedan aseguradas bajo una póliza maestra a un costo menor que si lo hicieran en forma individual, por las siguientes razones:

- El seguro de grupo se contrata sin selección individual, lo que elimina los gastos concernientes a dicha selección.

- Las comisiones correspondientes a la venta de un seguro colectivo son menores que las comisiones por venta de un seguro individual.

- Los gastos administrativos y los gastos de expedición de póliza son cubiertos entre todos los asegurados.

- Los integrantes del grupo pueden llevar parte de la administración de la póliza.

Los principios técnicos que forman la base fundamental del seguro de grupo y/o colectivo son prácticamente los mismos que los del seguro de vida ordinario, siendo el grupo la unidad de selección en lugar de la vida individual. Las compañías de seguro - establecen sus propias normas de selección de grupos y determinan- el programa o plan de seguro que ofrecen de acuerdo a las primas.

Dentro de los elementos que intervienen en la selección de grupos los principales son:

- Número de asegurados.- Las compañías fijan siempre un número mínimo de asegurados, con el fin de garantizar que los grupos serán lo suficientemente grandes para proporcionar una probabilidad razonable de que se experimentará la mortalidad promedio esperada.

- Tipo de personas aseguradas.- Las compañías establecen sus propias políticas de selección con la finalidad de que todos los miembros del grupo tengan ciertas características o razgos en común (empleados del mismo gremio, trabajadores de una fábrica, etc.) para que exista un riesgo homogéneo entre todos los integrantes del grupo. Los grupos que hayan sido formados con la única finalidad de obtener un seguro de vida colectivo son descartados por las compañías de seguro.

La contratación de un seguro colectivo ofrece ventajas- tanto al patrón como a los empleados, a estos últimos les dá un in

centivo adicional a la permanencia en el empleo, puesto que el hecho de conservarlo les garantiza un beneficio a sus familiares en caso de fallecer y para el patrón representa un estímulo fiscal, puesto que las erogaciones realizadas para el pago de primas de seguros para empleados son deducibles de impuestos, independientemente de que disminuye la rotación del personal de la empresa e incrementa la calidad de su imagen ante sus empleados y trabajadores.
En general un plan de seguro de vida colectivo o de grupo es introducido en combinación con otros planes de seguro que abarcan beneficios de enfermedad, gastos médicos mayores, planes de pensiones, etc; obteniendo así un programa completo de protección social para los empleados.

El seguro de grupo y/o colectivo se contrata generalmente en los siguientes planes:

- Seguro Ordinario de Grupo.- Este es el plan más importante, bajo este se brinda protección a los asegurados en forma temporal a un año, pudiéndose renovar indefinidamente. Este plan otorga una cobertura básica que consiste en el pago de la suma asegurada al ocurrir el fallecimiento de alguno de los integrantes del grupo. Si el seguro es terminado, los asegurados tienen derecho a contratar algún plan de seguro individual, si al menos han estado asegurados un número específico de años (generalmente 5), -

pero pocas personas convierten su seguro dado el alto costo que - esto significa, sólo lo hacen aquellas personas que se consideran insegurables por su edad, riesgo, o enfermedad, puesto que es la- única forma de contratar un seguro sin selección individual.

- Seguro Colectivo de Crédito a Corto Plazo.- Este plan es comprado frecuentemente por distintas empresas financieras, comerciales, crediticias, etc; las cuales compran un seguro de vida a todos sus deudores importantes. Al contratar este seguro, en - el caso de que una deuda bastante grande fuera cancelada por la - muerte del deudor, la aseguradora paga al prestador o vendedor a- crédito, el saldo existente de la deuda al momento de morir el - deudor. Bajo este plan el prestador o vendedor a crédito es el - beneficiario y a su vez el comprador de la póliza. La suma asegurada que se contrata generalmente se limita al monto de la deuda- y el período de vigencia de la póliza es igual al tiempo de amortización de la deuda, generalmente a través de este contrato se - cubren créditos con duración, desde un mes hasta cinco año.

- Seguro Colectivo Hipotecario.- Las bases de este plan son similares a las del plan anterior salvo el tiempo de duración del préstamo y que las deudas son de tipo hipotecario.

Para la contratación de estos dos últimos planes las -

compañías e instituciones de crédito solamente deben proporcionar la edad y datos personales de los asegurados puesto que también se contratan sin selección individual de asegurados.

- Seguro Colectivo de Cuentas de Ahorro.- Este plan cubre a los titulares de las cuentas de ahorro de alguna institución bancaria, la suma asegurada puede ser establecida por la institución o ser calculada en base al saldo de la cuenta de ahorro. Este plan es contratado generalmente por las instituciones bancarias con la finalidad de atraer más clientes al ofrecer esta cobertura. Bajo este plan, al morir el titular de la cuenta de ahorro, la aseguradora pagará a los beneficiarios designados la suma asegurada, además de que estos podrán cobrar a la institución bancaria el saldo de la cuenta de ahorros.

- Seguro Hombre Clave Accionista.- Este plan generalmente es contratado por los accionistas de una empresa, cuando alguno de ellos resulta pieza indispensable en el funcionamiento de la misma, ya que al morir esta persona originaría considerables pérdidas a los demás accionistas. Bajo este plan al ocurrir la muerte del hombre clave la compañía provee pagos periódicos a los demás accionistas hasta que fallezca el último de ellos, los pagos generalmente son establecidos en base a los dividendos que el hombre clave otorga a la compañía periódicamente. Es importante aclarar que este tipo de seguro raramente es contratado en nuestro País.

- Seguro Mancomunado Matrimonial.- Este es uno de los planes más contratados en México, bajo este plan al ocurrir la muerte de algún integrante de la pareja asegurada, el cónyuge sobreviviente quedará automáticamente asegurado mediante una póliza de seguro de vida individual, sin más pagos de primas, por la suma asegurada contratada; y al ocurrir el fallecimiento de éste último se pagará la suma asegurada a los beneficiarios que la pareja haya designado, la suma asegurada se paga generalmente en exhibiciones mensuales, este plan es introducido conjuntamente con una cobertura básica que proporcione al viudo o viuda una protección adicional.

Independientemente de estos planes de seguros colectivos también existen los planes de vida entera, vida pagos limitados, temporal y dotal que se pueden contratar bajo las mismas características y condiciones del seguro de vida individual.

Dentro de los planes citados anteriormente el más común y solicitado es el seguro ordinario de grupo, el cual, como se dijo anteriormente consiste en un plan temporal a un año que puede renovarse indefinidamente, otorgando una cobertura básica que consiste en el pago de la suma asegurada al ocurrir el fallecimiento-de alguno de los integrantes de la colectividad.

Las colectividades que pueden ser aseguradas a través - de este seguro deberán tener una actividad o vínculo común.

Esta cobertura es dinámica y flexible, pues puede adaptarse de manera óptima a los frecuentes y numerosos cambios que - operan en las colectividades a través de condiciones muy favora -- bles en cuanto a costo y manejo administrativo.

Como complemento a la cobertura básica existen las co - berturas adicionales que se enumeran a continuación y que la hacen brindar una protección integral y adecuada a las necesidades actuales del mercado:

I.M.A.- Indemnización por Muerte Accidental: Concede un pago adicional igual a la suma asegurada básica, si el fallecimiento ocurre en forma accidental.

I.P.O.- Indemnización por Pérdidas Orgánicas: Mediante esta cobertura se otorgará una indemnización, si el asegurado su - fre una pérdida orgánica a consecuencia de un accidente. Es requisito indispensable para contratar esta cobertura que se contrate con la I.M.A.

D.I.A.C.- Doble Indemnización por Accidente Colectivo: A través de esta cobertura la suma asegurada señalada en las coberturas de muerte accidental (I.M.A.) o pérdidas orgánicas (I.P.O.) se duplica cuando el accidente ocurra en forma colectiva.

S.S.I.T.- Cobertura de Seguro Saldado por Invalidez Total y Permanente: Mediante esta cobertura el asegurado que se incapacite en forma total y permanente queda protegido por toda la vida, sin más pago de primas.

P.A.I.T.- Cobertura de Pago Anticipado por Invalidez Total y Permanente. Si el asegurado se incapacita en forma total y permanente, recibirá en una sola exhibición la suma asegurada contratada en esta cobertura y si además tiene contratada la cobertura de S.S.I.T., quedará asegurado por el resto de su vida sin más pago de primas.

Es importante resaltar, que al contratar simultáneamente las coberturas de I.P.O. y P.A.I.T., en caso de siniestro que afecte a las dos coberturas, el máximo amparado será la suma asegurada contratada en la cobertura básica.

Una de las características primordiales de este seguro, además de su bajo costo, es que otorga dividendos a partir de su primera renovación, permitiendo reducir aún más el costo del plan- o incrementar la protección con el mismo desembolso.

La suma asegurada que se contrata en un plan ordinario- de grupo debe ser determinada de acuerdo a una regla de aplicación- general que evite que los beneficios del plan resulten discriminatorios, teniendo como reglas más usuales las siguientes:

- Una Suma Asegurada Fija.
- Un Número determinado de Meses de Sueldo.
- Una Protección de Acuerdo con la Antigüedad en la Empresa.

Administración del Seguro de Grupo.- La administración- de este plan es un factor muy importante y decisivo para la conservación del negocio. Por ello las aseguradoras han diseñado sistemas de administración que permiten manejar el seguro de grupo con- claridad y eficiencia, en todos y cada uno de sus aspectos.

Entre los más comunes se encuentra el sistema auto-administrativo que consiste en:

A la instalación del programa, el contratante debe proporcionar un listado del personal que integrará el grupo asegura -

ble con los siguientes datos:

- Nombre Completo del Empleado.
- Fecha de Nacimiento o Registro Federal de Contribuyentes.
- Fecha de Ingreso a la Empresa.
- Suma Asegurada o Información para calcularla.
- Ocupación del Empleado.

Además de lo anterior, se necesita la solicitud maestra con todos los datos que se piden y que deberán ser anotados por el contratante.

Con esta información se procede a la emisión de la póliza definitiva, que contiene el registro de asegurados.

El contratante debe llenar entonces los certificados-concentimientos que le serán proporcionados por la compañía, entregándole el certificado al asegurado, mientras que el consentimiento quedará en su poder.

Es importante mencionar que el consentimiento deberá - ser firmado por el asegurado, y que en la designación de beneficiarios se deberá procurar evitar que se nombre como beneficiarios a-los hijos menores de edad, en virtud de que la Ley prohibe pagar a menores el beneficio correspondiente. Si el asegurado insiste, es prudente que entonces nombre además un albacea para la administración del dinero.

No será necesario reportar los movimientos de altas y bajas durante el período de vigencia, y el contratante sólo deberá llenar el certificado-consentimiento que será el comprobante de aseguramiento del participante.

Si un asegurado ingresa en fecha posterior a la renovación del seguro, o aumenta su protección por cambio de sueldo, y por ello su suma asegurada rebasa el máximo sin examen médico, el contratante deberá dar aviso a la compañía para la dictaminación del riesgo y, en su caso, pedir las pruebas médicas que estime necesarias.

Un mes antes del vencimiento natural de la póliza, el contratante deberá enviar a la aseguradora un listado actualizado del personal que goza de la protección con todos los datos mencionados anteriormente, para realizar el ajuste anual y la renovación correspondiente.

Como puede observarse, este sistema de auto-administración simplifica el manejo operativo del plan y a la vez permite un control adecuado del mismo.

Capítulo 2: "Probabilidades de Vida Conjunta"

2.1 Probabilidades de Vida Conjunta.

La probabilidad de que un grupo de vida de m personas con edades $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_m$ sobreviva n años se denota por;

$$_nP_{x_1 x_2 \ldots\ldots x_m}$$

Es decir que esta expresión indica la probabilidad de que todos los integrantes del grupo sobrevivan n años.

Si se definen eventos, A_i como el hecho de que una persona de edad x_i sobreviva n años, (CON i=1,M) tenemos que la probabilidad denotada por $_nP_{x_1 x_2 \ldots\ldots x_m}$ equivale a la probabilidad de que sucedan simultáneamente todos los eventos A_i lo que en lenguaje matemático se puede escribir como:

(2.1.1) $$_nP_{x_1 x_2 \ldots\ldots x_m} = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots\ldots \cap A_m).$$

Basándose en el supuesto de que los eventos A_i son independientes se obtiene la expresión:

$$_nP_{x_1 x_2 \ldots\ldots x_m} = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots\ldots \cdot P(A_m)$$

De cursos anteriores se sabe que la probabilidad de que una persona de edad x_i sobreviva n años se denota por $_{n}p_{x_i}$ y que esta probabilidad se calcula con la igualdad:

$$_{n}p_{x_i} = \frac{l_{x_i+n}}{l_{x_i}}$$

o sea que nuestra expresión 2.1.1 se puede escribir como:

$$_{n}p_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = {_{n}p_{x_1}} \cdot {_{n}p_{x_2}} \cdot {_{n}p_{x_3}} \cdots\cdots \cdot {_{n}p_{x_m}}$$

y luego:

$$(2.1.2) \qquad _{n}p_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = \frac{l_{x_1+n}}{l_{x_1}} \cdot \frac{l_{x_2+n}}{l_{x_2}} \cdot \frac{l_{x_3+n}}{l_{x_3}} \cdot \cdots\cdots \cdot \frac{l_{x_m+n}}{l_{x_m}}$$

Esta igualdad nos permite calcular, de manera sencilla- la probabilidad de que un grupo de m vidas de edades $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_m$ sobreviva n años a partir de una tabla de mortalidad.

La expresión (2.1.2) se denota como:

$$_{n}p_{x_1x_2\cdots\cdots x_m} = \frac{l_{x_1+n}\, l_{x_2+n} \cdots\cdots l_{x_m+n}}{l_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}$$

para efectos de facilitar el uso de la misma.

Otra probabilidad importante es la probabilidad de que- el grupo de vida conjunta fracase dentro de n años; y considerando que se dice que un grupo de vida conjunta de edades $x_1, x_2, x_3 \cdots\cdots, x_m$ fracasa en el momento en que ocurre la primera muerte,- se deduce que este evento es el complemento del evento denotado - por $_{n}p_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}$

Así la probabilidad de que el grupo de vida conjunta fracase dentro de n años (que se denota por ${}_{n}q_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}$) se puede expresar de la siguiente manera:

$$(2.1.3) \qquad {}_{n}q_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m} = 1 - {}_{n}p_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}$$

Substituyendo la expresión (2.1.2) en la ecuación (2.1.3) obtenemos:

$${}_{n}q_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m} = 1 - \frac{l_{x_1+n} \cdot l_{x_2+n} \cdot l_{x_3+n} \cdots\cdots \cdot l_{x_m+n}}{l_{x_1 x_2 x_3 x_4 \cdots\cdots x_m}}$$

Otra de las probabilidades que es importante conocer es la probabilidad de que el grupo de vida conjunta fracase durante el año $n+1$ denotado por ${}_{n|}q_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}$ Esta probabilidad implica la ocurrencia de dos eventos:

i) Que el grupo sobreviva al año n

ii) Que el grupo fracase durante el año $n+1$

Partiendo del supuesto de que el hecho de que el grupo haya sobrevivido al año n es aleatoriamente independiente al evento de que el grupo fracase en el año $n+1$ concluímos que la probabilidad denotada por ${}_{n|}q_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}$ se puede escribir como el producto de las probabilidades de los dos eventos que la conforman, o sea que:

$${}_{n|}q_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m} = \left({}_{n}p_{x_1 x_2 \cdots\cdots x_m}\right)\left({}_{1}q_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}\right)$$

Substituyendo la ecuación (2.1.3) en esta expresión ob tenemos:

$$_{N|}q_{x_1x_2\cdots\cdots x_m}=\left(_NP_{x_1x_2\cdots\cdots x_m}\right)\left(1-{}_1P_{x_1+N:x_2+N:\cdots\cdots:x_m+N}\right)$$

Realizando el producto:

$$_{N|}q_{x_1x_2\cdots\cdots x_m}={}_NP_{x_1x_2\cdots\cdots x_m}-{}_NP_{x_1x_2\cdots\cdots x_m}\cdot{}_1P_{x_1+N:\cdots\cdots:x_m+N}$$

A partir de que:

$$_NP_{x_1x_2\cdots\cdots x_m}=\frac{l_{x_1+N}}{l_{x_1}}\cdot\frac{l_{x_2+N}}{l_{x_2}}\cdot\frac{l_{x_3+N}}{l_{x_3}}\cdots\cdots\cdots\cdot\frac{l_{x_m+N}}{l_{x_m}}$$

y

$$_1P_{x_1+N:x_2+N:\cdots\cdots x_m+N}=\frac{l_{x_1+N+1}}{l_{x_1+N}}\cdot\frac{l_{x_2+N+1}}{l_{x_2+N}}\cdot\frac{l_{x_3+N+1}}{l_{x_3+N}}\cdots\cdot\frac{l_{x_m+N+1}}{l_{x_m+N}}$$

El producto $_NP_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}\cdot{}_1P_{x_1+N:x_2+N:\cdots\cdots:x_m+N}$
se puede escribir:

$$\frac{l_{x_1+N}}{l_{x_1}}\cdot\frac{l_{x_2+N}}{l_{x_2}}\cdot\frac{l_{x_3+N}}{l_{x_3}}\cdots\cdots\frac{l_{x_m+N}}{l_{x_m}}\cdot\frac{l_{x_1+N+1}}{l_{x_1+N}}\cdot\frac{l_{x_2+N+1}}{l_{x_2+N}}\cdot\frac{l_{x_3+N+1}}{l_{x_3+N}}\cdots\cdots\cdot\frac{l_{x_m+N+1}}{l_{x_m+N}}$$

Simplificando se obtiene que:

$$ {}_{\nu}P_{x_1 x_2 \cdots\cdots x_m} \cdot {}_{1}P_{x_1+\nu : \cdots\cdots : x_m+\nu} = \frac{l_{x_1+\nu+1}}{l_{x_1}} \cdot \frac{l_{x_2+\nu+1}}{l_{x_2}} \cdot \cdots\cdots\cdots \frac{l_{x_m+\nu+1}}{l_{x_m}} $$

Lo que por notación se conoce como ${}_{\nu+1}P_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots\cdots x_m}$

Por lo tanto la probabilidad de que el grupo fracase - en el año $\nu+1$ se puede escribir como la diferencia de dos probabilidades:

$$ (2.1.4) \qquad {}_{\nu|}q_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m} = {}_{\nu}P_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m} - {}_{\nu+1}P_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m} $$

Dado que en la práctica escribir el producto $l_{x_1 x_2 \cdots\cdots x_m}$ a menudo resulta complicado, dado que puede resultar demasiado grande, generalmente se utiliza la expresión:

$$ l_{x_1 x_2 \cdots\cdots\cdots x_m} = K \, l_{x_1} \cdot l_{x_2} \cdot l_{x_3} \cdots\cdots\cdots l_{x_m} $$

En donde la constante K se toma como una potencia de - 10^{-1} la cual se escoge arbitrariamente para obtener la magnitud - de campo deseada para el valor de $l_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots\cdots x_m}$.

Ahora se procederá a definir la expresión $d_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots\cdots x_m}$

lo que se hará, al igual que en vida sencilla, a partir de los $l_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}$

(2.1.5) $$d_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = l_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} - l_{x_1+1:x_2+1:x_3+1:\cdots\cdots:x_m+1}$$

Esta expresión se deduce a partir de la ecuación (2.1.3)

$${}_{N}q_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = 1 - {}_{N}p_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}$$

Lo que en términos de l_x es:

$${}_{N}q_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = \frac{l_{x_1}\cdot l_{x_2}\cdot l_{x_3}\cdots\cdots l_{x_m} - l_{x_1+1}\, l_{x_2+1}\cdots\cdots l_{x_m+1}}{l_{x_1}\cdot l_{x_2}\, l_{x_3}\cdots\cdots l_{x_m}}$$

Para el caso en el que $N = 1$

$$q_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = \frac{l_{x_1}\cdot l_{x_2}\cdot l_{x_3}\cdots\cdots l_{x_m} - l_{x_1+1}\cdot l_{x_2+1}\cdots\cdots l_{x_m+1}}{l_{x_1}\, l_{x_2}\, l_{x_3}\cdots\cdots l_{x_m}}$$

Substituyendo la ecuación (2.1.5) en esta expresión se llega a que:

$$q_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = \frac{d_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}{l_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}$$

Hasta este momento ya se han definido, para vida con-junta, todas las funciones de la tabla de mortalidad ($l_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}$, $d_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}$, $p_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}$, $q_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots\cdots x_m}$, etc) excepto la fuerza instantánea de mortalidad para vida conjunta; denotada por $\mu_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots\cdots x_m}$, Para ello partiremos de la definición de μ_x para vida sencilla:

$$(2.1.6) \qquad \mu_{x+t} = -\frac{1}{l_{x+t}} \cdot \frac{d(l_{x+t})}{dt} = -\frac{d(\log l_{x+t})}{dt}$$

De manera análoga, se define la fuerza instantánea de mortalidad de vida conjunta como:

$$\mu_{x_1+t:\,x_2+t:\,x_3+t:\cdots\cdots\cdots:\,x_m+t} = -\frac{1}{l_{x_1+t:\,x_2+t:\cdots\cdots:\,x_m+t}} \cdot \frac{d(l_{x_1+t:\,x_2+t:\cdots\cdots:\,x_m+t})}{dt}$$

Lo que es igual a:

$$\mu_{x_1+t:\,x_2+t:\,x_3+t:\cdots\cdots\cdots x_m+t} = -\frac{d(\log(l_{x_1+t:\,x_2+t:\cdots\cdots\cdots x_m+t}))}{dt}$$

Por definición se sabe que:

$$l_{x_1+t:x_2+t:x_3+t \cdots\cdots x_m+t} = l_{x_1+t} \cdot l_{x_2+t} \cdot l_{x_3+t} \cdots\cdots l_{x_m+t}$$

Substituyendo en (2.1.6)

$$\mu_{x_1+t:x_2+t:x_3+t:\cdots\cdots:x_m+t} = -\frac{d(\log(l_{x_1+t} \cdot l_{x_2+t} \cdot l_{x_3+t} \cdots\cdots l_{x_m+t}))}{dt}$$

Aplicando leyes de los logaritmos:

$$\mu_{x_1+t:x_2+t:x_3+t:\cdots\cdots x_m+t} = -\frac{d(\log(l_{x_1+t}) + \log(l_{x_2+t}) + \log(l_{x_3+t}) \cdots\cdots \log(l_{x_m+t}))}{dt}$$

Del cálculo diferencial se sabe que la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de cada función, entonces:

$$\mu_{x_1+t:x_2+t:\cdots\cdots x_m+t} = -\frac{d(\log l_{x_1+t})}{dt} - \frac{d(\log l_{x_2+t})}{dt} - \cdots\cdots - \frac{d(\log l_{x_m+t})}{dt}$$

Y cada uno de los sumandos de esta expresión representa la fuerza de mortalidad de vida sencilla para las edades $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_m$.

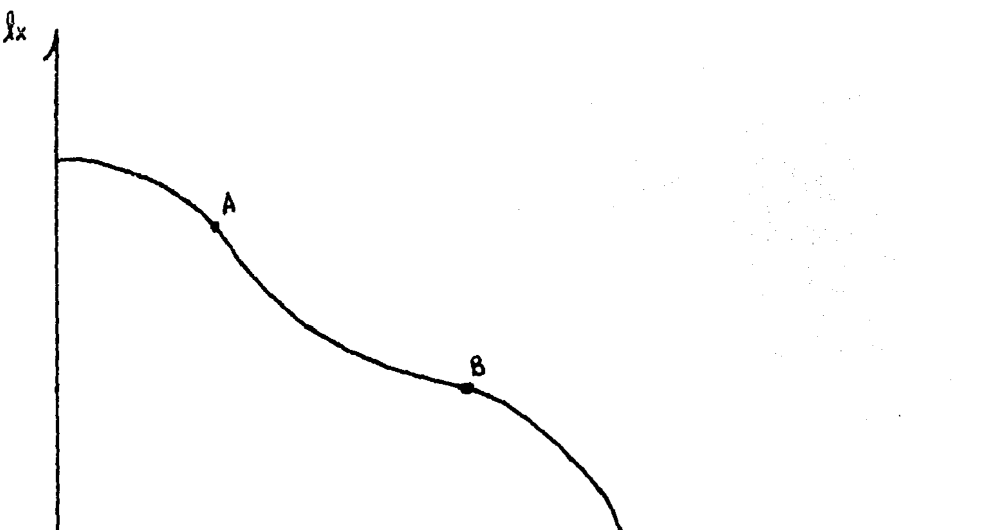
Por lo tanto se concluye que la fuerza instantánea de mortalidad conjunta es igual a la suma de las fuerzas instantáneas de mortalidad de las vidas $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_m$ que conforman al grupo de vida conjunta, o sea:

$$\mu_{x_1 x_2 x_3 \ldots\ldots x_m} = \mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \mu_{x_3} + \ldots\ldots + \mu_{x_m}$$

2.2 Modelos de Mortalidad.

El comportamiento de la mortalidad humana ha sido objeto de estudio de los matemáticos desde hace tiempo, desde entonces se han construido varios modelos analíticos que han tratado de representar este fenómeno. La mayor parte de los estudios realizados en torno al comportamiento de la mortalidad se han basado en el análisis de la curva l_x (gráfica 1), que, como se sabe, es una curva siempre decreciente y que al menos tiene dos puntos de inflexión. (A y B)

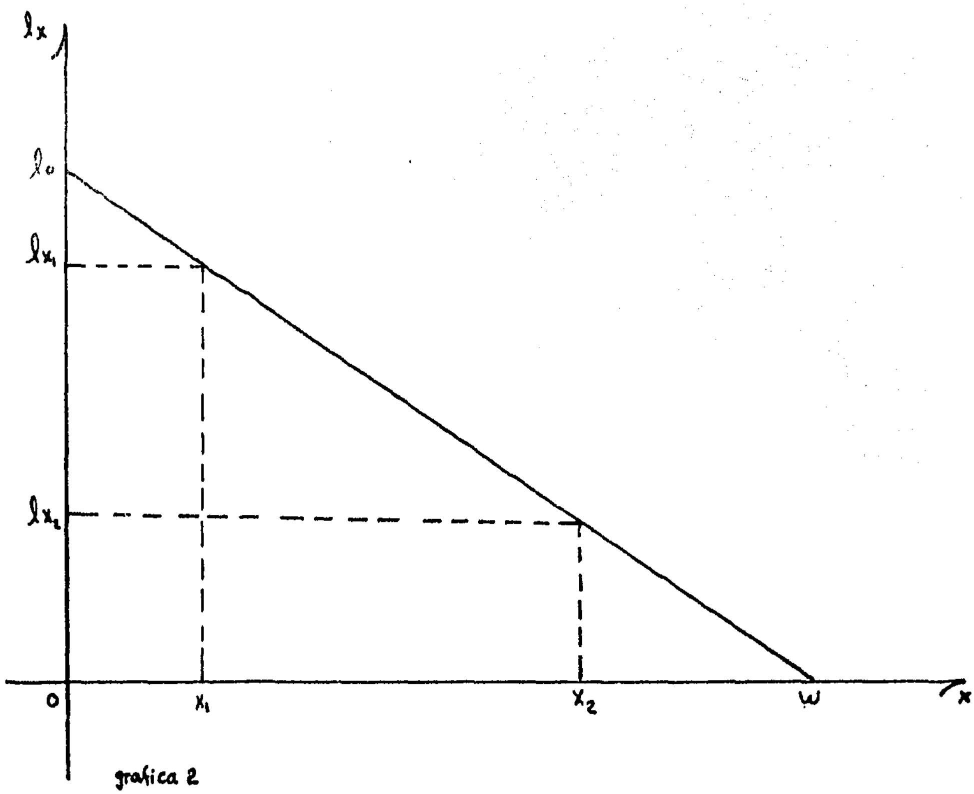
Por estas razones se ha dificultado a los matemáticos representar dicha curva por medio de una fórmula o expresión analítica.



gráfica 1

La primera proposición formal acerca de la curva l_x fue hecha en 1724 por el matemático Abraham de Moivre, quien propuso un modelo que suponía que la curva l_x podía ser representada por medio de una línea recta, la cual definía como:

$$l_x = k(W - X) \tag{2.2.1}$$



grafica 2

Como se puede observar en la expresión de Moivre, la constante k representa la pendiente de la recta l_x; debido a que esta recta tiene pendiente negativa, la constante k se puede interpretar como el decremento de vidas (l_x) por unidad de tiempo (x) por lo que su cálculo resultaba fácil a partir de conocer los valores de l_x en dos edades que estuvieran razonablemente distanciadas, llamando x_1 y x_2 a estas edades, se deduce claramente que la constante k se puede calcular mediante la expresión:

$$k = \frac{l_{x_2} - l_{x_1}}{x_2 - x_1} \qquad (2.2.2)$$

La expresión encontrada por Moivre se puede considerar como una simple aproximación, su objetivo era facilitar el cálculo de anualidades contingentes, que en esa época era una tarea difícil. Debido a la naturaleza del cálculo de la constante k por recomendación del mismo Moivre, este modelo proporciona resultados aceptables, cuando se realizan cálculos para edades que estan entre los 12 y 56 años.

En el año de 1885, Benjamín Gompertz, presentó los estudios que realizó sobre el comportamiento de la mortalidad, Gompertz examinó el agotamiento promedio de la fuerza del hombre para resistir la muerte y llegó a la conclusión de que al final de pequeños intervalos de tiempo, el hombre pierde porciones de la -

fuerza de resistencia a la muerte en forma proporcional a la fuerza que tenía al inicio de dicho intervalo, o sea, que la fuerza de resistencia a la muerte se decrementa en forma proporcional a ella misma.

Para medir la fuerza de resistencia a la muerte, Gompertz utilizó el recíproco de μ_x debido a que esta función es una medida de la susceptibilidad del hombre a la muerte.

De cálculo diferencial e integral se sabe que se puede medir el incremento o el decremento de una función mediante el uso de la derivada, y es por esto que el postulado de Gompertz se puede expresar matemáticamente en términos de la derivada de la función $1/\mu_x$ (que representa la fuerza de resistencia a la muerte), por lo tanto se tiene que:

$$D_x\left(\frac{1}{\mu_x}\right) = -h\left(\frac{1}{\mu_x}\right) \tag{2.2.3}$$

En donde h representa una constante de proporcionalidad.

Para poder obtener la fórmula de Gompertz es necesario hacer varias operaciones algebráicas a la expresión (2.2.2), las-cuales son:

- Despejar h del segundo miembro:

$$\frac{D_x\left(\frac{1}{\mu_x}\right)}{\frac{1}{\mu_x}} = -h$$

- Integrar ambos miembros con respecto a x:

$$\int \frac{D_x\left(\frac{1}{\mu_x}\right)}{\frac{1}{\mu_x}}\, dx = \int -h\, dx$$

- Aplicar integración directa

$$\log(1/\mu_x) = -(hx+k)$$

Donde k es la constante de integración

- Aplicar la función exponencial a ambos miembros de - la expresión: (dado que esta función es monótona y creciente no - altera la igualdad).

$$e^{\log(1/\mu_x)} = e^{-(hx+k)}$$

- Simplificar el primer miembro:

$$1/\mu_x = e^{-(hx+k)}$$

- Aplicar leyes de los exponentes:

$$\mu_x = e^{(hx+k)} = e^{hx}e^{k}$$

- Substituir la expresión $k = \log B$:

$$\mu_x = e^{+hx}\, e^{\log B}$$

- Simplificar el segundo miembro:

$$\mu_x = e^{+hx} \cdot B$$

- Substituir la expresión $c = e^{h}$

(2.2.4) $$\mu_x = B c^{x}$$

Esta expresión es la fórmula, que según Gompertz re - presenta el comportamiento de la mortalidad humana.

Como se puede apreciar las constantes B y C dependen de las constantes h y k respectivamente, las cuales se obtienen a partir de la mortalidad experimentada, generalmente fluctúan en los intervalos $[10^{-6}, 10^{-3}]$ para B, y (1.08,1.12) la C

El resultado más importante que se deriva de la expresión de Gompertz (2.2.4) es que la fuerza de mortalidad se incrementa en forma geométrica conforme avanza la edad.

Utilizando la ecuación (2.2.4) se puede encontrar fácilmente la expresión de Gompertz que representa a la curva l_x y se obtiene a partir de substituir en la fórmula:

$$l_x = l_0 \, e^{-\int_0^x \mu_y \, dy} \tag{2.2.5}$$

La expresión (2.2.4), se obtiene:

$$l_x = l_0 \, e^{-\int_0^x Bc^y \, dy}$$

- Realizando la integral del exponente:

$$l_x = l_0 \, e^{-\frac{B}{\log c}\int_0^x c^y \log c \, dy} = l_0 \, e^{-\frac{B}{\log c} c^y \Big]_0^x}$$

- Valuando en los límites de la integral:

$$l_x = l_0 e^{-\frac{B}{\log c}(c^x - 1)}$$

- Para simplificar esta expresión se define una nueva-constante g de tal manera que $\log g = -\frac{B}{\log c}$, con esta constante, la expresión queda:

$$l_x = l_0 e^{\log g (c^x - 1)}$$

- Aplicando leyes de los logantmos:

$$l_x = l_0 e^{-\log g^{(c^x - 1)}}$$

- Simplificando llegamos a:

$$l_x = l_0 g^{(c^x - 1)}$$

- Lo que algebraícamente equivale a:

$$l_x = \frac{l_0}{g}\, g^{c^x}$$

- Y por último, para obtener una expresión simplificada se define una constante k de tal manera que $k = l_0/g$, para que al final se obtenga la expresión:

$$l_x = k\, g^{c^x} \qquad (2.2.6)$$

La cual es la ecuación de la curva que representa a l_x según Gompertz, quien también estableció que la exactitud de la expresión depende de una elección adecuada de las constantes y que el rango de confiabilidad de esta oscila entre los 15 y 55 años.

En el año de 1860 Makeham estudió el trabajo realizado por Gompertz en lo referente al comportamiento de la mortalidad; después de hacer extensos análisis Makeham llegó a la conclusión de que la muerte es consecuencia de dos causas generales, que son:

i) La causa fortuita, sin previa disposición a la muer te.

ii) El deterioro o decremento de la resistencia a la muerte conforme avanza la edad.

De estas dos causas Gompertz, en su estudio, sólo consideró la segunda, por lo que Makeham, asumiendo que la muerte por causa fortuita se puede considerar como la adición de una constante al modelo de Gompertz, definió su expresión para la fuerza de mortalidad como:

$$\mu_x = A + BC^x \tag{2.2.7}$$

En donde **A** representa la constante que considera la causa fortuita de muerte.

A partir de esta expresión Makeham deduce la fórmula que, para él, representa el comportamiento de la función l_x y lo hace, al igual que Gompertz, a partir de la expresión:

$$l_x = l_0 \, e^{-\int_0^x \mu_y dy} \tag{2.2.5}$$

En la cual substituye su ecuación $\mu_x = A + BC^x$

$$l_x = l_0\, e^{-\int_0^x (A+Bc^y)\,dy}$$

- Integrando el exponente obtenemos:

$$l_x = l_0\, e^{-\int_0^x (A+Bc^y)\,dy} = l_0\, e^{-\left(Ay+\frac{Bc^y}{\log c}\right)\Big]_0^x} = l_0\, e^{\left(-Ax-\frac{Bc^x}{\log c}+\frac{B}{\log c}\right)}$$

- Con la finalidad de simplificar la expresión se buscan constantes s y g de tal manera que:

$$\log s = -A \qquad \text{y} \qquad \log g = -\frac{B}{\log c}$$

Así el exponente queda:

$$x\log s + \log g \cdot c^x - \log g = x\log s + \log g\,(c^x - 1)$$

- Finalmente se obtiene la expresión para l_x que es:

$$l_x = l_0\, e^{+\left(x\log s + (c^x-1)\log g\right)}$$

- Empleando leyes de los logaritmos se llega a:

$$l_x = l_o \, e^{+\log s^x + \log g^{(c^x-1)}}$$

- Aplicando leyes de los exponentes:

$$l_x = l_o \, e^{\log s^x} \cdot e^{\log g^{(c^x-1)}}$$

- Simplificando la expresión se tiene:

$$l_x = l_o \, s^x g^{(c^x-1)}$$

- Transformando algebraícamente llegamos a:

$$l_x = \frac{l_o}{g} s^x g^{c^x}$$

- Para obtener una ecuación más simple se substituye - l_o/g por una constante K y así la expresión que Makeham ofrece para la curva l_x queda de la siguiente manera:

(2.2.8) $$l_x = K \, s^x g^{c^x}$$

Esta expresión logra mejorar la ley de Gompertz, a tal grado de que el modelo encontrado por Makeham se puede aplicar con alto grado de confiabilidad en edades que van desde los 20 años, hasta casi el final de la tabla, los valores para la elección de las variables que recomienda el autor varian:

En el intervalo (0.001, 0.003) para la A; $[10^{-6}, 10^{-3}]$ para la B; y (1.08,1.12) para la C.

2.3 Modelos de Mortalidad Aplicados a Probabilidades de Vida Conjunta.

Conforme a la ley de Makeham se pueden encontrar expresiones que sirven para calcular probabilidades, tanto de vida conjunta, como para vida sencilla. A continuación se deducen estas expresiones a partir de que:

$${}_{n}p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Substituyendo en esta expresión (2.2.8) se obtiene

$${}_{n}p_x = \frac{k\, s^{x+n} g^{c^{x+n}}}{k\, s^{x}\, g^{c^{x}}}$$

Simplificando este cociente se llega a que:

$${}_{n}p_x = s^{n} g^{(c^{x+n}-c^{x})}$$

Por último factorizando el exponente de g se concluye:

3.1)

$${}_{n}p_x = s^{n} g^{c^{x}(c^{n}-1)}$$

La expresión para encontrar la probabilidad de que un- grupo de vida conjunta de edades $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_m$ sobreviva ν años se obtiene facilmente utilizando esta última expresión; conociendo que:

$$ {}_{\nu}p_{x_1x_2\ldots\ldots x_m} = \frac{l_{x_1+\nu}}{l_{x_1}} \cdot \frac{l_{x_2+\nu}}{l_{x_2}} \cdot \frac{l_{x_3+\nu}}{l_{x_3}} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{l_{x_m+\nu}}{l_{x_m}} $$

Y substituyendo la expresión (2.3.1) se llega a:

$$ {}_{\nu}p_{x_1x_2\ldots\ldots x_m} = s^{\nu} g^{c^{x_1}(c^{\nu}-1)} \cdot s^{\nu} g^{c^{x_2}(c^{\nu}-1)} \ldots\ldots\ldots\ldots s^{\nu} g^{c^{x_m}(c^{\nu}-1)} $$

Lo que simplificando se puede escribir como:

.2) $$ {}_{\nu}p_{x_1x_2\ldots\ldots x_m} = s^{m\nu} g^{(c^{x_1}+c^{x_2}+\ldots\ldots+c^{x_m})(c^{\nu}-1)} $$

Como se puede apreciar esta expresión resulta de complicado manejo dado que para calcular valores numéricos se necesita una extensa tabla de mortalidad. Con el objeto de simplificar este cálculo, en la práctica se acostrumbra substituir el grupo - de m vidas de edades $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ por un grupo de m personas, todas de edad X_ω la cual es muy fácil determinar, a partir de conocer la ecuación (2.3.2)

Se pretende encontrar una edad X_ω de tal manera que:

$$_{\mu}P_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m} = {}_{\mu}P_{x_\omega x_\omega x_\omega \cdots\cdots x_\omega}$$

o sea que:

$$S^{m\mu} g^{(c^{x_1}+c^{x_2}+\cdots\cdots+c^{x_m})(c^{\mu}-1)} = S^{m\mu} g^{(c^{x_\omega}+c^{x_\omega}+\cdots\cdots+c^{x_\omega})(c^{\mu}-1)}$$

- Al simplificar la expresión se reduce a:

$$g^{(c^{x_1}+c^{x_2}+\cdots\cdots c^{x_m})} = g^{m c^{x_\omega}}$$

- Por lo que el problema de encontrar la edad igual - equivalente X_ω de un grupo de m vidas de edades $X_1, X_2, X_3, \cdots\cdots X_m$ se reduce a encontrar una edad X_ω de tal manera que:

$$m c^{X_\omega} = c^{x_1} + c^{x_2} + c^{x_3} + \cdots\cdots + c^{x_m}$$

Al multiplicar todo por la constante B

$$m B c^{x_\omega} = Bc^{x_1} + Bc^{x_2} + Bc^{x_3} + \cdots\cdots + Bc^{x_m}$$

Sumando en ambos miembros la constante A multiplicada por m

$$mA + mBC^{x_w} = (A+BC^{x_1}) + (A+BC^{x_2}) + (A+BC^{x_3}) + \cdots\cdots + (A+BC^{x_m})$$

Conociendo que según Makeham $\mu_x = A + BC^x$ la expresión anterior se puede escribir como:

$$m\mu_{x_w} = m(A+BC^{x_w}) = \mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \mu_{x_3} + \cdots\cdots + \mu_{x_m}$$

Y por último se concluye que:

.3.3) $$\mu_{x_w} = \frac{\mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \cdots\cdots \mu_{x_m}}{m}$$

Por lo tanto la edad igual equivalente se define como la edad cuya fuerza instantánea de mortalidad es igual a la media aritmética de las fuerzas de mortalidad de las edades que conforman al grupo.

Este resultado es bastante útil cuando se trabaja con-datos provenientes de una tabla de mortalidad elaborada bajo el - modelo de Makeham debido a que los valores de μ_x y c^x generalmente- se encuentran escritos en este tipo de tablas.

En el caso de la ley de Gompertz, el cálculo de la - edad igual equivalente es más fácil y, se fundamenta en el hecho- de buscar una edad x_w de tal manera que el grupo de vida conjunta se pueda substituir por una vida sencilla de edad x_w o sea que el problema se reduce a buscar una edad x_w tal que:

$$c^{x_w} = c^{x_1} + c^{x_2} + c^{x_3} + \cdots\cdots + c^{x_m}$$

Al multiplicar esta expresión por la constante B se- obtiene:

$$Bc^{x_w} = Bc^{x_1} + Bc^{x_2} + \cdots\cdots + Bc^{x_m}$$

Y esta expresión se puede escribir como:

$$\mu_{x_w} = \mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \mu_{x_3} + \cdots\cdots + \mu_{x_m}$$

Debido a que para Gompertz $\mu_x = Bc^x$

En este caso la edad igual equivalente es aquella en la cual la fuerza de mortalidad sencilla, es igual a la suma de las fuerzas de mortalidad de las edades que integran el grupo.

Como se puede observar, en el cálculo de la edad igual equivalente, (tanto para Gompertz, como para Makeham) se puede dar el caso en el que la fuerza de mortalidad obtenida para la edad X_ω no coincida con las edades que aparecen en la tabla de mortalidad, entonces se obtiene X_ω a partir de emplear interpolación lineal con respecto a los límites del intervalo en el cual debe estar

2.4 Ley de Envejecimiento Uniforme.

En el caso de un grupo de vida conjunta de dos personas, la edad igual equivalente se encuentra de una manera sencilla utilizando la ley de Makeham. Si se considera un grupo de vida conjunta de dos personas con edades $x, x+\mu$ entonces, este grupo se puede substituir por el grupo de vida conjunta de edades $x+T, x+T$ y en base a Makeham se puede escribir:

$$2c^{x+T} = c^{x} + c^{x+\mu}$$

Que al factorizar queda:

$$2c^{T} = 1 + c^{\mu}$$

Despejando obtenemos

$$c^{T} = \frac{1+c^{\mu}}{2}$$

$$\log c^{T} = \log\left(\frac{1+c^{\mu}}{2}\right)$$

Lo que por leyes de los logaritmos se puede escribir - como:

$$t \log c = \log(1+c^{N}) - \log 2$$

Y finalmente obtenemos el valor de t

(2.4.1) $$t = \frac{\log(1+c^{N}) - \log 2}{\log c}$$

Analizando este resultado es fácil darse cuenta que el factor de envejecimiento T depende únicamente de N (la diferencia de edades), ya que C es constante para cualquier tabla - de mortalidad elaborada sobre una base Makehamizada, por esta razón se puede construir una tabla de envejecimiento uniforme, en - la que se muestran los valores que toma el factor de envejecimiento (T) con respecto a la diferencia de edades. La elaboración de la tabla resulta un cálculo sencillo, pues sólo basta tabularla expresión (2.4.1) para los valores que puede tomar N (los cuales varian entre 1 y la diferencia entre la mayor y menor edad de la tabla de mortalidad)

Como se puede apreciar el cálculo de la edad igual equivalente para un grupo de dos vidas, $x, x+n$ resulta fácil si se cuenta con una tabla de envejecimiento, pues sólo basta restar las dos edades y buscar en la tabla el valor que le corresponde a

Cuando se quiere encontrar la edad igual equivalente para un grupo de vida formado por 4 personas de edades x_1, x_2, x_3, x_4 lo que se hace es encontrar 2 edades equivalentes, r y s a partir de la tabla de envejecimiento uniforme, de tal manera que r sea equivalente de x_1 y x_2, y s la edad equivalente de x_3 y x_4, y después bajo el mismo método encontrar la edad equivalente para r y s obteniendo así la edad igual equivalente para el grupo

En la práctica como las edades r y s son calculadas, no siempre son exactas y lo que se acostumbre hacer es interpolar en valores de la tabla, para después obtener la edad igual equivalente definitiva.

Capítulo 3: "Probabilidades de Ultimo Sobreviviente, Grupo Generalizado y Funciones Contingentes"

3.1 Probabilidades del Ultimo Sobreviviente.

En el capítulo anterior se desarrolló el grupo de vidas, considerando que fracasaría en el "momento de ocurrir la primera muerte", en el presente se estudiará el caso en que el grupo fracasa al "momento de morir el último sobreviviente". Para denotar el grupo de m vidas que conforman un grupo de último sobreviviente se utilizará el siguiente símbolo:

$$(\overline{x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_m})$$

La probabilidad de que el grupo de último sobreviviente $(\overline{x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_m})$, sobreviva ν años se denotará como:

$${}_{\nu}p_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}}$$

Esta probabilidad se puede interpretar como la probabilidad de que al menos uno de los integrantes del grupo llegue con vida al año ν, Se observa claramente que este evento su puede considerar como el complemento del evento de que todos los integrantes mueran en el trascurso de los ν años siguientes.

Se denotará la probabilidad de que una persona de edad muera dentro de ν años como ${}_{\nu}q_x$ y se define como:

(3.1.1) $${}_{\nu}q_x = 1 - {}_{\nu}p_x$$

Considerando que los eventos ${}_{\nu}q_{x_i}$ son aleatoriamente independientes, se concluye que la probabilidad denotada por ${}_{\nu}p_{\overline{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}$ se puede expresar mediante la ecuación:

(3.1.2) $${}_{\nu}p_{\overline{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}} = 1 - {}_{\nu}q_{x_1}\cdot{}_{\nu}q_{x_2}\cdot{}_{\nu}q_{x_3}\cdots\cdots\cdots\cdots{}_{\nu}q_{x_m}\,.$$

Al substituir la expresión (3.1.1) en esta última ecuación se obtiene que:

$${}_{\nu}p_{\overline{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}} = 1-(1-{}_{\nu}p_{x_1})\cdot(1-{}_{\nu}p_{x_2})(1-{}_{\nu}p_{x_3})\cdots\cdots\cdots\cdots(1-{}_{\nu}p_{x_m})$$

Desarrollando algebraicamente esta expresión se tiene:

(3.1.3) $$\begin{aligned}{}_{\nu}p_{\overline{x_1x_2\cdots\cdots x_m}} &= ({}_{\nu}p_{x_1}+{}_{\nu}p_{x_2}+{}_{\nu}p_{x_3}+\cdots\cdots\cdots\cdots+{}_{\nu}p_{x_m})\\ &-({}_{\nu}p_{x_1x_2}+{}_{\nu}p_{x_1x_3}+\cdots\cdots{}_{\nu}p_{x_1x_m}+{}_{\nu}p_{x_2x_3}+{}_{\nu}p_{x_2x_4}\cdots\cdots+{}_{\nu}p_{x_2x_m}+\cdots\cdots{}_{\nu}p_{x_{m-1}x_m})\\ &+({}_{\nu}p_{x_1x_2x_3}+{}_{\nu}p_{x_1x_2x_4}+\cdots\cdots{}_{\nu}p_{x_1x_2x_m}+{}_{\nu}p_{x_2x_3x_4}+\cdots\cdots\cdots\cdots{}_{\nu}p_{x_{m-2}x_{m-1}x_m})\\ &\;\vdots\\ &-(\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots)\\ &\;\vdots\end{aligned}$$

$$\vdots + (-1)^{m+1} \; {}_{n}P_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots\cdots x_m}$$

Que en términos de sumatorias se puede escribir como:

$$(3.1.4) \qquad {}_{n}P_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}} = \sum {}_{n}P_{x_1} - \sum {}_{n}P_{x_1 x_2} + \cdots\cdots - \cdots\cdots + (-1)^{m+1} \sum {}_{n}P_{x_1 x_2 \cdots\cdots x_m}$$

En donde las sumatorias representan todas las posibles combinaciones de edades tomadas, de una en una, de dos en dos, de tres en tres, y así sucesivamente.

Otra probabilidad importante que se debe mencionar es- aquella que considera el evento de que el grupo fracase, es decir que todos sus integrantes mueran en el transcurso de los n años- siguientes, la cual estará denotada por ${}_{n}q_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}}$, este - evento es el complemento de ${}_{n}P_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}}$

Lo que nos lleva a la siguiente ecuación:

$$(3.1.5) \qquad {}_{n}q_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}} = 1 - {}_{n}P_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}}$$

La probabilidad de que el grupo fracase exactamente en el año $\nu+1$ se puede considerar como la combinación de dos suce-- sos:

—Que el grupo llegue con vida al año

—Que el grupo fracase durante el año

Esta probabilidad estará denotada por ${}_{\nu|}q_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}}$ y con la consideración de que los eventos que la forman son independientes; se llega a la siguiente expresión:

$$(3.1.6) \qquad {}_{\nu|}q_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}} = {}_{\nu}p_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}} \left(1 - {}_{1}p_{\overline{x_1+\nu: x_2+\nu: \cdots\cdots\cdots : x_m+\nu}}\right)$$

$$= {}_{\nu}p_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}} - {}_{\nu}p_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots x_m}} \cdot {}_{1}p_{\overline{x_1+\nu: x_2+\nu: \cdots\cdots\cdots ; x_m+\nu}}$$

El producto del segundo término se puede escribir como ${}_{\nu+1}p_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots\cdots x_m}}$ realizando un desarrollo similar al del apartado 2.1

Por lo tanto se concluye que:

$$(3.1.7) \qquad {}_{\nu|}q_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}} = {}_{\nu}p_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}} - {}_{\nu+1}p_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}}$$

Para el caso de grupos formados por dos y tres vidas de edades (x, y, z), las funciones probabilísticas quedan definidas de la siguiente manera:

(3.1.8):

a) $${}_{n}p_{\overline{xy}} = \sum {}_{n}p_{x} - \sum {}_{n}p_{xy} = {}_{n}p_{x} + {}_{n}p_{y} - {}_{n}p_{xy}$$

b) $${}_{n}p_{\overline{xyz}} = \sum {}_{n}p_{x} - \sum {}_{n}p_{xy} + \sum {}_{n}p_{xyz} = {}_{n}p_{x} + {}_{n}p_{y} + {}_{n}p_{z} - {}_{n}p_{xy} - {}_{n}p_{xz} - {}_{n}p_{yz} + {}_{n}p_{xyz}$$

c) $${}_{n}q_{\overline{xy}} = 1 - {}_{n}p_{\overline{xy}} = 1 - {}_{n}p_{x} - {}_{n}p_{y} + {}_{n}p_{xy}$$

d) $${}_{n|}q_{\overline{xy}} = {}_{n}p_{\overline{xy}} - {}_{n+1}p_{\overline{xy}} = ({}_{n}p_{x} + {}_{n}p_{y} - {}_{n}p_{xy}) - ({}_{n+1}p_{x} + {}_{n+1}p_{y} - {}_{n+1}p_{xy})$$

Para el caso de un grupo de vida de 4 personas de edades (x_1, x_2, x_3, x_4), la función ${}_{n}p_{\overline{x_1x_2x_3x_4}}$ queda representada de la siguiente forma:

(3.1.9) $${}_{n}p_{\overline{x_1x_2x_3x_4}} = \sum {}_{n}p_{x_1} - \sum {}_{n}p_{x_1x_2} + \sum {}_{n}p_{x_1x_2x_3} - \sum {}_{n}p_{x_1x_2x_3x_4}$$

Es conveniente hacer notar de nuevo que las sumatorias son entendidas como la suma de todas las combinaciones posibles de m vidas tomadas, de una en una, de dos en dos, tres en tres, etc.

Así la expresión (3.1.9) se puede escribir como:

$$ {}_np_{x_1x_2x_3x_4} = ({}_np_{x_1} + {}_np_{x_2} + {}_np_{x_3} + {}_np_{x_4}) - ({}_np_{x_1x_2} + {}_np_{x_1x_3} + {}_np_{x_1x_4} + {}_np_{x_2x_3} + {}_np_{x_2x_4} + {}_np_{x_3x_4}) $$

$$ + ({}_np_{x_1x_2x_3} + {}_np_{x_1x_2x_4} + {}_np_{x_1x_3x_4} + {}_np_{x_2x_3x_4}) - {}_np_{x_1x_2x_3x_4} $$

Como se puede observar, mediante el uso de la expre -- sión (3.1.3) el cálculo de probabilidades del último sobreviviente, es relativamente sencillo, debido a que todos los términos de las sumas quedan en función de probabilidades de vida sencilla y- de vida conjunta, las que pueden ser calculadas por medio de la - tabla de mortalidad.

3.2 Probabilidades del Grupo de Vida Generalizado.

El grupo de vida conjunta y el grupo del último sobreviviente pueden ser vistos como casos especiales del grupo de vida generalizado, el cual se define como un grupo de m vidas de edades $x_1, x_2, \cdots x_m$ que continúa con vida mientras al menos r de las m vidas sobreviven, es decir fracasa al momento de ocurrir la $m-r+1$ muerte. El grupo de vida generalizado estará denotado por el símbolo:

$$\left(\overline{x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_m}^{\,r}\right)$$

Es claro que cuando r es igual a m, este grupo se reduce a uno de "vida conjunta" $(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_m)$ y cuando r es igual a uno se trata de un grupo de "vida del último sobreviviente" $(\overline{x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_m})$

La probabilidad de que un grupo de vida generalizado sobreviva n años, estará denotado por:

$${}_{n}p_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}^{\,r}}$$

Representando la probabilidad de que al menos r de las m vidas que conforman al grupo permanezcan con vida al final del año n, Para evaluar esta probabilidad es necesario, encontrar primeramente la probabilidad de que exactamente r vidas sobrevivan al final de n años, la cual se denotará por:

$$_{n}p_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots\cdots x_m}}^{[r]}$$

El problema de evaluar esta probabilidad resulta bastante complicado, por lo que se hace necesario encontrar primeramente una expresión que permita calcular ésta probabilidad para el caso de m vidas de la misma edad (x); en este caso la probabilidad de que exactamente r vidas específicas sobrevivan al final de n años y las $m-r$ restantes fallezcan, es:

(3.2.1) $$({}_{n}p_x)^r \, (1 - {}_{n}p_x)^{m-r}$$

Pero existen $\binom{m}{r}$ formas distintas de escoger al grupo de r vidas que sobrevivirán, de aqui que la probabilidad quede expresada de la siguiente forma:

(3.2.2) $$_{n}p_{\overline{x_1 x_2 \cdots\cdots x_m}}^{[r]} = \binom{m}{r} ({}_{n}p_x)^r \cdot (1 - {}_{n}p_x)^{m-r}$$

Resulta claro que esta expresión es equivalente al coe ficiente de T^r en la expansión binomial de:

$$(3.2.3) \qquad ({}_{n}p_x \cdot T + {}_{n}q_x)^m$$

Por lo tanto se concluye que la probabilidad de que en un grupo de vida generalizado formado por personas de edad x sobreviva n años es igual al coeficiente de T^r en la expansión del binomio representado en la ecuación (3.2.3).

Consideremos ahora el caso en el que las m vidas que integran el grupo sean de diferentes edades $(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_m)$, entonces la probabilidad de que exactamente r vidas específicas ($x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots\cdots x_r$) permanezcan con vida al año n , y las demás $(x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots\cdots\cdots\cdots, x_m)$ esten muertas se puede escribir como:

$$(3.2.4) \qquad {}_{n}p_{x_1} \cdot {}_{n}p_{x_2} \cdot {}_{n}p_{x_3} \cdot {}_{n}p_{x_4} \cdots\cdots {}_{n}p_{x_r} \cdot (1 - {}_{n}p_{x_{r+1}}) \cdot (1 - {}_{n}p_{x_{r+2}}) \cdots\cdots (1 - {}_{n}p_{x_m})$$

Pero la probabilidad denotada por ${}_{n}p_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}}^{[r]}$ considera a todas las combinaciones posibles que contienen exactamente r factores de la forma ${}_{n}p_x$ y $m-r$ factores de la forma $1-{}_{n}p_x$

Para encontrar la expresión que permita representar es ta probabilidad es necesario analizar la ecuación (3.2.3)

Escribir el binomio $({}_{n}p_x \cdot t + {}_{n}q_x)^m$ representa multiplicar m veces la expresión $({}_{n}p_x \cdot t + {}_{n}q_x)$; o sea:

$$({}_{n}p_x \cdot t + {}_{n}q_x)^m = \underbrace{({}_{n}p_x t + {}_{n}q_x)({}_{n}p_x \cdot t + {}_{n}q_x)\cdots\cdots}_{m\ \text{veces}}({}_{n}p_x t \cdot {}_{n}q_x)$$

Pero ésto es para el caso de m vidas, todas de edad x, sin embargo, nos interesa el caso en que las m vidas son de diferentes edades $(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_m)$, lo que implicaría que el producto quede escrito como:

$$(3.2.5) \qquad ({}_{n}p_{x_1} \cdot t + {}_{n}q_{x_1})({}_{n}p_{x_2} t + {}_{n}q_{x_2})({}_{n}p_{x_3} t + {}_{n}q_{x_3})\cdots\cdots({}_{n}p_{x_m} t + {}_{n}q_{x_m})$$

Siendo el coeficiente de t^r en la expansión de este producto la suma de todos los términos que pueden ser formados multiplicando r factores $({}_{n}p_x)$ y $m-r$ factores $({}_{n}q_x)$ llegando así a la suma que se requiere, para encontrar la probabilidad denotada por ${}_{n}p_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}}^{[r]}$

Por lo tanto, se concluye que:

(3.2.6) ${}_{n}p_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}}^{[r]} =$ al coeficiente de t^r en la -

expansión del producto:

$$({}_{n}p_{x_1}t + {}_{n}q_{x_1})\,({}_{n}p_{x_2}t + {}_{n}q_{x_2})\cdots\cdots\cdots({}_{n}p_{x_m}t + {}_{n}q_{x_m})$$

Como resulta claro que esta expresión es complicada en su manejo; con la finalidad de simplificar esta última, se rees - cribirá este producto como:

$$({}_{n}p_{x_1}t+(1-{}_{n}p_{x_1}))\,({}_{n}p_{x_2}t+(1-{}_{n}p_{x_2}))\,({}_{n}p_{x_3}t+(1-{}_{n}p_{x_3}))\cdots\cdots({}_{n}p_{x_m}t+(1-{}_{n}p_{x_m}))$$

Reagrupando términos en cada uno de los factores se - tiene que el producto se puede escribir de la siguiente manera:

$$[1+(t-1)\,{}_{n}p_{x_1}]\,[1+(t-1)\,{}_{n}p_{x_2}]\,[1+(t-1)\,{}_{n}p_{x_3}]\cdots\cdots[1+(t-1)\,{}_{n}p_{x_m}] \qquad (.2.7)$$

Desarrollando este producto para el caso de 3 vidas, - tenemos:

$$[1+(t-1)\,{}_{n}p_{x_1}]\;[1+(t-1)\,{}_{n}p_{x_2}]\;[1+(t-1)\,{}_{n}p_{x_3}] =$$

$$=[1+(t-1)\,{}_{n}p_{x_1}+(t-1)\,{}_{n}p_{x_2}+(t-1)^2\,{}_{n}p_{x_1x_2}]\;[1+(t-1)\,{}_{n}p_{x_3}] =$$

$$=[1+(t-1)\,{}_{n}p_{x_1}+(t-1)\,{}_{n}p_{x_2}+(t-1)\,{}_{n}p_{x_3}+(t-1)^2\,{}_{n}p_{x_1x_2}+(t-1)^2\,{}_{n}p_{x_1x_3}+(t-1)^2\,{}_{n}p_{x_2x_3}+(t-1)^3\,{}_{n}p_{x_1x_2x_3}]=$$

$$=[1+(t-1)({}_{n}p_{x_1}+{}_{n}p_{x_2}+{}_{n}p_{x_3})+(t-1)^2({}_{n}p_{x_1x_2}+{}_{n}p_{x_1x_3}+{}_{n}p_{x_2x_3})+(t-1)^3\,{}_{n}p_{x_1x_2x_3}]$$

Definiendo $Z_s = \sum_\mu P_{x_1 x_2 x_3 \cdots x_s}$, como todas posi -- bles combinaciones de m vidas tomadas de s, la expresión anterior se puede escribir como:

$$1 + (t-1) Z_1 + (t-1)^2 Z_2 + (t-1)^3 Z_3$$

Y lógicamente el producto (3.2.5) se puede reescribir- de la siguiente forma:

$$1 + (t-1) Z_1 + (t-1)^2 Z_2 + (t-1)^3 Z_3 + \cdots\cdots + (t-1)^m Z_m \qquad (3.2.8)$$

En esta expresión el coeficiente de t^r aparece solamente en los términos que tienen Z_s $(s \geq r)$.

Por el teorema del binomio, es fácil saber que el coeficiente de t^r en el término Z_s es:

$$(-1)^{s-r} \binom{s}{s-r} Z_s \qquad (3.2.9)$$

Pero como se dijo anteriormente t^r aparece en todos - los términos que tienen Z_s con $s \geq r$, siendo el coeficiente completo de t^r en el producto (3.2.7):

$$\sum_{s=r}^{m} (-1)^{s-r} \binom{s}{s-r} Z_s$$

Encontrándose así la expresión que se desea obtener - para representar la probabilidad denotada por ${}_{n}p_{\overline{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}^{[r]}$ y concluyendo que:

$$(3.2.10) \qquad {}_{n}p_{\overline{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}^{[r]} = \sum_{s=r}^{m} (-1)^{s-r} \binom{s}{s-r} Z_s$$

A esta última expresión se le conoce como el método Z para calcular probabilidades del grupo de vida generalizado.

Como se puede observar esta expresión queda en función de Z_s, la cual como se definió anteriormente son sumatorias de- ${}_{n}p_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_s}$, sobre todas las combinaciones posibles de m vidas, tomadas de s, las cuales pueden calcularse fácilmente a - partir de las tablas de mortalidad.

Regresando ahora al problema inicial, la probabilidad- de que al menos r vidas sobrevivan al final del año n, denotada por ${}_{n}p_{\overline{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}^{r}$, se puede calcular mediante la utilización de la expresión:

$$(3.2.11) \qquad {}_{n}p_{\overline{x_1x_2\cdots\cdots x_m}}^{r} = \sum_{s=r}^{m} (-1)^{s-r} \binom{s-1}{s-r} Z_s$$

La cual al desarrollar la sumatoria queda de la forma:

$$(3.2.12) \qquad {}_{n}p_{\overline{x_1x_2x_3\cdots x_m}}^{\,r} = Z_r - \binom{r}{1} Z_{r+1} + \binom{r+1}{2} Z_{r+2} - \cdots\cdots + \cdots\cdots + (-1)^{m-r}\binom{m-1}{m-r} Z_m$$

La demostración de esta expresión se hace por medio - del método inductivo sobre r

i) Cuando $r=1$, queda de la siguiente forma:

$${}_{n}p_{\overline{x_1x_2x_3\cdots x_m}}^{\,1} = Z_1 - Z_2 + Z_3 - Z_4 + \cdots\cdots\cdots + (-1)^{m-1} Z_m$$

La cual corresponde exactamente a la forma encontrada- para la probabilidad de que el grupo del último sobreviviente - sobreviva n años, por lo tanto la expresión (3.2.11) es válida - para $r=1$

ii) Por demostrar que si la fórmula se cumple para $r=k$, entonces se cumple para $r=k+1$

Para demostrar esto, primeramente se definirán 3 eventos:

Evento A: Es el evento en que al menos sobreviven $k+1$ personas al final del año ν , o sea que sobreviven, $k+1$, o $k+2$, o $k+3$, o así sucesivamente hasta m

Evento B: Es el evento en el cual sobreviven al menos- k personas al final del año ν

Evento C: Este evento denotará el hecho de que sobrevivan exactamente k personas al final de ν años.

A partir de la definición de estos eventos, se escribirán en términos de probabilidades quedando de la siguiente forma:

$$P(B) = P(A \cup C)$$

Es decir, la probabilidad de que sobrevivan al menos - k personas al final del año ν , es igual a la probabilidad de- que sobrevivan axactamente k ó sobrevivan al menos $k+1$ personas al final del año ν

Resulta claro que los eventos A y C son ajenos entre- si $(A \cap C = \phi)$ por lo que se puede asegurar que:

$$P(B) = P(A) + P(C)$$

Lo que en términos actuariales se puede escribir como:

$$ {}_{n}P_{\overline{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}^{k} = {}_{n}P_{\overline{x_1x_2x_3\cdots x_m}}^{[k]} + {}_{n}P_{\overline{x_1x_2x_3\cdots x_m}}^{k+1} $$

Despejando ${}_{n}P_{\overline{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}^{k+1}$ se obtiene la ecuación:

(3.2.13) $$ {}_{n}P_{\overline{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}^{k+1} = {}_{n}P_{\overline{x_1x_2x_3\cdots x_m}}^{k} - {}_{n}P_{\overline{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}^{[k]} $$

Regresando a la demostración, por inducción, se pretende probar que si la fórmula (3.2.11) vale para $r=k$, también vale para $r=k+1$; lo cual se hará a través de la ecuación (3.2.13):

La cual en términos de la fórmula (3.2.11) se puede escribir como:

$$ {}_{n}P_{\overline{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}^{k+1} = \sum_{s=k}^{m} (-1)^{s-k} \binom{s-1}{s-k} Z_s - \sum_{s=k}^{m} (-1)^{s-k} \binom{s}{s-k} Z_s $$

(3.2.14) $$ = \sum_{s=k}^{m} (-1)^{s-k} \left[\binom{s-1}{s-k} - \binom{s}{s-k} \right] Z_s $$

Pero

$$\binom{s-1}{s-k}-\binom{s}{s-k}=\frac{(s-1)!}{(s-k)!\,(s-1-s+k)!}-\frac{s!}{(s-k)!\,(s-s+k)!}$$

$$=\frac{(s-1)!}{(s-k)!\,(k-1)!}-\frac{s!}{(s-k)!\,k!}$$

Efectuando la resta y factorizando $(s-1)!$

$$=\frac{k(s-1)!-s!}{(s-k)!\,(k-1)!}=\frac{(s-1)!\,(k-s)}{(s-k)!\,k!}$$

$$=-\frac{(s-1)!\,(s-k)}{(s-k)!\,k!}$$

Simplificando factores en el denominador y numerador - se tiene que:

$$-\frac{(s-1)!}{(s-k-1)!\,k!}$$

Considerando que $k=s-1-(s-k-1)$ la expresión ante- - rior se puede reescribir como:

$$-\frac{(s-1)!}{(s-k-1)!\,(s-1-(s-k-1))!}$$

La cual se puede identificar como:

$$(-1)\frac{(s-1)!}{(s-k-1)!\,(s-1-(s-k-1))!} = (-1)\binom{s-1}{s-k-1}$$

Por lo tanto la expresión (3.2.14) se puede simplificar como:

$$\sum_{s=k+1}^{m} (-1)^{s-k-1} \binom{s-1}{s-k-1} Z_s$$

Lo que demuestra la válidez de la fórmula (3.2.11); para todo r entero positivo.

Para el caso del grupo de vida generalizado, la probabilidad denotada por ${}_{\nu}q_{\overline{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}^{\,r}$, es decir, la probabilidad de que el grupo fracase en el transcurso de los ν años siguientes se define de manera análoga a los casos anteriores, o sea:

(3.2.15) $$ {}_{\nu}q_{\overline{x_1x_2x_3\cdots x_m}}^{\,r} = 1 - {}_{\nu}p_{\overline{x_1x_2x_3\cdots x_m}}^{\,r}$$

3.3 Ejemplos de Probabilidades del Grupo Generalizado para 2, 3- y 4 Personas.

Este apartado pretende ejemplificar el uso de las expresiones expuestas en el apartado 3.2.

Ejemplo 1: El grupo de vida conjunta se puede considerar como un caso particular del grupo de vida generalizado, en el cual $r=m$ o sea que puede representarse de la siguiente forma:

$$ {}_n p_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = {}_n p_{\overline{x_1x_2x_3x_4\cdots\cdots x_m}}^{\;m} $$

A partir de la expresión (3.2.10)

$$ {}_n p_{\overline{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}^{\;m} = (-1)^{m-m}\binom{m-1}{m-m} Z_m = (1)(1)Z_m $$

$$ = {}_n p_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} $$

Ejemplo 2: La expansión del producto (3.2.5) para el caso de 3 vidas:

$$ ({}_n p_{x_1} t + {}_n q_{x_1})({}_n p_{x_2} t + {}_n q_{x_2})({}_n p_{x_3} t + {}_n q_{x_3}) = $$

$$ ({}_n p_{x_1x_2} t^2 + {}_n p_{x_1}\,{}_n q_{x_2} t + {}_n q_{x_1}\,{}_n p_{x_2} t + {}_n q_{x_1}\,{}_n q_{x_2})({}_n p_{x_3} t + {}_n q_{x_3}) = $$

$$= {}_n p_{x_1x_2x_3}\, t^3 + {}_n p_{x_1x_3}\, {}_n q_{x_2}\, t^2 + {}_n p_{x_2x_3}\, {}_n q_{x_1}\, t^2 + {}_n p_{x_1x_2}\, {}_n q_{x_3}\, t^2 + {}_n p_{x_1} \cdot {}_n q_{x_2} \cdot {}_n q_{x_3}\, t + {}_n p_{x_3}\, {}_n q_{x_1}\, {}_n q_{x_2}\, t + {}_n p_{x_2}\, {}_n q_{x_1}\, {}_n q_{x_3}\, t + {}_n q_{x_1} \cdot {}_n q_{x_2} \cdot {}_n q_{x_3} =$$

$$= t^3\, {}_n p_{x_1x_2x_3} + t^2 \left({}_n p_{x_1x_3}\, {}_n q_{x_2} + {}_n p_{x_2x_3}\, {}_n q_{x_1} + {}_n p_{x_1x_2}\, {}_n q_{x_3} \right) + t \left({}_n p_{x_1}\, {}_n q_{x_2}\, {}_n q_{x_3} + {}_n p_{x_3}\, {}_n q_{x_1}\, {}_n q_{x_2} + {}_n p_{x_2}\, {}_n q_{x_1}\, {}_n q_{x_3} \right) + {}_n q_{x_1} \cdot {}_n q_{x_2} \cdot {}_n q_{x_3} =$$

$$= t^3\, {}_n p_{x_1x_2x_3} + t^2 \left({}_n p_{x_1x_3}(1 - {}_n p_{x_2}) + {}_n p_{x_2x_3}(1 - {}_n p_{x_1}) + {}_n p_{x_1x_2}(1 - {}_n p_{x_3}) \right) + t \left({}_n p_{x_1}(1 - {}_n p_{x_2})(1 - {}_n p_{x_3}) + {}_n p_{x_2}(1 - {}_n p_{x_1})(1 - {}_n p_{x_3}) + {}_n p_{x_3}(1 - {}_n p_{x_1})(1 - {}_n p_{x_2}) \right) + (1 - {}_n p_{x_1})(1 - {}_n p_{x_2})(1 - {}_n p_{x_3}) =$$

$$= t^3\, {}_n p_{x_1x_2x_3} + t^2 \left({}_n p_{x_1x_3} + {}_n p_{x_2x_3} + {}_n p_{x_1x_2} - {}_n p_{x_1x_2x_3} - {}_n p_{x_1x_2x_3} - {}_n p_{x_1x_2x_3} \right) + t \left({}_n p_{x_1} - {}_n p_{x_1x_2} - {}_n p_{x_1x_3} + {}_n p_{x_1x_2x_3} + {}_n p_{x_2} - {}_n p_{x_1x_2} - {}_n p_{x_2x_3} + {}_n p_{x_1x_2x_3} + {}_n p_{x_3} - {}_n p_{x_1x_3} - {}_n p_{x_2x_3} + {}_n p_{x_1x_2x_3} \right) + \left(1 - {}_n p_{x_1} - {}_n p_{x_2} + {}_n p_{x_1x_2} - {}_n p_{x_3} + {}_n p_{x_1x_3} + {}_n p_{x_2x_3} - {}_n p_{x_1x_2x_3} \right) =$$

$$= t^3 \left({}_n p_{x_1x_2x_3} \right) + t^2 \left({}_n p_{x_1x_2} + {}_n p_{x_1x_3} + {}_n p_{x_2x_3} - 3\, {}_n p_{x_1x_2x_3} \right) + t \left({}_n p_{x_1} + {}_n p_{x_2} + {}_n p_{x_3} - 2\left({}_n p_{x_1x_2} + {}_n p_{x_1x_3} + {}_n p_{x_2x_3} \right) + 3\, {}_n p_{x_1x_2x_3} \right) + \left(1 - {}_n p_{x_1} - {}_n p_{x_2} - {}_n p_{x_3} + {}_n p_{x_1x_2} + {}_n p_{x_1x_3} + {}_n p_{x_2x_3} - {}_n p_{x_1x_2x_3} \right) \tag{3.3.1}$$

Ejemplo 3: A partir de la expresión (3.3.1) calcular - las siguientes probabilidades:

a) ${}_{\nu}P^{[1]}_{X_1X_2X_3}$: esta probabilidad, es igual al coeficiente de t^1 en la expresión 3.3.1, quedando representada de la si- - guiente forma:

$$ {}_{\nu}P^{[1]}_{X_1X_2X_3} = {}_{\nu}P_{X_1} + {}_{\nu}P_{X_2} + {}_{\nu}P_{X_3} - 2\left({}_{\nu}P_{X_1X_2} + {}_{\nu}P_{X_1X_3} + {}_{\nu}P_{X_2X_3}\right) + 3\,{}_{\nu}P_{X_1X_2X_3} $$

b) ${}_{\nu}P^{[2]}_{X_1X_2X_3}$: el coeficiente de t^2 representa esta probabilidad, reduciéndose el cálculo a:

$$ {}_{\nu}P^{[2]}_{X_1X_2X_3} = {}_{\nu}P_{X_1X_2} + {}_{\nu}P_{X_1X_3} + {}_{\nu}P_{X_2X_3} - 3\,{}_{\nu}P_{X_1X_2X_3} $$

Ejemplo 4: Calcular las probabilidades ${}_{\nu}P^{[1]}_{X_1X_2X_3}$ y ${}_{\nu}P^{[2]}_{X_1X_2X_3}$ utilizando el método Z

a) $$ {}_{\nu}P^{[1]}_{X_1X_2X_3} = (-1)^{s-1}\binom{s}{s-1} Z_s = $$

$$ = (-1)^0\binom{1}{0}Z_1 + (-1)^1\binom{2}{1}Z_2 + (-1)^2\binom{3}{2}Z_3 = $$

$$ = Z_1 - 2Z_2 + 3Z_3 $$

$$ = {}_{\nu}P_{X_1} + {}_{\nu}P_{X_2} + {}_{\nu}P_{X_3} - 2\left({}_{\nu}P_{X_1X_2} + {}_{\nu}P_{X_1X_3} + {}_{\nu}P_{X_2X_3}\right) + 3\,{}_{\nu}P_{X_1X_2X_3} $$

b) $${}_{N}P^{[2]}_{X_1X_2X_3} = \sum_{s=2}^{3} (-1)\binom{s}{s-2} Z_s$$

$$= (-1)^0 \binom{2}{0} Z_2 + (-1)^1 \binom{3}{2} Z_3$$

$$= Z_2 - 3Z_3$$

$$= {}_{N}P_{X_1X_2} + {}_{N}P_{X_1X_3} + {}_{N}P_{X_2X_3} - 3\,{}_{N}P_{X_1X_2X_3}$$

Ejemplo 5: Calcular por el método Z las siguientes - probabilidades:

a) $${}_{N}P^{[2]}_{X_1X_2X_3X_4} =$$

$${}_{N}P^{[2]}_{X_1X_2X_3X_4} = \sum_{s=2}^{4} (-1)^{s-2} \binom{s}{s-2} Z_s =$$

$$= (-1)^0 \binom{2}{0} Z_2 + (-1)^1 \binom{3}{1} Z_3 + (-1)^2 \binom{4}{2} Z_4 =$$

$$= Z_2 - 3Z_3 + 6Z_4$$

$$= {}_{N}P_{X_1X_2} + {}_{N}P_{X_1X_3} + {}_{N}P_{X_1X_4} + {}_{N}P_{X_2X_3} + {}_{N}P_{X_2X_4} + {}_{N}P_{X_3X_4}$$

$$-3\left({}_{N}P_{X_1X_2X_3} + {}_{N}P_{X_1X_2X_4} + {}_{N}P_{X_1X_3X_4} + {}_{N}P_{X_2X_3X_4}\right) + 6\,{}_{N}P_{X_1X_2X_3X_4}$$

b) ${}_N P^{[3]}_{x_1x_2x_3x_4} =$

$${}_N P^{[3]}_{x_1x_2x_3x_4} = \sum_{s=3}^{4} (-1)^{s-3} \binom{s}{s-3} Z_s =$$

$$= (-1)^0 \binom{3}{0} Z_3 + (-1)^1 \binom{4}{1} Z_4 =$$

$$= Z_3 - 4Z_4$$

$$= {}_N P_{x_1x_2x_3} + {}_N P_{x_1x_2x_4} + {}_N P_{x_1x_3x_4} + {}_N P_{x_2x_3x_4} - 4\,{}_N P_{x_1x_2x_3x_4}$$

c) ${}_N P^{2}_{x_1x_2x_3x_4} =$

$${}_N P^{2}_{x_1x_2x_3x_4} = \sum_{s=2}^{4} (-1)^{s-2} \binom{s-1}{s-2} Z_s$$

$$= (-1)^0 \binom{1}{0} Z_2 + (-1)^1 \binom{2}{1} Z_3 + (-1)^2 \binom{3}{2} Z_4 =$$

$$= Z_2 - 2Z_3 + 3Z_4 =$$

$$= {}_N P_{x_1x_2} + {}_N P_{x_1x_3} + {}_N P_{x_1x_4} + {}_N P_{x_2x_3} + {}_N P_{x_2x_4} + {}_N P_{x_3x_4} -$$

$$- 2\left({}_N P_{x_1x_2x_3} + {}_N P_{x_1x_2x_4} + {}_N P_{x_1x_3x_4} + {}_N P_{x_2x_3x_4}\right) + 3\,{}_N P_{x_1x_2x_3x_4}$$

d) ${}_{N}p_{\overline{x_1x_2x_3x_4}} =$

$${}_{N}p_{\overline{x_1x_2x_3x_4}} = {}_{N}p_{\overline{x_1x_2x_3x_4}} = \sum_{s=1}^{4} (-1)^{s-1} \binom{s-1}{s-1} Z_s =$$

$$= Z_1 - Z_2 + Z_3 - Z_4 =$$

$$= {}_{N}p_{x_1} + {}_{N}p_{x_2} + {}_{N}p_{x_3} + {}_{N}p_{x_4}$$

$$-\left({}_{N}p_{x_1x_2} + {}_{N}p_{x_1x_3} + {}_{N}p_{x_1x_4} + {}_{N}p_{x_2x_3} + {}_{N}p_{x_2x_4} + {}_{N}p_{x_3x_4}\right)$$

$$+\left({}_{N}p_{x_1x_2x_3} + {}_{N}p_{x_1x_2x_4} + {}_{N}p_{x_1x_3x_4} + {}_{N}p_{x_2x_3x_4}\right)$$

$$- {}_{N}p_{x_1x_2x_3x_4}$$

Ejemplo 6: Demostrar que ${}_{N}q_{\overline{x_1x_2}} = {}_{N}q_{x_1} \cdot {}_{N}q_{x_2}$

A partir de la definición de ${}_{N}q_{\overline{x_1x_2}}$ se tiene que:

$${}_{N}q_{\overline{x_1x_2}} = 1 - {}_{N}p_{\overline{x_1x_2}}$$

Pero ${}_{N}p_{\overline{x_1x_2}} = Z_1 - Z_2 = {}_{N}p_{x_1} + {}_{N}p_{x_2} - {}_{N}p_{x_1x_2}$

Substituyendo este resultado se obtiene:

$$ {}_N q_{\overline{x_1 x_2}} = 1 - {}_N p_{x_1} - {}_N p_{x_2} + {}_N p_{x_1 x_2} \quad , $$

Finalmente, factorizando esta expresión:

$$ {}_N q_{\overline{x_1 x_2}} = (1 - {}_N p_{x_1})(1 - {}_N p_{x_2}) $$

Por lo tanto:

$$ {}_N q_{\overline{x_1 x_2}} = {}_N q_{x_1} \cdot {}_N q_{x_2} $$

3.4 Funciones Contingentes.

En los apartados anteriores se han visto grupos de vida en los que el grupo (x, y, z) fracasa en el momento de ocurrir - la primera muerte, ya sea x, o y, o z; en el caso del grupo $(\overline{x,y,z})$ se considera que fracase en el momento de ocurrir la última muerte sin importar el orden de las muertes que le sucedieron, es decir cuales son los dos que murieron anteriormente.

En las situaciones donde el orden de las muertes es importante, se requiere un tipo diferente de funciones denominadas- funciones contingentes. Por ejemplo: En el caso de un seguro pagadero al momento de ocurrir la muerte de x, siempre y cuando - esta ocurra antes de la muerte de y

El presente apartado considera solamente el caso más - simple de las funciones contingentes, en las que el orden de fallecimiento esta pre-establecido.

Cuando las personas que conforman un grupo, son todas- de la misma edad y están sujetas a la misma mortalidad; (cada uno de ellos tiene la misma probabilidad de morir primero), la evaluación de probabilidades contingentes es sencilla; por ejemplo: En un grupo de dos vidas de edad (x) cada una, la probabilidad -

de que una de ellas muera primero es simplemente $1/2$ y por lo tanto, la probabilidad de que una vida específica muera primero en los siguientes n años es:

$$\tfrac{1}{2}\ {}_nq_{xx} \tag{3.4.1}$$

Donde ${}_nq_{xx}$ representa la probabilidad de que el grupo de vida conjunta fracase dentro de n años, y $1/2$ representa la probabilidad de que fracase por el fallecimiento de una vida específica de las dos que lo forman.

Por lo general las vidas involucradas no son de la misma edad. Considerando el caso de dos vidas de edades x, y la expresión:

$$q^{1}_{xy} \tag{3.4.2}$$

Representa la probabilidad de que (x) muera antes que (y) dentro de un año, es decir que el grupo de vida conjunta fracase en el siguiente año por la muerte de (x).

Dado que μ_{x+t} es una medida de la susceptibilidad a la muerte, en el instante $x+t$, la probabilidad denotada por la expresión (3.4.2) se puede escribir como:

(3.4.3) $$q_{xy}^{1} = \int_0^1 {}_tp_{xy}\,\mu_{x+t}\,dt = \int_0^1 \frac{l_{x+t:y+t}}{l_{xy}}\,\mu_{x+t}\,dt$$

$$= \frac{1}{l_{xy}} \int_0^1 l_{x+t}\cdot l_{y+t}\cdot \mu_{x+t}\,dt$$

En esta ecuación la diferencial ${}_tp_{xy}\,\mu_{x+t}\,dt$ es la - probabilidad de que x muera en el instante de cumplir la edad - $x+t$ y sobreviva y . Resulta claro que se utiliza la inte -- gral para abarcar todos los instantes que conforman el intervalo- [0,1]

Otras probabilidades contingentes básicas para el caso de grupos de dos vidas son:

(3.4.4) $${}_nq_{xy}^{1} = \int_0^n {}_tp_{xy}\,\mu_{x+t}\,dt$$

La cual representa la probabilidad de que el grupo de- vida conjunta fracase dentro de n años por la muerte de (X).

(3.4.5) $${}_{n|}q_{xy}^{1} = \int_n^{n+1} {}_tp_{xy}\,\mu_{x+t}\,dt$$

Esta última representa la probabilidad de que el grupo de vida conjunta llegue con vida al año n y fracase en el año $n+1$ por la muerte de (x).

Si se quiere encontrar la probabilidad de que la específica vida (x) muera en segundo lugar dentro de n años, es necesario analizar el siguiente razonamiento:

Si (x) muere dentro de n años, lo hará ya sea antes o después de que muera (y); lo que matemáticamente significa:

(3.4.6)
$$ {}_{n}q_{x} = {}_{n}q^{1}_{xy} + {}_{n}q^{2}_{xy} $$

Y despejando ${}_{n}q^{2}_{xy}$ se llega a que:

(3.4.7)
$$ {}_{n}q^{2}_{xy} = {}_{n}q_{x} - {}_{n}q^{1}_{xy} $$

Razonando en forma análoga al caso anterior la probabilidad de que (x) muera en segundo lugar y durante el año $n+1$ se puede escribir como:

(3.4.8)
$$ {}_{n|}q^{2}_{xy} = {}_{n|}q_{x} - {}_{n|}q^{1}_{xy} $$

En lo que se refiere a las probabilidades que envuelven a grupos de 3 vidas tenemos las siguientes:

(3.4.9) $$ {}_{n}q^{1}_{xxx} = 1/3 \; {}_{n}q_{xxx} $$

En esta probabilidad el cálculo es muy sencillo, puesto que las 3 vidas tienen la misma edad y están sujetos a la misma mortalidad

En forma análoga al caso de dos vidas, la probabilidad de que el grupo de vida conjunta (x,y,z) fracase dentro de n años por la muerte de (x) se expresa mediante la ecuación:

(3.4.10) $$ {}_{n}q^{1}_{xyz} = \int_0^n {}_{t}p_{xyz} \, \mu_{x+t} \, dt $$

Otra probabilidad importante es la probabilidad de que en el grupo de 3 vidas (x) muera en segundo lugar, es decir que (x) muera antes que el sobreviviente de (y) y (z), se puede escribir:

(3.4.11) $$ {}_{n}q^{2}_{xyz} = \int_0^n {}_{t}p_{x} \left({}_{t}p^{[1]}_{yz} \right) \mu_{x+t} \, dt $$

Desarrollando la probabilidad ${}_{t}p^{[1]}_{yz}$ (la probabilidad que al instante t sobreviva exactamente una de las dos vidas) llegamos a:

$$ {}_{n}q^{2}_{xyz} = \int_{0}^{n} {}_{t}p_{x}\left({}_{t}p_{y} + {}_{t}p_{z} - 2\,{}_{t}p_{yz}\right)\mu_{x+t} \cdot dt $$

Al realizar los productos la probabilidad queda:

$$ {}_{n}q^{2}_{xyz} = \int_{0}^{n} \left({}_{t}p_{xy}\,\mu_{x+t} + {}_{t}p_{xz}\,\mu_{x+t} - 2\,{}_{t}p_{xyz}\,\mu_{x+t}\right) dt $$

Distribuyendo la integral se tiene:

$$ {}_{n}q^{2}_{xyz} = \int_{0}^{n} {}_{t}p_{xy}\,\mu_{x+t}\,dt + \int_{0}^{n} {}_{t}p_{xz}\,\mu_{x+t}\,dt - 2\int_{0}^{n} {}_{t}p_{xyz}\,\mu_{x+t}\,dt $$

Cada una de estas integrales representan las probabilidades ${}_{n}q^{1}_{xy}$, ${}_{n}q^{1}_{xz}$ y ${}_{n}q^{1}_{xyz}$ respectivamente, por lo que la ecuación que representa la probabilidad deseada es:

(3.4.12) $$ {}_{n}q^{2}_{xyz} = {}_{n}q^{1}_{xy} + {}_{n}q^{1}_{xz} - 2\,{}_{n}q^{1}_{xyz} $$

La probabilidad que en el grupo de 3 vidas (x) sea la última en morir se calcula mediante el uso de la expresión:

(3.4.13) $$ {}_{n}q^{3}_{xyz} = \int_{0}^{n} {}_{t}q_{y} \cdot {}_{t}q_{z} \cdot {}_{t}p_{x} \cdot \mu_{x+t}\,dt $$

Donde la diferencial considera la probabilidad de que- (y) y (z) estén muertas al instante por la probabilidad de que- x muera en ese instante t.

Al escribir la expresión (3.4.13) en términos de proba bilidades de vida se tiene:

$$ {}_nq^3_{xyz} = \int_0^n (1 - {}_tp_y)(1 - {}_tp_z)\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt $$

La cual al realizar los productos queda:

$$ {}_nq^3_{xyz} = \int_0^n ({}_tp_x \mu_{x+t} - {}_tp_{xy}\, \mu_{x+t} - {}_tp_{xz}\, \mu_{x+t} + {}_tp_{xyz}\, \mu_{x+t})\, dt $$

Al distribuir las integrales se llega a que:

$$ {}_nq^3_{xyz} = \int_0^n {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt - \int_0^n {}_tp_{xy}\, \mu_{x+t}\, dt - \int_0^n {}_tp_{xz}\, \mu_{x+t}\, dt + \int_0^n {}_tp_{xyz}\, \mu_{x+t}\, dt $$

Y substituyendo cada una de estas integrales por ex-- presiones conocidas:

(3.4.14) $$ {}_nq^3_{xyz} = {}_nq_x - {}_nq^1_{xy} - {}_nq^1_{xz} + {}_nq^1_{xyz} $$

Nota: En cursos anteriores se ha visto que $_{N}q_x = \int_0^N {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt$

La probabilidad que x muera en primero o segundo lugar dentro de N años, denotada por $_{N}q^{1}_{x:\overline{yz}}$ se puede interpretar como la probabilidad de que x muera mientras al menos uno de los dos restantes esté con vida, por tanto se puede escribir:

(3.4.15) $$_{N}q^{1}_{x:\overline{yz}} = \int_0^N {}_tp_x \cdot {}_tp_{\overline{yz}} \, \mu_{x+t} \, dt$$

En el apartado 3.3 se vió que $_tp_{\overline{yz}} = {}_tp_y + {}_tp_z - {}_tp_{yz}$ entonces substituyendo esta ecuación en la expresión (3.4.15) se obtiene:

$$_{N}q^{1}_{x:\overline{yz}} = \int_0^N {}_tp_x \left({}_tp_y + {}_tp_z - {}_tp_{yz}\right) \mu_{x+t} \, dt$$
$$= \int_0^N \left({}_tp_{xy} + {}_tp_{xz} - {}_tp_{xyz}\right) \mu_{x+t} \, dt$$

Y al multiplicar los factores y distribuir las integrales:

$$_{N}q^{1}_{x:\overline{yz}} = \int_0^N {}_tp_{xy} \, \mu_{x+t} \, dt + \int_0^N {}_tp_{xz} \, \mu_{x+t} \, dt - \int_0^N {}_tp_{xyz} \, \mu_{x+t} \, dt$$

Por lo tanto: $_nq^{1}_{x:\overline{yz}} = {}_nq^{1}_{xy} + {}_nq^{1}_{xz} - {}_nq^{1}_{xyz}$

La probabilidad que x o y muera antes que z en los siguientes n años se denota por $_nq^{1}_{\overline{xy}:z}$ y se define por la integral:

$$(3.4.16) \qquad {}_nq^{1}_{\overline{xy}:z} = \int_0^n {}_tp_{xyz} \cdot \mu_{x+t} \cdot \mu_{y+t} \cdot dt$$

La última función contingente que se definirá es aquella que representa la probabilidad que el sobreviviente de (x) y (y) muera dentro de los n años siguientes precedido por la muerte de z (denotada por $_nq^{2}_{\overline{xy}:z}$). Para encontrar esta probabilidad definida como una integral, primeramente se deberá encontrar la expresión adecuada para la diferencial en cuestión.

La probabilidad que el sobreviviente de (x) o (y) muera al instante t es:

$$_tq_z \left({}_tp_x \cdot {}_tq_y \, \mu_{x+t} + {}_tp_y \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{y+t} \right) dt$$

Al escribir esta probabilidad en términos de probabilidades de vida:

$$(1-{}_tp_z)\left({}_tp_x(1-{}_tp_y)\mu_{x+t} + {}_tp_y(1-{}_tp_x)\mu_{y+t}\right)dt =$$

$$(1-{}_tp_z)\left({}_tp_x\,\mu_{x+t} - {}_tp_{xy}\,\mu_{x+t} + {}_tp_y\,\mu_{y+t} - {}_tp_{xy}\,\mu_{y+t}\right)dt$$

Reagrupando términos se tiene

$$(1-{}_tp_z)\left({}_tp_x\,\mu_{x+t} + {}_tp_y\,\mu_{y+t} - {}_tp_{xy}\left(\mu_{x+t}+\mu_{y+t}\right)\right.$$

Multiplicando y definiendo la integral de 0 a n:

$${}_nq^{\,2}_{\overline{xy}:z} = \int_0^n \left({}_tp_x\,\mu_{x+t} + {}_tp_y\,\mu_{y+t} - {}_tp_{xy}\,\mu_{x+t:y+t} - {}_tp_{xz}\,\mu_{x+t} - {}_tp_{yz}\,\mu_{y+t} + {}_tp_{xyz}\,\mu_{x+t:y+t}\right)dt$$

$$= \left({}_nq_x + {}_nq_y - {}_nq_{xy}\right) - \left({}_nq^{\,1}_{xz} + {}_nq^{\,1}_{yz} - {}_nq^{\,1}_{\overline{xy}:z}\right)$$

La evaluación de funciones contingentes en el caso elemental de vidas de la misma edad es relativamente sencillo a partir de los principios generales de probabilidad, no obstante a menudo es conveniente hacerlo a partir del cálculo de la integral que la define, por ejemplo:

El caso de 4 vidas todas de la misma edad X y sujetas a la misma mortalidad, la probabilidad que una vida específica - muera primero en los siguientes n años es:

$$_nq^1_{xxxx} = \int_0^n {}_tp_{xxxx}\,\mu_{x+t}\,dt = \int_0^n ({}_tp_x)^3\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt$$

Ahora, dado que ${}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt = -d({}_tp_x)$ puesto que:

$${}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt = \frac{l_{x+t}}{l_x}\left(\frac{-d(l_{x+t})}{l_{x+t}}\right) = -\frac{d(l_{x+t})}{l_x}\,dt$$

Y

$$-d({}_tp_x) = -\frac{d(l_{x+t})}{l_x}\,dt$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned}
{}_nq^1_{xxxx} &= \int_0^n ({}_tp_x)^3\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt = \\
&= -\int_0^n ({}_tp_x)^3\,d({}_tp_x) = -\frac{({}_tp_x)^4}{4}\Big]_0^n \\
&= -1/4\left(({}_np_x)^4 - 1\right) = 1/4\left(1 - {}_np_{xxxx}\right) \\
&= 1/4\;{}_nq_{xxxx}
\end{aligned}$$

La evaluación de funciones contingentes para grupos formados por m vidas de edades diferentes se lleva a cabo encontrando primeramente la edad igual equivalente del grupo (X_w) y después se calcula la probabilidad deseada para el grupo de m vidas todas de edad X_w lo que resulta bastante sencillo.

Capítulo 4: "Anualidades y Primas del Seguro de Grupo"

4.1 Conceptos Generales y Anualidades de Vida Sencilla.

Anualidad se define como una serie de pagos periódicos, los cuales son generalmente iguales y se efectuan a intervalos iguales de tiempo.

El tiempo que transcurre entre cada pago se conoce como intervalo o frecuencia de pago.

El tiempo contado desde el principio del primer intervalo de pago, hasta el final del último, se conoce como plazo de la anualidad.

El valor presente de una anualidad (denotado por a) es la suma de los valores presentes de cada pago, cada uno descontado al principio del plazo de la anualidad.

El monto o valor acumulado de una anualidad (denotado por s) es la suma de los montos compuestos de cada pago, cada uno acumulado al final del plazo de la anualidad.

Las anualidades se clasifican básicamente en: Anualidades Ciertas y Anualidades Contingentes.

Anualidad Cierta: Es una serie de pagos periódicos - que deben efectuarse con certeza, es decir, los pagos se efectuan en forma independiente a cualquier evento fortuito o aleatorio - que pueda existir por ejemplo:

- El pago de intereses sobre un valor de renta fija.
- Los pagos periódicos por concepto de la renta de un bien inmueble.

Anualidad Contingente: Es una serie de pagos que se - efectuan sujetos a algún evento fortuito o aleatorio, es decir - cada pago esta condicionado al acontecimiento de un evento for-- tuito, por ejemplo:

- El pago que recibe un pensionista hasta su falleci- miento.
- El pago de la prima de un seguro de vida ordinario.

El presente estudio considera solamente las anualida- des contingentes dado que su interés primordialmente es el análi sis y cálculo de primas de seguros de grupo y/o colectivos, los- cuales están sujetos a la muerte o supervivencia de los integran tes.

Las anualidades contingentes se clasifican de la siguiente manera:

i) De acuerdo al plazo de la anualidad

ii) De acuerdo a la forma de pago

i) Conforme a su plazo, las anualidades contingentes se clasifican en temporales y vitalicias.

Anualidades Temporales: Son aquellas que duran un tiempo determinado y se limitan a una serie de N pagos.

Anualidades Vitalicias: Son aquellas que duran mientras la persona que aporta los pagos sobrevive.

ii) De acuerdo a su forma de pago, las anualidades contingentes pueden ser vencidas, anticipadas o diferidas.

Anualidades Vencidas: Son aquellas en la que los pagos se realizan al final de cada intervalo de pago.

Anualidades Anticipadas: Son aquellas en las que los pagos se realizan al principio de cada intervalo de pago.

Anualidades Diferidas: Son aquellas en las que los pagos se realizan al final de un número determinado de períodos.

Las anualidades de grupo de vida se definen y se calculan de manera análoga a las anualidades de vida sencilla, por ello se mencionarán brevemente algunas anualidades de este tipo y se escribirán expresiones para calcular sus valores presentes.

Anualidad de Vida Sencilla:

a) Una anualidad vitalicia de $ 1.00 pagadera anualmente a x, es una serie de pagos, todos de $ 1.00, que comienzan al final del primer año y continuan haciéndose año tras año mientras x se encuentre con vida.

El valor presente de este tipo de anualidad, puede ser expresado como la suma de valor presente de una serie de dotales puros, y se denota por a_x; es decir:

$$a_x = \sum_{t=1}^{w-x-1} v^t \cdot {}_tp_x = \sum_{t=1}^{w-x-1} \frac{v^t l_{x+t}}{l_x} = \sum_{t=1}^{w-x-1} \frac{v^{x+t} l_{x+t}}{v^x l_x} \tag{4.1.1}$$

Tomando las funciones conmutadas $D_x = v^x l_x$ y $N_x = \sum_{t=0}^{w-x-1} D_{x+t}$, se tiene que:

$$a_x = \sum_{t=1}^{w-x-1} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Por lo tanto, el valor presente de una anualidad vitalicia de \$ 1.00 es:

$$(4.1.2) \qquad a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Cuando la anualidad vitalicia se paga en forma anticipada, el valor presente puede ser calculado en forma sencilla, puesto que solamente se debe sumar el primer pago al valor presente de la anualidad vencida.

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x = 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}$$

b) Anualidad temporal a n años, este tipo de anualidad considera una serie de n pagos todos de \$ 1.00 que se realizan al final de cada año si x permanece con vida. El valor presente de este tipo de anualidad se denota como $a_{x:\overline{n|}}$ y en algunos textos como $_na_x$

El valor presente de este tipo de anualidades es la suma del valor presente de todos y cada uno de los N pagos.

$$a_{x:\overline{N}|} = \frac{v\, l_{x+1}}{l_x} + \frac{v^2 l_{x+2}}{l_x} + \cdots\cdots\cdots + \frac{v^N l_{x+N}}{l_x} =$$

$$= \sum_{t=1}^{N} \frac{v^t l_{x+t}}{l_x} = \sum_{t=1}^{w-x-1} \frac{v^t l_{x+t}}{l_x} - \sum_{t=N+1}^{w-x-1} \frac{v^t l_{x+t}}{l_x} =$$

$$= \frac{N_{x+1} - N_{x+N+1}}{D_x}$$

$$\therefore \qquad a_{x:\overline{N}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+N+1}}{D_x}$$

Si la anualidad se paga en forma anticipada, resulta fácil demostrar que el valor presente se puede escribir con la siguiente expresión:

$$\ddot{a}_{x:\overline{N}|} = \frac{N_x - N_{x+N}}{D_x}$$

c) Anualidad vitalicia diferida n años, este tipo de-anualidad se puede definir como una anualidad vitalicia con los - primeros n pagos omitidos, o sea que es una serie de \$ 1.00 que se realizan a partir del año $n+1$ y se continuan haciendo mien- - tras la persona sigue con vida, el valor presente de este tipo de anualidades se denota por $_{n|}a_x$

El cálculo del valor presente de este tipo de anuali - dades se reduce también a una suma del valor presente de dotales-puros pagaderos a partir de la edad $x+n+1$, por lo tanto tenemos que:

$$_{n|}a_x = \sum_{t=x+n+1}^{\omega-x-1} \frac{D_{x+t}}{D_x}$$

lo que se puede escribir utilizando funciones conmutadas como:

(4.1.4) $$_{n|}a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$$

Cuando este tipo de anualidades se pagan en forma anticipada, la única variación es que el primer pago se realiza a partir de la edad $x+n$, y esto reduce la expresión a:

$$_{n|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

d) Anualidad temporal a m años diferida a n años; esta anualidad se puede definir como una serie de m pagos de \$ 1.00, los cuales se empiezan a realizar al final del año n, o sea es una anualidad temporal a $m+n$ años en donde se omiten los primeros n pagos.

El valor presente de esta anualidad se denota por ${}_{n|m}a_x$ y su cálculo resulta sencillo considerando que el valor presente de la anualidad es la suma del valor presente de una serie de dotales puros que inician a la edad $x+n$ y terminan a la edad $x+m+n$, por lo tanto se puede asegurar que:

$$
{}_{n|m}a_x = \sum_{t=x+n+1}^{x+m+n+1} \frac{v^{x+t} l_{x+t}}{v^x l_x} = \sum_{t=x+n+1}^{x+m+n+1} \frac{D_{x+t}}{D_x} =
$$

$$
= \sum_{t=x+n+1}^{w-x-1} \frac{D_{x+t}}{D_x} - \sum_{t=x+m+n+1}^{w-x-1} \frac{D_{x+t}}{D_x} =
$$

$$
= \frac{N_{x+n+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}
$$

o sea que:

(4.1.5)
$$
{}_{n|m}a_x = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}
$$

Al igual que en los casos anteriores, el valor presente de la anualidad que se paga en forma anticipada se calcula a partir del inicio del período correspondiente al primer pago, lo cual modificaría nuestra expresión de tal manera que:

$$ {}_{n|m}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n} - N_{x+m+n}}{D_x} $$

4.2 Anualidades de Grupos de Vida.

La definición de anualidades de grupos de vida traé consigo una serie de expresiones que resultan demasiado grandes y complejas para su manejo, por ello es necesario definir las funciones conmutadas para vida conjunta.

Las funciones conmutadas para vida conjunta se definen en forma análoga a las funciones de vida sencilla, así se tiene que:

(4.2.1) $$D_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = V^{\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots x_m}{m}} l_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}$$

el exponente del factor V se forma de esta manera para que la valuación del valor presente de $l_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}$, se haga en forma simétrica y proporcione un valor equivalente, independiente que facilite el manejo de esta expresión pues al incrementarse un año cada edad, el promedio se incrementará en igual forma.

De manera análoga al caso de vida sencilla se define la función $C_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}$ como:

$$C_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = V^{\frac{x_1+x_2+x_3\cdots x_m}{m}+1} d_{x_1x_2x_3\cdots x_m}$$

donde $d_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m} = l_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m} - l_{x_1+1 : x_2+1 : \cdots\cdots\cdots\cdots : x_m+1}$
como se definió en capítulos anteriores.

Las funciones $N_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}$, $M_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}$, $S_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}$ y $R_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}$, se definen por medio de sumatorios al igual que en vida sencilla, quedando sus expresiones de la siguiente forma:

(4.2.2)

a) $$N_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m} = \sum_{t=0}^{\bar{\omega}} D_{x_1+t : x_2+t : \cdots\cdots\cdots\cdots : x_m+t}$$

b) $$M_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m} = \sum_{t=0}^{\bar{\omega}} C_{x_1+t : x_2+t : \cdots\cdots\cdots\cdots : x_m+t}$$

c) $$S_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m} = \sum_{t=0}^{\bar{\omega}} N_{x_1+t : x_2+t : x_3+t : \cdots\cdots : x_m+t}$$

d) $$R_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m} = \sum_{t=0}^{\bar{\omega}} M_{x_1+t : x_2+t : \cdots\cdots\cdots\cdots : x_m+t}$$

En estas expresiones, el límite superior de las sumatorias, denotado por $\bar{\omega}$ es el valor de t para el cual la edad más joven alcanza la edad correspondiente al final de la tabla (ω).

Anualidades de Vida Conjunta.

a) Anualidad Vitalicia de Vida Conjunta, es una serie de pagos de $ 1.00 que se realizan al final de cada año mientras el grupo de vida conjunta sobreviva, es decir mientras todos sus integrantes permanezcan con vida, el valor presente de esta anualidad se denota por: $a_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}$ y se puede expresar mediante la ecuación:

(4.2.3) $$a_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = \sum_{t=1}^{\tilde{\omega}} V^t \, {}_tP_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}$$

Substituyendo ${}_tP_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = \dfrac{l_{x_1+t:x_2+t:\cdots\cdots:x_m+t}}{l_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}$

en la expresión anterior, se tiene que:

$$a_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = \sum_{t=1}^{\tilde{\omega}} \frac{V^t \, l_{x_1+t:x_2+t:\cdots\cdots x_m+T}}{l_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}$$

y al multiplicar y dividir por $V^{\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_m}{m}}$ la ecuación se puede escribir como:

$$a_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = \sum_{t=1}^{\tilde{\omega}} \frac{V^{\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_m}{m}+t}}{V^{\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots x_m}{m}}} \frac{l_{x_1+t:x_2+t:\cdots\cdots:x_m+t}}{l_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}$$

y tomando funciones conmutadas de vida conjunta:

$$a_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = \sum_{t=1}^{\bar{\omega}} \frac{D_{x_1+t:x_2+t:\cdots\cdots:x_m+t}}{D_{x_1x_2x_3x_4\cdots\cdots x_m}}$$

(4.2.4) $$a_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = \frac{N_{x_1+1:x_2+1:\cdots\cdots x_m+1}}{D_{x_1x_2x_3\cdots x_m}}$$

b) Anualidad temporal a n años de vida conjunta, es una serie de n pagos de \$ 1.00 que se realizan al final de cada año si el grupo de vida conjunta permanece con vida, es decir si todos los integrantes llegan con vida al final de cada año, el valor presente de este tipo de anualidad se denota por ${}_n a_{x_1x_2x_3\cdots x_m}$ o $a_{\overline{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m:n|}}$ y la expresión para calcularse se obtiene a partir de que:

$${}_n a_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = \sum_{t=1}^{n} v^t \, {}_tp_{x_1x_2x_3\cdots x_m}$$

esta expresión es equivalente a

$${}_n a_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = \sum_{t=1}^{\bar{\omega}} v^t \, {}_tp_{x_1x_2x_3\cdots x_m} - \sum_{t=n+1}^{\bar{\omega}} v^t \, {}_tp_{x_1x_2x_3\cdots x_m}$$

utilizando la ecuación. $ {}_tp_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = \frac{l_{x_1+t:x_2+t:\cdots\cdots\cdots:x_m+t}}{l_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}} $

se obtiene que:

$$ {}_Na_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = \sum_{t=1}^{\tilde{\omega}} \frac{v^t l_{x_1+t:x_2+t:\cdots\cdots x_m+t}}{l_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}} - \sum_{t=N+1}^{\tilde{\omega}} \frac{v^t l_{x_1+t:x_2+t:\cdots\cdots:x_m+t}}{l_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}} $$

$$ = \sum_{t=1}^{\tilde{\omega}} \frac{v^{\frac{x_1+x_2+x_3\cdots+x_m}{m}+t} l_{x_1+t:x_2+t:\cdots\cdots:x_m+t}}{v^{\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_m}{m}} l_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}} - \sum_{t=N+1}^{\tilde{\omega}} \frac{v^{\frac{x_1+x_2+\cdots x_m}{m}+t} l_{x_1+t:\cdots:x_m+t}}{v^{\frac{x_1+x_2+\cdots x_m}{m}} l_{x_1x_2x_3\cdots x_m}} $$

y tomando funciones conmutadas se concluye que

$$ \text{5)} \qquad {}_Na_{x_1x_2x_3x_m} = \frac{N_{x_1+1:x_2+1:\cdots\cdots x_m+1} - N_{x_1+N+1:x_2+N+1:\cdots\cdots x_m+N+1}}{D_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}} $$

c) Anualidad Diferida N años de Vida Conjunta, es una serie de pagos de \$ 1.00 que se hacen a partir del final del - - N -ésimo período y se continúan haciendo al final de cada año si- el grupo de vida conjunta permanece con vida, su valor presente - se denota como $ {}_{N|}a_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}$, y siguiendo los mismos razona -- mientos que se utilizaron para encontrar las expresiones corres -

pondientes a las anualidades vistas anteriormente, resulta claro que el valor presente de la anualidad diferida se puede escribir como:

.6) $$_{N|}a_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = \frac{N_{x_1+N+1:x_2+N+1:\cdots\cdots:x_m+N+1}}{D_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}$$

d) Anualidad Temporal m años Diferida N años de Vida Conjunta, es una serie de m pagos de \$ 1.00 que se efectuan a partir del final del N-ésimo período si el grupo de vida conjunta sobrevive a esta fecha, es decir si todos los integrantes del grupo permanecen con vida, el valor presente de este tipo de anualidad, denotado por $_{N|m}a_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}$ es:

2.7) $$_{N|m}a_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = \frac{N_{x_1+N+1:x_2+N+1:\cdots\cdots:x_m+N+1} - N_{x_1+m+N+1:\cdots\cdots:x_m+m+N+1}}{D_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}$$

como se puede observar claramente éste tipo de anualidades se pue de concebir como la diferencia de una anualidad diferida N años menos una anualidad diferida $m+N$ años, es decir

$$_{N|m}a_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = {}_{N|}a_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} - {}_{m+N|}a_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}$$

los valores presentes de estos tres tipos de anualidades cambian ligeramente si los pagos se hacen en forma anticipada y las expresiones para calcularlos quedan de la siguiente manera:

a) $$\ddot{a}_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = \frac{N_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}{D_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}$$

b) $${}_{n}\ddot{a}_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = \frac{N_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} - N_{x_1+n:x_2+n:\cdots\cdots:x_m+n}}{D_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}$$

c) $${}_{n|}\ddot{a}_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = \frac{N_{x_1+n:x_2+n:\cdots\cdots:x_m+n}}{D_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}$$

d) $${}_{n|m}\ddot{a}_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = \frac{N_{x_1+n:x_2+n:\cdots\cdots:x_m+n} - N_{x_1+m+n:\cdots\cdots:x_m+m+n}}{D_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}$$

y estas expresiones se deben a que cuando el pago se hace en forma anticipada, los pagos se hacen al principio de cada período y el valor presente del primer pago es $ 1.00

Los tipos de anualidades para grupos de último sobreviviente y del grupo generalizado son análogas a las anualidades de vida conjunta, pues se definen de igual manera, vitalicias, temporales, diferidas, etc.

Dado que las probabilidades del último sobreviviente y del grupo generalizado se pueden calcular mediante combinaciones lineales de probabilidades de vida sencilla y de vida conjunta, sus anualidades pueden ser calculadas a partir de las funciones conmutadas de vida sencilla y de vida conjunta.

Anualidades del Ultimo Sobreviente.

e) Anualidad Vitalicia de Ultimo Sobreviviente, es una serie de pagos, todos de \$ 1.00, que se hacen al final de cada año si el grupo de último sobreviviente permanece con vida, es decir, los pagos se realizan al final de cada período si al menos existe un integrante del grupo con vida, el valor presente de esta anualidad se denota por $a_{\overline{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}$
y la expresión para calcularlo se define a partir de que:

(1.2.9) $$a_{\overline{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}} = \sum_{t=1}^{\bar{\omega}} V^t \, {}_tP_{\overline{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}$$

Como la expresión ${}_tP_{\overline{x_1x_2x_3x_4\cdots\cdots x_m}}$ generalmente resulta bastante extensa, para explicar como se calcula este tipo de valor presente, se tomará como ejemplo el caso de un grupo de vida de último sobreviviente formado por 3 personas de edades x, y, z, así se tiene que:

$$a_{\overline{xyz}} = \sum_{t=1}^{\bar{\omega}} V^t \, {}_tP_{\overline{xyz}} = \sum_{t=1}^{\bar{\omega}} V^t \left({}_tP_x + {}_tP_y + {}_tP_z - {}_tP_{xy} - {}_tP_{xz} - {}_tP_{yz} + {}_tP_{xyz} \right)$$

$$=\sum_{t=1}^{\omega}\left(v^t\,{}_tp_x + v^t\,{}_tp_y + v^t\,{}_tp_z - v^t\,{}_tp_{xy} - v^t\,{}_tp_{xz} - v^t\,{}_tp_{yz} + v^t\,{}_tp_{xyz}\right.$$

(4.2.10) $$a_{\overline{xyz}} = a_x + a_y + a_z - a_{xy} - a_{xz} - a_{yz} + a_{xyz}$$

Como todos estos valores son conocidos en términos de funciones conmutadas, se concluye que:

(4.2.11) $$a_{\overline{xyz}} = \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{N_{y+1}}{D_y} + \frac{N_{z+1}}{D_z} - \frac{N_{x+1:y+1}}{D_{xy}} - \frac{N_{x+1:z+1}}{D_{xz}} - \frac{N_{y+1:z+1}}{D_{yz}} + \frac{N_{x+1:y+1:z+1}}{D_{xyz}}$$

f) Anualidad Temporal de Ultimo Sobreviviente, es una serie de N pagos que se realizan al final de cada año si el grupo permanece con vida, es decir, si al final de cada año al menos un integrante del grupo permanece con vida, el valor presente de esta anualidad se denota por ${}_Na_{\overline{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}$ y al igual que en el caso anterior se calculará para el caso de un grupo de tres vidas de edades x, y, z

$${}_Na_{\overline{xyz}} = \sum_{t=1}^{N} v^t\,{}_tp_{\overline{xyz}} =$$

$$= \sum_{t=1}^{N} v^t\left({}_tp_x + {}_tp_y + {}_tp_z - {}_tp_{xy} - {}_tp_{xz} - {}_tp_{yz} + {}_tp_{xyz}\right)$$

$$= \sum_{t=1}^{N} V^t {}_tP_x + \sum_{t=1}^{N} V^t {}_tP_y + \sum_{t=1}^{N} V^t {}_tP_z - \sum_{t=1}^{N} V^t {}_tP_{xy} - \sum_{t=1}^{N} V^t {}_tP_{xz}$$

$$- \sum_{t=1}^{N} V^t {}_tP_{yz} + \sum_{t=1}^{N} V^t {}_tP_{xyz} =$$

$\therefore$

$$(4.2.12) \qquad {}_N a_{\overline{xyz}} = {}_N a_x + {}_N a_y + {}_N a_z - {}_N a_{xy} - {}_N a_{xz} - {}_N a_{yz} + {}_N a_{xyz}$$

g) Anualidad Diferida de Ultimo Sobreviviente es una-anualidad vitalicia de último sobreviviente en la cual los prime ros N pagos son omitidos, el valor presente de esta anualidad - se denota por ${}_{N|}a_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots\cdots x_m}}$, y al igual que los dos ante - riores se calcula a partir de las funciones conmutadas para vida sencilla y vida conjunta, el valor presente de este tipo de anua lidad para un grupo formado por tres personas de edades x, y, z queda de la siguiente manera:

$$(4.2.13) \qquad {}_{N|}a_{\overline{xyz}} = \sum_{t=N+1}^{\omega} v^t {}_tP_{\overline{xyz}} = {}_{N|}a_x + {}_{N|}a_y + {}_{N|}a_z - {}_{N|}a_{xy} - {}_{N|}a_{xz} - {}_{N|}a_{yz} + {}_{N|}a_{xyz}$$

Donde cada anualidad se puede calcular fácilmente en- términos de funciones conmutadas para vida sencilla y vida con - junta.

El cálculo de valores presentes de anualidades que se pagan en forma anticipada se realiza de la misma forma que los - demás tipos de anualidades, ya que las anualidades del último so breviviente son siempre combinaciones lineales de anualidades de vida sencilla y de vida conjunta.

Anualidades del Grupo Generalizado.

h) Anualidad Vitalicia del Grupo Generalizado, es una serie de pagos de $ 1.00 que se realizan cada año si el grupo ge neralizado llega con vida al final de este período, es decir, el- pago se realiza si al menos r integrantes del grupo llegan con - vida al final del año, el valor presente de esta anualidad se de nota por $a_{\overline{x_1 x_2 x_3 x_4 \cdots x_m}}^{\;r}$

El cálculo de este valor presente se reduce siempre a una combinación lineal de valores presentes de anualidades de vi da sencilla y de vida conjunta como se puede observar en el si - guiente ejemplo:

Ejemplo: El valor presente de una anualidad vitalicia del grupo formado por 4 personas de edades x_1, x_2, x_3, x_4 se considera que existe, si al menos dos integrantes permanecen con vida es:

$$a_{\overline{x_1x_2x_3x_4}}^{\;2} = \sum_{t=1}^{\tilde{\omega}} v^t \, {}_tp_{\overline{x_1x_2x_3x_4}}^{\;2}$$

empleando el método Z se tiene que:

$${}_tp_{\overline{x_1x_2x_3x_4}}^{\;2} = Z_2 - 2Z_3 + 3Z_4 = {}_tp_{x_1x_2} + {}_tp_{x_1x_3} + {}_tp_{x_1x_4} + {}_tp_{x_2x_3} + {}_tp_{x_2x_4} + {}_tp_{x_3x_4} - 2\left({}_tp_{x_1x_2x_3} + {}_tp_{x_1x_2x_4} + {}_tp_{x_1x_3x_4} + {}_tp_{x_2x_3x_4}\right) + 3\,{}_tp_{x_1x_2x_3x_4}$$

entonces el valor presente de la anualidad queda de la siguiente forma:

$$a_{\overline{x_1x_2x_3x_4}}^{\;2} = \sum_{t=1}^{\tilde{\omega}} v^t \left({}_tp_{x_1x_2} + {}_tp_{x_1x_3} + {}_tp_{x_1x_4} + {}_tp_{x_2x_3} + {}_tp_{x_2x_4} + {}_tp_{x_3x_4} - 2\left({}_tp_{x_1x_2x_3} + {}_tp_{x_1x_2x_4} + {}_tp_{x_1x_3x_4} + {}_tp_{x_2x_3x_4}\right) + 3\,{}_tp_{x_1x_2x_3x_4}\right)$$

Al distribuir esta sumatoria se obtiene que:

(4.2.14)
$$a_{\overline{x_1x_2x_3x_4}}^{\;2} = a_{x_1x_2} + a_{x_1x_3} + a_{x_1x_4} + a_{x_2x_3} + a_{x_2x_4} + a_{x_3x_4} - 2a_{x_1x_2x_3} - 2a_{x_1x_2x_4} - 2a_{x_1x_3x_4} - 2a_{x_2x_3x_4} + 3a_{x_1x_2x_3x_4}$$

Al analizar este resultado no sólo nos damos cuenta - que la anualidad buscada es efectivamente una combinación lineal de anualidades de vida conjunta si no que también resulta claro- que estas anualidades de vida surgieron a raíz de aplicar el método z para el cálculo de la probabilidad en cuestión.

A partir de éste razonamiento se puede concluir que - cualquier tipo de anualidades del grupo generalizado puede ser - calculado mediante la utilización del método z , interpretando ahora las z_s como la suma de anualidades sobre todas las combinaciones posibles de m vidas tomadas de s

i) Anualidad Temporal del Grupo Generalizado, es una- serie de ν pagos de \$ 1.00 que se realizan al final de cada año si el grupo permanece con vida, es decir si al menos r de los - integrantes sobreviven, el valor presente de este tipo de anualidad se denota por $_{\nu}a_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots\overset{r}{}\cdots\cdots x_m}}$

El cálculo del valor presente de esta anualidad para- un grupo de vida formado por 4 personas de edades $x_1 x_2 x_3 x_4$ que sobrevive mientras al menos vivan 2 personas es:

$$(4.2.15) \qquad _{\nu}a_{\overline{x_1 x_2 \overset{2}{} x_3 x_4}} = \sum_{t=1}^{\nu} V^t \, _tp_{\overline{x_1 x_2 \overset{2}{} x_3 x_4}}$$

Ejemplo: El valor presente de una anualidad vitalicia del grupo formado por 4 personas de edades x_1, x_2, x_3, x_4 se considera que existe, si al menos dos integrantes permanecen con vida es:

$$a_{\overline{x_1x_2x_3x_4}}^{\,2} = \sum_{t=1}^{\bar{\omega}} V^t \, {}_tP_{\overline{x_1x_2x_3x_4}}^{\,2}$$

empleando el método Z se tiene que:

$${}_tP_{\overline{x_1x_2x_3x_4}}^{\,2} = Z_2 - 2Z_3 + 3Z_4 = {}_tP_{x_1x_2} + {}_tP_{x_1x_3} + {}_tP_{x_1x_4} + {}_tP_{x_2x_3} + {}_tP_{x_2x_4} + {}_tP_{x_3x_4} - 2\left({}_tP_{x_1x_2x_3} + {}_tP_{x_1x_2x_4} + {}_tP_{x_1x_3x_4} + {}_tP_{x_2x_3x_4}\right) + 3\,{}_tP_{x_1x_2x_3x_4}$$

entonces el valor presente de la anualidad queda de la siguiente forma:

$$a_{\overline{x_1x_2x_3x_4}}^{\,2} = \sum_{t=1}^{\bar{\omega}} V^t \left({}_tP_{x_1x_2} + {}_tP_{x_1x_3} + {}_tP_{x_1x_4} + {}_tP_{x_2x_3} + {}_tP_{x_2x_4} + {}_tP_{x_3x_4} - 2\left({}_tP_{x_1x_2x_3} + {}_tP_{x_1x_2x_4} + {}_tP_{x_1x_3x_4} + {}_tP_{x_2x_3x_4}\right) + 3\,{}_tP_{x_1x_2x_3x_4}\right)$$

Al distribuir esta sumatoria se obtiene que:

$$a_{\overline{x_1x_2x_3x_4}}^{\,2} = a_{x_1x_2} + a_{x_1x_3} + a_{x_1x_4} + a_{x_2x_3} + a_{x_2x_4} + a_{x_3x_4} - 2a_{x_1x_2x_3} - 2a_{x_1x_2x_4} - 2a_{x_1x_3x_4} - 2a_{x_2x_3x_4} + 3a_{x_1x_2x_3x_4} \tag{4.2.14}$$

Al analizar este resultado no sólo nos damos cuenta que la anualidad buscada es efectivamente una combinación lineal de anualidades de vida conjunta si no que también resulta claro que estas anualidades de vida surgieron a raíz de aplicar el método Z para el cálculo de la probabilidad en cuestión.

A partir de éste razonamiento se puede concluir que cualquier tipo de anualidades del grupo generalizado puede ser calculado mediante la utilización del método Z, interpretando ahora las Z_s como la suma de anualidades sobre todas las combinaciones posibles de m vidas tomadas de s

i) Anualidad Temporal del Grupo Generalizado, es una serie de ν pagos de \$ 1.00 que se realizan al final de cada año si el grupo permanece con vida, es decir si al menos r de los integrantes sobreviven, el valor presente de este tipo de anualidad se denota por $_{\nu}a_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots\overset{r}{} x_m}}$

El cálculo del valor presente de esta anualidad para un grupo de vida formado por 4 personas de edades $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ que sobrevive mientras al menos vivan 2 personas es:

4.2.15) $$_{\nu}a_{\overline{x_1 x_2 \overset{2}{} x_3 x_4}} = \sum_{t=1}^{\nu} V^t \; {}_t p_{\overline{x_1 x_2 \overset{2}{x_3} x_4}}$$

empleando el método Z se tiene:

$$\sum_{s=2}^{4} (-1)^{s-2} \binom{s-1}{s-2} Z_s = Z_2 - 2Z_3 + 3Z_4$$

Ahora directamente se van a interpretar las Z_s como sumas de anualidades sobre todas las combinaciones posibles de m vidas tomadas de s

$$(4.2.16) \quad {}_N a_{\overline{x_1x_2x_3x_4}}^{2} = {}_N a_{x_1x_2} + {}_N a_{x_1x_3} + {}_N a_{x_1x_4} + {}_N a_{x_2x_3} + {}_N a_{x_2x_4} + {}_N a_{x_3x_4}$$

$$- 2\left({}_N a_{x_1x_2x_3} + {}_N a_{x_1x_2x_4} + {}_N a_{x_1x_3x_4} + {}_N a_{x_2x_3x_4}\right) + 3\,{}_N a_{x_1x_2x_3x_4}$$

j) Anualidad Diferida del Grupo Generalizado, es una anualidad vitalicia donde los primeros N pagos son omitidos, el valor presente de esta anualidad se denota por ${}_{N|} a_{\overline{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}^{r}$ y el cálculo de éste para un grupo de 4 vidas de edades x_1, x_2, x_3, x_4 que sobrevive mientras al menos existen 3, queda de la siguiente manera:

$${}_{N|} a_{\overline{x_1x_2x_3x_4}}^{3} = \sum_{t=N+1}^{\bar{\omega}} V^{t}\,{}_{t}P_{\overline{x_1x_2x_3x_4}}^{3}$$

empleando el método z

$$\sum_{s=3}^{4} (-1) \binom{s-1}{s-3} Z_s = Z_3 - 3Z_4$$

y tomando las z_s como la suma de anualidades sobre todas las combinaciones posibles de m vidas tomadas de s , obtenemos que:

$$(9.2.17) \qquad {}_{n|}a_{\overline{x_1x_2x_3x_4}}^{\,3} = {}_{n|}a_{x_1x_2x_3} + {}_{n|}a_{x_1x_2x_4} + {}_{n|}a_{x_1x_3x_4} + {}_{n|}a_{x_2x_3x_4} - 3\,{}_{n|}a_{x_1x_2x_3x_4}$$

Es importante aclarar que todas las anualidades de vida sencilla y de vida conjunta que conforman una combinación lineal que define una anualidad del grupo generalizado o del último sobreviviente siempre son del mismo tipo que la anualidad que definen, por ejemplo, si la anualidad de último sobreviviente o del grupo generalizado es temporal, entonces todas las anualidades que intervienen en su cálculo también son temporales, o si la anualidad de último sobreviviente o grupo generalizado es anticipada, en la combinación lineal correspondiente, todas las anualidades seran anticipadas también.

Anualidades Compuestas.

Hasta este punto sólo se ha trabajado con grupos de vida integrados por una serie de vidas sencillas, pero en la práctica a menudo se trabaja con grupos compuestos, es decir, grupos que a su vez estan formados por grupos de vida más pequeños, por ejemplo:

El grupo grupo compuesto denotado por $(\overline{wx}:\overline{yz})$ es un grupo de vida conjunta que a su vez está formado por dos grupos de último sobreviviente, en este caso el grupo $(\overline{wx})$ y el grupo $(\overline{yz})$.

El estudio de este tipo de grupos generan un nuevo tipo de anualidades que se llaman "Anualidades Compuestas"

Anualidad vitalicia pagadera durante la existencia conjunta de dos grupos de último sobreviviente, es una serie de pagos de \$ 1.00 que se realiza al final de cada año si al menos sobrevive un integrante de cada grupo de último sobreviviente. El valor presente de esta anualidad se denota por $a_{\overline{x_1x_2x_3\cdots x_m}:\overline{y_1y_2\cdots y_m}}$

El cálculo del valor presente de este tipo de anualidad para el grupo ($\overline{xw}:\overline{yz}$) se hace de la siguiente forma:

4.2.18)
$$a_{\overline{xw}:\overline{yz}} = \sum_{t=1}^{\bar{\omega}} V^t\, {}_tP_{\overline{wx}:\overline{yz}}$$

Dado que la supervivencia de los dos grupos es inde - pendiente, se puede escribir que:

4.2.19)
$$a_{\overline{xw}:\overline{yz}} = \sum_{t=1}^{\bar{\omega}} V^t\, {}_tP_{\overline{wx}} \cdot {}_tP_{\overline{yz}} =$$

$$= \sum_{t=1}^{\bar{\omega}} V^t ({}_tP_x + {}_tP_w - {}_tP_{xw})({}_tP_y + {}_tP_z - {}_tP_{yz}) =$$

$$= \sum_{t=1}^{\bar{\omega}} V^t ({}_tP_{xy} + {}_tP_{xz} + {}_tP_{wy} + {}_tP_{wz} - {}_tP_{wyz} - {}_tP_{wxy} - {}_tP_{wxz} - {}_tP_{xyz} + {}_tP_{wxyz}$$

$$= a_{xy} + a_{xz} + a_{wy} + a_{wz} - a_{wyz} - a_{wxy} - a_{wxz} - a_{xyz} + a_{wxyz}$$

Si ahora consideramos que μ, v, w pueden ser cualquier tipo de grupo, (vida conjunta, último sobreviviente o generalizado) y se desea calcular el valor presente de una anualidad pagadera mientras cualquiera de los grupos (μ, v) ó ($v\, w$) sobreviva denotado por $a_{\mu:\overline{vw}}$ se tiene que:

$$a_{\mu:\overline{vw}} = \sum_{t=1}^{\bar{\omega}} v^t {}_tp_{\mu:\overline{vw}} = \sum_{t=1}^{\bar{\omega}} v^t {}_tp_{\mu} \cdot {}_tp_{\overline{vw}} = \tag{4.2.20}$$

$$= \sum_{t=1}^{\bar{\omega}} v^t {}_tp_{\mu} \left({}_tp_v + {}_tp_w - {}_tp_{vw}\right) =$$

$$= \sum_{t=1}^{\bar{\omega}} v^t \left({}_tp_{\mu v} + {}_tp_{\mu w} - {}_tp_{\mu v w}\right)$$

$$= a_{\mu v} + a_{\mu w} - a_{\mu v w}$$

en donde las probabilidades ${}_tp_{\mu}$, ${}_tp_v$, ${}_tp_w$ pueden ser considera-das como la probabilidad de que un grupo de vida sobreviva t - años, sin importar si es un grupo de vida conjunta, último sobre viviente o generalizado.

Anualidad de \$ 1.00 pagadera mientras viven conjunta-mente los grupos ($\overline{wx}$) y (yz), es una serie de pagos que se rea lizan mientras existan y y z, y al menos sobreviva x o w, El valor presente de esta anualidad denotado por: $a_{yz:\overline{wx}}$; y se calcula con la siguiente expresión:

$$a_{yz:\overline{wx}} = \sum_{t=1}^{\bar{\omega}} v^t \left({}_tp_{yz} \cdot {}_tp_{\overline{wx}}\right) = \sum_{t=1}^{\bar{\omega}} v^t \left({}_tp_{yz} \left({}_tp_w + {}_tp_x - {}_tp_{wx}\right)\right) \tag{4.2.21}$$

$$=\sum_{t=1}^{\omega} v^t \left({}_tp_{wyz} + {}_tp_{xyz} - {}_tp_{wxyz} \right) = a_{wyz} + a_{xyz} - a_{wxyz}$$

En vista de que este tipo de anualidades se puede extender tanto como las combinaciones existentes entre los distintos grupos de vida y que con los ejemplos anteriores se puede cubrir un gran número de ellas, el presente estudio se avocará al análisis de otras anualidades, dejando a consideración del lector profundizar en este tema.

Anualidades Reversibles.

Anualidad reversible es una anualidad que comienza a partir del fracaso de un grupo (A) si un segundo grupo (B) permanece con vida, y continua hasta el fracaso del grupo (B).

El caso más simple de este tipo de anualidades es una anualidad de $ 1.00 pagadera a una persona x , que comienza al final del año en que ocurre la muerte de una persona y, y se prolonga hasta el fallecimiento de x el valor presente de este tipo de anualidad se denota por $a_{y|x}$ y se puede escribir como:

$$a_{y|x} = \sum_{t=1}^{\bar{\omega}} v^t \left({}_tp_x \left(1 - {}_tp_y\right)\right) = \sum_{t=1}^{\bar{\omega}} v^t {}_tp_x - \sum_{t=1}^{\bar{\omega}} v^t {}_tp_{xy}$$

(4.2.22) $$a_{y|x} = a_x - a_{xy}$$

o sea que esta anualidad se puede interpretar como una anualidad vitalicia a x en la cual se omiten los pagos correspondientes- al tiempo en que vivieron conjuntamente x y y es decir, - es una serie de pagos que se realizan al final de cada año si - x está vivo y y no.

Este razonamiento se puede aplicar para generalizar - este tipo de anualidades, considerando μ y v como cualquier tipo - de grupo de vida se tiene que

(4.2.23) $$a_{v|\mu} = a_{\mu} - a_{\mu v}$$

es decir que la anualidad reversible de los grupos μ, v es una - serie de pagos de $ 1.00 que se realizan al final de cada año si el grupo μ permanece con vida y el grupo v ya fracasó.

Ejemplos de Anualidades Reversibles:

1). Anualidad de $ 1.00 pagadera al grupo de vida con junta formado por $x_1x_2x_3$ a partir del final del año en que muere y:

$$a_{y|x_1x_2x_3} = a_{x_1x_2x_3} - a_{x_1x_2x_3y}$$

es una anualidad vitalicia al grupo $x_1x_2x_3$ en la que se omiten- los pagos correspondientes al tiempo en que el grupo $x_1x_2x_3, y$ vivió conjuntamente.

2). Anualidad de $ 1.00 pagadera a x en forma vitalicia desde el final del año en que muere el sobreviviente de - y y z

$$a_{\overline{yz}|x} = a_x - a_{x:\overline{yz}}$$

pero $a_{x:\overline{yz}} = a_{xy} + a_{xz} - a_{xyz}$ (ecuación 4.2.20)

por lo tanto substituyendo esta ecuación se concluye que

(4.2.24) $$a_{\overline{yz}|x} = a_x - a_{xy} - a_{xz} + a_{xyz}$$

3). Anualidad de $ 1.00 pagadera desde el final del - año en que fracasa el grupo (yz) hasta el fracaso del grupo (wx)

El grupo (yz) fracasa al ocurrir la primera muerte, mientras que el grupo ($\overline{wx}$) fracasa al morir el segundo miembro el valor presente de esta anualidad denotado por $a_{yz|\overline{wx}}$ es:

$$a_{yz|\overline{wx}} = a_{\overline{wx}} - a_{\overline{wx}:yz}$$

pero $a_{\overline{wx}:yz} = a_{wyz} + a_{xyz} - a_{wxyz}$ (ecuación 4.2.21)

y $a_{\overline{wx}} = a_w + a_x - a_{wx}$,

por lo tanto, substituyendo estos valores se concluye que

$$a_{yz|\overline{wx}} = a_w + a_x - a_{wx} - (a_{wyz} + a_{xyz} - a_{wxyz})$$

(4.2.25) $$a_{yz|\overline{wx}} = a_w + a_x - a_{wx} - a_{wyz} - a_{xyz} + a_{wxyz}$$

4). Anualidad Reversible temporal a n años; es una serie de n pagos de \$ 1.00 que se le haran a x después de la muerte de y, sin pagos a realizar después de n años del período de valuación del valor presente.

Siguiendo la fórmula básica para calcular el valor presente de este tipo de anualidades tenemos que:

$${}_n a_{y|x} = {}_n a_x - {}_n a_{xy}$$

4.3 Anualidades Pagaderas r Veces al Año.

Las anualidades de vida comunmente se pagan en forma mensual, trimestral, semestral, etc; lo que origina la necesidad de tener expresiones que permitan calcular el valor presente de anualidades pagaderas r veces al año.

El valor presente de una anualidad de \$ 1.00 pagadera r veces al año a una persona de edad x, denotado por $a_x^{(r)}$ es una serie de pagos, que se realizan si x sobrevive, al final de cada período de valor $1/r$ que se empiezan a hacer a la edad $x+1/r$ y se continuan haciendo cada intervalo de $1/r$ años.

Como se mencionó anteriormente este tipo de anualidad se puede considerar como la suma de varios dotales puros:

$$(4.3.1) \qquad a_x^{(r)} = \frac{1}{r} \sum_{t=1}^{r(\omega-x-1)} {}_{t/r}E_x = \frac{1}{r} \sum_{t=1}^{r(\omega-x-1)} \frac{D_{x+t/r}}{D_x}$$

Valuar $a_x^{(r)}$ a partir de datos obtenidos de la tabla de mortalidad resulta complicado debido a que generalmente la expresión matemática de la función l_x no se conoce, no obstante se puede encontrar una buena aproximación basándose en los siguientes aspectos:

. Se puede encontrar una tasa de interés nominal $i^{(r)}$ de tal manera que

$$\left(1+\frac{i^{(r)}}{r}\right)^{r} = (1+i)$$

donde i es la tasa de interés anual efectiva.
despejando $i^{(r)}/r$ se obtiene que:

(4.3.2) $$\frac{i^{(r)}}{r} = (1+i)^{1/r} - 1$$

.. Las muertes de edad X ocurridas en el transcurso de un año se distribuyen uniformemente, es decir si en un año ocurrieron d_x muertes, entonces a medio año ocurrieron $1/2\, d_x$, y en los primeros 3 meses $1/4\, d_x$, etc. por lo tanto las muertes ocurridas en el t/r -ésimo período del año se pueden escribir como:

$$d_{x+t/r} = t/r\,(l_x - l_{x+1})$$

Con base a estos puntos se puede calcular la anuali -

dad pagadera a través de la sumatoria definida por:

$$a_x^{(r)} = \sum_{t=1}^{r(\omega-x-1)} \frac{1}{r}\, V_{(r)}^{t}\ {}_{t/r}p_x \tag{4.3.3}$$

donde $V_{(r)} = \left(1 + \frac{i^{(r)}}{r}\right)^{-1}$ y

$${}_{t/r}p_x = \frac{l_{x+t/r}}{l_x}$$

y que $l_{x+t/r}$ se puede calcular fácilmente mediante la fórmula

$$l_{x+t/r} = l_x - \frac{t}{r} \cdot l_{x+1} \tag{4.3.4}$$

la cual se obtiene a partir de que $d_{x+1/r} = \frac{1}{r}(l_x - l_{x+1})$

Resulta importante aclarar que al avanzar la sumatoria el valor t/r alcanza valores enteros por lo cual la expresión $l_{x+t/r}$ mapea todas las edades de la tabla.

El empleo de este método para calcular anualidades pagaderas r veces al año aporta resultados precisos, pero resulta inapropiado emplearlo si no se cuenta con equipo de procesamiento electrónico adecuado pues se tomaría bastante tiempo.

En la práctica generalmente se encuentra el valor de $a_x^{(r)}$ por medio de aproximaciones numéricas, siendo la más común la fórmula de Woolhouse, la cual proporciona un resultado bastante confiable.

Mediante la aproximación de Woolhouse se concluye que:

$$a_x^{(r)} = \frac{1}{r} \sum_{t=1}^{r(\omega-x-1)} \frac{D_{x+t/r}}{D_x} = \frac{1}{D_x} \left[\sum_{t=1}^{r(\omega-x-1)} D_{x+t} + \frac{r-1}{2r} D_x + \frac{r^2-1}{12r^2} \frac{d(D_x)}{dx} \ldots\ldots \right]$$

pero en la práctica sólo se toman los primeros dos términos

$$a_x^{(r)} = \sum_{t=1}^{r(\omega-x-1)} \frac{D_{x+t}}{D_x} + \frac{r-1}{2r} \frac{D_x}{D_x}$$

por lo tanto:

.3.5) $$a_x^{(r)} = a_x + \frac{r-1}{2r}$$

Para ejemplificar la utilización de los dos métodos vistos anteriormente se presenta a continuación el cálculo de una anualidad de \$ 1.00 pagadera semestralmente a una persona de edad 55 años. (Los cálculos en ambos casos fueron tomados de - la tabla de mortalidad 1958 CSO con una tasa de interés del 3% - anual efectiva)

Método de Sumatorias.

i). Encontrar la tasa efectiva semestral

$$r=2 \Rightarrow \quad \frac{i^{(2)}}{2}=(1.03)^{1/2}-1 = 0.0149 = 1.49\%$$

$$V_{(2)}=(1.0149)^{-1}$$

ii). Encontrar la sumatoria a partir de la expresión - (4.3.3)

$$\ddot{a}_{55}^{(2)}=\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{2(44)} V_{(2)}^{t} \; {}_{t/2}p_{55}$$

$$a_{55}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{88} V_{(2)}^{t} \frac{l_{55+t/r}}{l_{55}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(V \frac{l_{55+1/2}}{l_{55}} + V^2 \frac{l_{56}}{l_{55}} + V^3 \frac{l_{56+1/2}}{l_{55}} + V^4 \frac{l_{57}}{l_{55}} + \cdots\cdots + V^{88} \frac{l_{99}}{l_{55}} \right)$$

donde $l_{55+1/2} = l_{55} - 1/2\, l_{56}$ y en general

$$l_{x+1/2} = l_x - 1/2\, l_{x+1}$$

y realizando los cálculos se concluye que:

$$a_{55}^{(2)} = 13.8605$$

Método de Woolhouse.

$$a_x^{(r)} = a_x + \frac{r-1}{2r}$$

$$a_{55}^{(2)} = a_{55} + \frac{2-1}{4} = \frac{N_{56}}{D_{55}} + \frac{1}{4} \simeq \frac{22392847.7}{1639329.7} + 0.25$$

$$a_{55}^{(2)} = 13.66 + 0.25$$

$$a_{55}^{(2)} = 13.91$$

Como se puede observar la fórmula de Woolhouse proporciona una aproximación bastante confiable, por ello es la más utilizada por las instituciones de seguro.

La obtención de fórmulas para el cálculo de anualidades diferidas y temporales, pagaderas r veces al año, se hará a través de la fórmula de Woolhouse puesto que por el método de sumatorias solamente es necesario cambiar los límites de la sumatoria.

Para obtener dichas fórmulas, es necesario primeramente obtener expresiones que permitan calcular las anualidades diferidas y temporales a partir de anualidades vitalicias.

Resulta claro que una anualidad diferida n años es una anualidad vitalicia con los primeros n pagos omitidos, así.

4.3.6)
$$_{n|}a_x = {}_nE_x \cdot a_{x+n}$$

$$_{n|}a_x = v^n \, {}_np_x \cdot a_{x+n}$$

Una anualidad temporal se puede concebir como la diferencia de una anualidad vitalicia menos una anualidad diferida, puesto que se trata de una anualidad vitalicia en la cual se omiten los pagos que se realizan a partir del año n

(4.3.7) $$_{n}a_x = a_x - {}_{n|}a_x$$

Substituyendo la expresión (4.3.6) en esta ecuación se obtiene:

(4.3.8) $$_{n}a_x = a_x - {}_{n}E_x\, a_{x+n}$$

Regresando al caso de las anualidades pagaderas r veces al año tenemos que la anualidad diferida se puede escribir como:

$$_{n|}a_x^{(r)} = {}_{n}E_x\, a_{x+n}^{(r)}$$

y utilizando la fórmula de Woolhouse se concluye que

$$_{n|}a_x^{(r)} = {}_{n}E_x \left(a_{x+n} + \frac{r-1}{2r} \right)$$

$$_{n|}a_x^{(r)} = {}_{n}E_x\, a_{x+n} + \frac{r-1}{2r}\, {}_{n}E_x$$

(4.3.9) $$_{n|}a_x^{(r)} = {}_{n|}a_x + \frac{r-1}{2r}\, {}_{n}E_x$$

Basándose en la expresión (4.3.7) la anualidad temporal pagadera r veces al año se puede escribir como:

$${}_{n}a_{x}^{(r)} = a_{x}^{(r)} - {}_{n|}a_{x}^{(r)}$$

$${}_{n}a_{x}^{(r)} = a_{x}^{(r)} - {}_{n}E_{x}\left(a_{x+n}^{(r)} \right)$$

Al substituir en esta expresión la ecuación (4.3.8)

$${}_{n}a_{x}^{(r)} = a_{x}^{(r)} - \left({}_{n|}a_{x} + \frac{r-1}{2r}\,{}_{n}E_{x} \right)$$

$${}_{n}a_{x}^{(r)} = \left(a_{x} + \frac{r-1}{2} \right) - \left({}_{n|}a_{x} + \frac{r-1}{2r}\,{}_{n}E_{x} \right)$$

Distribuyendo términos

$${}_{n}a_{x}^{(r)} = a_{x} - {}_{n|}a_{x} + \frac{r-1}{2r} - \frac{r-1}{2r}\,{}_{n}E_{x}$$

Substituyendo la ecuación (4.3.7) y factorizando se concluye que:

$${}_{n}a_{x}^{(r)} = {}_{n}a_{x} + \frac{r-1}{2r}\left(1 - {}_{n}E_{x}\right)$$

4.4 Primas de Seguros de Grupos.

En los apartados anteriores de este capítulo se estudiaron las anualidades, que son una serie de pagos contingentes con respecto a la supervivencia de un grupo de vidas. Las funciones que se estudiarán en el presente apartado son una serie de pagos contingentes con respecto a las muertes que pueden ocurrir en un determinado grupo de personas y son conocidas como primas.

El seguro provee el pago de una cantidad específica a los beneficiarios del asegurado al ocurrir su muerte.

El cálculo de primas de seguros siempre se realiza con base en una ecuación de valor donde se igualan las obligaciones del asegurado con las obligaciones de la compañía aseguradora, lo que en algunos textos llaman "Principio de Equivalencia".

Como se mencionó anteriormente existen varios planes de vida para grupos de personas y resulta extenso estudiar el cálculo de primas para cada uno de ellos, por ello el presente trabajo se avocará al cálculo de las primas que corresponden a los planes más comunes.

Seguro de Vida Conjunta.

Este tipo de seguro provee el pago de una suma asegurada (k) al final del año en que el grupo asegurado ($x_1 x_2 x_3 x_4 \cdots\cdots x_m$) fracasa, el valor presente de este seguro, o prima neta única se denota por $A_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}$ y se calcula en base a la expresión:

(4.4.1) $$A_{x_1 x_2 x_3 x_4 \cdots\cdots x_m} = k \sum_{t=0}^{\bar{\omega}} V^{t+1} \, {}_{t|}q_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}$$

donde k representa el monto de la suma asegurada y ${}_{t|}q_{x_1 x_2 x_3 \cdots x_m}$ es la probabilidad que el grupo ($x_1, x_2, x_3, \cdots \; x_m$) llegue con vida al año t y fracase en el transcurso del año siguiente, es decir, fracase en el año $t+1$

Substituyendo la ecuación (2.1.4) en esta expresión se obtiene:

$$A_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m} = k \sum_{t=0}^{\bar{\omega}} V^{t+1} \left({}_{t}p_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m} - {}_{t+1}p_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m} \right)$$

lo que se puede reescribir como:

$$A_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m} = k \sum_{t=0}^{\bar{\omega}} V^{t+1} \left(\frac{l_{x_1+t:\, x_2+t:\, \cdots\cdots :x_m+t} - l_{x_1+t+1:\, x_2+t+1 \cdots\cdots :x_m+t+1}}{l_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}} \right)$$

$$A_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = k\sum_{t=0}^{\bar{\omega}} v^{t+1}\left(\frac{d_{x_1+t:x_2+t:\cdots\cdots\cdots:x_m+t}}{l_{x_1x_2x_3\cdots\cdots\cdots\cdots x_m}}\right)$$

Multiplicando y dividiendo por $v^{\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_m}{m}}$ se tiene que:

$$A_{x_1x_2x_3\cdots x_m} = k\sum_{t=0}^{\bar{\omega}} \frac{v^{\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_m}{m}+t+1}}{v^{\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_m}{m}}}\,\frac{d_{x_1+t:x_2+t:\cdots\cdots\cdots x_m+t}}{l_{x_1x_2x_3\cdots\cdots\cdots x_m}}.$$

y substituyendo las funciones conmutadas de vida conjunta se concluye que:

$$A_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m} = k\sum_{t=0}^{\bar{\omega}} \frac{C_{x_1+t:x_2+t:\cdots\cdots\cdots x_m+t}}{D_{x_1x_2x_3\cdots\cdots\cdots x_m}} = k\,\frac{M_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}{D_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}$$

por lo tanto, considerando una suma asegurada de \$ 1,00

(4.4.2) $$A_{x_1x_2x_3\cdots x_m} = \frac{M_{x_1x_2x_3\cdots\cdots\cdots x_m}}{D_{x_1x_2x_3\cdots\cdots\cdots x_m}}$$

y esta expresión es conocida como la prima neta única de un seguro de vida conjunta.

En el plan de seguro matrimonial se utiliza la ecuación (4.4.2) para calcular la prima neta única correspondiente, adaptándola para un grupo de dos vidas (x_1, x_2) el cual paga una suma asegurada al ocurrir la primera muerte, quedando la expresión de la siguiente manera:

$$A_{x_1 x_2} = \frac{M_{x_1 x_2}}{D_{x_1 x_2}}$$

Otra forma de calcular esta prima, que es frecuentemente usada en algunas compañías de seguro, se base en encontrar primeramente la edad igual equivalente del grupo (x_w), ya sea mediante la ley de Makeham, de Gompertz o del envejecimiento uniforme y, realizar los cálculos correspondientes como se expone a continuación:

- Conforme la ley de Gompertz se tiene que el grupo de m vidas $x_1 x_2 x_3 x_4 \cdots\cdots x_m$ se puede substituir por una sola vida de edad x_w donde $\mu_{x_w} = \sum_{i=1}^{m} \mu_{x_i}$ y después se encuentra la prima neta única de un seguro de vida entera individual para la edad x_w obteniendo:

$$A_{x_1 x_2 x_3 \cdots x_m} = A_{x_w} = \frac{M_w}{D_w} \tag{4.4.3}$$

Para un grupo de dos vidas $\mu_{x_w} = \mu_{x_1} + \mu_{x_2}$ entonces

$$A_{x_1 x_2} = A_{x_w} = \frac{M_w}{D_w}$$

- Conforme a la ley de Makeham el grupo de m vidas - $x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m$ se puede substituir por un grupo de m personas- de edad x_w de tal manera que:

$$\mu_{x_w} = \frac{\mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \mu_{x_3} + \cdots \mu_{x_m}}{m}$$

y después calcular la prima en base al grupo de m personas de- edad x_w obteniendo así:

$$(4.4.4) \qquad A_{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m} = A_{x_w x_w \cdots x_w} = \frac{M_{x_w x_w x_w \cdots x_w}}{D_{x_w x_w x_w \cdots x_w}}$$

lo que para dos vidas se puede escribir como

$$A_{x_1 x_2} = A_{x_w x_w} = \frac{M_{x_w x_w}}{D_{x_w x_w}}$$

Este método resulta bastante cómodo para las compa - ñías de seguros pues generalmente cuentan con tablas elaboradas-con funciones conmutadas para distinos grupos de personas con edades iguales.

- La Ley del Envejecimiento Uniforme, es comunmente utilizada para el cálculo de primas de seguros matrimoniales, pues es un método muy corto para encontrar la edad igual equivalente de dos personas a partir de una tabla de Envejecimiento Uniforme, y después calcular las primas en base a funciones conmutadas.

(4.4.5) $$A_{x_1x_2} = A_{x_\omega x_\omega} = \frac{M_{x_\omega x_\omega}}{D_{x_\omega x_\omega}}$$

donde, para $x_1<x_2$; $x_\omega = x_1+t$; y

$t=\dfrac{\log(1-c^{n})-\log 2}{\log c}$ en donde c es la constante de Makeham y n es la diferencia de edades entre x_1 y x_2

Seguro Ordinario de Grupo.

Este tipo de seguro provee el pago de la suma asegurada a los beneficiarios del asegurado si éste muere en el trans - curso de 1 año, el cálculo de la prima de este tipo de seguro se realiza obteniendo el valor presente de las obligaciones de la - compañía, así, considerando un grupo formado por m personas de - edades $x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots\cdots x_m$ y que la ocurrencia de las muertes de los integrantes del grupo es independiente tenemos que:

(4.4.6) $$A_{x_1 \overline{x_2 x_3 \cdots x_m :1|}} = V\, q_{x_1} \cdot q_{x_2} \cdot q_{x_3} \cdots\cdots q_{x_m}$$

donde V representa el factor de valor presente $(1+i)^{-1}$.

en términos de l_x esta expresión se puede reescribir como

(4.4.7) $$A_{x_1 \overline{x_2 x_3 \cdots x_m :1|}} = \frac{v(l_{x_1+1})(l_{x_2+1})(l_{x_3+1})\cdots\cdots(l_{x_m+1})}{l_{x_1} \cdot l_{x_2} \cdot l_{x_3} \cdots\cdots l_{x_m}}$$

como se puede observar esta expresión puede ser muy grande e inclusive inoperante si el tamaño del grupo es muy grande.

En la práctica las compañías de seguros difícilmente llegan a utilizar estas expresiones pues han encontrado métodos-equivalentes que facilitan los cálculos respectivos contándose - entre los más comunes los siguientes:

Método de la Edad Igual Equivalente: Bajo este método lo que se hace es calcular la edad igual equivalente (x_w) me- - diante la fórmula de Makeham y substituir el grupo original - - $x_1 x_2 x_3, x_4 \cdots\cdots x_m$ por un grupo de m personas todas de edad x_w y- luego calcular la prima por medio de la expresión:

$$A_{\overline{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_m}:\overline{1}|} = v\left(q_{x_w}\right)^m \qquad (4.4.8)$$

donde x_w es tal que:

$$\mu_{x_w} = \frac{\mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \mu_{x_3} + \cdots\cdots + \mu_{x_m}}{m}$$

La desventaja principal de este método es que no to - das las tablas de mortalidad están elaboradas bajo las suposicio nes de Makeham y la fórmula para encontrar la edad igual equiva- lente no es funcional en tablas que no son de este tipo.

Método de la Tarifa Individual: Este es sin duda el -

método más utilizado en las compañías de seguro en México, y básicamente se trata de obtener una tarifa individual para seguros que son contratados en grupo.

La tarifa individual que se menciona es calculada mediante la ecuación:

(4.4.9) $$A_{\overline{x:1|}} = \frac{v \cdot q_x}{\delta}$$

en donde v es el factor de valor presente $(1+i)^{-1}$

q_x Es la probabilidad que una persona de edad x muera en el transcurso de 1 año.

δ Es una constante que se calcula por métodos estadísticos y representa un ajuste que se realiza a la prima individual para adaptarla a un seguro de grupo, el cual someramente consiste en considerar varias tablas de mortalidad, con diferentes características y tasas de mortalidad, y hacer un estudio similar al que a continuación se describe brevemente:

.) De varias tablas de mortalidad obtienen los valores de q_x para cada edad x

..) Para todas y cada una de las edades x; obtienen la media aritmética de las q_x encontradas.

...) Calculan la desviación que existe entre las de la tabla de mortalidad que generalmente usan y las medias encontradas.

.v) Obtienen el promedio de las desviaciones y así encuentran la δ que utilizan el la fórmula (4.4.9)

Mediante esta técnica lo que acostumbran hacer las compañías de seguro es elaborar tablas de cotización para las diferentes edades indicando la prima individual para un seguro de grupo (Ver anexo II) y cuando contratan un seguro de grupo obtienen la pri -

ma individual de cada integrante y después las suman para obte - ner la prima del grupo.

Seguros Colectivos.

Las primas de seguros colectivos se calculan con base en las primas individuales de vida y la diferencia principal con el seguro de grupo es que en este se expide una sola póliza y en el colectivo se expide una póliza para cada integrante del grupo.

Como se dijo anteriormente el seguro de grupo se con- trata sin selección individual, lo que implica aceptar algunos - riesgos no previstos, por ello las compañías establecen una suma asegurada máxima por cada integrante del grupo que generalmente- es $ 2'000,000.00 de pesos.

Otras compañías lo que hacen es establecer ciertos - factores, que al multiplicar por la suma asegurada promedio del- grupo se obtiene la suma asegurada máxima por cada integrante - del grupo.

Dichos factores se calculan mediante el empleo de téc nicas estadísticas y generalmente de acuerdo al número de inte -

grantes del grupo.

El siguiente cuadro representa la tabla de factores - que utiliza la compañía de seguros La Comercial, S.A.

Tabla I

Número de Asegurados	Factor
10 a 24 Personas	2
25 a 49 Personas	3
50 a 99 Personas	4
100 a 150 Personas	5

Cuando una colectividad tiene una ocupación que representa un riesgo mayor que el normal, se le carga una extraprima - que estará en función del riesgo de la ocupación. Esta extraprima es calculada con base en la experiencia de la compañía y se - realiza también mediante el uso de técnicas estadísticas.

4.5 Ejemplo Práctico sobre la Cotización de un Seguro de Grupo.

En el presente apartado se expone un ejemplo práctico sobre la cotización que las compañías de seguro realizan en la práctica al contratar un seguro de grupo.

Los datos que se requieren para elaborar un estudio son:

- Nombre y Dirección del Contratante
- Giro de la Empresa
- Requisitos de Eligibilidad
- Regla para determinar la Suma Asegurada
- Listado del Personal con los siguientes datos:
    - . Nombre Completo del Empleado
    - . Fecha de Nacimiento o Registro Federal de Causantes.
    - . Fecha de Ingreso a la Compañía
    - . Sueldo Mensual
    - . Ocupación o Puesto (En el caso de ocupaciones peligrosas como mineros, buzos, etc, se deberá realizar un estudio para calcular la extraprima.)

Para elaborar el ejemplo se citarán los siguientes datos:

Nombre de la Empresa: "Astorga y Asociados, S.A."

Giro de la Empresa: Consultoría y Asesoría.

Requisitos de Eligibilidad:
Personal de Confianza.

Regla para determinar la Suma Asegurada:
10 Meses de Sueldo.

Listado de Personal:

NOMBRE	PUESTO	FECHA DE NACIMIENTO	FECHA DE INGRESO	SUELDO MENSUAL
Miguel Astorga	Director	3-Mar-1945	Oct-1975	$ 130,000.00
Andrés Córdova	Subdirector	9-May-1948	Nov-1975	100,000.00
Alfonso Lara	Gerente	3-Feb-1950	Dic-1977	85,000.00
Gabriel López	Gerente	16-May-1949	Dic-1976	85,000.00
Humberto Mena	Subgerente	17-Jul-1945	Ene-1974	75,000.00
Carlos Junco	Subgerente	30-Nov-1948	Ene-1978	75,000.00
Patricia Franco	Subgerente	10-Dic-1950	May-1979	75,000.00
Luis Cantón	Subgerente	8-Dic-1945	Jun-1976	75,000.00
José Batista	Asesor	27-Ene-1949	Dic-1976	65,000.00
Aurelio Vivar	Asesor	14-Dic-1952	Oct-1975	65,000.00
Laura Salas	Asesor	26-Oct-1958	Dic-1979	65,000.00
Eduardo Avila	Asesor	4-Nov-1957	Dic-1979	65,000.00
José González	Analista	18-Jun-1959	Dic-1980	50,000.00
Felipe Pimentel	Analista	20-Oct-1957	Dic-1979	50,000.00
Teresa Moctezuma	Analista	30-Oct-1956	Dic-1979	50,000.00
Héctor Aguirre	Analista	28-Jun-1957	Dic-1979	50,000.00
			T O T A L	$ 1'160,000.00

El primer paso es determinar la suma asegurada correspondiente conforme a la Regla establecida.

La suma asegurada promedio se obtiene multiplicando la nómina mensual por 10 y dividiendo el resultado entre el número de participantes.

$$\frac{1'160,000.00 \times 10}{16} = 725,000.00$$

Después se multiplica la suma asegurada promedio por el factor correspondiente de la tabla I, que en este caso es 2, entonces la suma asegurada máxima que se puede otorgar es:

$$(725,000.00)\ (2) = 1'450,000.00$$

si la suma asegurada individual de algún miembro sobrepasa esta cantidad, deberá presentar los examenes médicos que la compañía juzque convenientes.

Después se procede a determinar la suma asegurada de cada uno de los miembros del grupo, multiplicando su salario por diez, así se obtiene que la suma asegurada que corresponde al Director es \$ 1'300.000.00, al Subdirector \$ 1'000,000.00, a los Gerentes \$ 850,000.00 y así sucesivamente

El segundo paso es determinar las primas, las que se-calculan con base en la fórmula (4.4.9) u obteniéndolas a partir de la tabla del anexo II.

La prima total del grupo es la suma de todos y cada una de las primas individuales.

De esta manera las primas individuales son:

Para el Director que tiene 39 años cumplidos la prima según la tabla del anexo II es 5.06 por millar de suma asegurada, el Subdirector de edad 36 es 4.34 por millar, y así sucesivamente se obtienen las primas anuales individuales.

Es necesario aclarar que las primas anuales están expuestas en la tabla por millar de suma asegurada, por lo que el resultado de multiplicar la suma asegurada por la prima debe ser dividido entre 1000.

Al realizar todas las operaciones, la cotización para todo el grupo se muestra en el siguiente cuadro.

N O M B R E	P U E S T O	EDAD	S A L A R I O M E N S U A L	S U M A ASEGURADA	PRIMA IND (ANEXO II)	TOTAL POR PERSONA
Miguel Astorga	Director	39	$ 130,000.00	$ 1'300,000.00	5.06	$ 6,578.00
Andrés Córdova	Subdirector	36	100,000.00	1'000,000.00	4.34	4,340.00
Alfonso Lara	Gerente	34	85,000.00	850,000.00	4.00	3,400.00
Gabriel López	Gerente	35	85,000.00	850,000.00	4.15	3,527.50
Humberto Mena	Sub-Gerente	38	75,000.00	750,000.00	4.79	3,592.50
Carlos Junco	Sub-Gerente	35	75,000.00	750,000.00	4.15	3,112.50
Patricia Franco	Sub-Gerente	33	75,000.00	750,000.00	3.87	2,902.50
Luis Cantón	Sub-Gerente	38	75,000.00	750,000.00	4.79	3,592.50
Jose Batista	Asesor	35	65,000.00	650,000.00	4.15	2,697.50
Aurelio Vivar	Asesor	31	65,000.00	650,000.00	3.71	2,411.50
Laura Salas	Asesor	25	65,000.00	650,000.00	3.50	2,275.00
Eduardo Avila	Asesor	26	65,000.00	650,000.00	3.52	2,288.00
José González	Analista	24	50,000.00	500,000.00	3.48	1,740.00
Felipe Pimentel	Analista	36	50,000.00	500,000.00	4.34	2,170.00
Teresa Moctezuma	Analista	37	50,000.00	500,000.00	4.54	2,270.00
Héctor Aguirre	Analista	36	50,000.00	500,000.00	4.34	2,170.00
			TOTAL:	$11'600,000.00	TOTAL:	$ 49,067.50

Así la prima anual para el grupo expuesto en el ejemplo es de \$ 49,067.50

Otra forma de calcular la prima de un seguro de grupo y que también se usa con frecuencia en las compañías aseguradoras es encontrar primeramente la edad igual equivalente del grupo utilizando la fórmula de Makeham, (fórmula 2.3.3) y después encontrar la tarifa individual de grupo para la edad igual equivalente.

En el siguiente cuadro aparecen las edades de los integrantes del grupo y sus respectivas fuerzas instantáneas de mortalidad (tomadas de la Tabla de Mortalidad Experiencia Mexicana - 62-67).

EDAD	No. de Personas	$1000\,\mu_x$
39	1	3,499
36	2	2,996
34	1	2.738
35	3	2.861
33	1	2.628
38	2	3.314
31	1	2.439
25	1	2.059
26	1	2.107
24	1	2.016
37	1	3.147

Entonces la edad igual equivalente X_ω , es aquella que:

$$\mu_{x_\omega} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \mu_{x_i}}{m}$$

Substituyendo los valores del cuadro se obtiene:

$$\mu_{x_\omega} = 2.7457$$

Buscando en la tabla la edad que corresponde a esta fuerza de mortalidad se tiene: X_ω = 35 años.

La prima neta individual de grupo para una persona de 35 años es 4.15 por millar de suma asegurada (Ver anexo II)

Entonces el grupo original se substituye por 15 personas todas de 35 años de edad, así la prima del seguro de grupo es el producto de la tarifa encontrada por la suma asegurada del grupo, o sea:

Prima Anual del Grupo= (4.15 x 11'600,000) ÷ 1000

Prima Anual del Grupo= \$ 48,140.00

4.6 Reservas Actuariales.

Partiremos del principio de equivalencia para tratar- de entender lo que significa la Reserva Actuarial y su importan - cia dentro de las compañías de seguro

Este principio establece: "El compromiso del asegura- dor es igual al compromiso del asegurado".

Si todos los seguros de vida se vendieran bajo el - plan temporal renovable cada año, teoricamente no serían necesa - rias las reservas actuariales tal como existen hoy en día. Las - primas netas recibidas al comienzo del año se invertirían a la ta sa de interés adoptada y la liquidación de las reclamaciones pre- vistas por fallecimiento absorvería la suma total en existencia - al final de cada año.

Sin embargo en la práctica no todos los segures son - vendidos bajo este plan, por lo cual es importante conocer y en - tender el concepto "Reserva Actuarial" así como los principales - métodos que existen para calcularla.

El fondo que se forma con las primas cobradas y los - intereses ganados por la inversión de las mismas, para poder solventar las reclamaciones es conocido con el nombre de "Reserva Actuarial" y se denota generalmente por $({}_{t}V)$

Como la reserva se forma de esta manera, resulta claro entender porque la totalidad o la mayor parte de ésta pertenece en realidad al asegurado, y con la finalidad de protegerlo, la Legislación de Seguros exige a las compañías mantener una cierta reserva mínima sobre cada póliza que esté en vigor al final de cada año.

Las reservas sobre una póliza se pueden calcular al final o principio de cada año.

Las reservas sobre una póliza al final del año se conocen con el nombre de "Reserva Terminal" La Reserva Terminal al final de un año más la prima neta para el próximo se le conoce con el nombre de "Reserva Inicial para el Siguiente Año". El promedio de la Reserva Inicial y la Reserva Terminal para un año cualquiera se conoce con el nombre de "Reserva Media".

La Reserva Media es de gran importancia puesto que es la usada por las compañías de seguros de vida para calcular el pasivo de las pólizas en vigor al final de su año financiero.

La Reserva Terminal se usa para determinar el importe de los valores garantizados o de rescate que hay que pagar al asegurado que se retira. Las pólizas suelen ser canceladas precisamente en la fecha que se vence una prima y, por lo tanto, en esa fecha la Reserva Terminal es la medida adecuada del valor de la póliza.

Para calcular las reservas se usan distintos métodos que surgen de la definición, y toman en cuenta los compromisos del asegurador y del asegurado.

Método Prospectivo.

Bajo este método la Reserva Terminal se calcula considerando las primas y beneficios futuros y consiste en hacer la diferencia entre el valor presente del beneficio (denotado por A) y el valor presente de las primas que se recibirán, denotadas ($P \cdot \ddot{a}$)

$$ _tV = A - P\ddot{a} \tag{4.6.1} $$

Por ejemplo, para una póliza de vida entera emitida a una persona de edad x , se tiene que la reserva esta dada por:

$$(4.6.2) \qquad {}_tV_x = A_{x+t} - P_x\, \ddot{a}_{x+t}$$

lo que en términos de funciones conmutadas se puede escribir como:

$${}_tV_x = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x \cdot N_{x+t}}{N_x \cdot D_{x+t}}$$

Para una póliza temporal a n años (denotado por ${}_tV^{1}_{x:\overline{n}|}$)

$$(4.6.3) \qquad {}_tV^{1}_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} - P^{1}_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

Método Retrospectivo.

Este método consiste en encontrar la reserva terminal calculando el exceso del valor acumulado de las primas cobradas sobre el monto acumulado de los beneficiarios otorgados, en forma general se calcula bajo la siguiente fórmula:

$$(4.6.4) \qquad {}_tV_x = P_x\, \ddot{S}_x - {}_tk_x$$

Nota: Esta ecuación se obtiene a partir de sumar $P_x \cdot N_x - M_x$ a la fórmula prospectiva y substituir $\ddot{S}_x = \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}}$

en donde ${}_tk_x$ representa la prima neta única de un seguro por los primeros t años acumulada al final del año t, y $P_x \cdot S_x$ las primas cobradas acumuladas al mismo punto de evaluación.

Analizando con detenimiento el significado de la expresión ${}_tk_x$, se llega a la conclusión que:

$$ {}_tk_x = \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} $$

Por ejemplo, para una póliza de vida entera la reserva terminal se expresa de la siguiente manera:

(4.6.5) $$ {}_tV_x = P_x \cdot \ddot{S}_{\overline{x+t}|} - {}_tk_x $$

lo que en términos de funciones conmutadas es:

(4.6.6) $$ {}_tV_x = \frac{P_x(N_x - N_{x+t})}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} $$

La reserva terminal siempre es igual, ya sea calculada por el método prospectivo o por el retrospectivo para cual --

quier tiempo t de duración, puesto que el valor de todas las primas pasadas y futuras contratadas, debe ser igual al valor de los beneficios otorgados y que se otorgarán en el futuro.

Existen otras fórmulas para calcular las Reservas Actuariales de un seguro, pero la generalidad de ellas son transformaciones algebráicas de las fórmulas básicas (Prospectivo y Retrospectiva).

Entre estas fórmulas una de las más utilizadas es la fórmula acumulativa de Fackler, la cual nace a partir de la fórmula prospectiva:

(4.6.7) $${}_tV_x = A_{x+t} - P_x\,\ddot{a}_{x+t}$$

a la que se le suma en ambos lados de la ecuación P_x para obtener:

(4.6.8) $${}_tV_x + P_x = A_{x+t} - P_x\,a_{x+t}$$

Substituyendo en esta igualdad:

$$A_{x+t} = v\,q_{x+t} + v\,p_{x+t}\,A_{x+t+1}$$

y $$a_{x+t} = v\,p_{x+t} \cdot \ddot{a}_{x+t+1}$$

se obtiene:

$$({4.6.9}) \qquad {}_{t}V_x + P_x = v\, q_{x+t} + v\, p_{x+t} \cdot A_{x+t+1} - P_x \left(v\, p_{x+t}\, \ddot{a}_{x+t+1}\right)$$

Factorizando $v\, p_{x+t}$ se tiene que:

$$({4.6.10}) \qquad {}_{t}V_x + P_x = v\, q_{x+t} + v\, p_{x+t} \left(A_{x+t+1} - P_x\, \ddot{a}_{x+t+1}\right)$$

pero

$$A_{x+t+1} - P_x\, \ddot{a}_{x+t+1} = {}_{t+1}V_x$$

por lo tanto, factorizando v

$$({4.6.11}) \qquad {}_{t}V_x + P_x = v\left(q_{x+t} + p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V_x\right)$$

Multiplicando por v^{-1} en ambos miembros de la igual - dad:

$$({4.6.12}) \qquad \left({}_{t}V_x + P_x\right)(1+i) = q_{x+t} + p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V_x$$

Finalmente despejando ${}_{t+1}V_x$ se concluye:

$$(4.6.13) \qquad {}_{t+1}V_x = \frac{({}_tV_x + P_x)(1+i) - q_{x+t}}{p_{x+t}}$$

tomando las funciones μ_{x+t} y ω_{x+t} de tal manera que:

$$\mu_{x+t} = \frac{1+i}{p_{x+t}} \qquad y \qquad \omega_{x+t} = \frac{q_{x+t}}{p_{x+t}}$$

la ecuación (4.6.13) se puede reescribir como:

$$(4.6.14) \qquad {}_{t+1}V_x = ({}_tV_x + P_x)\mu_{x+t} - \omega_{x+t}$$

esta última expresión es conocida como la fórmula de Fackler y las funciones μ_{x+t} y ω_{x+t} se conocen como funciones de valuación de Fackler.

La fórmula de Fackler es muy usada por las compañías de seguros puesto que es un método conveniente para preparar tablas de reservas actuariales ya que permite calcular la reserva terminal de un año a partir de conocer la reserva terminal del año anterior y del valor de la prima neta de una póliza.

Es preciso mencionar también que este método permite calcular las reservas en forma secuencial durante toda la duración del seguro tomando como valor inicial ${}_0V_x$

Valuación de Reservas.

El proceso mediante el cual una compañía de seguros calcula las reservas que corresponden a un grupo de pólizas se le llama valuación de reservas.

El propósito de la valuación de reservas es determinar si la compañía esta operando dentro de las suposiciones teóricas utilizadas en el cálculo de las primas, ya que en la práctica cualquier experiencia desfavorable podría poner en peligro la solvencia de una compañía aseguradora, la cual puede ser insolvente desde el punto de vista actuarial y sin embargo continuar pagando todas las reclamaciones durante un largo período de tiempo.

Independientemente de la necesidad de medir la solvencia de la compañía de seguros, la Ley General de Instituciones de Seguros, en el Artículo 107, establece que a más tardar el mes de enero las campañas deben presentar la valuación de reservas por las operaciones realizadas hasta el 31 de diciembre del año anterior ante la Comisión Nacional Bancaría y de Seguros, con el objeto de informar a las autoridades sobre la composición de la cartera, los volúmenes de pólizas, sumas aseguradas, primas, reservas y siniestros manejados durante el año que termina.

La valuación de reservas, se hace con respecto a los seguros de vida, seguros de daños, y en general para todos los ramos que opera una compañía de seguros.

En este caso vamos a considerar solamente el seguro de vida, el cual se divide en tres subramos:

- Seguro Individual
- Seguro de Grupo
- Seguro Colectivo

La valuación de reservas se hace por plan. Cuando se tienen calculadas las reservas para cada plan se procede a sumar cada una obteniéndose de esta manera la suma general.

Para el tipo de seguro en vigor saldado, se va a tomar en cuenta el número de pólizas y en consecuencia se va a fijar una suma asegurada promedio, de la cual se obtiene la reserva aplicando un porcentaje.

En el caso de seguros prorrogados el factor que vamos a obtener va a diferir, aunque también se toma en cuenta el número de pólizas.

Para los beneficios adicionales, extraprimas, adicionales por dividendos y dividendos se calcula igual que el seguro en vigor saldado.

En el caso de seguro colectivo, se hace lo mismo que para seguro individual.

Para el seguro de grupo va a ver una variación, la cual consiste en que la reserva que se guarda es la parte de la prima neta no devengada de la póliza.

En el anexo III se presentan los formatos que la Comisión Nacional Bancaría y de Seguros ha diseñado para que las compañías presenten su valuación anual de reservas.

Capítulo 5: "Tablas de Decremento Múltiple y Planes de Pensiones"

5.1 Definiciones y Generalidades.

En los capítulos anteriores se han estudiado conceptos relacionados con el Seguro de Vida, basándose en modelos que consideran un grupo de vidas que al paso del tiempo se reduce a causa del fallecimiento de sus integrantes, pero resulta obvio que la muerte no es la única causa por la que un grupo de vidas se decrementa, por ejemplo un grupo de empleados se puede reducir a causa de la muerte, invalidez o retiro de algunos de sus elementos. Por ello se tiene la necesidad de contar con un modelo matemático que contemple varias causas de decremento de un grupo y que facilite los cálculos actuariales concernientes a los seguros de enfermedad, invalidez, planes de pensiones, etc.

Tabla de Decremento Múltiple es un modelo matemático que considera un grupo de vidas sujeto a varias causas independientes de decremento que operan continuamente, generalmente, el conjunto de vidas forma un grupo cerrado, o sea no entran personas nuevas ni reingresan personas después de la operación de varios decrementos.

La Construcción de una Tabla de Decremento Múltiple, se hace en base a varias analogías con la elaboración de una tabla de mortalidad, así, se definen las siguientes expresiones:

$\ell_x^{(\tau)}$ Es el número de personas de edad x que se encuentran sujetas a m causas de decremento -

$d_x^{(k)}$ Es el número de decrementos por la causa k entre las edades x y $x+1$

$d_x^{(\tau)}$ Es el número total de decrementos por todas - las causas, entre las edades x y $x+1$ por lo- tanto:

(5.1.1) $$d_x^{(\tau)} = \sum_{k=1}^{m} d_x^{(k)}$$

de estas definiciones resulta claro que:

(5.1.2) $$d_x^{(\tau)} = \ell_x^{(\tau)} - \ell_{x+1}^{(\tau)}$$

La probabilidad que una persona de edad x deje al grupo en un año por ser víctima de la causa k se denota como $q_x^{(k)}$ y se calcula en base a los conceptos de probabilidad clásica:

(5.1.3) $$q_x^{(k)} = \frac{d_x^{(k)}}{\ell_x^{(\tau)}}$$

La probabilidad que una persona de edad x deje al grupo en el siguiente año por cualquiera de las m causas se denota por $q_x^{(t)}$ y se define como:

$$q_x^{(t)} = \frac{d_x^{(t)}}{l_x^{(t)}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{d_x^{(k)}}{l_x^{(t)}} = \sum_{k=1}^{m} q_x^{(k)} \tag{5.1.4}$$

La probabilidad que una persona de edad x permanezca en el grupo de vidas por un año, se denota por $p_x^{(t)}$ y se define como:

$$p_x^{(t)} = 1 - q_x^{(t)} = \frac{l_{x+1}^{(t)}}{l_x^{(t)}} \tag{5.1.5}$$

Similarmente se define la probabilidad que una persona de edad x permanezca en el grupo por n años como:

$$_{n}p_x^{(t)} = \frac{l_{x+n}^{(t)}}{l_x^{(t)}} \tag{5.1.6}$$

La probabilidad que una persona de edad x salga del grupo por cualquier causa en los siguientes n años se define como:

$$_{n}q_x^{(t)} = 1 - {_{n}p_x^{(t)}} \tag{5.1.7}$$

Si los valores de $q_x^{(k)}$ son conocidos para toda $k=1,2,3,\ldots\ldots m$, la tabla de decremento múltiple se construye a partir de un radix arbitrario.

La tasa central de decremento a la edad x para la causa k se define también en forma análoga a la tasa central de mortalidad; y se denota por $m_x^{(k)}$

(5.1.8) $$m_x^{(k)} = \frac{d_x^{(k)}}{L_x^{(t)}}$$

donde

$$L_x^{(t)} = \int_0^1 l_{x+r}^{(t)}\, dr$$

La tasa central de decremento a edad x para todas las causas se define como:

(5.1.9) $$m_x^{(t)} = \frac{d_x^{(t)}}{L_x^{(t)}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{d_x^{(k)}}{L_x^{(t)}} = \sum_{k=1}^{m} m_x^{(k)}$$

Es conveniente aclarar que el decremento total a cada edad se distribuye uniformemente a lo largo del año, es decir si se considera un número r de tal manera que $0<r<1$, entonces:

(5.1.10) $$l_{x+r}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - r\left(l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)}\right) = l_x^{(\tau)} - r\, d_x^{(\tau)}$$

La fuerza instantanea de decremento a edad x, denotado por $\mu_x^{(\tau)}$, se define como:

(5.1.11) $$\mu_x^{(\tau)} = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}} \cdot \frac{d\left(l_x^{(\tau)}\right)}{dx}$$

que equivale a la expresión:

(5.1.12) $$\mu_x^{(\tau)} = -\frac{d\left(\log l_x^{(\tau)}\right)}{dx}$$

Esta función representa la fuerza de decremento por todas las causas combinadas.

En forma análoga la expresión para calcular la fuerza de decremento por la causa específica k es:

(5.1.13) $$\mu_x^{(k)} = -\frac{d\left(\log l_x^{(k)}\right)}{dx}$$

En la práctica dificilmente se cuenta con una expresión matemática que defina exactamente la función $l_x^{(+)}$, por ello el cálculo de la $\mu_x^{(+)}$ sólo se puede hacer mediante aproximaciones númericas, y las más comunes son:

$$\mu_x^{(+)} = \tfrac{1}{2}\left(\log l_{x-1}^{(+)} - \log l_{x+1}^{(+)}\right) \tag{5.1.14}$$

$$\mu_x^{(+)} = \frac{8\left(l_{x-1}^{(+)} - l_{x+1}^{(+)}\right) - \left(l_{x-2}^{(+)} - l_{x+2}^{(+)}\right)}{12\, l_x^{(+)}} \tag{5.1.14.1}$$

A partir de la expresión (5.1.12) se pueden obtener las siguientes fórmulas y ecuaciones para encontrar $l_x^{(+)}$ y ${}_{n}p_x^{(+)}$ mediante analogía con las funciones de mortalidad, obteniendo:

$$l_x^{(+)} = l_0^{(+)}\, e^{-\int_0^x \mu_y^{(+)}\,dy} \tag{5.1.15}$$

$${}_{n}p_x^{(+)} = e^{-\int_x^{x+n} \mu_y^{(+)}\,dy} \tag{5.1.16}$$

De igual forma se definen las expresiones para calcular $l_x^{(k)}$ y ${}_{n}p_x^{(k)}$ de la siguiente manera:

$$l_x^{(k)} = l_0^{(k)}\, e^{-\int_0^x \mu_y^{(k)}\,dy} \tag{5.1.17}$$

(5.1.18) $$ {}_{N}p_{x}^{(k)} = e^{-\int_{x}^{x+N} \mu_{y}^{(k)} dy} $$

La construcción de una tabla de decremento múltiple - se realiza conjuntando a su vez una serie de m tablas de decre - mento sencilla.

Todas y cada una de estas tablas de decremento sencillas representan una causa específica de decremento, y su cons - - trucción se realiza con base a los mismos elementos de una tabla- de mortalidad.

Las columnas más comunes en una tabla de decremento - sencilla estan constituidas por las siguientes:

- Columna de Edades (X)
- Columna de Personas expuestas a la causa de Decre - - mento ($l_x^{(k)}$)
- Columna que indica el número de Personas que a Edad x salen por la causa de Decremento ($d_x^{(k)}$)
- Columna de la probabilidad que una persona de edad- x salga del grupo debido a la causa k en el - - transcurso del siguiente año ($q_x^{(k)}$)

En la construcción de una tabla de decremento múlti -

ple se substituye la columna $l_x^{(k)}$ de cada tabla de decremento sencilla por la columna $l_x^{(t)}$ que simboliza el total de personas que se encuentran expuestos a todas las causas de decremento, y se cuenta también con una columna que muestra el total de personas que salen del grupo por todas las causas ($d_x^{(t)}$)

Las probabilidades que se pueden encontrar a partir de la tabla de decremento múltiple se pueden combinar con funciones de interés compuesto y así generar expresiones que permitan calcular el valor presente de distintas series de pagos que se realizarán en forma contingente sobre dichas probabilidades.

Para facilitar estos cálculos, se definirán ahora funciones conmutadas especiales, las cuales son una generalización de las funciones conmutadas de vida que se han definido anteriormente.

(5.1.19) $$D_x^{(t)} = V^x l_x^{(t)}$$

donde, V es el factor de valor presente de una cantidad con una tasa de interés efectiva anual i , $l_x^{(t)}$ son las personas de edad x que se encuentran sujetas a m causas de decremento.

Otra función conmutada importante se define como:

(5.1.20) $$C_x^{(k)} = V^{x+1} d_x^{(k)}$$

la cual representa el valor presente a edad x de un pago de $ 1.00 que se hará al final del año si (x) abandona el conjunto de vidas por acción de la causa k.

Las demás funciones conmutadas se definen por sumatorias de la siguiente forma:

(5.1.21)

a) $$N_x^{(\tau)} = \sum_{j=0}^{\omega-x} D_{x+j}^{(\tau)}$$

b) $$M_x^{(\tau)} = \sum_{j=0}^{\omega-x} C_{x+j}^{(k)}$$

c) $$S_x^{(\tau)} = \sum_{j=0}^{\omega-x} N_{x+j}^{(\tau)}$$

d) $$R_x^{(\tau)} = \sum_{j=0}^{\omega-x} M_{x+j}^{(\tau)}$$

A partir de las funciones definidas anteriormente se pueden encontrar ecuaciones para calcular el valor presente de anualidades y beneficios contingentes sobre el acontecimiento de una causa k mediante analogías con las funciones de vida, así se tiene que:

- El valor presente de una serie de pagos anuales de \$ 1.00 que se realizan en forma continua al final de cada año si (x) permanece en el conjunto de vidas expuestas a las m causas de decrementos es:

(5.1.22) $$a_x^{(+)} = \frac{N_{x+1}^{(+)}}{D_x^{(+)}}$$

- El valor presente de un pago de \$ 1.00 a una persona de edad x que se hará en el momento que abandone al grupo de vida por el acontecimiento de la causa k , o prima neta única de un seguro vitalicio que cubre el decremento de un grupo de vidas por causa k es:

(5.1.23) $$A_x^{(k)} = \frac{M_x^{(k)}}{D_x^{(+)}}$$

Las pólizas de seguro de vida a menudo se emiten conclaúsulas adicionales que cubren la muerte accidental por el doble de la suma asegurada. El módelo teórico para evaluar este beneficio adicional es una tabla de decremento doble en la que aparezca el número de muertes por causa natural $d_x^{(1)}$ y el número de muertes por causa accidental $d_x^{(2)}$, así

$$C_x^{(2)} = V^{x+1} d_x^{(2)} \qquad y \qquad M_x^{(2)} = \sum_{j=0}^{\omega - x} C_{x+j}^{(2)}$$

y entonces el valor presente a edad x del pago de un peso al final del año en que (x) muere accidentalmente es:

(5.1.24) $$A_x^{(2)} = \frac{M_x^{(2)}}{D_x^{(\tau)}}$$

De la misma forma que en seguro de vida se pueden encontrar primas netas para seguros temporales, temporales pagos limitados, etc, utilizando las mismas fórmulas.

Resulta sencillo interpretar las funciones de vida conjunta como una tabla de decremento múltiple pues el grupo $(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots\cdots x_m)$ fracasa a partir de ocurrir la primera muerte, así se tienen m causas de decremento que son: La muerte de x_1, la muerte de x_2, y así sucesivamente hasta llegar a la muerte de x_m

5.2 Utilidad de las Tablas de Decremento Múltiple (Planes de Pensiones).

Uno de los usos más comunes que tienen las tablas de decremento múltiple es la realización de estudios sobre movimientos de población, los cuales miden el comportamiento de la emigración en una localidad de acuerdo a distintas causas que provocan el decremento de la población, como pueden ser desempleo, enfermedad, violencia, etc.

La utilización más común es la que corresponde a los estudios actuariales que conciernen a la implantación y operación de un plan de pensiones.

La función primaria de un plan de pensiones es proveer un beneficio a los empleados en su jubilación, pero este tipo de planes no está limitado únicamente a este beneficio, en la actualidad los planes de pensiones proveen al menos uno de los siguientes beneficios:

- Retiro
- Muerte
- Incapacidad
- Jubilación

Un plan de pensiones generalmente es contratado por un empresario para cubrir a sus empleados contra el riesgo de morir o incapacitarse y proporcionarles una cantidad de dinero al momento que deseen retirarse o cumplan los requisitos para su jubilación, lo que redunda tambien en beneficios para la compañía pues la implantación de este plan ayuda a atraer, retener y motivar a sus empleados.

El costo de las primas que corresponden a la contratación de un plan de pensiones generalmente son pagados por el patrón y en algunos casos se paga en partes proporcionales entre los empleados y el patrón.

El propósito de este apartado es establecer los principios y elementos actuariales básicos que son requeridos al implantar un plan de pensiones.

Como se dijo anteriormente los planes de pensiones generalmente incluyen protección contra las contingencias: Retiro, incapacidad, muerte y jubilación, por ello es importante saber en que consiste cada una de ellas:

<u>Beneficios por Retiro:</u> Este beneficio provee al asegurado una cantidad mensual fija al momento en que desee retirar-

se. Existen dos tipos de retiro, el anticipado y el normal. En todos los Países donde existen planes de pensiones se han emitido leyes que establecen una edad determinada y un número de años de- trabajo específicos para poder obtener una jubilación (retiro completo), pero en algunas ocasiones es factible que un trabajador - no cuente con ambos requisitos, ya sea que no cuente con la edad- establecida por la ley para tener derecho a una jubilación o que- no cuente con suficientes años de trabajo, o simplemente sea despedido y exista la necesidad de indemnizarlo, por ello existen - dos planes de beneficios por retiro; el retiro anticipado y la jubilación, es claro que el beneficio por retiro anticipado es me - nor que el obtenido por jubilación.

Beneficios por Incapacidad: Esta cobertura ampara al asegurado contra el riesgo de quedar incapacitado para trabajar,- ofreciendo el pago de una cantidad fija mensual al momento de quedar incapacitado y que continúa haciéndose hasta el momento de fallecer el empleado.

Beneficios por Muerte: Este tipo de beneficio ofrece a los parientes cercanos del asegurado una cantidad fija mensual desde el momento de su fallecimiento hasta que la esposa fallecey/o los hijos alcanzan la mayoría de edad.

En nuesto País existen básicamente dos tipos de planes de pensiones, las públicas y las privadas.

Los planes de pensiones públicos son aquellos que otorgan las diferentes instituciones de seguridad Social como son el I.M.S.S, I.S.S.S.T.E., etc, pero como generalmente estos planes otorgan un beneficio relativamente bajo, algunas instituciones de seguro han diseñado planes privados de pensiones para complementar a los públicos y así poder ofrecer a los empleados un beneficio congruente con los requerimientos monetarios reales que pueda llegar a tener durante su vejez o invalidez.

En México los planes de pensiones privados son de carácter voluntario, generalmente nace de los patrones la contratación de ellos, pero estan debidamente reglamentados, y las leyes que las regulan son:

- Ley Federal del Trabajo
- Ley del I.M.S.S.
- Ley del Impuesto sobre la Renta

La idea primordial de los planes de pensiones priva -

dos es proporcionar a los empleados una cantidad fija mensual, que sumada a la pensión que proporciona el I.M.S.S. alcance a recibir cuando menos el 100% del sueldo neto promedio de sus últimos 5 años de trabajo.

La implantación de un plan de pensiones generalmente se realiza observando los siguientes cinco pasos:

a). Diseño
b). Valuación
c). Instalación o Documentación
d). Comunicación
e). Administración

a). Diseño de un Plan de Pensiones: El diseño de un plan de pensiones generalmente emana de la voluntad del patrón o empresa pues ellos deciden que tipos de beneficios desean otorgar.

Ya establecidos los beneficos que se brindarán a los empleados es necesario considerar los siguientes puntos:

- Fecha de Inicio del Plan (Generalmente se escoge el año fiscal)
- Grupo Elegible (Sindicalizados, de Confianza, etc.)

- Requisitos de Elegibilidad (Edad del empleado, antigüedad en la empresa, etc.)
- Monto del Beneficio (Generalmente alcanzar el 100% de su salario junto con la pensión del I.M.S.S.)
- Fechas y condiciones de Retiro (Generalmente se define el retiro normal con 65 años de edad y/o 25 años de servicio en la empresa y se establece un mínimo de requisitos para obtener pensión por retiro anticipado)
- Forma de Pago (Exhibiciones mensuales generalmente)
- Contribuciones (Consiste en definir como se financiará el plan, estableciendo el porcentaje que cubrirá la empresa, el porcentaje que será cubierto por los empleados y el período de pago de las aportaciones)

b). Valuación del Plan de Pensiones: La valuación del plan consiste en determinar el costo de los beneficios, por ley dicha valuación debe ser calculada bajo técnicas actuariales.

Los elementos principales que se deben tomar en cuenta son los siguientes:

- Tabla de Mortalidad (Generalmente se utiliza la tabla Experiencia Mexicana 62-67)

- Tabla de Decremento Múltiple (La que se utilizará de acuerdo a los beneficios que se pretenden ofrecer, generalmente se consideran decrementos por incapacidad, invalidez, rotación de personal, etc.)
- Tasa de Interés
- Tasa de Inflación e Incremento de Salarios
- Método de Financiamiento del Plan

Dado que la implantación de un plan de pensiones no es lucrativa para la empresa, la valuación se debe realizar mediante una ecuación de valor donde se iguala el valor presente de los beneficios que se esperan ofrecer con el valor presente de las aportaciones que se recibiran, es decir:

Valor presente de los beneficios a otorgar = Valor presente de las aportaciones.

c). Instalación de un Plan de Pensiones: Este paso consiste en implantar propiamente el plan, es decir, hacer la redacción formal del plan, presentarlo a las autoridades competentes, generar los medios de inversión para las contribuciones, inscribir a los empleados, etc.

En México las reservas técnicas generadas por un plan de pensiones deben ser calculadas bajo técnicas alctuariales y se deberá invertir el 30% en valores de la Federación y el 70% en valores de renta fija.

d). Comunicación del Plan de Pensiones: Este es un punto muy importante pues los empleados deben saber en que consiste el plan, es decir, qué tipos de beneficios recibirá, cuál es el monto de sus aportaciones, cómo serán canalizadas, cuáles son las condiciones de retiro, a quienes puede nombrar como beneficiarios, etc.

e). Administración del Plan de Pensiones: La administración básicamente se puede dividir en dos ramas:

- Administración del Personal: Consiste en llevar un control sobre las personas que iniciaron el plan, las personas de recien ingreso, las personas que han causado bajas, el pago de contribuciones y de reclamaciones, etc.

- Control de Reservas: Consiste en hacer valuaciones periódicas (Normalmente anuales) comparando las reservas reales con las reservas esperadas y determinando medidas correctivas si son necesarias.

5.3 Construcción de una Tabla de Decremento Múltiple.

La construcción de una tabla de decremento múltiple - se lleva a cabo con base en principios y experiencias empíricas - derivadas de estudios estadísticos que se realizan sobre una muestra de la población objeto de dicho estudio.

Para construir una tabla de decremento múltiple lo - primero que se debe hacer es fijar las causas de decremento que - se analizarán, por ejemplo:

m = Decremento por Muerte

w = Decremento por Retiro Anticipado

d = Decremento por Incapacidad

r = Decremento por Retiro Normal

Inmediatamente después es necesario definir el intervalo de edades que se va a analizar el cual generalmente se toma- desde los 20 hasta los 65 años.

Después de definir estos puntos se procede a elaborar el análisis estadístico para obtener una estimación sobre el comportamiento de los decrementos en cada una de las edades que comprende la tabla o sea encontrar valores estimados de $q_x^{(k)}$ para - $k=1,2,3,\cdots,m$

En el ejemplo sería encontrar $q_x^{(m)}$, $q_x^{(w)}$, $q_x^{(d)}$, $q_x^{(r)}$ para las edades establecidas.

Dado que el objetivo del presente trabajo es proporcionar los elementos básicos de la construcción de una tabla de decremento múltiple y que las técnicas estadísticas que se emplean para calcular las $q_x^{(k}$ son las mismas que se utilizan en la construcción de una tabla de mortalidad, se omitirán, dejando a juicio del lector la investigación correspondiente.

Utilizando las investigaciones del "Pensión Research Council" a continuación se escribirá una tabla que muestra las probabilidades de decremento por edad para las causas incluidas en el ejemplo.

X	$q_x^{(m)}$	$q_x^{(w)}$	$q_x^{(d)}$	$q_x^{(r)}$
20	0.000442	0.243002	0.000263	0
21	0.000463	0.224408	0.000266	0
22	0.000488	0.207012	0.000270	0
23	0.999512	0.190717	0.000271	0
24	0.000538	0.175622	0.000274	0
25	0.000569	0.161526	0.000274	0
26	0.000602	0.148530	0.000288	0
27	0.000635	0.136431	0.000281	0
28	0.000679	0.125328	0.000279	0
29	0.000717	0.115136	0.000283	0
30	0.000763	0.105838	0.000381	0
31	0.000816	0.097339	0.000382	0
32	0.000872	0.089539	0.000381	0
33	0.000940	0.082641	0.000382	0
34	0.001006	0.076341	0.000386	0
35	0.001080	0.070751	0.000385	0
36	0.001164	0.065743	0.000487	0
37	0.001260	0.061348	0.000586	0
38	0.001360	0.057436	0.000679	0
39	0.001475	0.054042	0.000781	0
40	0.001593	0.051137	0.000873	0
41	0.001748	0.048627	0.000971	0
42	0.001945	0.046532	0.001177	0
43	0.002208	0.044726	0.001364	0
44	0.002509	0.043203	0.001566	0
45	0.002851	0.042001	0.001762	0
46	0.003240	0.040897	0.001952	0
47	0.003680	0.040086	0.002156	0
48	0.004131	0.039276	0.002442	0
49	0.004640	0.038653	0.002751	0
50	0.005165	0.038035	0.003034	0
51	0.005757	0.037435	0.003334	0
52	0.006341	0.036807	0.003722	0
53	0.006971	0.035985	0.004108	0
54	0.007650	0.035183	0.004493	0
55	0.008507	0.000000	0.004971	0
56	0.009238	0.000000	0.005362	0
57	0.009997	0.000000	0.005960	0
58	0.010859	0.000000	0.006762	0
59	0.011867	0.000000	0.007968	0
60	0.013042	0.000000	0.009721	0
61	0.014337	0.000000	0.012319	0
62	0.015748	0.000000	0.015857	0
63	0.017239	0.000000	0.020619	0
64	0.018932	0.000000	0.026739	0
65	0.000000	0.000000	0.000000	1

A partir de estos datos resulta fácil construir la tabla de decremento múltiple pues sólo basta establecer un rádix y emplear las ecuaciones expuestas en el primer apartado de este capítulo.

Continuando con el ejemplo se construirá una tabla de decremento múltiple a partir de las $q_x^{(k)}$ de la página anterior considerando un rádix de 1'000,000.

El primer renglón de la tabla se calcula de la siguiente manera:

$$l_{20}^{(t)} = \text{RADIX} = 1'000,000$$

$$d_{20}^{(m)} = l_{20}^{(t)} \cdot q_{20}^{(m)}$$

$$d_{20}^{(w)} = l_{20}^{(t)} \cdot q_{20}^{(w)}$$

$$d_{20}^{(d)} = l_{20}^{(t)} \cdot q_{20}^{(d)}$$

$$d_{20}^{(r)} = l_{20}^{(t)} \cdot q_{20}^{(r)}$$

$$d_{20}^{(t)} = d_{20}^{(m)} + d_{20}^{(w)} + d_{20}^{(d)} + d_{20}^{(r)}$$

Los demás renglones se calculan fácilmente a partir del siguiente cuadro:

COLUMNA	SIGNIFICADO	FORMULA	NUMERO DE REFERENCIA DE LA FORMULA.
$l_x^{(t)}$	Número de personas a edad x que estan expuestas a las causas de decremento.	$l_x^{(t)} = l_{x-1}^{(t)} - d_{x-1}^{(t)}$	(5.1.2)
$d_x^{(m)}$	Número de personas a edad x que abandonan el grupo por muerte.	$d_x^{(m)} = l_x^{(t)} \cdot q_x^{(m)}$	(5.1.3)
$d_x^{(w)}$	Número de personas a edad x que abandonan el grupo por retiro anticipado.	$d_x^{(w)} = l_x^{(t)} \cdot q_x^{(w)}$	(5.1.3)
$d_x^{(d)}$	Número de personas a edad x que abandonan el grupo por incapacidad.	$d_x^{(d)} = l_x^{(t)} \cdot q_x^{(d)}$	(5.1.3)
$d_x^{(r)}$	Número de personas a edad x que abandonan el grupo por retiro normal.	$d_x^{(r)} = l_x^{(t)} \cdot q_x^{(r)}$	(5.1.3)
$d_x^{(t)}$	Número de personas de edad x que abandonan el grupo por todas las cosas.	$d_x^{(t)} = d_x^{(m)} + d_x^{(w)} + d_x^{(d)} + d_x^{(r)}$	(5.1.1)
$\mu_x^{(t)}$	Fuerza instantanea de decremento a edad x por todas las causas.	$\mu_x^{(t)} = \frac{1}{2}(\log l_{x-1}^{(t)} - \log l^{(t)}$ [illegible]	(5.1.14)

x	$l_x^{(t)}$	$d_x^{(m)}$	$d_x^{(w)}$	$d_x^{(d)}$	$d_x^{(r)}$	$d_x^{(+)}$	$\mu_x^{(+)}$
20	1'000,000	442	243,002	263	0	243,708	
21	756,292	350	169,718	201	0	170,270	0.116042
22	586,023	286	121,314	158	0	121,757	0.105962
23	464,265	238	88,543	126	0	88,907	0.096734
24	375,358	202	65,921	103	0	66,226	0.088311
25	309,132	176	49,933	85	0	50,194	0.080625
26	258,938	156	38,460	72	0	38,688	0.073613
27	220,251	140	30,049	62	0	30,251	0.067222
28	189,999	129	23,814	53	0	23,996	0.061399
29	166,004	119	19,113	47	0	19,280	0.056125
30	146,724	112	15,529	56	0	15,697	0.051378
31	131,027	107	12,754	50	0	12,911	0.047096
32	118,116	103	10,576	45	0	10,725	0.043199
33	107,392	101	8,875	41	0	9,017	0.039712
34	98,375	99	7,510	38	0	7,647	0.036618
35	90,727	98	6,419	35	0	6,552	0.033848
36	84,176	98	5,534	41	0	5,673	0.031425
37	78,503	99	4,816	46	0	4,960	0.029323
38	73,543	100	4,224	50	0	4,374	0.027487
39	69,169	102	3,738	54	0	3,893	0.025894
40	65,276	104	3,338	57	0	3,499	0.024542
41	61,777	108	3,004	60	0	3,172	0.023409
42	58,605	114	2,727	69	0	2,910	0.022505
43	55,695	123	2,491	76	0	2,690	0.021804
44	53,006	133	2,290	83	0	2,506	0.021481
45	50,449	144	2,121	89	0	2,354	0.02088
46	48,145	156	1,969	94	0	2,219	0.020397
47	45,926	169	1,841	99	0	2,108	0.020449
48	43,818	181	1,721	107	0	2,009	0.020399
49	41,808	194	1,616	115	0	1,925	0,020427
50	39,884	206	1,517	121	0	1,845	0.020515
51	38,039	219	1,424	127	0	1,769	0.020625
52	36,270	230	1,335	135	0	1,700	0.020764

x	$l_x^{(t)}$	$d_x^{(m)}$	$d_x^{(w)}$	$d_x^{(d)}$	$d_x^{(r)}$	$d_x^{(t)}$	$\mu_x^{(t)}$
53	34,570	241	1,244	142	0	1,628	0.020898
54	32,942	252	1,159	148	0	1,559	0.021002
55	31,383	263	0	156	0	423	0.013474
56	30.906	286	0	166	0	452	0.006140
57	30,508	305	0	182	0	487	0.006951
58	30,020	326	0	203	0	529	0.007354
59	29,492	350	0	235	0	585	0.008203
60	28,907	377	0	281	0	659	0.009358
61	28,248	405	0	348	0	753	0.010874
62	27,495	433	0	436	0	869	0.012841
63	86,626	459	0	549	0	1,008	0.015354
64	25,618	485	0	685	0	1,170	0.018531
65	24,448	0	0	0	24,448	24,448	

Ejemplos Prácticos Sobre la Utilización de la Tabla de Decremento Múltiple.

- La probabilidad que una persona de 35 años de edad-permanezca en el grupo al cabo de 5 años es:

$$ {}_5p_{35}^{(t)} = \frac{l_{40}^{(t)}}{l_{35}^{(t)}} = \frac{65,276}{90727} = 0.7194 $$

- La probabilidad que una persona de 43 años de edad abandone el grupo por retiro anticipado es:

$$ q_{45}^{(w)} = \frac{d_{45}^{(w)}}{l_{45}^{(t)}} = \frac{2491}{55,695} = 0.0447 $$

- La probabilidad que una persona de 46 años de edad-abandone el grupo por cualquiera de las cuatro causas es:

$$ q_{46}^{(t)} = 1 - p_{46}^{(t)} = 1 - \frac{l_{47}^{(t)}}{l_{46}^{(t)}} = 1 - \frac{45,926}{48,818} = 0.0593 $$

- El costo de una protección temporal a un año por - los beneficios de muerte, retiro anticipado, incapacidad total y-permanente, y retiro normal, por una suma asegurada unitaria para una persona de 38 años de edad es:

$$A_{38}^{(t)} = v\, q_{38}^{(t)} = v \frac{d_{38}^{(t)}}{l_{38}^{(t)}} = v\left(\frac{4,374}{73,545}\right) = v(0.0594)$$

Si la tasa de interés es del 4.5% anual entonces el - costo es:

$$A_{38}^{(t)} = \frac{1}{1.045}(0.0594) = 0.0568$$

Si la tasa de interés es del 3% anual el costo es:

$$A_{38}^{(t)} = \frac{1}{1.03}(0.0594) = 0.0576$$

A N E X O I

GLOSARIO DE FORMULAS PROBABILIDADES Y SEGUROS DE VIDA SENCILLA

l_x: Número de personas vivas a edad x

d_x: Número de personas que fallecen entre las eda - des x y $x+1$

${}_{n}p_x$: Probabilidad que una persona de edad x sobrevi va n años.

$${}_{n}p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

${}_{n}q_x$: Probabilidad que una persona muera dentro de - los siguientes n años.

$${}_{n}q_x = 1 - {}_{n}p_x$$

μ_x : Fuerza instantánea de mortalidad de una persona a edad x

${}_{n}E_x$: Prima neta única de un dotal puro a n años emi tido a una persona de edad x

$${}_{n}E_x = V^{n}\,{}_{n}p_x$$

Valores conmutados de vida sencilla:

$$D_x = V^x l_x$$

$$C_x = V^{x+1} d_x$$

$$M_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} C_{x+t}$$

$$N_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+t}$$

A_x: Prima neta única de un seguro de vida entera - emitido a una persona de edad x

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

$A^{1}_{x:\overline{n}|}$: Prima neta única de un seguro temporal a n años emitido a una persona de edad x

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$A_{x:\overline{n}|}$: Prima neta anual de un seguro dotal mixto a n años emitido a una persona de edad x

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

P_x: Prima Neta anual de un seguro de vida

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

donde A_x es la prima neta única y $\ddot{a}_x$ es una anualidad anticipada.

A N E X O II

TABLA DE PRIMAS ANUALES INDIVIDUALES PARA EL SEGURO DE GRUPO

PRIMAS INDIVIDUALES PARA EL SEGURO DE GRUPO

EDAD	PRIMA	EDAD	PRIMA	EDAD	PRIMA
15	2.98	42	6.17	69	55.16
16	3.01	43	6.63	70	60.18
17	3.11	44	7.13	71	65.49
18	3.22	45	7.68	72	71.03
19	3.25	46	8.27	73	76.72
20	3.32	47	8.93	74	82.74
21	3.37	48	9.65	75	89.25
22	3.42	49	10.45	76	96.45
23	3.45	50	11.32	77	104.54
24	3.48	51	12.27	78	113.68
25	3.50	52	13.31	79	123.80
26	3.52	53	14.47	80	134.75
27	3.54	54	15.73	81	146.44
28	3.58	55	17.10	82	158.71
29	3.61	56	18.57	83	171.50
30	3.65	57	20.14	84	184.85
31	3.71	58	21.80	85	198.65
32	3.77	59	23.61	86	213.56
33	3.87	60	25.63	87	229.11
34	4.00	61	27.82	88	245.68
35	4.15	62	30.23	89	263.67
36	4.34	63	32.85	90	283.54
37	4.54	64	35.69	91	305.88
38	4.79	65	38.82	92	331.44
39	5.06	66	42.30	93	361.06
40	5.34	67	46.[illegible]	94	395.77
41	5.76	68	50.[illegible]8	95	439.61

A N E X O III

FORMATOS EMITIDOS POR LA COMISION NACIONAL BANCARIA Y DE SEGUROS PARA QUE LAS COMPAÑIAS PRESENTEN SU VALUACION ANUAL DE RESERVAS.

COMISION NACIONAL BANCARIA Y DE SEGUROS

M E X I C O, D. F.

RESULTADOS DE LAS OPERACIONES, POR SEGURO

I N S T I T U C I O N	AL DIA ULTIMO
	MES Y AÑO
D O M I C I L I O	C L A V E

C O N C E P T O	INDIVIDUAL	COLECTIVO	GRUPO	SUBTOTAL	PENSIONES	TOTAL
I. PRIMAS						
1.- IMPORTE DE LAS PRIMAS DE PRIMER AÑO, INGRESADAS EN EL PERIODO DEL SEGURO EMITIDO						
2.- MENOS: LAS DE ESTA CLASE CEDIDAS EN REASEGURO AL PAIS						
LAS DE ESTA CLASE CEDIDAS EN REASEGURO AL EXTRANJERO						
3.- IMPORTE DE LAS PRIMAS DE RENOVACION INGRESADAS EN EL PERIODO DEL SEGURO EMITIDO						
4.- MENOS: LAS DE ESTA CLASE CEDIDAS EN REASEGURO AL PAIS						
LAS DE ESTA CLASE CEDIDAS EN REASEGURO AL EXTRANJERO						
5.- IMPORTE TOTAL CORRESPONDIENTE AL EJERCICIO						
6.- DEDUZCANSE LAS PRIMAS NETAS RESPECTIVAS COMO SIGUE: a.- PRIMAS NETAS DE PRIMER AÑO						
b.- PRIMAS NETAS DE RENOVACION						
7.- RECARGO SOBRE PRIMAS						
II. GASTOS						
8.- COMISIONES POR PRIMAS INICIALES						
9.- COMPENSACIONES A AGENTES POR PRIMAS INCIALES						
10.- OTROS GASTOS DE ADQUISICION						

COMISION NACIONAL BANCARIA Y DE SEGUROS

M E X I C O, D. F.

RESULTADOS DE LAS OPERACIONES POR SEGURO

I N S T I T U C I O N	A. DIA ULTIMO MES Y AÑO
D O M I C I L I O	**C L A V E**

C O N C E P T O	INDIVIDUAL	COLECTIVO	GRUPO	SUBTOTAL	PENSIONES	TOTAL
11.- INCREMENTO DE LA RESERVA PARA COMPENSACIONES ADICIONALES A AGENTES						
12.- COMISIONES POR PRIMAS DE RENOVACION						
13.- COMPENSACIONES A AGENTES POR PRIMAS DE RENOVACION						
14.- GASTOS DE ADMINISTRACION						
MENOS: DERECHOS DE POLIZA Y CONVERSIONES						
MAS: INCREMENTO EN RVA. PARA DEPR. DE MUEBLES Y UTILES						
15.- SUMA DE LOS GASTOS DEL AÑO						
16.- (7-15) (1) EN GASTOS						
III. INTERESES						
17.- TOTAL DE INGRESOS POR INTERESES						
18.- TOTAL DE INGRESOS POR PRODUCTOS DE INMUEBLES						
MENOS: GASTOS DE ELLOS						
MENOS: DEPRECIACION DE INMUEBLES						
19.- DEDUZCANSE LOS INTERESES REQUERIDOS PARA MANTENER LAS RESERVAS SEGUN ANEXO No. A-2						

COMISION NACIONAL BANCARIA Y DE SEGUROS

M E X I C O, D. F.

RESULTADOS DE LAS OPERACIONES POR SEGURO

I N S T I T U C I O N	AL DIA ULTIMO
	MES Y AÑO
D O M I C I L I O	C L A V E

C O N C E P T O	INDIVIDUAL	COLECTIVO	GRUPO	SUBTOTAL	PENSIONES	TOTAL
20.- (1) POR INTERESES						
(1) POR VENTA O VENCIMIENTO DE VALORES						
(1) EN OTRAS INVERSIONES						
(1) POR VENTA DE BIENES RAICES						
IV. MORTALIDAD 21.- MORTALIDAD ESPERADA SOBRE EL MONTO NETO DE LOS RIESGOS, SEGUN ANEXO A-2						
22.- DEDUZCASE EL TOTAL DE SINIESTROS PAGADOS DURANTE EL AÑO						
23.- MAS SINIESTROS RECUPERADOS POR: REASEGURO TOMADO DEL PAIS						
REASEGURO TOMADO DEL EXTRANJERO						
MENOS SINIESTROS RECUPERADOS POR: REASEGURO CEDIDO AL PAIS						
REASEGURO CEDIDO AL EXTRANJERO						
24.- MAS RESERVAS TERMINALES LIBERADAS POR MUERTE						
25.- (1) MORTALIDAD REGISTRADA EN SEGUROS						
V. PARTICIPACION DE UTILIDADES EN CONTRATOS DE REASEGURO 26.- PARTICIPACION DE UTILIDADES POR REASEGURO CEDIDO: AL PAIS						
AL EXTRANJERO						

[illegible]

M E [illegible] D F

RESULTADOS DE LAS OPERACIONES POR SEGURO

INSTITUCION	AL DIA ULTIMO MES Y AÑO
DOMICILIO	CLAVE

CONCEPTO	INDIVIDUAL	COLECTIVO	GRUPO	SUBTOTAL	PENSIONES	TOTAL
27.- MAS COMISIONES POR REASEGURO CEDIDO AL PAIS						
AL EXTRANJERO						
28.- MENOS PARTICIPACION EN LAS UTILIDADES POR REASEGURO TOMADO DEL PAIS						
DEL EXTRANJERO						
29.- MENOS COMISIONES POR REASEGURO TOMADO DEL PAIS						
DEL EXTRANJERO						
30.- (1) EN REASEGURO						
VI. RESCATES, CAMBIOS, REHABILITACIONES Y CADUCIDADES						
31.- RESERVAS DE POLIZAS, RESCATADAS EN EFECTIVO DURANTE EL AÑO, O A CTA. DE LAS CUALES SE CONCEDIERON SEGUROS PRORROGADOS O SALDADOS						
32.- DEDUZCANSE LAS CANTIDADES PAGADAS EN EFECTIVO O APLICADAS A ADEUDOS, A RVAS. INICIALES PARA SEGUROS PRORROGADOS Y SALDADOS BAJO DICHAS POLIZAS						
33.- (1) POR POLIZAS RESCATADAS EN EFECTIVO, O A CTA. DE LAS CUALES SE CONCEDIERON SEGUROS PRORROGADOS Y SALDADOS BAJO DICHAS - POLIZAS						

M E X I C O, D F

RESULTADOS DE LAS OPERACIONES POR SEGURO

INSTITUCION	AL DIA ULTIMO
	MES Y AÑO
DOMICILIO	CLAVE

CONCEPTO	INDIVIDUAL	COLECTIVO	GRUPO	SUBTOTAL	PENSIONES	TOTAL
34.- (1) POR CAMBIOS Y REHABILITACIONES DURANTE EL AÑO						
35.- UTILIDAD OBTENIDA POR RVAS. LIBERADAS DE POLIZAS CADUCADAS DURANTE EL AÑO, A LAS QUE NO SE CONCEDIERON VALORES GARANTIZADOS						
36.- (1) TOTAL DURANTE EL AÑO POR POLIZAS RESCATADAS CAMBIADAS, REHABILITADAS Y CADUCADAS						
VII. DIVIDENDOS						
37.- MENOS: RESERVA PARA DIVIDENDOS SOBRE POLIZAS						
VIII. BENEFICIOS ADICIONALES POR INVALIDEZ Y ACCIDENTES						
38.- (1) NETA POR LOS BENEFICIOS DE INVALIDEZ TOTAL Y PERMANENTE, INCLUIDOS EN LAS POLIZAS DE VIDA, EXCLUYENDO RECARGO: (SEGUN ANEXO A-2) VIDAS ACTIVAS						
VIDAS INCAPACITADAS						
39.- (1) NETA POR BENEFICIOS DE MUERTE ACCIDENTAL O PERDIDA DE MIEMBROS DE LA VISTA, INCLUIDOS EN LAS POLIZAS DE VIDA: EXCLUYENDO RECARGO: SEGUN ANEXO A-2						

M É X I C O , D. F.

RESULTADOS DE LAS OPERACIONES POR SEGURO

INSTITUCION	DÍA ULTIMO MES Y AÑO
DOMICILIO	CLAVE

CONCEPTO	INDIVIDUAL	COLECTIVO	GRUPO	SUBTOTAL	PENSIONES	TOTAL
IX. VARIOS						
40.- INCREMENTO A LA RESERVA DE PREVISION						
41.-						
42.-						
43.-						
44.- IMPUESTO GLOBAL DE LAS EMPRESAS						
45.- (1) NETA POR VARIOS						
46.- (1) NETA RESULTADO DE LAS OPERACIONES EN EL EJERCICIO DE 19						
(1) UTILIDAD O PERDIDA NOTAS O ACLARACIONES						

COMISION NACIONAL BANCARIA Y DE SEGUROS

M E X I C O, D. F.

INSTRUCCIONES Y CALCULOS AUXILIARES

I N S T I T U C I O N	AL DIA ULTIMO
	MES Y AÑO
D O M I C I L I O	C L A V E

C O N C E P T O	INDIVIDUAL	COLECTIVO	GRUPO	SUBTOTAL	PENSIONES	T O T A L
I.- INSTRUCCIONES PARA CALCULAR EL INTERES REQUERIDO PARA MANTENER LAS RVAS. (RENGLON 19 DEL ANEXO A-1) Y LA MORTALIDAD ESPERADA - (RENGLON 21 DEL ANEXO A-1) a) CALCULAR LA MORTALIDAD ESPERADA POR SEGUROS MENOS EL INTERES REQUERIDO (MORT. ESPERADA - INT. REQ.) COMO SIGUE: 1.- RESERVAS MEDIAS DE PRIMAS AL 31 DE DICIEMBRE DEL AÑO ANTERIOR						
MENOS PRIMAS NETAS DIFERIDAS						
RESERVAS EN CIAS. REASEGURADORAS						
2.- PRIMAS NETAS DE SEGUROS CORRESPONDIENTES AL AÑO						
3.- TOTAL						
4.- RESERVAS MEDIAS DE PRIMAS AL 31 DE DICIEMBRE DEL AÑO EN CURSO						
MENOS PRIMAS NETAS DIFERIDAS						
RVAS. EN CIAS. REASEGURADORAS						
5.- POLIZAS DOTALES VENCIDAS DURANTE EL AÑO						
6.- RESERVAS TEMINALES EN EL ANIVERSARIO DE LA POLIZA, LIBERADAS POR MUERTE						
7.- RVAS. TERMINALES DE POLIZAS TERMINADAS POR CAUSAS DIFERENTES DE MUERTE, VENCIMIENTO O EXPIRACION MENOS RVAS. DE POLIZAS SALDADAS, PRORROGADAS O REHABILITADAS.						
8.- TOTAL						

COMISION NACIONAL BANCARIA Y DE SEGUROS

MEXICO, D. F

INSTRUCCIONES Y CALCULOS AUXILIARES

INSTITUCION	AL DIA ULTIMO / MES Y AÑO
DOMICILIO	**CLAVE**

CONCEPTO	INDIVIDUAL	COLECTIVO	GRUPO	SUBTOTAL	PENSIONES	TOTAL
9.- (3-8) ES IGUAL A MORT. ESP. - INT. REQ.						
b) CALCULAR LOS INTERESES (I) REQUERIDOS PARA MANTENER LA RESERVA COMO SIGUE: 10.- INTERESES DE MEDIO AÑO SOBRE LA RESERVA MEDIA AL 31 DE DICIEMBRE ANTERIOR						
11.- INTERESES DE MEDIO AÑO SOBRE LA RESERVA MEDIA AL 31 DE DICIEMBRE ACTUAL						
12.- INTERESES DE MEDIO AÑO SOBRE MORT. ESP.- INT. REQ.						
13.- INTERESES DE MEDIO AÑO SOBRE LAS RESERVAS LIBERADAS POR MUERTE						
14.- EL TOTAL ES IGUAL AL INTERES REQUERIDO (RENGLON 19 DEL ANEXO A-1)						
15.- (9+14) ES IGUAL A LA MORTALIDAD ESPERADA POR SEGUROS						
II.- INSTRUCCIONES PARA EL CALCULO DE LA UTILIDAD POR BENEFICIOS DE INVALIDEZ Y ACCIDENTE c) INVALIDEZ (VIDAS ACTIVAS) 16.- RESERVA MEDIA AL 31 DE DICIEMBRE ANTERIOR						
17.- PRIMAS NETAS DEL AÑO						
DEDUCIR: 18.- RESERVA MEDIA AL 31 DE DICIEMBRE ACTUAL						

COMISION NACIONAL BANCARIA Y DE SEGUROS

MEXICO, D. F.

INSTRUCCIONES Y CALCULOS AUXILIARES

INSTITUCION	AL DIA ULTIMO
	MES Y AÑO
DOMICILIO	CLAVE

CONCEPTO	INDIVIDUAL	COLECTIVO	GRUPO	SUBTOTAL	PENSIONES	TOTAL
19.- VALOR DE LOS SINIESTROS OCURRIDOS DURANTE EL AÑO						
20.- EL SALDO ES IGUAL A LA UTILIDAD O PERDIDA POR INVALIDEZ (RENGLON 38 ANEXO A-1)						
d) INVALIDEZ (VIDAS INCAPACITADAS)						
21.- RESERVA MEDIA AL 31 DE DICIEMBRE ANTERIOR						
22.- VALOR DE LOS SINIESTROS OCURRIDOS DURANTE EL AÑO						
23.- TOTAL						
DEDUCIR:						
24.- RESERVA MEDIA AL 31 DE DICIEMBRE ACTUAL						
25.- PAGOS VENCIDOS DURANTE EL AÑO						
26.- EL SALDO ES IGUAL A LA UTILIDAD O PERDIDA POR INVALIDEZ (RENGLON 38 DEL ANEXO A-1)						
e) BENEFICIOS POR MUERTE ACCIDENTAL						
27.- RESERVA MEDIA AL 31 DE DICIEMBRE ANTERIOR						
28.- PRIMAS NETAS DEL AÑO						
29.- TOTAL						
DEDUCIR:						
30.- RESERVA MEDIA AL 31 DE DICIEMBRE ACTUAL						

COMISION NACIONAL BANCARIA Y DE SEGUROS

MEXICO, D. F.

INSTRUCCIONES Y CALCULOS AUXILIARES

INSTITUCION	AL DIA ULTIMO
	MES Y AÑO
DOMICILIO	CLAVE

CONCEPTO	INDIVIDUAL	COLECTIVO	GRUPO	SUBTOTAL	PENSIONES	TOTAL
31.- VALOR DE LOS SINIESTROS						
32.- EL SALDO ES IGUAL A LA UTILIDAD O PERDIDA POR BENEFICIOS DE MUERTE ACCIDENTAL (RENGLON 39 DEL ANEXO A-1)						

CV- 1 - 3

COMISION NACIONAL BANCARIA Y DE SEGUROS
MEXICO D.F.

CLAVE	INSTITUCION

RESUMEN DE RESERVAS MATEMATICAS

INDIVIDUAL ( )
COLECTIVO ( )
GRUPO ( )

CARTERA EN VIGOR	POLIZAS	CERTIFICADOS	SUMAS ASEGURADAS	RESERVAS
Seguro en Vigor Saldados				
Prorrogados				
Beneficios Adicionales				
Extraprimas				
Adiciones por Dividendos				
Dividendos				
Reaseguro Tomado				
Cías. Nacionales				
Cías. Extranjeras				
Subtotal				
Prima Neta Diferida				
Reserva Matemática				
Reaseguro Cedido				
Cías. Nacionales				
Cías. Extranjeras				
Total Reservas de Retención				

CV - 7 - 4

NOMBRE DE LA INSTITUCION

CLAVE DE PLANES EN VIGOR

Del Ejercicio de ___

NOMBRE DEL PLAN	CLAVE DEL PLAN	TABLA DE MORTALIDAD	INTERES

NOMBRE DE LA INSTITUCION

RESUMEN POR GRANDES PLANES

Del ejercicio de

PLANES DE SEGUROS	POLIZAS	CERTIFICADOS	SUMAS ASEGURADAS	RESERVAS
Individual Vida				
Ordinario de Vida				
Vida Pagos Limitados				
Saldados				
Prorrogados				
Temporal				
Saldados				
Prorrogados				
Dotal				
Saldados				
Prorrogados				
Colectivo Vida				
Saldados				
Prorrogados				
Temporal				
Saldados				
Prorrogados				
Dotal				
Saldados				
Prorrogados				
Deudores				
Servicio de Control Administrativo				
Grupo Grupo				
T o t a l				

CV - A - 6

RESUMEN DE PLANES VIDA

ORDINARIOS DE VIDA

VIDA PAGOS LIMITADOS

[illegible]

NOMBRE DE LA INSTITUCION

EJERCICIO DE __

P L A N	POLIZAS	CERTIFICADOS	SUMA ASEGURADA	RESERVAS
INDIVIDUAL				
COLECTIVO				

COMISION NACIONAL BANCARIA Y DE SEGUROS

CV - A - 7

RESUMEN DE PLANES DOTALES

____

NOMBRE DE LA INSTITUCION

EJERCICIO DE ___

P L A N	POLIZAS	CERTIFICADOS	SUMA ASEGURADA	RESERVAS
INDIVIDUAL				
COLECTIVO				

NOMBRE DE LA INSTITUCION

EJERCICIO DE __

P L A N	POLIZAS	CERTIFICADOS	SUMA ASEGURADA	RESERVAS
INDIVIDUAL				
COLECTIVO				

CV - A - 9

[illegible]

NOMBRE DE LA INSTITUCION

RESUMEN POR AÑOS DE EMISION

AÑO DE EMISION	P O L I Z A S	SUMAS ASEGURADAS	R E S E R V A S

NOMBRE DE LA INSTITUCION

Individual ( )

Colectivo ( )

Grupo ( )

BENEFICIOS ADICIONALES Y EXTRAPRIMAS

COBERTURA	POLIZAS	SUMAS ASEGURADAS	RESERVAS
Accidentes			
Invalidez			
Extraprimas			
Otros (especificar)			
Total			

NOMBRE DE LA INSTITUCION

REASEGURO

Individual ( )
Colectivo ( )
Grupo ( )

REASEGURO CEDIDO	PRIMA	RESERVA
COMPAÑIA REASEGURADORA		

REASEGURO TOMADO	PRIMA	RESERVA
COMPAÑIA REASEGURADORA		

NOMBRE DE LA INSTITUCION

Individual ( )
Colectivo ( )
Grupo ( )

DISTRIBUCION DE LA CARTERA

SUMAS ASEGURADAS De - A	RESERVA	Nº DE POLIZAS
0 - 50 000		
50 001 - 100 000		
100 001 - 150 000		
150 001 - 200 000		
200 001 - 250 000		
250 001 - 300 000		
300 001 - 350 000		
350 001 - 400 000		
400 001 - 450 000		
450 001 - 500 000		

Continuar con rangos de 50 000; de suma asegurada hasta el límite de su cartera.

B I B L I O G R A F I A

1).- Mac Lean Joseph. B.
"Life Insurance"
Mc Grow-Hill Book Company
New York, N.Y.
U.S.A, 1962.

2).- Rejda George. E.
"Principles of Insurance"
Scott, Foresman and Company
Chicago, Illinois
U.S.A, 1982.

3).- Mehr Robert. I. and Cammack Emerson
"Principles of Insurance"
Richard D. Irwin INC.
Homewood, Illinois
U.S.A, 1976

4).- Winklevoss. E.
"Pension Mathematics With
Numerical Ilustrations"
Pension Research Council
University of Pennsilvania
U.S.A, 1977.

5).- Hooker P.F. and Longley Cook L.H.
"Life and Other Contingenees"
University of Cambridge
England, 1957.

6).- Jordan Chester Wallace
"Life Contingenees"
Society of Actuaries
Chicago, Illinois
U.S.A, 1976.

7).- Seguros la Comercial
"Manual del Seguro de Grupo"
México, D.F.
México, 1981.

8).- Seguros la Comercial
Entrevistas realizadas en
la Gerencia de Grupo.

9).- Seguros la Nacional Provincial
Entrevistas realizadas en
la Gerencia Actuarial.