48

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACION DEL MODELO DE MARKOWITZ A LA INVERSION EN EL MERCADO MEXICANO DE VALORES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :

LICENCIADO EN ACTUARIA

P R E S E N T A :

MARIO VERGARA TALAMANTES

México, D.F. 0001 1983

APLICACION DEL MODELO DE MARKOWITZ A LA INVERSION EN EL MERCADO MEXICANO DE VALORES

A MIS PADRES, en agradecimiento
a su gran testimonio.

A MIS HERMANOS, con cariño.

A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

A TODOS MIS AMIGOS

Mi mas sincero agradecimiento
a el M. en C. Manuel F. Román
Enríquez, por el asesoramiento
y apoyo en la realización de
esta tesis.

Agradezco su valiosísima
ayuda a:
Cecilia Castaño de Cabrera
Yolanda Elena Talamantes Chena

I N D I C E

I. INTRODUCCION

INTRODUCCION

En su artículo "The Analysis of Economic Time Series", M. Kendall comenta: "No es posible que cualquier cosa que pueda yo decir o demostrar sea capaz de destruir la ilusión según la cual el inversionista puede ganar dinero jugando a la bolsa; por consiguiente, dejémosle con sus métodos".

Parece ser que los inversionistas, y en especial aquellos que invierten en la Bolsa Mexicana de Valores, son unos ilusos. Ilusos porque piensan ganar "mucho dinero" arriesgando sólamente un poco (en ocasiones no tan poco) de sus excedentes. No obstante, esa "ganancia" a la que nos referimos lleva implícita, para obtenerla, una gran cantidad de riesgo, a diferencia, por ejemplo, de los instrumentos del mercado de dinero donde la ganancia que se obtiene es cierta.

El tratar de maximizar una ganancia en bolsa es un problema puramente objetivo, no lo es así el de la actitud ante el riesgo de los inversionistas. El problema se torna sumamente complicado cuando se pretende formar una cartera óptima de acciones, pues a las dificultades antes indicadas se suma la de establecer una base cuantitativa de comparación entre las diversas carteras posibles.

Frente a estas complicaciones la herramienta matemática moderna es de gran ayuda, la aparición del artículo escrito por el Dr. Harry M. Markowitz, "Portfolio Selection", centró las bases para la formación racional de carteras de acciones. La contribución de Markowitz es monumental. Muchos autores han extendido, modificado y probado el modelo original, pero el corazón del mismo, a la fecha, permanece intacto, tan es así que muchos prefieren llamar a la teoría de la cartera la teoría de Markowitz.

El objetivo de la presente tesis es el de aplicar el modelo matemático de Markowitz al mercado mexicano de valores con el fin de proporcionar a los inversionistas una importante herramienta en su toma de decisiones.

La tesis se divide en dos grandes partes: la teórica, que se refiere a la conceptualización del modelo y de sus posible extensiones, procuramos en ella la explicación verbal y matemática o, en todo caso, gráfica del modelo y la práctica en la cual se analiza su aplicación al mercado mexicano de valores.

El modelo de Markowitz es lógico y claro; tratamos de no perder estas dos cualidades en este trabajo.

II. ESTRUCTURA TEORICA DEL MODELO DE MARKOWITZ

II. ESTRUCTURA TEORICA DEL MODELO DE MARKOWITZ

2.1 EL PROBLEMA DE LA SELECCION DE UNA CARTERA DE INVERSIONES

Podríamos definir el problema de la selección de una cartera, como el problema de elección de una colección de valores que, tomados en conjunto, tengan características convenientes para el inversionista. Nuestro objetivo será entonces, establecer una base cuantitativa para la comparación entre los distintos conjuntos de valores que se pueden formar.

En economía consideramos generalmente que el comportamiento humano persigue en todas sus actividades elevar al máximo su bienestar o su utilidad, entendida ésta como la satisfacción de las necesidades y preferencias del hombre.

De acuerdo con este supuesto el inversionista tratará, en cuanto a su bienestar, disminuir el riesgo en el proceso de aumentar su riqueza y, en cuanto a su utilidad, elevar su riqueza; posiblemente sea aquí donde se centre el problema de la selección de cartera, la incertidumbre de los rendimientos esperados, la incertidumbre para elevar la riqueza del inversionista.

Supongamos que tenemos una cartera constituida por un sólo valor, y que el rendimiento de este valor se ve sometido a una serie de fluctuaciones hasta llegar a un nivel bajo, el rendimiento de nuestra cartera será también bajo,- ya que está compuesta por un sólo valor, en vista de ello,- añadimos un segundo valor a nuestra cartera. ¿Cómo afectará la inclusión de este nuevo valor en el beneficio esperado-- y en el riesgo de la cartera?

Para aclarar este punto, consideramos la siguiente-- inversión a la que llamaremos inversión X.

TIEMPO		TASA DE RENDIMIENTO	VALOR PRESENTE
0	1	.60	50%*
-1000	1600		66.67

La inversión hasta este momento parece aceptable, agreguemos ahora la siguiente información: los $1,600 en el momento 1 son una expectativa (una esperanza); para el mo-- mento 1 los resultados son $0 si ocurre a_1, con probabili-- dad de .5 ó $3,200 si ocurre a_2, también con probabilidad - de .5, nuestra decisión después de conocer esta información posiblemente cambie.

Ahora consideramos la Inversión Y

TIEMPO		TASA DE RENDIMIENTO	VALOR PRESENTE
0	1	0	-533.33
-1600	1600		

* Suponemos un valor del dinero en el tiempo de .5

Esta inversión es claramente inconveniente pero recordemos que los \$1, 600 son una esperanza; nuevamente - - agreguemos información para el momento 1: los resultados - son \$3,200 si sucede a_1 con probabilidad de .5, ó 0 si sucede a_2, con probabilidad de .5.

Supongamos que combinamos X, Y tendremos entonces una inversión que parece aceptable, además de ello hemos - reducido (eliminamos) la incertidumbre en la elección de - los rendimientos.

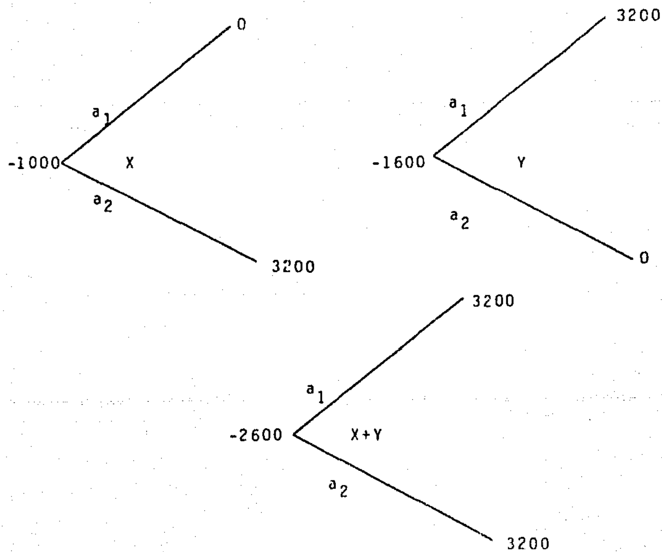


Figura 2.1

El modelo de Markowitz proporciona una base analítica coherente y objetiva para seleccionar una cartera óptima de valores, además de que su sólida estructura teórica permite responder las siguientes preguntas:

a) ¿Es necesaria la diversificación de la cartera?

b) ¿Cómo reducir el conjunto de carteras a examinar?

c) ¿Cómo incluir las preferencias del inversionista y obtener la cartera óptima?

2.2 ACCIONES Y CARTERAS

Aunque una gran cantidad de valores pueden ser incluídos en una cartera, en la práctica sólo un subconjunto de todas las posibles combinaciones de valores es considerada.

La selección adecuada de un conjunto de posibles candidatos no es, al parecer, una tarea sencilla. Supongamos que un inversionista después de analizar los Estados Financieros y el comportamiento de las acciones que se cotizan en bolsa, decide que las mejores acciones para invertir son las de las empresas A, B, C, y D. Así, este inversionista tendrá varias opciones para componer su cartera, hará un análisis referente al rendimiento que le pueden producir o dejar de producir las distintas carteras que se pueden formar con estos valores, teniendo la suficiente información referente al rendimiento de la cartera; el inversionista, de acuerdo a sus preferencias, seleccionará la que para él sea la cartera óptima.

En base al anterior ejemplo, podríamos dividir el proceso de obtener la cartera óptima en tres fases:

1. Análisis de Valores

2. Análisis de Cartera

3. Selección de Cartera

1. Análisis de Valores.

Dicho análisis requiere de predicciones acerca del futuro de los valores; esas predicciones deben tomar en cuenta tanto a la incertidumbre general del mercado de valores, como a la relativa a los valores considerados; por sí mismos y de acuerdo a sus interrelaciones.

2. Análisis de la Cartera.

Produce predicciones acerca de la cartera. Los parámetros que usa para estas predicciones son enteramente derivados de las predicciones hechas sobre los valores obtenidos en la primera fase; en esta fase sólo se requiere de cálculos.

3. Selección de la Cartera.

Esta es la fase final, dadas las combinaciones de parámetros obtenidos, el inversionista, de acuerdo a sus preferencias, selecciona la cartera que le parece mejor.

La primera fase requiere de contar con una persona, casi un profeta, la selección de la cartera requiere de las preferencias del inversionista, el análisis de la cartera requiere únicamente de pericia técnica. Parafraseando a

Harry M. Markowitz "una buena cartera se compone de algo -- más que una larga lista de valores", y vaya que si es algo- más, "predicciones y pericia técnica".

Una cartera puede ser descrita por la proporción in- vertida en cada valor, por ejemplo:

VALOR	PROPORCION INVERTIDA
1	.10
2	.50
3	.00
4	.30
5	.00
6	.10

Si denotamos a la proporción invertida en el valor-- 1 como X_1, la proporción invertida en el valor 2 como X_2. - etc.... tendremos:

$$\Sigma Xi = 1$$

Si cualquiera de las Xi_s es igual a 0, querrá decir- que ese valor no está incluído en la cartera, un valor ma-- yor que 0 pero menor que 1, indica el porcentaje que, den-- tro de la cartera se debe comprar de ese valor; un valor -- negativo nos lleva a dudar; si un valor positivo indica com pra, un valor negativo indicará venta, entonces ¿Cómo pode- mos vender algo que no tenemos?, la explicación a este fenó meno es que un valor negativo representa la venta corta* o-

---

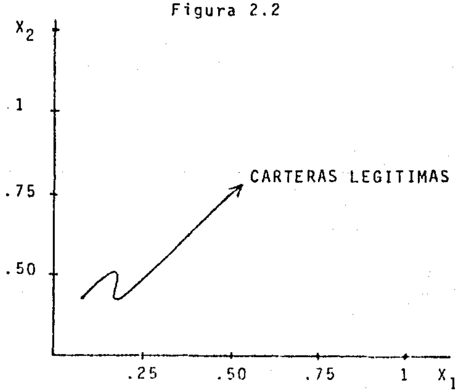
*Venta corta: Operación que se realiza sin que el vendedor posea los Títulos respectivos, es una maniobra especulati va. Generalmente sucede cuando el Mercado está a la baja.

apalancamiento de este título. Un valor mayor que 1 denotará que se requieren más fondos de los que el inversionista posee. Dentro de la teoria de la cartera trabajaremos con la restricción de que las Xi_s, tienen que ser mayores que 0 y menores que 1, una cartera de esta forma, aunada a la restricción de que $\Sigma Xi=1$ se define como una cartera legítima,

que es, entonces, equivalente a admisible o factible.

Supongamos carteras compuestas por dos acciones. Cualquier cartera representada por un punto debajo del eje X_1, en la gráfica 2.2 no es legítima, ya que viola la condición $X_2 \geq 0$ igualmente cualquier cartera representada por un punto a la izquierda del eje X_2 no es legítima ya que viola la condición $X_1 \geq 0$; si el punto que representa a cualquier cartera no está en el cuadrante positivo de los ejes cartesianos éste, en consecuencia, no representará a una cartera legítima. Los puntos que estén dentro de este cuadrante formarán lo que llamaremos el conjunto de carteras legítimas.

Figura 2.2



2.3 SUPUESTOS DEL MODELO

Un modelo es, en un primer nivel, una representación de la realidad. Dentro de las distintas clases de modelos que existen, los económicos, se caracterizan por las suposiciones que se hacen para llevar a cabo el análisis que se requiere.

Las suposiciones pueden tener como propósito:

1. Simplificar la realidad para hacerla susceptible de análisis. Dentro del contexto económico se prescinde de determinadas propiedades que la realidad presenta.

2. Operacionalizar el análisis permitiendo avanzar en el conocimiento de la realidad a través, por ejemplo, de facilitar su manejo matemático.

3. Delimitar el campo de análisis.

En casi todos los casos, sin embargo, las suposiciones tienen un alejamiento de la realidad, justificada por finalidades analíticas, pero que pueden llevar a conclusiones erróneas.

El modelo que se presenta en esta tesis es el desarrollado por Harry M. Markowitz en 1952, que también es conocido como "el modelo de los dos parámetros", ya que son la media y la varianza los parámetros que se consideran determinantes para describir las variables significativas dentro de la selección de la cartera (rendimiento esperado y riesgo). Este modelo se clasifica dentro de los modelos propuestos para situaciones de incertidumbre e incorpora consi deraciones para modelarlo como de riesgo.

Los supuestos en que nos basaremos para el desarrollo del modelo, los podríamos clasificar en 3 categorías:

- Los relativos al mercado mexicano de acciones.

- Los que se refieren al inversionista.

- Los concernientes a los rendimientos de las acciones.

- El mercado de acciones en México.

Dentro del modelo de elección propuesto supondremos un mercado accionario perfecto.

Las características de un mercado accionario donde priva la competencia perfeta son:

a) Las acciones son infinitamente indivisibles, es decir que cualquier cantidad de acciones puede comprarse o venderse.

b) Ningún agente económico individual, comprador o vendedor es suficientemente importante para que sus transacciones tengan un efecto apreciable en el comportamiento del mercado.

c) Toda información relevante referente a precios, rendimientos, tasas de interés, características específicas de las empresas, de la economía y de los activos financieros está disponible a un costo despreciable.

d) Los costos de transacción (comisiones) no serán-- introducidos en el modelo por dos razones:

i) Equivalen a considerar diferencias en el precio de venta y en el de compra de cada una de-las acciones.

ii) Los costos de transacción son reducidos en el mercado mexicano de acciones.

e) Prescindiremos de los impuestos ya que, como mencionaremos, es sumamente complicado manejarlos debido, sobre todo, a las diferentes tasas impositivas a que están sujetos los inversionistas.

El estado actual de desarrollo del mercado de acciones en México es bastante imperfecto por lo que el supuesto de competencia perfecta se torna bastante fuerte en el caso de su aplicación a México, más pensamos que no estorpece la integración de una cartera óptima de acciones y que más --- bien la condiciona a la estrechez del mercado accionario en-- nuestro país.

- El inversionista.

a) En el modelo a desarrollar supondremos que el individuo tiene aversión al riesgo, dicha aversión al riesgo está caracterizada en las actitudes del inversionista hacia la variabilidad del rendimiento.

b) Consideramos que toda la inversión que realiza el inversionista es canalizada únicamente en acciones, el único activo a considerar en el modelo.

c) Supondremos también un comportamiento "racional" de los inversionistas, es decir, el inversionista prefiere más riqueza que menos riqueza, pero que le es indiferente la forma de su riqueza*: un incremento en la misma puede tomar forma de pagos en efectivo o de incrementos en el valor del mercado de los activos. En otros términos, al inversionista le interesa el rendimiento neto positivo sobre el valor de su inversión.

d) La última suposición relativa al inversionista consiste en que las expectativas y las oportunidades de cartera son homogéneas para todos los inversionistas. Así todos los inversionistas tienen la misma oportunidad de inversión y aprecian idénticamente las distribuciones de probabilidad que se asocian a las distintas carteras.

- Rendimiento de las Acciones.

Si los rendimientos de las acciones varían aleatoriamente y si se establece que se aproximan a una distribución normal**, el inversionista cuenta con toda la información relevante para cada cartera si conoce las estimaciones de sólo dos parámetros de tal distribución: el valor esperado de los rendimientos y su varianza.

En la gráfica 2.3 las dos distribuciones normales difieren sólamente en el rendimiento esperado, en la gráfica 2.4 difieren sólamente en la varianza.

---

* Es decir, están fuera de consideración los valores agregados extrínsecos.

** Tobin J. Liquidity Preference as a Behavior Toward Risk, Review of Economic Studies. Febrero 1958. Tobin fue premio Nobel de Economía en 1981

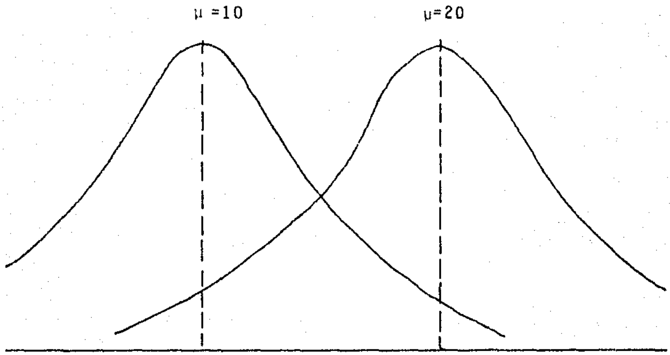


Figura 2.3

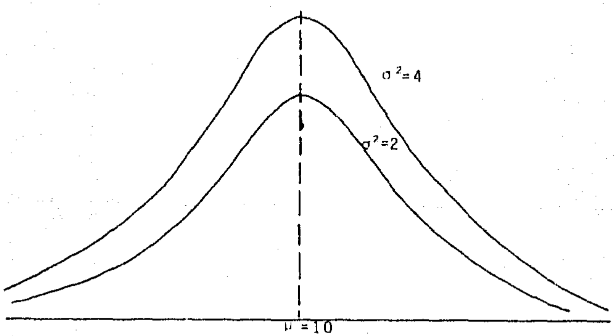


Figura 2.4

La probabilidad de que un valor se encuentre a una desviación estándar o menos de la media es de .683 es decir:

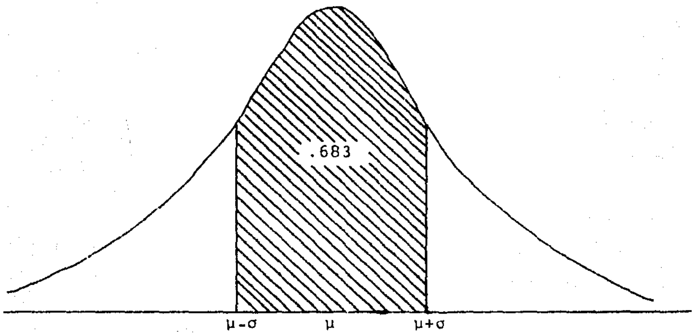


Figura 2.5

Asimismo la probabilidad de que un valor se encuentre a dos desviaciones estándar o menos de la media es de .9550 esto es:

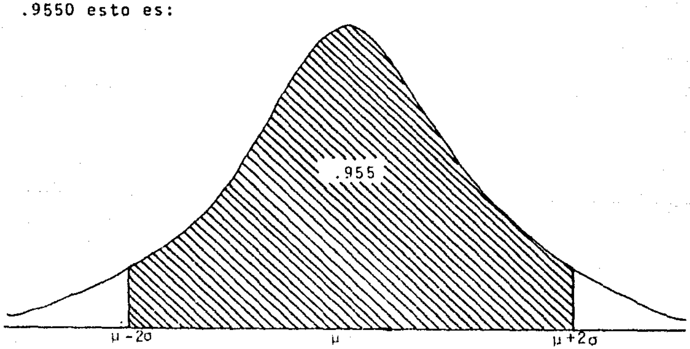


Figura 2.6

La suposición de que los rendimientos se distribuyen normal, se considera válida ya que en el desarrollo de nuestro modelo describiremos una prueba de bondad de ajuste para comprobar la forma en que se distribuyen los rendimientos de las acciones consideradas.

2.4 RENDIMIENTO

La utilidad que al inversionista reporta la elección de una cartera está en función del rendimiento de la cartera que será, a su vez función de los rendimientos de los valores que componen esa cartera.

En vista de ello y ya que el rendimiento es un concepto mesurable y cuantificable, es decir, que se puede medir, propondremos una medida tanto para el rendimiento de un valor, como para el rendimiento de la cartera.

Primero analizaremos el rendimiento de un valor ya que el rendimiento de la cartera es función de los rendimientos de los valores.

El problema de la selección de la cartera no es un problema que se resuelva una vez, el mercado varía constantemente por lo que la cartera debe cambiar con el tiempo.

Un mecanismo utilizado para mantener el dinamismo de la cartera es efectuar compras y ventas cada k días, manteniendo la cartera estática durante ese período.

Este mecanismo nos parece adecuado y es el que utilizaremos en nuestro análisis, debido a lo cual y es importante aclararlo, se dispone de dos opciones para medir el rendimiento de un valor:

1. Uso de rendimiento diario

2. Rendimiento durante un período igual al intervalo de compra-venta.

Afortunadamente la medida que proponemos contempla la posibilidad de utilización de cualquiera de las dos opciones citadas, simplemente modificando en la ecuación (1) el intervalo de duración entre valores sucesivos de t. El intevalo de duración puede ser de días, semanas, meses, como nuestro caso, de años, o hasta de transacción en transacción.

Las variables que tomaremos en cuenta para medir el rendimiento de un valor serán los precios de las acciones, los dividendos, los premios y el número de acciones (variaciones en su cantidad) que posean los inversionistas a lo largo del período de tenencia. Todas las variables medidas al inicio y al final de períodos de un mes, es decir tomaremos de las opciones propuestas, la segunda.

La medida que proponemos para cuantificar el rendimiento de una acción es un indicador del tipo beneficio/costo:

$$Rit = \frac{(Pit - Pi,t-1) + Dit + Git}{Pi,t-1} \qquad (1)$$

Donde:

Dit = Dividendo por acción de la emisora i al final del mes t.

Pi,t-1 = Precio por acción de la emisora i al final del mes t-1.

Pit = Precio por acción de la emisora i al final del mes t.

Git = Premios concedidos durante el período de evaluación.

Rit = Rendimiento de la acción i en el mes t.

Si un inversionista compra a un precio Pi,t-1 al --- principio de un período y vende a un precio Pi,t al final - de dicho período, t-(t-1), la tasa de rendimiento es la tasa que iguala los beneficios de la inversión (medidos a través de Pit, Dit y Git) con los costos de la misa (dados por Pi, t-1), así:

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{Ganancia de capital + Dividendo + Premios}}{\text{Precio inicial de la acción}} \quad (2)$$

Con este indicador de rendimiento que estamos proponiendo lo que estamos haciendo es precisar la tasa a la que se incrementa la riqueza del inversionista.

Consideramos importante aclarar y mencionar el tratamiento que daremos al indicador de rendimiento en lo que se refiere a:

1. Dividendos
2. Premios
3. Impuestos

1. Dividendos

Debido a que pueden existir diferencias entre los dividendos que se otorgan debido a los privilegios que otorgan las acciones preferentes y ello afectar la validez del indicador propuesto, consideramos únicamente los precios y los dividendos de las acciones ordinarias.*

*Por los derechos que confieren, las acciones, se dividen en ordinarias y preferentes. Las acciones ordinarias dan drecho a percibir dividendos después de que la empresa ha pagado los dividendos correspondientes a las acciones preferentes; tienen derecho a voto en proporción al monto invertido.

2. Premios

Podríamos dividir las ganancias que obtienen los accionistas por concepto de premios en:

a) Premios obtenidos por variaciones en el capital - social.
b) Split.
c) Premios gratuitos

Aclaremos cada uno de ellos:

a) Variaciones en el capital social:

Los premios obtenidos por variaciones en el capital-social, pueden ser de dos clases, con el aumento de capital a la par ocon el aumento de capital a la par más prima. -- Con el aumento de capital a la par, el inversionista si e-- jerce la opción de adquirir nuevas acciones al precio acordado por la asamblea de accionistas, debe pagar el valor nominal de cada nueva acción. Si, por otra parte, las adquiere a la "par más prima", además de pagar el valor nominal,- el inversionista debe aportar la prima acordada por la Asamblea.

b) Split.

Por razones de bursatilidad* las empresas llegan a - declarar separaciones en su acervo de acciones que se conocen como "SPLIT". Definiremos lo que es un "SPLIT" para después tratar de mejorar su comprensión con un ejemplo real.

El "SPLIT" es la operación contable que incrementa - el número de acciones en circulación sin que por ello aumente el monto del Capital Social. Como ejemplo tomaremos el -

*Volumen de operaciones que tiene un valor en particular, - producto de la oferta y demanda por el mismo.

famoso caso "ALFA"; la inscripción de "ALFA" en la Bolsa de Valores fue el 15 de Agosto de 1978, su primera cotización fue de $300.00 y contaba entonces con un capital de $3,800 millones repartidos en 38 millones de acciones con un valor nominal de $100.00 cada una.

A finales de 1978 la acción se cotizaba ya en $320.00 lo que representaba un incremento del 6.6% en los primeros cinco meses de la empresa en el mercado, de enero a abril de 1979 la cotización alcanzó precios extraordinarios, llegando a su máximo en abril con un precio de $912.00 o sea, un incremento del 900% sobre su valor nominal.

Ese año el capital social se aumentó a $5,000 y estaría representado por 50 millones de acciones. Aquí se dispuso un split sin modificar el capital social al cambiar en proporción de cinco acciones por cada una anterior, el nuevo valor de las acciones, dicho nuevo valor sería de $20.00 en lugar de $100.00 entonces el número total de acciones ascendío a 250 millones de acciones. Como consecuencia de esta división de acciones, el valor de mercado de las acciones se reajustó y si antes era de $900.00 para cada una, ahora esos $900.00 representaban el valor de cinco acciones o sea que cada nueva acción tendrá el valor de $180.00, en resumen se tiene:

TIEMPO	ENERO-ABRIL 79	MAYO 79
CAPITAL SOCIAL	$ 3,800 MILLONES	$5,000 MILLONES
NUM. DE ACCIONES	38 MILLONES	250 MILLONES
VALOR NOMINAL	$ 100.00	$ 20.00
VALOR DE MERCADO	$ 900.00	$ 180.00

c) Premios Gratuitos.

Es un regalo que la sociedad hace a sus accionistas en función de una relación de conversación que la misma decreta; es decir "x" número de acciones por cada "y" que posea el accionista.

3. Impuestos

Con esta medida del rendimiento estamos describiendo el rendimiento bruto en el mercado, por lo que al tomar encuenta una cierta carga impositiva y descontandola del rendimiento bruto del inversionista obtenemos el rendimiento--neto que es:

$$Rn = \frac{(P_{it} - P_{i,t1})\ (1-I_g) + D_{it}\ (1-I_d) + G_{it}\ (1-I_p)}{P_{i,t-1}}$$

donde Ig es el impuesto sobre las ganancias del capital, - Id es la tasa de impuesto ordinario sobre la inversión e - I_p es el impuesto sobre los premios.

En México debemos considerar los siguientes aspectos respecto a la carga impositiva*:

1. Para las personas físicas los impuestos que se pagan son únicamente por el ingreso en efectivo del dividendo que decretan las empresas. De este in--greso se retiene una tasa del 21%. Las personas - físicas están totalmente exentas del impuesto sobre las ganacias del capital.

2. Para las personas morales la utilidad que se genera por concepto de dividendos y por ganancias de-capital, es acumulable a los ingresos para efec--tos de impuesto.

---

* Considerando la Ley del Impuesto Sobre la Renta vigente hasta 1982. La muestra utilizada en el análisis empirico corresponde a los años 1980-1981.

Las pérdidas por compra-venta de valores son deducibles de impuestos. Debido a que no existe uniformidad en la carga impositiva para el inversionista, aunque se sacrifique un poco la precisión en el análisis, decidimos calcular la cartera óptima en base a los rendimientos brutos obtenidos a través de la fórmula* (1).

Debido a los premios adicionales, es necesario compatibilizar el precio de la acción al inicio con el precio final del período de tenencia, para así obtener cifras homogéneas de los valores que intervienen en el cálculo del rendimiento. Un esquema que permita realizar esto debe considerar todas y cada una de las partidas que se obtienen por concepto de plusvalía: ganancia de capital, dividendos en efectivo, aumento de capital a la par, aumento de capital a la par más prima, aumento de capital con cargo a la reserva (capitalización) y expresada como dividendos en acciones y por último los splits.

Así el indicador que se propone para medir los premios es:

$$Git = (Pit - VN).\ SUS + Pit.\ CAP + (Pit - VN - PR).\ PUS + SP.\ Pit \quad (2a)$$

Donde:

VN = Valor Nominal
SUS = Proporción de suscripción a la par
CAP = Proporción de capitalización
PR = Importe unitario de la prima de suscripción
PUS = Proporción de la suscripción con prima
SP = Relación del Split

* Debido a ello, a pesar que se modifique la Ley del Impuesto Sobre la Renta, estas modificaciones no inciden en el cálculo del rendimiento bruto.

Las capitalizaciones, suscripciones y dividendos se realizan en función al número de acciones que se poseen. Debido a esto para asegurar que en numerador de (1) se suman cantidades homogéneas, estos conceptos pueden calcularse como sigue:

$$D = \Sigma \frac{N\ (Di)\ Di}{No}$$

$$SUS = \Sigma \frac{N\ (SUSi)\ SUSi}{No}$$

$$CAP = \Sigma \frac{N\ (CAPi)\ CAPi}{No}$$

$$PUS = \Sigma \frac{N\ (PUSi)\ PUSi}{No}$$

Donde:

Di = i-ésimo dividendo

N(Di) = número de acciones que se poseen al ejercer el i-ésimo dividendo.

SUSi = Proporción de la i-ésima suscripción a la par.

N(SUSi) = Número de acciones que se poseen al ejercer la i-ésima suscripción a la par.

CAPi = Proporción de la i-ésima capitalización.

N(CAPi) = Número de acciones que se poseen al ejercer la i-ésima capitalización.

PUSi = Proporción de la i-ésima suscripción con prima.

N(PUSi) = Número de acciones que se poseen al ejercer la i-ésima suscripción con prima.

No = Número de acciones al inicio del período.

Hemos definido el rendimiento de un valor, obtendremos ahora el rendimiento de la cartera de valores.

Consideremos una cartera en particular (a la que llamaremos P) y llamemos a Hip la cantidad invertida en el valor i al final del mes t.

El valor de la inversión es entonces:

$$Hip + Rit\ Hip = Hip\ .\ (1 + Rit)$$

Este es el valor al final de el mes; es la inversión inicial Hip más el rendimiento sobre esta Rit Hip.

Si tenemos n valores, el valor de nuestra cartera al final de el mes es:

$$\Sigma\ Hip + \Sigma\ \ Hip\ Rit = \Sigma\ Hip\ (I + Rit)$$

Si Rit es el rendimiento de un sólo valor, podemos - afirmar entonces que Rpt es el rendimiento de la cartera al final de el mes.

Si definimos a Σ Hip = H como el total de fondos - invertidos al inicio del mes tendremos que:

$$H + H\ Rpt = \Sigma\ Hip + \Sigma\ Hip\ Rit = H + \Sigma\ Hip\ Rit$$

$$H\ Rpt = \Sigma\ Hip\ Rit \qquad (3)$$

Esto nos dice que el rendimiento de una cartera puede ser expresado de dos formas.

1. Como la inversión total por el rendimiento de la cartera o sea el rendimiento sobre la inversión total.

2. Como la suma de los rendimientos sobre las inversiones de cada valor.

Si hacemos $Xip = \frac{Hip}{H}$ tendremos èntonces que:

$$\Sigma \frac{HiP}{H} = \frac{H}{H} = 1$$

Si dividimos ambos miembros de la ecuación (3) por H tendremos que:

$$Rpt = \Sigma\ Xip\ Rit \qquad (4)$$

La cantida Xip es la proporción del total de fondos H invertidos en el valor i para obtener la cartera p, la ecuación (4) nos dice que el rendimiento sobre la cartera p es el promedio ponderado de los rendimientos de los valores que están en la cartera p, donde la ponderación que se aplica a los rendimientos de los valores es la proporción de los fondos de la cartera invertidos en el valor i.

A partir de la ecuación (4) podemos concluir (como mencionamos antes), que el rendimiento de una cartera es función de los rendimientos de los valores.

2.5 RENDIMIENTO ESPERADO

La inversión en valores constituye un medio para alcanzar un fin: alcanzar el más alto rendimiento esperado sobre el total de la cartera; a cada cartera corresponde un rendimiento esperado. Para el inversionista, la elección es, entonces, entre diferentes rendimientos esperados.

Sabemos que el rendimiento de la cartera es función de los rendimientos de los valores, por lo tanto el rendimiento esperado de la cartera será también función de los rendimientos esperados de los valores. El problema consiste entonces en encontrar un indicador referido al rendimiento esperado de los valores. Veamos un ejemplo, el rendimiento de la acción A dentro de una semana es en este momento desconocido, una manera de estimar dicho rendimiento es a través de la función de distribución de los rendimientos, por lo tanto para que este camino sea susceptible de aplicarse, consideramos a los rendimientos como variables aleatorias.

La forma de distribución de los rendimientos es importante, por varias razones: para el inversionista el tipo (forma y característica) de la distribución determinan en gran medida el nivel de aceptación del riesgo de la inversión; desde el punto de vista económico, el conocimiento de la distribución de los rendimientos en el mercado es un modo de recabar información sobre los factores básicos que afectan a los rendimientos.

Como el rendimiento de una cartera es una suma ponderada de los rendimientos de las acciones, la distribución del rendimiento de la cartera está determinada por la distribución de los rendimientos de las acciones. En términos estadísticos, la distribución de una suma ponderada de va--

riables aleatorias está determinada por la distribución de los sumandos.

Hemos supuesto que la distribución de los rendimientos es normal, comentamos que trataremos de probar este supuesto para el mercado mexicano de acciones, sin embargo podemos contar además de los estudios hechos por Tobin, con el apoyo del estudio hecho por Blume* en el mercado de valores de los Estados Unidos que demuestra que la distribución normal es una buena aproximación para la distribución mensual de los rendimientos de las acciones. La distribución normal, como comentamos, puede ser completamente caracterizada a partir de su media y de su varianza, así el problema se reduce a desarrollar expresiones para la media y varianza de una suma ponderada de variables aleatorias.

Para ello revisaremos algunos conceptos estadísticos que consideramos importante soporte para el desarrollo de nuestro trabajo: La media o valor esperado de una variable aleatoria continua X se define como:

$$\mu(x) = \int_x x \, P(x) \, dx$$

Donde $P(x)$ identifica la función de densidad de la variable aleatoria X.

En general la media no es conocida por lo que hay que estimarla, supongamos que tomamos de la acción A rendimientos al azar de una función de distribución normal. La media de la población no la conocemos por lo que la estimaremos a través de una muestra por medio de:

$$\overline{X} = \Sigma \, Xi/_n$$

* Blume Marshall. 1970 "Portfolio Theory: A setp toward, its practical application". Journal of Business.

Dentro del contexto de la teoría de la cartera el estimador de los rendimientos mensuales se establece como:

$$\bar{R} = \Sigma Rit/n$$

Como el rendimiento de una cartera es una suma ponderada de los rendimientos de las acciones y además hemos supuesto que los rendimientos son variables aleatorias es necesario conocer las propiedades probabilísticas que tiene la suma ponderada de variables aleatorias en lo que respecta a esperanzas.

PROPIEDAD 1: Si X1, X2..........,Xn son variables aleatorias, entonces cualquier suma ponderada de estas es también una variable aleatoria, así: $X = \Sigma ai.\ Xi$ es una variable aleatoria.

PROPIEDAD 2: El valor esperado de una suma de variables aleatorias es igual a la suma ponderada del valor esperado de cada variable: Simbólicamente esto lo podemos expresar así: $E\ (\Sigma\ ai.Xi) = \Sigma ai.\ E\ (Xi) = \Sigma\ ai.\mu i$

Llevando la expresión anterior al contexto de la teoría de la cartera tendremos: $E\ (Rpt) = E\ (\Sigma Xip.E\ (Rit)) = \Sigma\ Xip.E(Rit)$

Donde E(Rpt) es el rendimiento esperado del total de la cartera en el momento t y E (Rit) es el rendimiento esperado de la acción i en el momento t.

Ya que hemos supuesto que la distribución de los rendimientos es normal, tendremos que: $E(Rit) = \mu it$

Por lo que reescribiendo la fórmula (5): $E(Rpt)=\Sigma Xip.\mu it$

2.6 RIESGO

La teoría de la cartera es una parte de la teoría de la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre. La incertidumbre es el factor que hace conceptual y técnicamen te difícil el problema de la selección de la cartera, la -- incertidumbre es el agente culpable del riesgo de una inversión.

Si no existiera el riesgo ni la incertidumbre, el -- problema de la selección de la cartera será fácilmente re-- suelto, se plantea el modelo matemático de optimización co- rrespondiente y se resuelve con algún algoritmo y/o método- numérico.

La incertidumbre tiene dos facetas; en primer lugar, se tienen las apreciaciones subjetivas. Es decir, juicios-- y valorizaciones que dependen del estilo, gusto, percepción- de experiencias, cultura, etc., pero en el fondo es imposi- ble apoyar racionalmente con lógica rigurosa en todos sus - aspectos. Las apreciaciones subjetivas para muchos "hacen-- esta vida interesante".

Los problemas de tratamiento científico, sistemático y riguroso que plantea la subjetividad pueden ser difíciles o imposibles de resolver lo que nos salva es que en el pro- blema de la selección de la cartera, el criterio es funda-- mentalmente económico, en muchos casos, las apreciaciones-- subjetivas también se pueden traducir a términos económicos.

La segunda fuente de incertidumbre proviene del me-- dio dentro del cual se debe realizar la elección, debido a- que en él operan gran cantidad de fuerzas fuera del control del sujeto que debe hacer la elección. Así el inversionista está expuesto a la incertidumbre en cuanto a los precios de los distintos activos en el mercado, a las acciones gubernamentales en cuanto a los requisitos fiscales y legales, en- cuanto a las necesidades de liquidez ya que es imposible -- predecir con exactitud nuevas oportunidades de inversión --

más redituables que las existentes un mes antes.

En el problema de la selección de la cartera hay --- tres tipos de riesgos:

1. Riesgo de pérdidas: es decir, de no recuperar la- inversión y que se produzca una merma o pérdida - de capital.

2. Riesgo de desaprovechar oportunidades de inver--- sión, es decir, asignar recursos a ciertos acti-- vos menos redituables que otros.

3. Riesgo de liquidez: es decir, comprometer recur- sos en activos difíciles de convertir en dinero-- provocando una pérdida en el momento que se hace- necesario efectuar un pago imprevisto.

Podríamos pensar que cualquiera de los tres tipos -- de riesgo antes mencionados están relacionados entre sí, la distinción que hacemos obedece a sutilezas que obligan a -- tratarlos en forma diferente.

En la teoría de la economía de mercado, el riesgo -- tiene una importancia fundamental ya que es una justifica-- ción de la tenencia de capital por las empresas privadas. - El argumento es que las utilidades de las empresas son jus- tas en virtud de que es la empresa quien absorbe los ries-- gos.

Las críticas son abundantes y despiadadas, en este - estudio no haremos referencia de ellas, lo importante para- nosotros es el hecho de que en la realidad se observa que,- en general, las inversiones más riesgosas efectivamente son las de mayores rendimientos en caso de éxito. La regla alto riesgo-alto rendimiento la podemos observar en instrumentos de inversión tanto de los mercados de dinero, como de los - mercados de capital; así podemos observar que, en general,- un valor gubernamental paga menos que un depósito en un banco al mismo plazo. La razón es que en el valor gubernamen-- tal los riesgos son menores ya que:

1. Están respaldados por el gobierno de un país por lo que el riesgo de pérdida es casi nula.

2. Son instrumentos completamente líquidos.

Desde luego existen diferencias muy sutiles en el - valor de esta regla, debido al tipo de mercado y país, en - dónde se encuentre el inversionista.

Una consecuencia directa del riesgo es la diversificación de la cartera, es decir, distribuir el riesgo entre- varios activos de forma que las pérdidas en algunos sean -- compensadas y aún superadas con las ganancias de otros.

Hemos visto la importancia que tiene el riesgo dentro de la selección de la cartera, debemos encontrar un índice referido al riesgo. El índice que proponemos es la varianza de los rendimientos esperados. Las razones para usar este índice son tanto técnicas como intuitivas:

1. Hemos supuesto que los rendimientos se distribuyen normal y una distribución normal queda com-- pletamente determinada por su media y su varianza.

2. La varianza del rendimiento de una cartera puede derivarse de las varianzas y covarianzas de los-

valores constituyentes.

3. Si la varianza es 0, no hay incertidumbre, mientras menor sea la varianza, menor será el posible rango de variación de los rendimientos, menor la incertidumbrey por lo tanto el riesgo.

Nuevamente revisaremos algunos conceptos estadísticos:

Si X de una variable aleatoria la varianza de X denota por

$$\sigma_x^2 = \int_x (X-E(X))^2 \, P(X)dx = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Un estimador para la varianza que goza de varias propiedades es:

$$\hat{\sigma}_{ii} = \Sigma \, (Xip - \overline{X})^2 / n$$

Transportando esto al contexto de la teoría de la cartera; la varianza de los rendimientos de una acción es:

$$\sigma^2(Rit) = E\,(Rit - E\,(Rit))^2$$

Mientras que el estimador muestral será:

$$\hat{\sigma}_{ii} = \Sigma \, (Rit - \bar{R}i)^2 / n$$

La varianza de la cartera será:

$$\sigma^2 \, (Rpt) = E(\, (\Sigma \; Xip \; Rit - \Sigma \, Xip \; E\,(Rit)\,)^2 \,)$$

Simplificando tendremos:

$$\sigma^2 \text{ (Rpt)} = E\ ((\Sigma Xip\ (Rit - E\ (Rit)\ )\ )^2\ ) \qquad (6)$$

Buscando claridad en los conceptos expresados y en los que expresaremos enunciemos algunas propiedades de la - varianza.

PROPIEDAD 1: El valor esperado de una variable aleatoria al cuadrado es igual a la varianza de la variable - - aleatoria más su valor esperado al cuadrado.

$$E\ (X^2) = \sigma^2(X) + (E(X))^2$$

PROPIEDAD 2: La varianza de una transformación li-- neal de la variable aleatoria no es afectada por la suma o resta de una constante pero el producto de la variable aleatoria por una constante es la varianza de la variable aleatoria por el cuadrado de la constante.

$$\sigma^2\ (aX+b) = a^2 \cdot \sigma^2(X)$$

PROPIEDAD 3: La varianza de una suma de variables - aleatorias es igual a la suma de sus varianzas mas la suma de todas sus covarianzas.

$$\sigma^2\ (\Sigma Xi) = \Sigma\sigma^2 + \Sigma\Sigma\ \sigma ij$$

2.7 COVARIANZAS

La varianza, como hemos visto, la podemos expresar como la ecuación (6) , esta ecuación es el valor esperado - de una suma ponderada de variables aleatorias, desarrolle-- mos la expresaión (6) para el caso n = 2:

$$\sigma^2\ (Rpt) = E((X_1p\ (R_1t - E\ (R_1t)))^2) + E((X_2p\ (R_2t - E\ (R_2t)))^2) + E(\ 2X_1p\ X_2p\ (R_1t - E(R_1t))\ (R_2t - E(R_2t)))$$

$$\sigma^2\ (Rpt) = X_1^2p\ E\ (\ (R_1t - E\ (R_1t))^2) + X_2^2p\ E\ (\ (R_2t - E\ (R_2t))^2) + 2X_1p\ X_2p\ E\ (\ (R_1t - E\ (R_1t))(R_2t - E\ (R_2t))) \qquad (7)$$

Las expresiones $E((R_1t-E(R_1t))^2)$ y $E((R_2t-E(R_2t))^2)$ son las varianzas de los rendimientos y están denotadas por --

$\sigma^2(R_1t)$ y $\sigma^2(R_2t)$, para completar la interpretación-- sólo nos falta por analizar la expresión $E\ ((R_1t - E\ (R_1t))$ $(R_2t - E\ (R_2t))\ )$ esta cantidad se conoce como la covarianza entre R1 y R2.

La covarianza en términos formales pondera cada posible valor $(R_1t - E\ (\ R_1t)\ )\ (R_2t - E\ (R_2t)\ )$ por $f\ (R_1,R_2)$ que - es la función de densidad conjunta de R1 y R2.

La covarianza entre los rendimientos de cualesquiera dos acciones i, j es denotada por COV (Ri, Rj) o por σij y se define como:

$$\sigma ij = COV\ (Ri, Rj) = E((Ri- E(Ri))\ (Rj-E(Rj)))$$

$$= \int_{Ri,Rj} (Ri- E(Ri))\ (Rj- E(Rj))\ \ f\ (Ri, Rj)\ dRi\ dRj$$

Habiendo interpretado todos los términos de la ecuación (7), la varianza del rendimiento de una cartera compuesta por dos acciones es:

$$\sigma^2\ (Rpt) = X_1^2p\ \sigma^2(R_1t)+X_2^2p\ \sigma^2(R_2t) + 2X_1p\ X_2p\ \sigma_{12} \qquad (7a)$$

Y para el caso de n acciones es:

$$\sigma^2(Rpt) = \Sigma\ X^2ip\ \sigma^2(Rit) + 2\ \Sigma\ \Sigma\ Xip\ Xjp\ \sigma ij \qquad (8)$$

Si $\sigma^2(Rit) = \sigma ii$

La expresión (8) se convierte en:

$$\sigma^2(Rpt) = \Sigma\Sigma\ Xip\ Xjp\ \sigma ij \qquad (9)$$

Dentro del contexto de la teoría de la cartera la covarianza mide el grado de asociación entre los rendimientos de la acción i y la acción j. Si la covarianza es positiva existe una asociación positiva entre Ri y Rj, es decir las desviaciones de Ri y Rj de sus respectivas medias tienden a tener el mismo signo, los rendimientos de las dos acciones tienden a moverse en la misma dirección. Una covarianza negativa indica asociación negativa, las desviaciones tienden a tener signos opuestos, los rendimientos de las dos acciones tienden a moverse en direcciones opuestas. Por ejemplo, los cambios en los precios de mercado (entendidos estos como una parte importante del rendimiento de una acción) de dos empresas siderúrgicas, tenderán probablemente a moverse en la misma dirección según que las perspectivas para la industria siderúrgica mejore o empeore, y por lo tanto habría que esperar una covarianza positiva entre ellas.

Otra medida para medir el grado de asociación o de correlación entre los rendimientos de las acciones es el coeficiente de correlación, el cual es función de la varianza y las covarianzas, identificamos al coeficiente de correlación como ρ

$$\rho = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \, \sigma_j} = \frac{\text{COVARIANZA } (i,j)}{\text{DESVIACION ESTANDAR } (i) \text{ DESVIACION ESTANDAR } (j)}$$

El coeficiente de correlación siempre está entre -1.0 y + 1.0.

La fórmula (9) podría ser transformada a:

$$\sigma^2 (Rpt) = \Sigma\Sigma Xip \; Xjp \; \rho \, \sigma i \, \sigma j \qquad (9a)$$

Ilustraremos gráficamente la relación entre los rendimientos de dos acciones que componen una cartera*, en el eje de las abscisas tendremos el rendimiento 1 y en el eje de las ordenadas al rendimiento 2:

* Podriamos ampliar el campo de acción y hablar de relación entre carteras y no unicamente entre acciones.

1. Rendimientos perfecta y positivamente correlacionados.

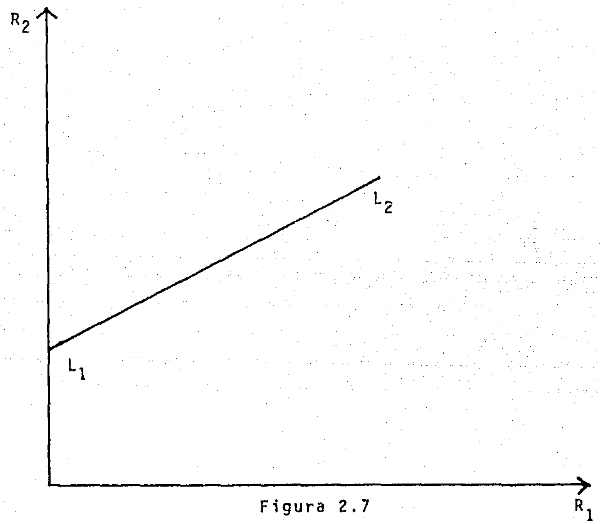


Figura 2.7

Cualquier par dentro de la recta L1, L2 es considerado posible. La interpretación de esta gráfica es que si los rendimientos están perfecta y positivamente correlacionados ningún rendimiento podrá contribuir a que disminuya el riesgo de la cartera ya que si los rendimientos de una acción bajan los de la otra también.

En este caso el coeficiente de correlación es igual a +1.

Retomemos la fórmula correspondiente a la varianza de la cartera compuesta por dos acciones. (Fórmula 7a)

$$\begin{aligned}\sigma^2(Rpt) &= X_1^2p\ \sigma^2(R_1t) + X_2^2p\ \sigma^2(R_2t) + 2X_1p\ X_2p\ \sigma_{12} \\ &= X_1^2p\ \sigma^2(R_1t) + X_2^2p\ \sigma^2(R_2t) + 2X_1p\ X_2p\ \rho_{12}\ \sigma(R_1t)\sigma(R_2t) \\ &= X_1^2p\ \sigma^2(R_1t) + X_2^2p\ \sigma^2(R_2t) + 2X_1p\ X_2p\ \sigma\ (R_1t)\ \sigma(R_2t) \\ &= (X_1p\,\sigma(R_1t) + X_2p\,\sigma(R_2t))^2\end{aligned}$$

$$\sigma\ (Rpt) = X_1p\,\sigma(R_1t) + X_2p\,\sigma(R_2t)$$

Podemos concluir que cuando dos acciones están perfecta y positivamente correlacionadas, el riesgo, medido por la raíz cuadrada de una varianza, es el promedio ponderado de los riesgos de cada una de las acciones que componen la cartera. En estos casos la diversificación únicamente provee promedio de riesgos, no reducción de ellos.

2. Rendimientos perfecta y negativamente correlacionados.

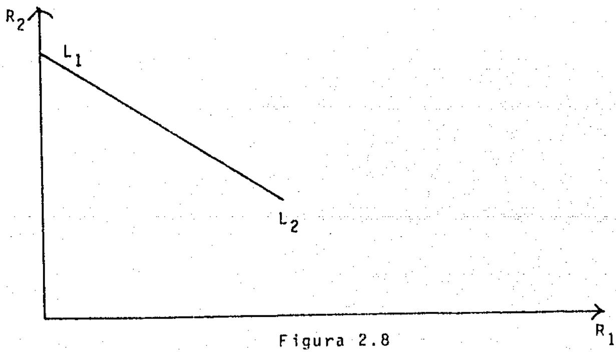


Figura 2.8

Si los rendimientos están perfecta y negativamente-correlacionados, la combinación de R1 y R2 favorece la reducción de la varianza de la cartera en tal forma que el - riesgo puede llegar a nulificarse.

En este caso el coeficiente de correlación es igual a -1

En este caso la fórmula correspondiente a la varianza de una cartera compuesta por dos acciones es:

$$\sigma^2 \text{ (Rpt)} = X_1^2 p\ \sigma^2 \ (R_1 t) + X_2^2 p\ \sigma^2 (R_2 t) - 2X_1 p\ X_2 p\, \sigma_{12}$$

La varianza de una cartera compuesta por dos acciones perfecta y negativamente correlacionadas es menor que-la varianza de una cartera compuesta por acciónes perfec--ta y positivamente correlacionadas.

Veamos cómo podríamos eliminar el riesgo:

$$\sigma^2 \text{ (Rpt)} = (X_1 p\ \sigma\ (R_1 t) - X_2 p\ \sigma\ (R_2 t))^2 \qquad (9b)$$

Imaginemos ahora una cartera en la que las propor--ciones de tenencia de las acciones son inversamente proporcionales a las desviaciones estándar de las dos acciones,-esto es:

$$\frac{X_1 p}{X_2 p} = \frac{\sigma\ (R_2 t)}{\sigma\ (R_1 t)}$$

$$X_1 p = \frac{\sigma\ (R_2 t)}{\sigma\ (R_1 t)} .X_2 p$$

Sustituyéndo en 9b

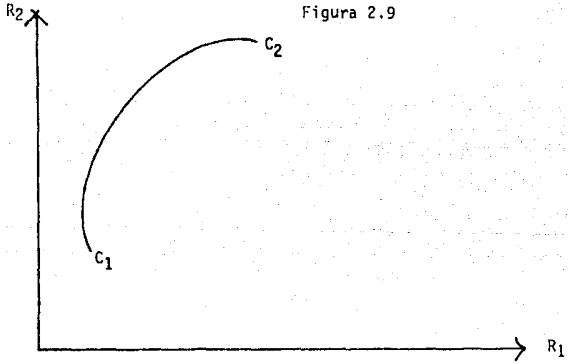
$$X_1p\ \sigma\ (R_1t) - X_2p\ \sigma\ (R_2t) = \frac{\sigma\ (R_2t)\ X_2p\ \sigma\ (R_1t)}{\sigma\ (R_1t)} - X_2p\ \sigma\ (R_2t)$$

$$X_1p\ \sigma\ (R_1t) - X_2p\ \sigma\ (R_2t) = 0$$

$$\sigma^2\ (Rpt) = 0$$

3. Rendimientos imperfectamente correlacionados

Figura 2.9



Cuando dos acciones están imperfectamente corre- - lacionadas , no es posible encontrar combinaciones de ellas que eliminen el riego. La gráfica 2.9 se podría asimilar como una combinación de 2.7 y de 2.8 pero sin que el eje vertical sea interceptado por la curva, C1, C2, lo cual quiere decir que no existe una combinación de R1 y R2 que anule el -- riesgo.

Cuando hay sólo dos activos básicos para todas las -- carteras disponibles, éstos están en una única curva del diagrama R1 R2, pero para tres o más activos básicos, las oportunidades disponibles forman una superficie.

Dentro de la teoría de la cartera el inversionista debe tomar en cuenta a las acciones individualmente, sólo para determinar el rendimiento esperado y la varianza de la cartera donde estas acciones participan.

La contribución de una acción al rendimiento esperado del total de la cartera lo podemos facilmente determinar a partir de la ecuación (5)

$$Xip\ E(Rit)$$

Que es el rendimiento esperado, ponderado por la proporción invertida en la acción i.

De la ecuación (9) observamos que la contribución de una acción a la varianza de la cartera es un caso mucho más complicado, reescribimos la ecuación (9) de la siguiente forma:

$$\sigma^2(Rpt) = \Sigma Xip\ (\Sigma\ Xjp\ \sigma\ ij) \qquad (10)$$

La contribución de la acción i a la varianza del rendimiento de la cartera p es:

$$Xip\ (\Sigma Xjp\ \sigma\ ij) \qquad (11)$$

La cual está formada por dos partes:

Xip, que es la proporción de la cartera, invertida en la acción i, y

$$\Sigma Xjp\ \sigma\ ij$$

que es el promedio ponderado de las covarianzas entre el - rendimiento de la acción i y los rendimientos de cada una de las acciones (incluyendo la acción i) que constituyen la cartera.

Si llamamos a este promedio de covarianzas el riesgo de la acción i en la cartera p, entonces la ecuación (10)- expresa el riesgo, como el promedio ponderado de los riesgos de las acciones en la cartera, donde el riesgo de la - acción en la cartera p es ponderado por la proporción de - fondos invertidos en esa acción.

Hay dos puntos dentro de nuestro análisis en los -- que debemos enfatizar:

1.- Hasta este momento siempre hemos hablado del - riesgo de la acción i en la cartera p; esto es debido a -- que el riesgo de una acción es diferente para diferentes - carteras. Las covarianzas σij son las mismas para todas - las diferentes carteras, pero los pesos Xjp son diferentes para todas las carteras, esta es la razón por la cual la - contribución al riesgo de la cartera p debido a la acción i, medido este por el promedio ponderado de covarianzas, - es diferente para diferentes carteras.

2.- Una acción aparentemente "riesgosa" (ésto es una acción con varianza positiva alta) puede tener riesgo positivo, negativo o nulo dentro de una cartera, sabemos que dentro de la expresión:

$$\Sigma Xjp\sigma ij$$

uno de los términos es $\sigma ii = \sigma^2(Ri)$, entonces al reescribir esta expresión tendremos:

$$\Sigma Xjp\sigma ij = Xip\, \sigma^2(Rit) + \Sigma Xjp\, \sigma ij$$

El primer término del segundo miembro será positivo sólo si Xip es positivo, pero el valor de toda la expresión puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo del- valor del promedio ponderado de las covarianzas entre los- rendimientos de las acciones.

Una acción que aparentemente tenga alto riesgo en - términos de la varianza de su rendimiento puede tener bajo riesgo visto como componente de una cartera.

Estudiemos ahora un caso más interesante, ¿puede -- una acción tener riesgo positivo dentro de una cartera y - hacer una contribución negativa al riesgo de la cartera?,- veamos, la contribución de una acción a la varianza de rendimiento de una cartera está dado por:

$$Xip\ (\Sigma\ Xjp\ \sigma ij)$$

Hemos expresado al riesgo de una acción-dentro de - una cartera-como el promedio ponderado de covarianzas que- aparece en (11), así, aún si el riesgo de una acción en - la cartera es positivo la acción hace una contribución negativa al riesgo de la cartera si $\Sigma Xjp\ \sigma ij > 0$ y $Xip < 0$ - - - esto es la cartera contiene la venta en corto de una acción, en términos de riesgo, cuando una acción hace una contribución negativa a la varianza del rendimiento de una cartera, dicha acción está reduciendo el riesgo de la cartera.

Cabe hacer notar que para carteras con un gran número de acciones, a pesar de que las covarianzas son mucho - más numerosas que las varianzas, no se implica que las covarianzas dominen a las varianzas en el cálculo de $\sigma^2(Rpt)$

2.8 PREFERENCIAS DEL INVERSIONISTA

El grado de deseo de una cartera es expresado por los valores E(Rpt), σ^2 (Rpt) De acuerdo a nuestros supuestos la actitud del inversionista refleja los objetivos de "buscar" el rendimiento y "evitar" el riesgo.

¿Cómo escoge un inversionista una cartera entre las distintas carteras alternativas que se le presentan?, las siguientes reglas de decisión se aplican a inversionistas racionales.

1. Si dos carteras tienen la misma varianza y diferentes rendimientos esperados, se preferirá aquella que tenga rendimiento esperado más alto.

2. Si dos carteras tienen el mismo rendimiento esperado y diferentes varianzas se preferirá aquella con la varianza más pequeña.

3. Si una cartera tiene una varianza menor y un rendimiento esperado mayor que cualquier otra cartera propuesta, ésta se preferirá a todas con las que se compara.

Las anteriores reglas se pueden resumir en:

4. E (Rpt) es bueno, igual o más es preferido a menos.

5. σ^2(Rpt) es mala, igual o menos se preferirá a más.

La regla 5 es la aversión al riesgo. Además de que es un supuesto de nuestro modelo, una gran cantidad de evidencias empíricas nos dicen que casi todos somos aversos al riesgo en decisiones importantes.

Cualquier cartera puede ser representada por un punto dentro de los ejes cartesianos. Graficaremos en el eje de las abscisas el rendimiento esperado y en el eje de las ordenadas la varianza de rendimiento (Fig. 2.10). Ilustraremos las reglas de decisión del inversionista con un ejemplo:

CARTERA	RENDIMIENTO ESPERADO	VARIANZA
1	10	18
2	20	18
3	10	12
4	20	12

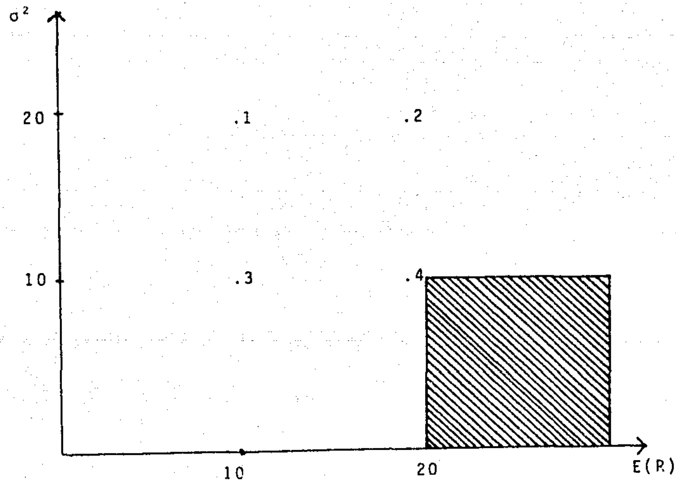


Figura 2.10

1. La cartera 2 se prefiere a la cartera 1 (reglas-1,4)
2. La cartera 3 se prefiere a la cartera 1 (reglas-2,5)
3. La cartera 4 se prefiere a la cartera 1 (reglas-3,4,5).
4. La cartera 4 se prefiere a todas las restantes.

De los anteriores puntos podemos concluir que:

1. Las carteras situadas al sureste de cualquier -- otra cartera se prefieren a ésta.

2. Las carteras representadas por puntos al noroeste de cualquier otra cartera son más malas.

Dentro de la gráfica 2.10 las carteras situadas en- el área sombreada son preferidas sobre la cartera 4, pero- la cartera 4 es preferida a todas aquellas carteras que están dentro del área no sombreada.

Hemos supuesto que el inversionista juzga el resultado de cualquier cartera en base a la distribución normal de probabilidades, para determinar el atractivo de la cartera, el inversionista está dispuesto a actuar sobre la base de dos parámetros: el rendimiento esperado y la varianza,- este tipo de jerarquización precisa de una función de utilidad de cada alternativa. Esto lo podemos representar mediante una función de utilidad del tipo:

$$U= f\ \{E(Rpt),\sigma^2(Rpt)\}$$

esta función de utilidad debe reflejar las actitudes del - inversionista, de evitar el riesgo y buscar el rendimiento.

La utilidad empero, que la cartera le reditue al inversionista no será segura e invariable, sino que será una utilidad esperada.

Con estos elementos y presuponiendo rendimientos normalmente distribuidos, podemos afirmar que la utilidad esperada del inversionista es una función creciente del rendimiento esperado y decreciente del riesgo.

Representaremos gráficamente estas dos características de la función de utilidad esperada del inversionista mediante las llamadas curvas de indiferencia. En el eje de las abscisas tendremos el valor esperado de los rendimientos de una cartera de acciones y en el eje de las ordenadas la varianza de los mismos. Cada curva de indiferencia estará definida por un conjunto de combinaciones de $E(Rpt)$ y de $\sigma^2(Rpt)$ que produce el mismo nivel de utilidad esperada (satisfacción) para el inversionista.

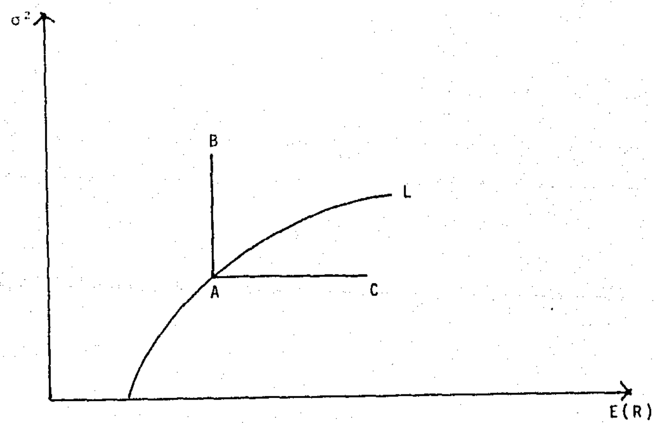


Figura 2.11

Puntos tales como B o C, situados fuera de la curva de indiferencia no proporcionan la misma utilidad esperada que un punto tal como A perteneciente a la curva L. La combinación B es menos deseable que la combinación A porque tiene el mismo rendimiento esperado pero una varianza más elevada. Se preferirá el punto C al A porque tiene la misma varianza pero un rendimiento esperado superior. Los puntos B y C están sobre alguna curva de indiferencia y cabe esperar que la curva de indiferencia de B represente un nivel de satisfacción inferior que el de la curva A, y que la curva C tenga un nivel más elevado de utilidad esperada. En términos generales es lógico suponer que las curvas de indiferencia que pudieran dibujarse en el espacio definido en la figura 2.11 tuviera utilidades crecientes a medida que nos desplacemos hacia la derecha de una curva a la otra.

Es conveniente aclarar tres características de la curva de indiferencia:

1. La intersección con el eje de las Y's.
2. La pendiente de la curva
3. La concavidad de la curva.

Estas características se basan sobre consideraciones de las medidas empleadas y de la función de utilidad que supondremos tiene el inversionista.

Analicemos las características:

1. El punto en que la curva corta el eje de los rendimientos esperados (E (Rpt)) es una cartera con un rendimiento esperado cierto, es decir libre de riesgo (con varianza igual a 0). Como la va--

rianza no puede ser negativa la curva de indiferencia no puede extenderse por debajo del eje--- E (Rpt). (Fig. 2.12)

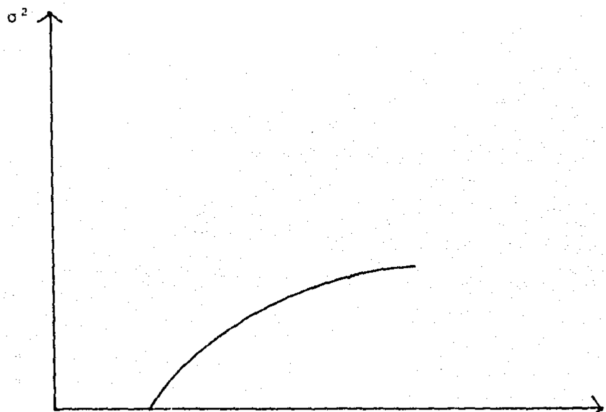


Figura 2.12

Una curva de indiferencia podría dibujarse de manera que, como en la figura 2.13, tuviera su intersección con el eje de la varianza, el punto - de intersección representaría una cartera cuya - varianza es positiva pero cuyo rendimiento esperado es cero, y que calificaremos como indeseable, por lo tanto, deberemos eliminar todas las carteras sobre las curvas de indiferencia que tuvieran un punto de intersección con el eje ----- σ^2(Rpt) . Asi la curva más hacia la izquierda - será la que pase por el origen de coordenadas y podría denominarse como la curva frontera.

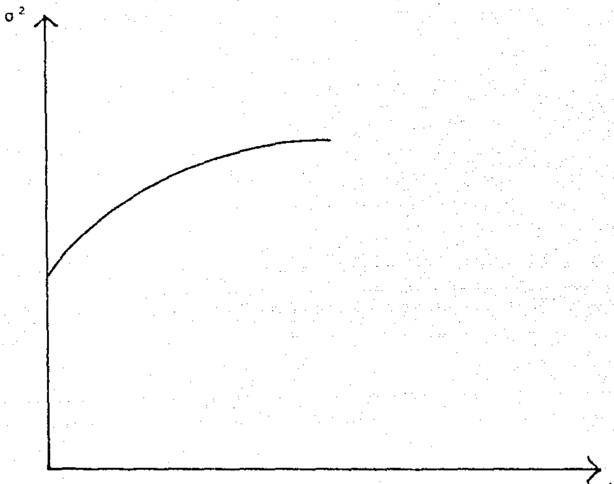


Figura 2.13

2. La curva de indiferencia tiene una pendiente positiva porque suponemos que el inversionista es contrario al riesgo y busca el rendimiento. La función de utilidad de la que derivamos la curva de indiferencia, es: $U = f\{E(Rpt), \sigma^2(Rpt)\}$ - - - - Si el inversionista es contrario al riesgo su -- utilidad decrece a medida que este aumenta.

$$\frac{\delta f}{\delta \sigma} < 0$$

Si busca el rendimiento, su utilidad aumenta a -

medida que lo hace el rendimiento:

$$\frac{\delta f}{\delta E} > 0$$

3. La tercera característica es la concavidad de la curva de indiferencia; si se considera un incremento en el riesgo (σ^2 (Rpt)), a medida que-- éste se incrementa, son necesarios incrementos - cada vez mayores en los rendimientos esperados - para mantener el mismo nivel de satisfacción.

Hemos hablado de la función de utilidad, pero ¿cómo será la ecuación de esta función?, entre múltiples alternativas que se han propuesto la suposición de que es una función cuadrática es completamente consistente con las suposiciones de que la función de utilidad es una función creciente del rendimiento y decreciente del riesgo.

La función de utilidad que proponemos es:

$$U\,(Rpt) = a + b\,Rpt - c\,(Rpt)^2$$

Asumamos que una cartera P puede obtener un rendimiento R_{kt} con probabilidad P_k. Sea U_k la utilidad asociada al - rendimiento R_{kt}, así:

$$U_k = a + b\,Rkt - c\,(Rkt)^2$$

Donde a,b,c son constantes

La utilidad esperada será:

$$E\,(U_k) = \Sigma P_k\,U_k$$

$$= \Sigma\, Pk\ (a + b\ Rkt - (c\ (Rkt)^2)$$
$$= \Sigma\ Pka + Pk.b\ Rkt - c\,(Rkt)^2\ .\ Pk$$
$$= a\,\Sigma\, Pk + b\,\Sigma\, Pk\ Rkt - c\,\Sigma\, Pk\ (Rkt)^2$$

Sabemos que:

$$\Sigma\ Pk = 1 \quad ; \quad \Sigma\ Pk\ Rkt = E\ (Rpt)$$
$$Y \quad \Sigma\ Pk\,(Rkt)^2 = \sigma^2 (Rpt) + E\ (Rpt)^2$$

Así:

$$E\,(U(Rpt) = a + b\ E\ (Rpt) - c\sigma^2 (Rpt) - cE\ (Rpt)^2$$

Esto muestra que la utilidad esperada podrá ser conocida una vez que se conozca el rendimiento esperado y la varianza del rendimiento. Como la utilidad esperada provee de una medida de la deseabilidad de una cartera, entonces- E(Rpt) y σ^2 (Rpt) son los únicos parámetros requeridos, -- esto, claro si la función de utilidad del rendimiento es-- cuadrática.

2.9 EL CONJUNTO DE OPORTUNIDADES DE INVERSION

Posiblemente el resultado más importante del modelo de Markowitz para la selección de la cartera, es el de las carteras eficientes, el cual se refiere al conjunto de potenciales oportunidades de inversión.

En el inciso 2.6 al hablar de riesgo afirmamos que siempre existe un elemento de subjetividad en su manejo; esto, mencionábamos, se debe a las distintas actitudes que guardan los inversionistas en cuanto al riesgo, sin embargo, al suponer la normalidad de los rendimientos y clarificar las actitudes del inversionista con relación al riesgo y al rendimiento, estamos de alguna manera, explicitando ciertos factores que facilitan al inversionista la selección de su cartera. Desembocamos así, en el concepto de carteras eficientes que propone Markowitz para obtener la cartera que minimice el riesgo y maximice el rendimiento.

Una cartera será eficiente si cumple con las siguientes tres condiciones:

1. Ser legítima
2. Tener el riesgo mínimo para un rendimiento dado.
3. Tener el rendimiento máximo para un riesgo dado.

A partir de estas condiciones observamos que el conjunto de carteras que el individuo debe tener en consideración para tomar una decisión sobre la inversión que maximice su utilidad esperada, se ha reducido sustancialmente (Fig. 2.14)

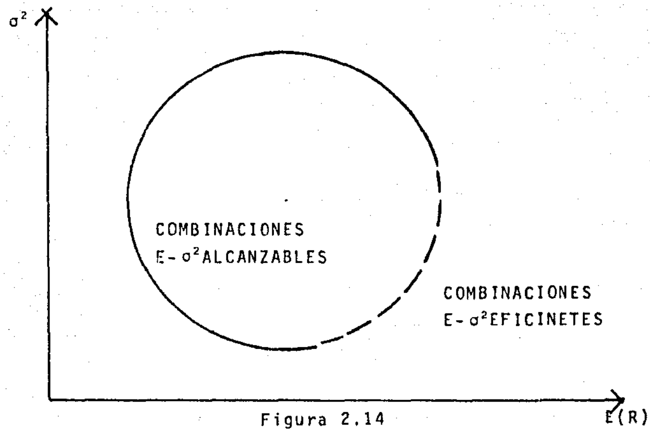


Figura 2.14

El supuesto de aversión al riesgo obliga al inversionista a restringir su atención únicamente al conjunto eficiente de carteras.

Con un sencillo ejemplo generaremos un conjunto eficiente, supongamos que existen dos carteras cuyas acciones reunen las siguientes características:

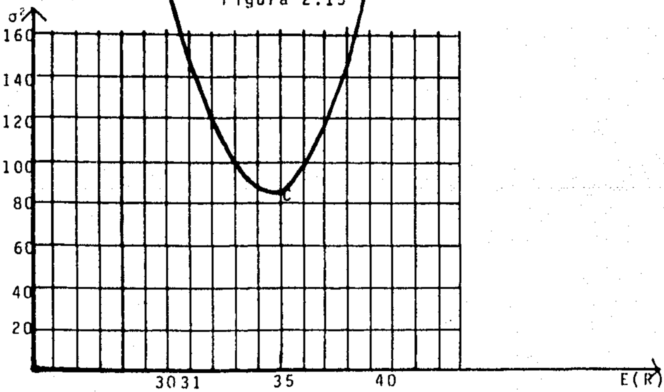
	EMISORA 1	EMISORA 2
Precio por acción	\$1.-	\$2.-
Rendimiento esperado por acción	3	8
Varianza por acción	2	10
Covarianza entre la emisora 1 y la emisora 2	-1	

Si suponemos que un presupuesto es \$10.- se debe emplear íntegramente en la adquisición de acciones de una y-otra empresa, tendremos los siguientes resultados:

X1	X2	RENDIMIENTO MEDIO DE LA CARTERA	VARIANZA DEL RENDIMINTO DE LA CARTERA
10	0	30	200
9	0.5	31	155.5
8	1	32	122
7	1.5	33	99.5
6	2	34	88
5	2.5	35	87.5
4	3	36	98
3	3.5	37	119.5
2	4	38	152
1	4.5	39	195.5
0	5	40	250

Estos resultados los podemos representar gráfica--- mente como se hace en la figura 2.15, en ella el conjunto- eficiente es la parte de la curva que está a la derecha -- del punto C.

Figura 2.15



Habiendo entendido el concepto de carteras eficientes, tenemos ahora el material suficiente para plantear algebraicamente el problema de la generación de el conjunto de oportunidades de inversión, antes de pasar a ello y esperando una mejor comprensión del problema trataremos de introducir una interpretación geométrica del mismo.

El rendimiento esperado E de una cartera compuesta por tres valores es:

$$E = X_1 \mu_1 + X_2 \mu_2 + X_3 \mu_3 \qquad (12)$$

Si sustituimos X_3 por $1 - X_1 - X_2$ en la ecuación (12) obtendremos:

$$E = X_1(\mu_1 - \mu_3) + X_2(\mu_2 - \mu_3) + \mu_3 \qquad (13)$$

Supongamos que $\mu_1 = .10$ $\mu_2 = .05$ y $\mu_3 = .07$

Entonces el rednimiento esperado de la cartera será:

$$E = .03\,X_1 - .02X_2 + .07$$

Si deseamos obtener un rendimiento de .08 deberemos de satisfacer la siguiente ecuación:

$$.08 = .03X_1 - .02\,X_2 + .07$$

(14)

ó

$$.01 = .03X_1 - .02\,X_2$$

Esta ecuación está representada por la recta E = .08 en la figura 2.16, el punto $X_1 = 1/3$ y $X_2 = 0$ esta sobre la recta E = .08, así $X_1 = 1/3$ y $X_2 = 0$ satisfacen la ecuación.

De igual manera, $X_1 = 2/3$ y $X_2 = 1/2$ satisfacen la ecuación. Si el punto $X_1 = 2/3$ y $X_2 = 1/2$ está sobre la línea E = .08, podemos concluir entonces que una cartera tiene un rendimiento esperado igual a .08 si y sólo si está representado por un punto en E = .08.

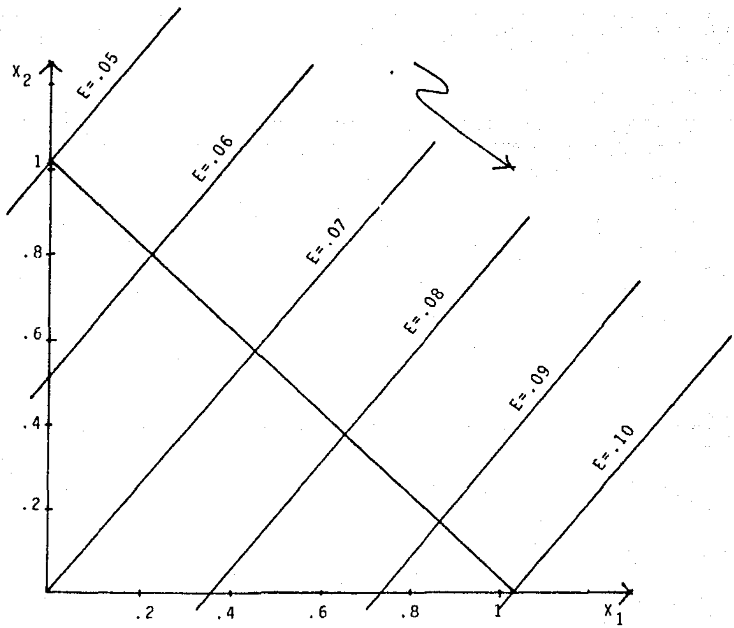


Figura 2.16

Supongamos ahora que deseamos obtener un rendimiento de .06 deberemos entonces satisfacer la siguiente ecuación:

$$.06 = .03X_1 - .02\ X_2 + .07$$

ó

$$-.01 = .03X_1 - .02X_2$$

Esta ecuación está representada por la recta $E = .06$ de la figura 2.16.

Esta recta representa al conjunto de carteras con - un rendimiento esperado igual a .06.

En general la figura 2.16 representa distintas rectas para distintos rendimientos esperados, las cuales re-- presentan a distintos conjuntos de carteras con el mismo-- rendimiento esperado, a estas rectas con los mismos rendimientos esperados Markowitz les llama rectas isomedias.

Si $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$ las líneas isomedias forman un sistema de rectas paralelas, despejemos de la ecuación (13)-- X_2 y llevemosla a la forma $X_2 = a + b\ X_1$, concretamente:

$$X_2 = -\frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} X_1 + \frac{E - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3}$$

Por lo tanto la pendiente de la recta isomedia co-- rrespondiente a $E = Eo$ es $- \mu_1 - \mu_3 / \mu_2 - \mu_3$ y su ordenada al origen es $E_0 - \mu_3 / \mu_2 - \mu_3$ por lo tanto si modificamos Eo, modificamos la ordenada al origen pero no la pendiente de la - recta isomedia. Esto confirma la afirmación de que las rectas isomedias forman un sistema de rectas paralelas.

Ahora si $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ tendremos:

$$
\begin{aligned}
E &= \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 \\
&= \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 (1 - X_1 - X_2) \\
&= \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 - \mu_3 X_1 - \mu_3 X_2 \\
&= \mu_1 X_1 - \mu_3 X_1 + \mu_2 X_2 - \mu_3 X_2 + \mu_3 \\
&= X_1 (\mu_1 - \mu_3) + X_2 (\mu_2 - \mu_3) + \mu_3 \\
&= \mu_3
\end{aligned}
$$

Es decir todas las carteras tendrán el mismo rendimiento esperado, en este caso la cartera eficiente es aquella que tiene la menor varianza.

Hemos visto que la varianza de una cartera compuesta por tres acciones es:

$$V = X_1^2 \sigma_{11}^2 + X_2^2 \sigma_{22}^2 + X_3^2 \sigma_{33}^2 + 2X_1X_2 \sigma_{12} + 2X_1X_3 \sigma_{13} + 2X_2X_3 \sigma_{23}$$

Substituyendo X_3 por $1 - X_1 - X_2$ desarrollando cuadrados y arreglando llegamos a:

$$
\begin{aligned}
V = {} & X_1^2 (\sigma_{11}^2 - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}^2) + X_2^2 (\sigma_{22}^2 - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}^2) \\
& + 2X_1X_2 (\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}^2) + 2X_1 (\sigma_{13} - \sigma_{33}^2) \\
& + 2X_2 (\sigma_{23} - \sigma_{33}^2) + \sigma_{33}^2
\end{aligned}
$$

Esta ecuación expresa a V en términos de X_1 y X_2.

Supongamos que tenemos tres acciones con las si---- guientes varianzas.

$$\sigma_{11}^2 = \sigma_{22}^2 = .01 \qquad \sigma_{12} = .005$$
$$\sigma_{33}^2 = .04 \qquad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

La varianza de la cartera será igual a:

$$V = .05\ X_1^2 + .05\ X_2^2 + .09\ X_1 X_2 - .08\ X_1 - .08\ X_2 + .04$$

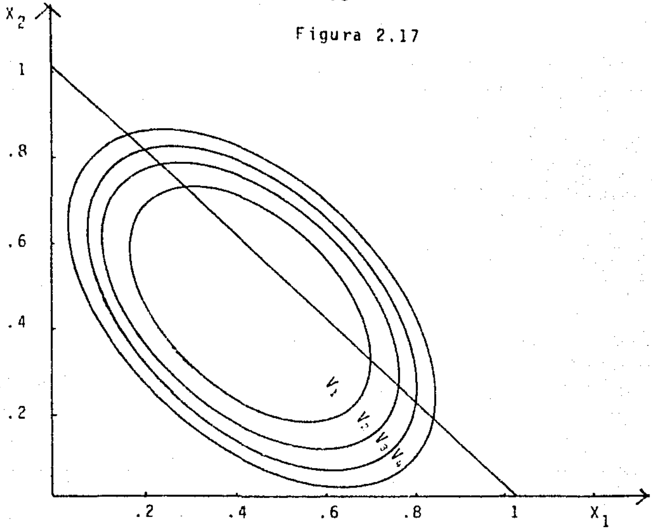
Todas las carteras con varianza igual a .01 deben - satisfacer la ecuación:

$$.05 X_1^2 + .05\ X_2^2 + .09\ X_1\ X_2 - .08\ X_1 - .08\ X_2 + .03 = 0$$

Reconocemos a esta ecuación como una elipse y está-representada en la figura 2.17 con la etiqueta $v_1 = .01$, - en esta figura representamos también a las elipses $v_2 = 0.02$, $v_3 = .03$ y $v_4 = .04$ Markowitz llama a estas elipses, cur-- vas isovariantes. Todas las elipses tienen el mismo centro, la misma orientación y el mismo cociente del diámetro cor- to. En tanto v se incrementa su curva isovariante se expande sin cambiar ni su forma, ni su centro ni su orientación; a partir de este razonamiento podemos concluir que el cen- tro del sistema de curvas isovariantes es el punto que hace mínimo a la varianza, para nuestro ejemplo este punto - es: $X_1 = X_2 = 8/19$ lo que hace una varianza de .006, para- nuestra cartera, no existe otra curva isovariante de va--- rianza menor a .006.

Las curvas isovariantes no serán elipses si y sólo-

Figura 2.17



si una o más de las siguientes condiciones se cumplen:

1) $\sigma_{11}^2 - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}^2 = 0$, esto es que la variable aleatoria - - $(R_1 - R_3)$ tiene varianza cero.

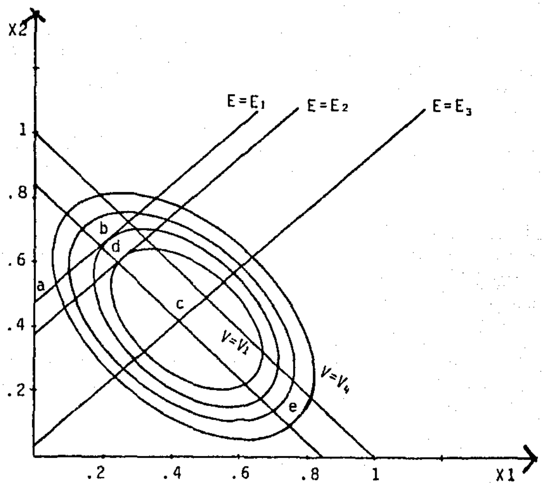
2) $\sigma_{22}^2 - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}^2 = 0$, esto es la variable aleatoria $(R_2 - R_3)$ tiene varianza cero.

3) La variable aleatoria $(R_1 - R_3)$ y $(R_2 - R_3)$ tienen un coeficiente de correlación igual a + 1 o - 1.

Dentro de nuestro análisis supondremos siempre que las curvas isovariantes son siempre elipses.

La figura 2.18 contiene tanto las curvas isovariantes como las rectas isomedias.

Figura 2.18



Supongamos que nos colocamos en el punto a de la grá fica sobre la línea isomedia $E = E_1$, y nos movemos en la dirección que indica la flecha, encontraremos así las curvas isovariantes $V = V_4$, $V = V_3$, $V = V_2$, $V = V_3$ y $V = V_4$.

Recordemos que el rendimiento esperado es el mismo en cualquier punto de la recta. De todas las curvas que tocan puntos en E_1, la curva $V = V_2$ es la de menor varianza, cualquier curva dentro de V_2 no toca E_1 y cualquier curva que rodee a V_2 tiene una mayor varianza. La recta E_1 toca a V_2, no la cruza, en b la curva V_2 es tangante a E_1.

Para cualquier otra recta isomedia el punto con menor varianza será el punto en el cual la recta sea tangente a una curva isovariante. Así el punto D tiene menor varianza que cualquier otro sobre la recta $E = E_2$, el punto C tiene menor varianza que cualquier otro sobre la recta $E = E_3$; el punto E tiene menor varianza que cualquier otro punto sobre $E = E_4$.

Tracemos una línea que una todos los puntos tangentes entre las líneas isomedias y las curvas isovariantes, esta línea contiene todos los puntos que minimizan la varianza para alguna cartera con un determinado rendimiento esperado.

De esta manera encontramos todos los puntos X_1, X_2 (recordemos que estamos en el caso de sólo tres activos) con mínima varianza para un rendimiento determinado. Este conjunto de rendimientos y mínimas varianzas forman el conjunto eficiente de carteras, al cual le llamaremos la frontera eficiente ya que separa a todas las combinaciones E-V alcanzables de todas aquellas E-V eficientes.

Resumiendo, podriamos dividir en siete pasos el método gráfico para la generación de el conjunto de potenciales oportunidades de inversión (para carteras compuestas por tres activos):

1. Convertir las fórmulas de tres variables a dos variables, así el análisis se podrá llevar a cabo en una gráfica bidimensional.

2. Encontrar la cartera de mínima varianza.

3. Graficar las rectas isomedias

4. Graficar las curvas isovariantes.

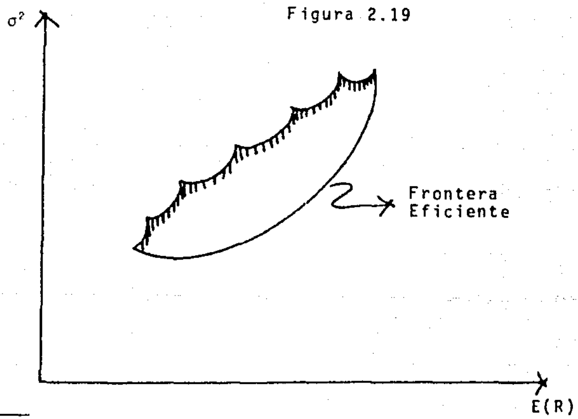
5. Calcular los X_1, X_2 correspondientes a una cartera eficiente para un rendimiento esperado determinado.

6. Determinar el riesgo de la cartera eficiente

7. Graficar la frontera eficiente.

Se ha demostrado* que en el plano E - V la frontera-eficiente es una parábola y es convexa con respecto al eje E. Fig. 2.19

Figura 2.19



*Robert Merton,"An Analytic Derivation of the efficiente -- Portfolio Frontier", Journal of Financial And Quantitative Analysis, 1972.

Esto le presenta al inversionista un panorama decisional completo, ya que indica cuanta varianza (o incertidumbre) debe "aceptar", para cada nivel de rendimiento esperado. De esta manera, el inversionista puede elegir su - cartera en base al rendimiento esperado deseado y al nivel de incertidumbre que esté dispuesto a aceptar.

Nuestra frontera eficiente se ha convertido o mejor dicho es, nuestro conjunto de oportunidades de inversión.

2.10 PLANTEAMIENTO ALGEBRAICO DEL MODELO

Para obtener la cartera óptima para algún inversionista, es necesario conjuntar dos elementos, uno subjetivo y el otro objetivo. El primero se refiere a las preferencias del inversionista, el segundo a las oportunidades de- inversión.

Dentro de las preferencias del inversionista, hemos establecido que este prefiere el rendimiento y evita el -- riesgo, en base a ello, nos aventuramos a proponer una función de utilidad de entre tantas que han, que se pueden y- que se podrian proponer, para cuantificar estas preferencias.

Dentro de las oportunidades de inversión, resumiendo podríamos decir que estas se reducen a obtener la frontera eficiente; pero ¿cómo generaremos esta frontera para- carteras compuestas por mas de tres activos?, el modelo de Markowitz proporciona los elementos para obtener las carteras que se encuentran a lo largo de esta frontera eficiente, para ello es preciso plantear y dar solución a un pro-- blemea de optimización no lineal.

Un problema de optimización es un problema que contiene:

1. Una función objetivo, la cual se requerirá que se maximice o se minimice.

2. Una o más variables de decisión.

3. Una o más restricciones.

Analicemos los anteriores puntos dentro del contexto de la teoría de la cartera:

1. Las tres cualidades que debemos tomar en cuenta para una inversión son: seguridad, rendimiento y liquidez, hemos visto que un inversionista prefiere maximizar el rendimiento y minimizar el riesgo (nuestro modelo no contempla la liquidez como parámetro de decisión, pero trataremos de aclarar ciertos puntos sobre ella al final del presente capítulo). En vista de ello, para conocer todas las carteras eficientes (frontera eficiente), plantearemos un modelo de minimización de riesgo, el parámetro que elegimos para medir el riesgo es la varianza, por lo que la función objetivo que planteemos deberá contemplar la minimización de σ^2.

2. Las variables de decisión son las proporciones de capital invertidas en cada una de las acciones. Un valor debe ser asignado a X_1, otro a X_2, ... etc.
   Si hay n acciones, entonces existen n diferentes variables de decisión.

3. Las restricciones dependerán de la situación del inversionista, contemplaremos tres tipos de res-

tricciones:

a) Como es intuitivamente lógico trataremos de obtener un rendimiento mayor o igual que el rendimiento mínimo esperado.
b) Invertiremos todo el capital que poseemos.
c) No se permitirá la venta de instrumentos en corto.

Antes de plasmar en una serie de símbolos matemáticos nuestro modelo, conviene hacer algunas aclaraciones referentes a la notación que utilizaremos. El rendimiento esperado de una cartera es:

$$E\ (Rpt) = \Sigma\ Xip\ \mu it$$

Donde μit es el rendimiento de la i-ésima acción, tomemos a μ como un vector renglón donde sus elementos son los rendimientos de cada una de las acciones μit entonces.

$$\mu = (\mu_1 t,\ \mu_2 t, \ldots\ldots \mu nt)$$

Mientras que X es un vector columna compuesto por cada una de las Xit, donde cada Xit es la proporción de capital que se invierte en cada instrumento.

Tendremos así que el rendimiento esperado es el producto punto.

$$E = X.\mu$$

Veamos ahora que sucede con la varianza del rendimiento de una cartera,

$$\sigma^2 (Rpt) = \Sigma\ \Sigma\ Xip\ Xjp\ \sigma ij$$

Esto puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\sigma^2 = \begin{bmatrix} X_1, & X_2, & \ldots\ldots\ldots, & Xn \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \ldots \sigma_{12} \ldots \sigma_{1n} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \sigma_{n1} \ldots \sigma_{n2} \ldots \sigma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

Si X^t es el vector renglón $(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, X_n)$- y V la matriz de varianza covarianza, entonces podemos escribir.

$$\sigma^2 = X^t\ VX$$

Si denotamos a γ como el rendimiento mínimo esperado, hemos concluido con nuestra definición de símbolos, -- así como también hemos identificado todas las entradas de- nuestro modelo.

V la matriz cuadrada de varianza covarianza.
μ es el vector de medias de los rendimientos.
Xi es la proporción de capital que se invierte en cada instrumento.
X vector columna cuyos componentes son las Xi's.
γ es el rendimiento mínimo esperado.

Por fin podemos ahora escribir nuestro modelo como un problema de optimización.

Minimizar X^t VX

Sujeto

$\mu X \geq Y$ Restricción a)

$\Sigma Xi = 1$ Restricción b)

$Xi \geq 0$ Restricción c)

Al resolver este problema de optimización encontraremos las proporciones Xi correspondientes a un riesgo mínimo para un rendimiento esperado dado, obtendremos así -- una cartera eficiente asociada a este rendimiento esperado.

Resolviendo varias veces este mismo problema de optimización pero para diferentes rendimientos esperados encontraremos sus correspondientes riesgos mínimos, obteniendo así distintas carteras eficientes las cuales nos permitiran generar la frontera eficiente. Y obtener con ello el-conjunto de oportunidades de inversión.

Estudiada la forma que adopta el conjunto eficiente de oportunidades de inversión, que en resumen, esta descrito por una curva convexa con respecto al eje E, dentro--del plano E-V; solo resta reunir en este mismo plano, las-preferencias del inversionista, representadas estas por -- las curvas de indiferencia, que se caracterizan por ser -- concavas con relación al eje E. Ambas tanto la curva de - oportunidades de inversión como las curvas de indiferencia tienen pendiente positiva.

La gráfica 2.20 nos muestra como el inversionista ob tiene el mas alto nivel de utilidad esperada, dado el conjunto eficiente de oportunidades de inversión, en el punto p en el que sean tangentes la curva de posibilidades de- inversión C y la curva de indiferencia del inversionista - V_2. El plano E (R_{pt}) , $\sigma^2(Rpt)$ se supone poblado completamente por curvas de indiferencia del inversionista indicativas de todos los niveles de utilidad esperada.La curva- de oportunidades de inversión por fuerza entonces alcanza- a tocar tangencialente solamente a una curva de indiferencia a la vez que corta a otras.

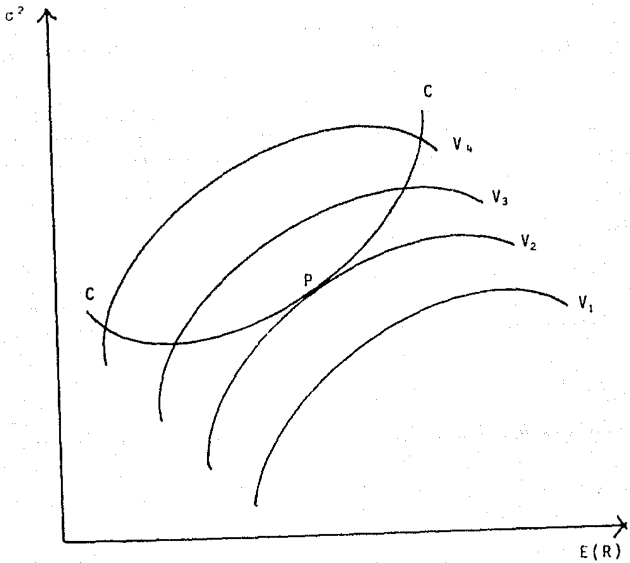


Figura 2.20

El punto de tangencia entre las dos curvas será el- que marque el optimo del inversionista, aquel en que ele-- vara al máximo su utilidad esperada al invertir en una cartera optima de acciones que concuerde perfectamente con -- sus preferencias individuales.

2.11 LA DIVERSIFICACION Y SUS EFECTOS

Intuitivamente podemos apreciar que la divesifica-- ción de la cartera se basa en el proverbio: "no coloques-- todos los huevos en una sóla canasta", formalmente encon-- tramos una objeción, se ignora la correlación entre los -- rendimientos de las acciones. Podemos disminuir el riesgo- repartiéndolo en un número de sucesos independientes en el sentido de que si un suceso falla, el otro no tiene necesariamente que fallar.

Si la posibilidad de volcar una cesta de huevos y - de perder su contenido es 1/5, repartiendo los huevos en - dos cestos, la probabilidad de una pérdida total se reduce a un 1/5. 1/5 = 1/25. Pero ésto sólo ocurre si suponemos - que el destino de las dos cestas es independiente.

La diversificación de la cartera difiere de este tipo de diversificación de la vida diaria, para el modelo de Markowitz la diversificación eficiente involucra combinar- activos que muestran una correlación imperfecta entre sus- rendimientos, que a la vez que disminuye el riesgo no afecta el rendimiento.

Examinaremos cómo afecta la diversificación de las- acciones al riesgo de la cartera. Analizaremos primero el- caso en que los rendimientos de cada activo son indepen--- dientes uno del otro y en que las proporciones invertidas-en cada activo son iguales. Sean r1, r2, r3, ..., rn rendimientos independientes cada uno con varianza V1, V2,- V3, ... Vn. Como hemos supuesto que las proporciones en cada activo son iguales, lo que nos interesa obtener, - tanto en el caso de rendimientos independientes como en el caso de rendimientos no independientes; será la varianza - del promedio de los n rendimientos. Supondremos también en una primera aproximación que ninguno de ellos excede algún límite superior V*, entonces $V_1 < V^*, \ldots\ldots, V_n < V^*$ Sea S la suma de las varianzas de los n rendimientos, tendremos entonces

$$VAR\ (S) = V_1 + V_2 + \ldots\ldots\ldots + V_n$$

estó no será más grandes que:

$$V^* + V^* + V^* + \ldots\ldots\ldots + V^* = nV^*$$

Así

$$VAR\ (S) \leq nV^*$$

la varianza de W es:

$$VAR\ (W) = \frac{1}{n^2}\ VAR\ (S) \leq \frac{1}{n^2}\ nV^* = \frac{V^*}{n}$$

Donde w es

$$W = \frac{r_1 + r_2 + \ldots\ldots\ldots + r_n}{n} = \frac{S}{n}$$

entonces

$$VAR\ (W) \leq V^*/n$$

De esta expresión observamos que el cociente V^*/n - se aproximará a 0, conforme vayamos haciendo más grande n, como VAR (W) es menor que ese cociente, esta se aproximará- a 0 más rápido (oue el cociente), conforme incrementamos n.

Así, si la varianza está dentro de ciertos límites, la varianza de promedios de variables independientes se -- aproxima a 0. Si los rendimientos son independientes y sus varianzas están acotadas, una suficiente diversificación - nos llevaría a una virtual certidumbre de los rendimientos.

Examinemos ahora el caso más real, cuando los rendimientos de las acciones no son independientes.

La varianza del promedio de un futuro número de rendimientos, está relacionado al concepto de promedio de covarianzas.

Definimos al promedio de covarianzas como:

$$PC = \frac{D}{C} = \frac{\text{LA SUMA DE TODAS LAS DISTINTAS COVARIANZAS}}{\text{EL NUMERO DE DISTINTAS COVARIANZAS}}$$

Así, el promedio de covarianzas es igual a:

$$PC = \frac{D}{\frac{n - 1)n}{2}}$$

$$= \frac{2\ D}{n\ (n - 1)}$$

Así, si despejamos D:

$$D = \frac{(n - 1)\ n\ (P\ C\ )}{2}$$

Sabemos que

VAR (S) = SUMA DE LAS VARIANZAS + 2. SUMA DE LAS COVARIANZAS.

El promedio de las n primeras variables, w = S/n, - - tiene varianza igual a:

$$VAR\ (w) = \frac{1}{n}^{2}\ VAR\ (S) = \frac{SUMA\ (VAR)}{n^2} + \frac{2(n - 1)}{n^2}\ n(P\ C)$$

$$= \Sigma\ VAR/n^2 + \frac{n - 1}{n}\ .(PC)$$

La primera parte del miembro derecho es la fórmula de la varianza de w cuando los rendimientos no están correlacionados y la varianza de las acciones tiene una cota superior, hemos visto que este cociente se aproxima a 0 cuando n crece. Analicemos la segunda parte, el cociente n-1/n se aproxima a 1 cuando n crece.

Resumiendo, la varianza de w se aproxima al promedio de covarianzas cuando n crece.

Veamos un ejemplo, sean r1, r2, r3, ..., rn- rendimientos con varianza v cada una, supongamos que la covarianza entre cada uno de los pares formados es 1/2v. El- promedio de covarianzas de dos o más rendimientos es igual a 1/2v. Si n es igual a 100 tendremos:

$$VAR\ (s) = .01\ v + .99\ (1/2\ v).$$
$$= (.505)v$$

Comparemos este resultado con el caso en que los -- rendimientos son independientes: la varianza de w será --- 1/2v si w es el promedio de cien rendimientos independientes, cada uno con varianza de 50v. La varianza de la cartera no independiente es la misma que para el caso de carteras de acciones independientes con varianzas 50 veces más-grande iii. Si nosotros promediamos más rendimientos con - varianzas iguales a 50v, la varianza de w tiende a 0, mientras que la varianza de variables no independientes no bajarán de 1/2v ilustraremos éste mediante la tabla 1.

TABLA 1

No. DE ACCION	VARIANZA CARTERA A	DESVIACION ESTANDAR A	VARIANZA CARTERA B	DESVIACION ESTANDAR B
1	5	2.236	.100	.316
10	.500	.707	.055	.235
25	.250	.500	.052	.228
50	.100	.316	.051	.226
100	.050	.224	.0505	.225
250	.020	.141	.0502	.224
500	.010	.100	.0501	.224
1000	.005	.071	.05005	.224
10000	.0005	.022	.050005	.224

La cartera A está formada por acciones cuyo rendi-- miento son independientes y tienen varianza igual a 5.

La cartera B está formada por acciones cuyo rendi-- miento tiene varianzas iguales a .1 y covarianzas iguales a .05.

2.12 LIQUIDEZ

Al plantear la función objetivo de nuestro modelo, mencionamos que los tres conceptos (cualidades) a tomar en cuenta en una decisión de inversión son:

1. Seguridad en el capital
2. Rendimiento sobre la inversión
3. Liquidez

A lo largo del presente estudio hemos hecho hincapié en los conceptos de riesgo(perdida de seguridad) y rendimiento; porque hemos trabajado sobre ellos y no hemos mencionado a la liquidez? la respuesta es la siguiente consideramos tan importante el concepto de liquidez que hemos tratado de manejarlo implícitamente dentro del modelo, esto es en base a suposiciones que hemos hecho y que trataremos de explicar posteriormente, ya que antes trataremos de entender la importancia del concepto de liquidez dentro de nuestras decisiones de inversión.

La liquidez, en términos económicos, significa facilidad de convertir un bien en dinero en efectivo.

El dinero que un día nos sobraba y que empleamos en una inversión, podemos necesitarlo para un determinado fin en un momento dado. Llegado ese momento, puede ser difícil la venta del bien antes adquirido. Por lo tanto, debe invertirse en bienes cuya conversión a dinero sea lo más fácil y rápida posible. Por ejemplo un certificado de la tesorería resulta un instrumento de inversión sumamente líquido ya que lo podemos vender en cualquier momento.

Es por eso que dentro de los riesgos en la selección de la cartera, encontramos el riesgo de liquidez, expliqué moslo, si comprometemos recursos en activos difíciles de convertir en dinero lo más seguro es que tengamos una pérdida al tratar de efectuar un pago imprevisto, esta pérdida podrá ser debida, por ejemplo, a que tengamos que vender nuestros activos a un precio por debajo de su valor real.

Para efectos del modelado, los requisitos de liquidez, incidirán, en nuestro caso, en las suposiciones que hemos hecho acerca del inversionista y del mercado mexicano de acciones; pero como concesuencia afectarán invariablemente a las utilidades. Un mal cálculo de las necesidades de liquidez puede tener uno de dos efectos:

i) Si estimamos mayor liquidez de la necesaria, sacrificaremos utilidades potenciales.

ii) Si el cálculo subestima el requisito de liquidez, se puede incurrir en pérdidas innecesarias, al tener que vender activos menos líquidos a precios castigados.

Entonces siempre es deseable diversificar la cartera para incluir activos líquidos y poder así afrontar gastos imprevistos, recordemos sin embargo que uno de los supuestos de nuestro modelo, es que la cartera estará compuesta por acciones, "único activo a considerar en el modelo", en vista de ello nos preguntamos, ¿son las acciones instrumentos de inversión líquidos?.

Un activo es perfectamente líquido si:

i) El precio al que se puede vender el activo en un momento en particular, siempre iguala el precio al cual puede ser comprado en ese momento.

ii) Cualquier cantidad de ese activo puede ser comprada o vendida a ese precio.

Las acciones, claramente observamos, no son activos perfectamente líquidos, sin embargo al plantear las suposiciones del modelo algunas de ellas nos ayudan a recuperar liquidez para las acciones.

i) Ningún agente económico individual, comprador o vendedor es suficientemente importante para que sus transacciones tengan un efecto apreciable en el comportamiento del modelo.

ii) Los costos de transacción no serán introducidos en el modelo.

iii) Prescindiremos de los impuestos.

No pretendemos en el presente trabajo desarrollar un tratado* sobre liquidez, simplemente y ello debido a la situación económica que prevalece actualmente en el país, consideramos oportuno desarrollar algunas ideas sobre este importante concepto.

Con esto damos por terminado este capítulo, hemos planteado de manera teórica el modelo de Markowitz para la elección de una cartera de inversiones, sin embargo y si--

---

* Encontramos un estudio completo sobre liquidez en la obra clásica de J.M. Keynes. Teoría General de la Ocupación, el interes y el dinero Fondo de Cultura Económica.

guiendo los lineamientos del método científico* que se --práctica hoy en día, todavía nos "queda camino por reco---rrer" antes de poder afirmar algo sobre la eficiencia del-modelo de Markowitz para la inversión en bolsa, no obstan-te ya estamos en condiciones de aplicar esta teoría, ello-será lo que nos ocupe en el siguiente capítulo, probar la-eficiencia del modelo de Markowitz en el mercado mexicano-de valores.

* El método Científico se ocupa de:

a) Planteo de los problemas que presenta la hipótesis.
b) Verificación de la hipótesis.

Los lineamientos del método científico son:

1. Planteo del problema
2. Construcción de un modelo teórico
3. Prueba de hipótesis
4. Conclusiones.

III. ANALISIS EMPIRICO

III. ANALISIS EMPIRICO

3.1 LA BOLSA MEXICANA DE VALORES

. . . . La Bolsa es un consenso de la actuación de todas las empresas cotizadas en este mercado. Es un espejo de la actuación de las empresas cuyos papeles se venden y compran casi diariamente. También es un reflejo de las empresas en un contexto mucho más amplio, dejando ver las tendencias de la industria, el comercio y en general todo el sector productivo de un país. Pero no solo es un reflejo de la economía, más aún, es un indicador que señala el progreso de una nación*.

Es así que una bolsa se conceptua como un centro financiero a donde acuden los empresarios a exponer y ofrecer públicamente sus títulos; en donde los inversionistas los analizan, los valorizan y los adquieren volviéndose de alguna manera parte de la empresa**.

---

* El Inversionista Mexicano

** El Sistema de Libre Empresa y la Bolsa de Valores en México, Jorge Caso Bercht VIII Congreso Nacional de Industriales.

En este inciso comentaremos enforma breve cuales -- son los antecedentes y la situación actual del mercado de- valores en México, para dar una idea sobre el marco de operaciones en el cual trataremos de aplicar el modelo descrito en el capítulo anterior.

Aunque la Bolsa Mexicana de Valores fue fundada a - fines del siglo pasado, razones de peso explican porque no existió como una verdadera alternativa sino hasta finales- de la década de los 70's.

El mercado tal y como lo conocemos hoy en día ini-- ció su despegue en el año de 1964, las condiciones económicas que prevalecian en ese año son claramente distintas a- la situación actual, 18 años después; veamos que nos dice- el Banco de México en su informe anual:

"Durante 1964, a causa del considerable crecimiento del volúmen de ahorro interno, así como de los créditos -- del exterior destinados a financiar la mayor inversión pública y privada, el sistema bancario aumento considerablemente su captación de recursos y el sector de empresas y-- particulares incrementó en forma signigicativa sus activos monetarios y financieros.

"El aumento del ingreso y del ahorro nacionales; la creciente confianza del público en el sistema bancario propiciada por la larga estabilidad del peso; la expansión de servicios bancarios en poblaciones carentes de los mismos, y el perfeccionamiento de los sistemas de captación de ahorro para cubrir los más amplios sectores de la población,- permitieron a las instituciones de crédito absorber recursos en magnitudes considerables durante el año.

"El saldo favorable de la balanza de pagos y la expansión de los créditos e inversiones principalmente de la banca privada, contribuyeron al importante aumento de la - liquidez dentro del país."

En sintesis, las condiciones económicas de 1964 --- erán de pleno desarrollo, sin embargo este auge tomo por - sorpresa al sistema de operaciones bursatiles además de -- que lo encontró con una reglamentación obsoleta que no --- constituía un soporte legal adecuado.

Es así como en 1975 se promulga la Ley del Mercado- de Valores, además de que nacen los agentes de valores institucionales, conocidos como Casas de Bolsa.

El mercado de valores con una base más sólida permanece estable hasta 1968, año en el cual la Bolsa Mexicana- de Valores logra alcanzar finalmente un verdadero despegue en sus operaciones.

Al finalizar 1978 y comenzar 1979, las perspectivas del mercado erán halagüeñas, todos los indicadores marca - ban la recuperación económica. La crisis postdevaluatoria- de fines de 1976 y 1977 había sido superada, entre los factores más importantes que coadyuvaron a este desarrollo podemos citar:

1. Restauración de la confianza en cuanto a la estabilidad política y económica del;país.

2. Aumento tanto en las exportaciones de petróleo - como de las reservas probadas de hidrocarburos-- en el país.

3. Liquidez abundante entre los inversionistas, con participación cada vez mayor del ahorrador de -- provincia.

4. El mercado se encontraba más sólido al darle por parte de las autoridades hacendarias del país un mayor impulso a la Ley del Mercado de Valores, - así como, al generar un mayor dinámismo en las - funciones y actividades de la Comisión Nacional- de Valores.

5. Se canalizaron a través de la Bolsa nuevos ins-- trumentos de inversión tales como Certificados - de la Tesorería y Petrobonos.

Sin embargo a pesar de las anteriores causas la --- "burbuja" se revienta, demostrando que existían en ese momento estructuras endebles en el Mercado Méxicano de Valores.

Después de aquel histórico mes de mayo de 1979 la -- Bolsa tres años después, no ha podido salir del letargo en que cayó, encontrándose todavía hoy múltiples deficiencias en su desarrollo.

Situémonos en 1982, año de dos devaluaciones, de la estatización de la banca y el control generalizado de cambios; el análisis de cada una de las anteriores medidas está fuera de los límites del presente estudio, simplemente- analizaremos a la luz de la nueva estructura financiera de México la situación actual y perspectivas del mercado de - valores.

Existen infinidad de criterios para analizar los mer cados de valores, sin embargo hoy más que nunca es válido- el lema "Investigar antes de invertir", no obstante esta-- investigación debe de ser flexible y ajustarse a la situa- ción por la que atraviesa un país. Como lo señala la teo-- ría, la bolsa debe de reflejar y representar la marcha de- un país. Creemos que se deben de olvidar conceptos que aun que son meritorios, no son parámetros lo suficientemente- válidos para que enuna determinada situación influyan en - una decision de inversión; citemos un ejemplo, en México - la "inversión" bancaria ha sido la forma tradicional de - las inversiones, actualmente las tasas de interés banca--- rias no pueden proteger el dinero contra la inflación, así una buena opción para buscar altos rendimientos es la bol- sa, sin embargo, creemos que en el presente existen indica dores de decisión más importantes que las tasas de interés, por ejemplo, la deuda en moneda extranjera de las empresas, si realizan o no actividades prioritarias que le den acceso a divisas del tipo preferencial, si su producto está bajo- control de precios, etc.

En base a estos factores, al acostumbrado y concien te análisis de los estados financieros de las empresas y a las predicciones referidas a los rendimientos y riesgos -- que se hagan de ellas, concluiremos en cuales de estas es- conveniente invertir. Recordemos además, que la inversión en bolsa es una inversión a largo plazo.

Claramente indentificamos así las tres fases para - la selección de la cartera, que el caso particular de su - aplicación al Mercado Mexicano de Valores toma especial im portancia en su primera y segunda fase, o sea, en el análi sis tanto de los valores como de la cartera.

El presente estudio demuestra que es posible tomar-una decisión de inversión en la Bolsa Mexicana de Valores utilizando el modelo matemático de selección de cartera propuesto por Harry M. Markowitz.

3.2 DATOS

Hasta este momento hemos planteado teóricamente el modelo de Markowitz, además de que hemos descrito el marco de operaciones donde lo aplicaremos, el siguiente paso es el desarrollo empírico del mismo, para ello necesitaremos de una colección de datos.

La selección de la muestra la haremos de acuerdo a las preguntas que desde un inicio nos planteamos; hemos dado respuestas a las mismas con la teoría, trataremos ahora de responderlas en la práctica.

En vista de que el número de acciones inscritas en bolsa es bastante alto decidimos trabajar con 42 acciones, esta selección se hizo conforme a dos criterios.

1. Sean representativas de un sector industrial

2. Sean bursatiles.

Las 42 acciones seleccionadas para nuestro análisis fueron emitidas por:

1. Alcan Aluminio, S.A. de C.V.

2. Anderson Clayton and Co., S.A. de C.V.

3. Apasco, S.A.

4. Aurrerá, S.A.

5. Celanese Mexicana, S.A.

6. Cementos Guadalajara, S.A.

7. Cementos Mexicanos, S.A.

8. Cervecería Moctezuma, S.A.

9. Compañía Hulera Euzkadi, S.A.

10. Compañía Industrial San Cristobal, S.A.

11. Cydsa, S.A.

12. Desc. Sociedad de Fomento Industrial, S.A. de C.V.

13. Eaton Manufacturera, S.A.

14. El Palacio de Hierro, S.A.

15. El Puerto de Liverpool, S.A.

16. Empresas La Moderna, S.A. de C.V.

17. Empresas Tolteca de México, S.A. de C.V.

18. Fábricas de Papel Loreto y Peña Pobre, S.A.

19. Frisco, S.A. de C.V.

20. Grupo Condumex, S.A. de C.V.

21. Grupo Industrial Alfa, S.A. de C.V.

22. Grupo Industrial Bimbo, S.A. de C.V.

23. Grupo Industrial Minera México, S.A. de C.V.

24. Grupo Pliana, S.A.

25. Grupo Sidek, S.A.

26. Grupo Synkro, S.A.

27. Industrias C.H., S.A.

28. Industrias Luismin, S.A. de C.V.

29. Industrias Nacobre, S.A. de C.V.

30. Industrias Peñoles, S.A. de C.V.

31. Industrias Resistol, S.A.

32. Kimberly Clark de México, S.A. de C.V.

33. Moresa, S.A.

34. Negromex, S.A.

35. Ponderosa Industrial, S.A.

36. Química Hooker, S.A.

37. Sanborns Hermanos, S.A.

38. Spicer, S.A.

39. Transmisiones y Equipos Mecánicos, S.A.

40. Tubos de Acero de México, S.A.

41. Unión Carbide Mexicana, S.A. de C.V.

42. Valores Industriales, S.A.

Para estimar el rendimiento esperado de cada una de las acciones seleccionadas utilizaremos como datos históricos los rendimientos mensuales desde enero de 1980 hasta diciembre de 1981. Aquí es conveniente hacer notar que las acciónes se cotizan en lotes de 100 acciones como mínimo en general.

Para propósitos de evaluación supondremos que se ejerceran todos los derechos y premios que la sociedad decrete.

En vista de que para el modelo de Markowitz el insumo más importante es el rendimiento, consideramos pertinente desarrollar un ejemplo con algunas de las variables que intervienen en el cálculo del mismo.

La sociedad Puerto de Liverpool, S.A. clave de pizarrón Livepol, que pertenece a la rama comercial tenía un precio de cotización al 30 de noviembre de 1981 de $64.00 y al 31 de diciembre de 1981 de $54.50.

Supongamos que la acción se compró el 30 de noviembre de 1981 y se conservó hasta el 31 de diciembre de 1981, fecha en la cual tomamos la decisión de venderla.

Los derechos y premios que se decretaron durante este período, fueron los siguientes:

El 21 de diciembre de 1981 la sociedad decretó para el ejercicio correspondiente de 1980:

i) Un dividendo en efectivo de $1.25 a la presentación del cupón 28.

ii) Un dividendo en acciones (capitalización) de una acción nueva por cada cuatro antiguas.

La acción tiene un valor nominal de $25.00. Si aplicamos la fórmula (1) con los premios dados por la ecuación (2a) se obtiene un rendimiento del 14.9%, los detalles del cálculo se presentan a continuación:

Datos:

Período	Di	N(Di)	CAPi	N(CAPi)
Dic.-81	1.25	128	.25	128

$$D = \frac{(1.25)\ (128)}{100} = 1.6$$

$$CAP = \frac{(128)\ (.25)}{100} = .32$$

Cálculo:

$$G = (54.5)(.32) = 17.44$$

$$R = \frac{(54.5 - 64) + 17.44 + 1.6}{64} = .149$$

3.3 ANALISIS DE NORMALIDAD.

A lo largo del presente estudio hemos supuesto que-los rendimientos mensuales de las acciones se distribuyen-normal. Hemos dado razones tanto teóricas (la distribución normal queda completamente caracterizada a partir de su media y de su varianza), como empíricas (apoyo de los estudios de J. Tobin y de M. Blume), sustentando la normalidad de los rendimientos; agreguemos a las antes expuestas-dos razones más (nuevamente será un teórica y otra empirica) apoyando la normalidad de los rendimientos.

1. Si estamos trabajando sobre un horizonte de tiempo en especial, por ejemplo un mes, podemos suponer que un activo en particular se comercia un número "n" de veces durante este mes, el rendimiento del activo será igual a la-suma de las diferencias entre los "t" diferentes precios* -con su inmediato anterior: si se supone que los cambios en los precios (Pit+1 - Pit) tienen una distribución cuya varianza sea finita, entonces de acuerdo con el Teorema Central de Límite podemos afirmar que la distribución de los-rendimientos para cada activo se aproxima a una normal y-como consecuencia una combinación lineal de estos se dis--tribuira en forma normal.

2. El estudio hecho por Raúl Solis en el Mercado Me

---

*En este párrafo, el término precios incluye dividendos, -premios y ganancias de capital. Para intervalos de tiempo cortos los premios y los dividendos no suceden por lo que -el término precios se refiere estrictamente a esta cantidad.

xicano de Valores, que demuestra que los rendimientos* de las acciones para los períodos 1972 - 1976 y 1977 - 1979 se distribuyen normal.

Las anteriores razones nos permiten soportar con una base mucho más sólida el supuesto de la normalidad para los rendimientos mensuales de las acciones, sin embargo en vista de que las condiciones de mercado son muy dinámicas consideramos oportuno hacer un análisis de normalidad para los rendimientos mensuales de las acciones seleccionadas en el período 1980 - 1981.

El análisis de la normalidad lo haremos mediante las llamadas pruebas de bondad de ajuste, cuya breve descripción iniciamos a continuación.

Las pruebas de bondad de ajuste sirven para medir la compatibilidad que existe entre un conjunto de frecuencias observadas con sus correspondientes frecuencias teóricas.- Dentro de las pruebas de bondad de ajuste es conveniente destacar los siguientes puntos:

1. Datos
2. Suposiciones
3. Hipótesis a probar
4. Estadísticas de prueba
5. Regla de decisión

Analicemos cada uno de ellos:

*Solís R., "Rendimientos y eficiencia en el Mercado Mexicano de Valores", 1980, I. T. A. M.

1. Datos.- Los datos consisten de N observaciones -- de una variable aleatoria X, las cuales son agrupadas en - "c" clases.

Dentro de nuestra muestra tenemos 24 observaciones-- de la variable aleatoria "rendimientos mensuales", estas - 24 observaciones las hemos agrupado en 5 clases, 4 de ellas de 5 observaciones y una de 4, como se muestra en la si--- guiente tabla:

	Clase	1	2	3	4	5	Total
Frecuencias Observadas		5	5	5	5	4	24

2. Suposiciones.- a) La muestra es una muestra aleatoria
b) La escala de medida es al menos nominal*

Nuestra muestra de datos puede ser medida con una escala de razón, por lo tanto se cumple, tanto que la muestra sea aleatoria como que la escala de medida sea nominal.

3. Hipótesis.- Sea F(x) la verdadera pero desconocida función de distribución de "x" o sea la función de distribución de la muestra y sea F*(x) la función de distribución completamente especificada o sea la función de distribución teórica, asi las hipótesis serán:

* La escala nominal de medida usa números como un medio para separar ciertas propiedades de las observaciones en clases o categorias. La escala de razón es usada cuando la razón entre cualesquiera dos observaciones tiene algún significado.

Ho : $F(x) = F^*(x)$ para toda x
H1 : $F(x) \neq F^*(x)$ para al menos una x

En nuestro caso las hipótesis a probar son:

Ho : La función de distribución de los rendimientos mensuales es normal
H1 : La función de distribución de los rendimientos mensuales no es normal.

4. Estadística de prueba.- Sea Pj* la probabilidad-- de que una observacion aleatoria de x este en la clase j,- bajo la suposición de que $F^*(x)$ es la función de distribución de x. Definamos Ej = Pj*. N, Ej representa el número-- esperado de observaciones en la clase j cuando Ho es verdadera.

La estadística de prueba esta dada por:

$$T = \Sigma \frac{(Oj - Ej)^2}{Ej}$$

5. Regla de decisión.- La distribución aproximada de T es la χ^2 con (c-1) grados de libertad. Si $F^*(x)$ está -- completamente determinada excepto por el número k de parámetros, es necesario estimarlos con un único cambio en la- estadística de prueba, la cual ahora se distribuira como - una χ^2 con (c-1-k) grados de libertad. Asi la región de -- rechazo de tamaño α corresponderá a los valores de T mayores que $\chi^2(1-\alpha)$, siendo el quantil $1-\alpha$ el de una varia-- ble χ^2 con (c-1-k) grados de libertad.

La distribución normal tiene dos parámetros, de los-cuales, en nuestro caso ninguno de los dos se especifica en la hipótesis nula que planteamos, por lo tanto, deberemos de estimarlo antes de que la prueba de bondad de ajuste pueda ser aplicada. Para una mejor comprensión de la prueba, ilustraremos el procedimiento técnico para realizarla con un ejemplo.

La sociedad Celanese Mexicana, S.A. clave de pizarrón Celanes, que pertenece a la rama química, tiene los siguientes rendimientos mensuales, después de ser ordenados en forma ascendente:

-.1805	-.1288	-.1200	-.1195	-.1021	-.0850
-.0695	-.0678	-.0572	-.0530	-.0493	-.0259
-.0212	-.0169	0	0	.0093	.0153
.0400	.0418	.0765	.1073	.2464	.2707

Las hipótesis son:

Ho : La función de distribución de los rendimientos mensuales de Celanese Mexicana es normal.

H1 : La función de distribución de los rendimientos mensuales de Celanese Mexicana no es normal.

1. Dividimos las observaciones en intervalos de longitud finita.

Arbitrariamente escogimos los siguientes intervalos

Intervalo	-.1805 a -.1021	-.1021 -.0530	-.0530 a 0	0 a .0418	.0418 a .2707	total
Número de Observaciones	5	5	5	5	4	24

2. Estimamos μ y σ, utilizando $\overline{X}$ y S como estimadores.

$\overline{X}$ = -.0207

S = .0964

3. Usando los parámetros estimados en 2, calculamos el valor esperado para los grupos de 1.

Cota	$(bj-\overline{X})$ / S=Xp	F(Xp)	Intervalo	pj
-.1805	-1.6576	.05	-.1805	.05
-.1021	-0.8443	.20	-.1805/-.1021	.15
-.0530	-0.3350	.37	-.1021/-.0530	.17
0	0.2147	.59	-.0530/0	.22
.0418	0.6483	.74	0 / .0418	.15
.2705	3.0207	1.00	.418 / .2705	.26

Clase	-.1805	-.1805 a -.1021	-.1021 a -.0530	-.0530 a 0	0 a .0418	.0418 a .2705
Número Esperado	1	4	4	5	4	6
Número Observado	0	5	5	5	5	4

4. Cálculo de la estadística de prueba.- La estadística de prueba para Celanese Mexicana es T = 2.42. Escogemos un tamaño para la región de rechazo de α = .10, entonces el valor de X^2 con 6-1-2 grados de libertad es igual a 6.251. Por lo tanto la hipótesis Ho es aceptada debido a que el valor T=2.42 no está dentro de la región de-

rechazo de tamaño .10 ya que ésta es para valores mayores que 6.251.

Los resultados obtenidos para las 42 acciones seleccionadas se presentan en la tabla dos, donde incluimos la estadística de prueba T, el tamaño α de la región de rechazo, los k grados de libertad y el valor de la distribución χ^2 correspondiente al quantil $1-\alpha$ con k-1-2 grados de libertad; como se apreciará, en algunos casos aumentamos el tamaño de la región de rechazo y en otros los disminuimos, pero en la gran mayoría de las acciones se acepta el supuesto de normalidad para los rendimientos mensuales de las acciones seleccionadas.

T A B L A 2

E M P R E S A	Estadísticas de Prueba (T)	Nivel de Significancia (α)	Grados de Libertad (K)	χ^2 (1 - α). (R - 1 - 2)
Alcan Aluminio, S.A.	11.78	.005	3	12.84
Anderson Clayton, S.A.	15.50	.001	3	16.27
Apasco, S.A.	19.11	.001	3	16.27
Aurrerá, S.A.	12.73	.005	3	12.84
Celanese Mexicana, S.A.	2.42	.25	3	4.10
Cementos Guadalajara, S.A.	52.3	.001	3	16.27
Cementos Mexicanos, S.A.	31.61	.001	3	16.27
Cervecería Moctezuma, S.A.	2.50	.25	4	5.38
Cía. Hulera Euzkadi, S.A.	3.05	.25	4	5.38
Cía. Ind. San Cristobal, S.A.	4.40	.10	3	6.25
Cydsa, S.A.	5.96	.25	4	5.38
Desc. Soc. de Fomento Industrial, S.A. de C.V.	21.61	.001	4	18.47
Eaton Manufacturera, S.A.	12.71	.005	3	12.84
El Palacio de Hierro, S.A.	8.86	.025	3	9.34
El Puerto de Liverpool, S.A.	7.44	.10	4	7.77
Empresas Tolteca de México, S.A.	9.65	.010	3	11.34
Empresas La Moderna, S.A.	4.62	.10	3	6.25
Fábrica de Papel Loreto y Peña Pobre, S.A.	15.26	.001	3	16.27

(continúa)

T A B L A 2

E M P R E S A	Estadísticas de Prueba (T)	Nivel de Significancia (α)	Grados de Libertad (K)	χ^2 (1 - α), (R - 1 - 2)
Frisco, S.A.	2.21	.25	3	4.10
Grupo Condumex, S.A.	2.15	.25	4	5.38
Grupo Industrial Alfa, S.A. de C.V.	1.31	.25	4	5.38
Grupo Industrial Bimbo,S.A. de C.V.	3.59	.25	3	4.10
Grupo Industrial Minera de México, S.A. de C.V.	6.74	.05	3	7.81
Grupo Pliana, S.A.	5.96	.10	3	6.25
Grupo Sidek, S.A.	2.81	.25	3	4.10
Grupo Synkro, S.A.	6.41	.10	4	7.77
Industrias Luismin, S.A. de C.V.	1.75	.25	4	5.38
Industrias C.H., S.A.	4.40	.25	4	5.38
Industrias Nacobre, S.A. de C.V.	5.44	.10	3	6.25
Industrias Peñoles, S.A. de C.V.	13.57	.001	3	16.27
Industrias Resistol, S.A.	2.04	.25	3	4.10
Kimberly Clarck de México, S.A. de C.V.	7.11	.10	4	7.77
Moresa, S.A.	19.67	.001	3	16.27
Negromex, S.A. de C.V.	11.40	.005	3	12.84
Ponderosa Industrial, S.A.	2.07	.25	3	4.10
Química Hooker, S.A.	9.77	.010	3	11.34
Sanborns Hermanos, S.A.	3.83	.25	3	4.10

(Continúa)

T A B L A 2

E M P R E S A	Estadísticas de Prueba (T)	Nivel de Significancia (α)	Grados de Libertad (K)	X^2 (1 - α), (R - 1 - 2)
Spicer, S.A.	19.28	.001	4	18.47
Transmisiones y Equipos Mecánicos, S.A.	5.12	.10	3	6.25
Tubos de Acero de México, S.A.	10.40	.025	4	11.14
Unión Carbide Mexicana, S.A. de C.V.	9.36	.01	3	11.34
Valores Industriales, S.A. de C.V.	102.10	.001	3	16.27

3.4 FORMACION DE CARTERAS

En el capítulo anterior establecimos que para resolver el modelo de Markowitz y generar la frontera eficiente es necesario resolver un problema de optimización no lineal.

El problema a resolver es el siguiente:

$$\text{MIN } X^t VX$$

$$\text{S.A.} \quad \mu X \geq \gamma$$

$$\Sigma Xi = 1$$

$$Xi \geq 0$$

Para resolver este problema existen tres métodos alternativos con los que podemos generar la frontera eficiente que se presenta ante los inversionistas potenciales:

1. Método gráfico

2. Método vía minimización de la función objetivo

3. Método de programación cuadrática.

Cada uno de los anteriores métodos tiene ciertas peculiaridades, lo cual implica que existen ventajas entre el uso del uno y otro, veamos:

1. El Método gráfico, como vimos en el capítulo anterior es muy sencillo de conceptualizar. La gran desventaja al usar este método es que no se puede manejar carteras que incluyan más de cuatro activos debido a la restricción en -

las dimensiones de cualquier gráfica.

2. Método de la minimización de la función objetivo, mediante instrumentos del cálculo diferencial conocidos como multiplicadores de Lagrange. Este método estrictamente no resuelve el problema de optimización presentado, ya que éste (multiplicadores de Lagrange) exige que no se incluyan restricciones en las desigualdades planteadas, en nuestro análisis este tipo de condición está representada por la restricción a), por lo tanto este método no resuelve el problema de optimización planteado.

3. En el método de la programación cuadrática, además de que se pueden incluir "n" activos y desigualdades en las restricciones, sus algoritmos son fácilmente manejados por computadora, por lo que será con este método como resolveremos el problema de optimización planteado por el modelo de Markowitz.

El Banco de México a través de su Unidad de Investigación y Desarrollo elaboró un sistema* computacional que se ajusta a lo planteado en el presente estudio, en vista de ello y dada las facilidades que plantea su utilización daremos una breve descripción del mismo, para después utilizando este sistema como ayuda, iniciemos la formación de carteras y obtengamos, así, los resultados necesarios para probar la eficiencia del uso del modelo de Markowitz en el Mercado Mexicano de Valores .

La información que el sistema requiere es la siguiente:

1. Número de instrumentos

---

*Banco de México, "Sistema para resolver el modelo de cartera de Markowitz" Unidad de Investigación y Desarrollo. Guía de Operación No. 76

2. Número de observaciones por instrumento

3. Observaciones históricas de los rendimientos para cada instrumento

4. Número de veces que se desea resolver el problema (diferentes niveles de rendimiento esperado).

5. Valor mínimo del rendimiento esperado

6. Incremento del rendimiento esperado

7. Cartera inicial

Para entender la forma en que trabaja el sistema anexamos el diagrama de flujo del mismo.

Los resultados que se obtienen son: La solución al modelo de Markowitz, es decir la proporción de capital que se debe invertir en cada instrumento y el valor correspondiente de la función objetivo, o sea, el riesgo de la cartera.

Después de esta breve descripción de el sistema computacional que utilizaremos, estamos en condiciones de operlo.

A continuación presentamos las 12 carteras (y las acciones que las constituyen) que utilizaremos en nuestro análisis:

Cartera 1 : Bienes de Capital
Acción 1: Eaton Manufacturera, S.A.
Acción 2: Tubos de Acero de México, S.A.

Acción 3 : Industrias C.H., S. A.
Acción 4 : Grupo Condumex, S.A.

Cartera 2 : Bienes de Capital
Acción 1 : Eaton Manufacturera, S.A.
Acción 2 : Transmisiones y Equipos Mecánicos, S.A.
Acción 3 : Industrias C.H., S.A.
Acción 4 : Industrias Nacobre, S.A.
Acción 5 : Tubos de Acero de México, S.A.
Acción 6 : Grupo Sidek, S. A.
Acción 7 : Alcan Aluminio, S.A.
Acción 8 : Grupo Industrial Alfa, S.A. de C.V.
Acción 9 : Grupo Condumex, S.A.

Cartera 3 : Bienes de Capital, Intermedios y de Consumo
Acción 1 : Eaton Manufacturera, S.A.
Acción 2 : Industrias C.H., S. A.
Acción 3 : Grupo Industrial Bimbo, S.A.
Acción 4 : Cervecería Moctezuma, S.A.
Acción 5 : Industrias Peñoles, S. A.
Acción 6 : Unión Carbide Mexicana, S.A. de C.V.

Cartera 4 : Industria Extractiva
Acción 1 : Frisco, S.A. de C.V.
Acción 2 : Industrias Luismin, S.A. de C.V.
Acción 3 : Industrias Peñoles, S.A. de C.V.
Acción 4 : Grupo Industrial Minera México, S.A. de C.V.

Cartera 5 : Sector Comercio
Acción 1 : Aurrera, S.A.
Acción 2 : El Palacio de Hierro, S.A.
Acción 3 : El Puerto de Liverpool, S.A.
Acción 4 : Sanborns Hermanos, S.A.

Cartera 6 : Industria Extractiva y Sector Comercio
Acción 1 : El Palacio de Hierro, S.A.
Acción 2 : El Puerto de Liverpool, S.A.
Acción 3 : Sanborns Hermanos, S.A.
Acción 4 : Aurrera, S.A.
Acción 5 : Industrias Luismin, S.A.
Acción 6 : Industrias Peñoles, S.A. de C.V.
Acción 7 : Grupo Industrial Minera México, S. A. de C. V.
Acción 8 : Frisco, S.A. de C.V.

Cartera 7 : Una acción
Acción 1 : Negromex, S.A.

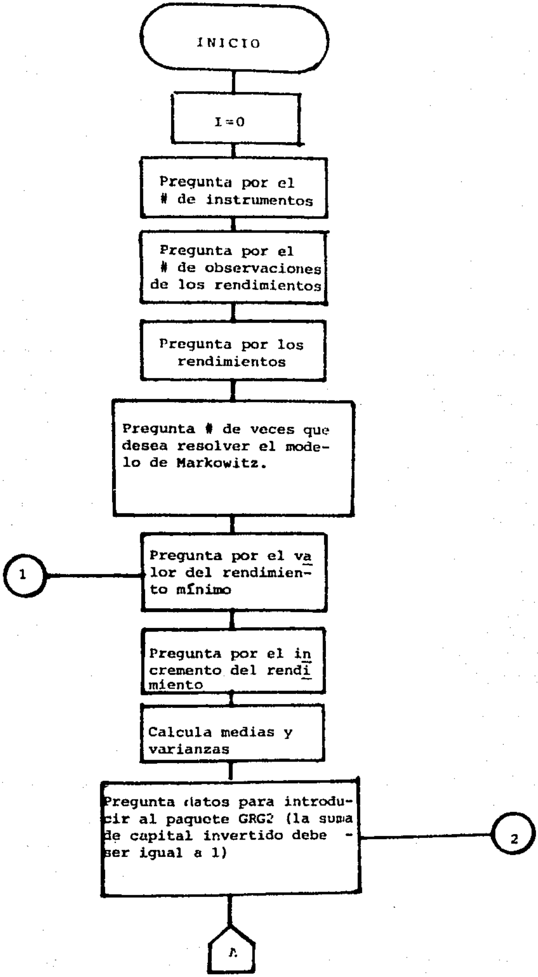
Cartera 8 : Dos acciones
Acción 1 : Negromex, S.A.
Acción 2 : Industrias Peñoles, S.A. de C.V.

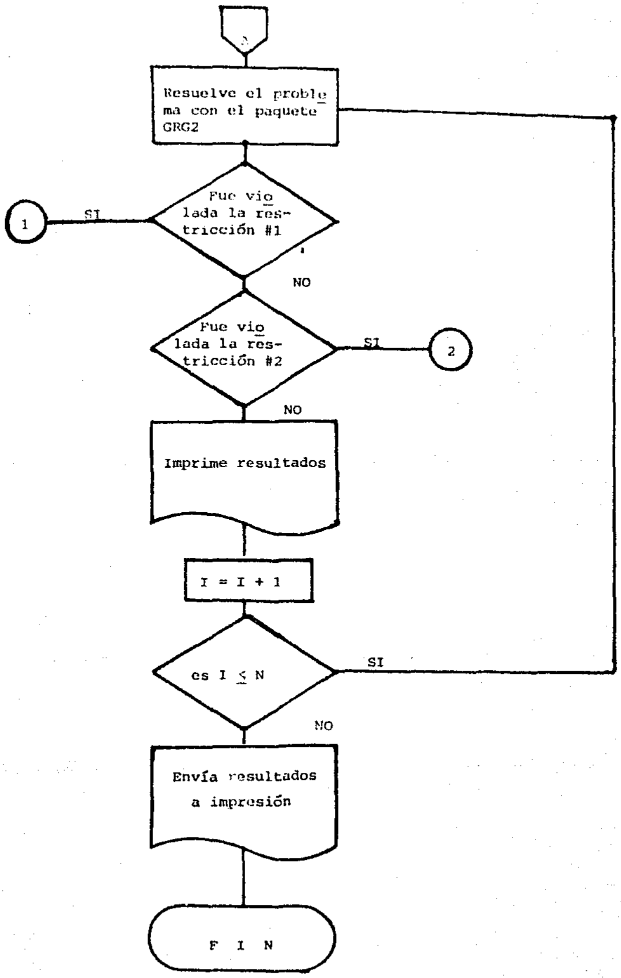
Cartera 9 : Tres acciones
Acción 1 : Negromex, S.A.
Acción 2 : Industrias Peñoles, S.A. de C.V.
Acción 3 : Tubos de Acero de México, S.A.

Cartera 10 : Cuatro acciones
Acción 1 : Negromex, S.A.
Acción 2 : Industrias Peñoles, S.A. de C.V.
Acción 3 : Tubos de Acero de México, S.A.
Acción 4 : Transmisiones y Equipos Mecánicos, S.A.

Cartera 11 : Cinco Acciones
Acción 1 : Negromex, S.A.
Acción 2 : Industrias Peñoles, S.A. de C.V.
Acción 3 : Tubos de Acero de México, S.A.
Acción 4 : Transmisiones y Equipos Mecanicos, S.A.
Acción 5 : Cementos Mexicanos, S.A.

Cartera 12 : Altos Rendimientos
Acción 1 : Cementos Mexicanos, S.A.
Acción 2 : Apasco, S.A.


INICIO
I=0
Pregunta por el # de instrumentos
Pregunta por el # de observaciones de los rendimientos
Pregunta por los rendimientos
Pregunta # de veces que desea resolver el modelo de Markowitz.
1
Pregunta por el valor del rendimiento mínimo
Pregunta por el incremento del rendimiento
Calcula medias y varianzas
Pregunta datos para introducir al paquete GRG2 (la suma de capital invertido debe ser igual a 1)
2
A


A
Resuelve el proble ma con el paquete GRG2
Fue vio lada la res- tricción #1
SI
1
NO
Fue vio lada la res- tricción #2
SI
2
NO
Imprime resultados
I = I + 1
es I ≤ N
SI
NO
Envía resultados a impresión
F I N

3.5 RESULTADOS

Los resultados que se derivan de la implementación del modelo de Markowitz en la Bolsa Mexicana de Valores se pueden dividir en: los directamente relacionados con la forma del conjunto eficiente de posibilidades que enfrenta el inversionista y aquellos que se obtienen a partir de las características de las carteras seleccionadas.

En la tabla 3 se presentan las distintas acciones seleccionadas con sus correspondientes rendimientos esperados y varianzas.

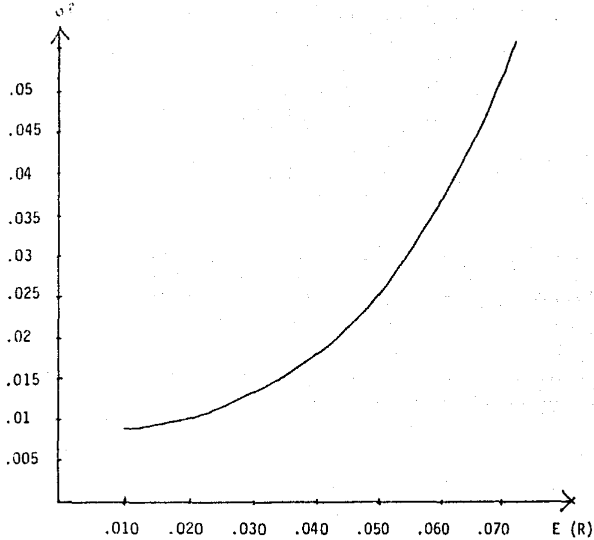
Los resultados finales para las carteras seleccionadas se presentan en las tablas que a continuación anexamos; donde mostramos el contenido de la cartera, el número de acciones que la constituyen, los distintos rendimientos esperados y sus correspondientes varianzas y vectores de ponderaciones.

Dentro de los resultados que se obtienen a partir de la forma del conjunto eficiente de posibilidades de inversión que enfrenta el inversionista, resaltan los siguientes:

1.- La forma del conjunto eficiente se comporta de acuerdo a la descrita en la parte teórica del modelo, la frontera eficiente es una parábola y es convexa con respecto al eje E.

Grafiquemos los rendimientos esperados y las varianzas resultantes para la cartera 1.

Figura 3.1



Es importante hacer notar lo sucedido a partir del rendimiento 7; la restricción a) del modelo de Markowitz establece que la combinación convexa entre rendimientos esperados y ponderaciones tiene que ser mayor o igual que un cierto rendimiento mínimo esperado, es decir, $\Sigma\ xi\mu i \geq \gamma$, esta restricción, en este caso particular, es rota, ya que ninguno de los rendimientos esperados de las cuatro acciones componentes de la cartera 1 alcanza el valor del 7% deseado, así el programa toma automáticamente la acción con mayor rendimiento esperado, asignándole a ésta la totalidad de los recursos a invertir, en consecuencia la varianza de esta cartera será la varianza de los rendimientos esperados de Eaton Manufacturera, S.A. Este mismo tipo de situación se presenta para todas las demás carteras seleccionadas para nuestros análisis, aclararemos esta al comentar los resultados que se obtienen a partir de las características de las carteras.

En general observamos que para las carteras seleccionadas a mayor rendimiento esperado mayor riesgo.

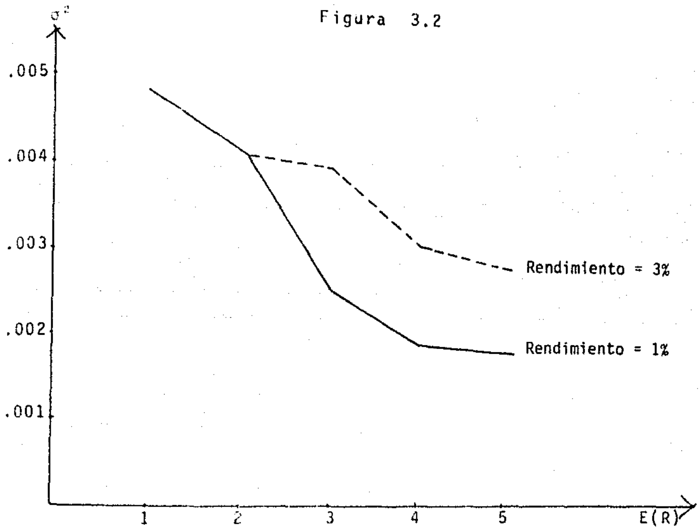
2.- Una hipótesis aparentemente lógica es el suponer que acciones con rendimiento esperado negativo no deberían tener participación en el vector de ponderaciones, sin embargo, esto no sucede para el caso de Tubos de Acero de México, S.A. e Industrias C.H., S.A. ambas dentro de la cartera 1 ya que estas dos acciones tienen rendimiento esperado menor a cero y una contribución positiva dentro del vector de ponderaciones.

Este tipo de "contradicción" aparente se debe al papel que juega la varianza medida en términos relativos con respecto a las demás acciones que se encuentran en la cartera así como la covarianza que existe entre los mismos, aparte del rendimiento esperado, si la correlación entre distintos títulos (aún con rendimientos de signo opuesto) es muy alta, la función objetivo tratará de lograr la máxima diversificación ponderando a cualquiera de ellos en forma relativamente elevada reduciendo a la vez la ponderación de los otros.

Observamos que este mismo tipo de situación se presenta dentro de las carteras 2,3,4,6,9 10, y 11; para todas estas carteras la participación de la acción con rendimiento esperado menor que cero aumenta conforme disminuye el rendimiento esperado deseado.

3.- La diversificación propuesta por Markowitz comprueba la disminución del riesgo hasta llegar a niveles sumamen te bajos, grafiquemos la varianza y el número de acciones-para distintos rendimientos esperados de las carteras 7,8, 9, 10 y 11.

Figura 3.2



Es importante hacer notar que una cartera ideada a --- partir de una diversificación intuitiva (como es la cartera 3), compuesta por emisoras productoras de Bienes de Capital, Bienes Intermedios y Bienes de Consumo tiene una mayor varianza que la de una cartera ideada a partir de la diversificación de Markowitz (cartera 10) a pesar de que la cartera 3 contiene un número mayor de acciones, más aun la varianza de la cartera 10 es todavia mucho menor que la varianza de una cartera constituida únicamente por acciones--

pertenecientes al mismo sector productivo (Bienes de Capi--tal - cartera 1).

	Sin Diversificación	Diversificación Intuitiva	Diversificación de Markowitz
Varianza	.00880779	.00395843	.00208766

Por lo que toca a los resultados que se obtienen a partir - de las características de las carteras seleccionadas sobresalen los siguientes:

1.- Durante los años seleccionados para nuestro análisis (1980 y 1981), la Bolsa Mexicana de Valores, como reflejo de la economía, se anticipa a la crisis que sufre el --- país en 1982, situación que incide en la declinación tanto del Indice de Precios y Cotizaciones como en el volumen operado de transacciones. Es así como los rendimientos de las-acciones (obtenidos éstos a partir de precios, dividendos y premios) se ven seriamente afectados, tan es así que de las 42 acciones seleccionadas, el 26% tiene un rendimiento esperado negativo y el restante 74% tiene un rendimiento esperado menor que la tasa de interés bancaria vigente en esos -- años. Debido a ello, en nuestro análisis, pocos de los rendimientos mínimos esperados se alcanzan. Ello habla de la - bondad del modelo de Markowitz, ya que se ajusta a la realidad de que invertir en bolsa dentro del período 1980-1981 - no hubiese sido la mejor opción.

2.- Refiriendonos exclusivamente al contenido de las carteras seleccionadas encontramos:

a) La varianza de la cartera compuesta por acciones pertenecientes a la Industria Extractiva (cartera 4) es mayor que la varianza de la cartera 1 (Bienes de Capital) y mucho mayor que la varianza de la cartera 5 (Sector Comercio), lo cual se ajusta a la realidad de que la Industria Extractiva es una actividad productiva mucho mas riesgosa que la producción de Bienes de Capital y esta a su vez es mas riesgosa que el comercio.

b) La diversificación intuitiva se fundamenta en la combinación de sectores o actividades y no en el número de acciones componentes de una cartera, como sucederia en la diversificación de Markowitz.

La cartera 2 (Bienes de Capital) a pesar de estar compuesta por nueve acciones tiene una varianza muy parecida a la de la cartera 1 (Bienes de Capital), compuesta esta por solo cuatro acciones, mientras que la cartera 3 (Bienes de Capital, Intermedios y de Consumo) compuesta por 6 acciones tiene una varianza menor que la de la cartera 2 compuesta por nueve acciones.

c) La cartera 12 (Altos Rendimientos) alcanza un rendimiento del 9%. Para obtener rendimientos mas altos será necesario esperar épocas de bonanza dentro de la Bolsa Mexicana de Valores. Recordemos que el modelo de Markowitz es de minimización del riesgo, es decir en épocas en que la inversión en la Bolsa Mexicana de Valores sea atractiva habrá de manera natural altos rendimientos, el modelo de Markowitz asegurará altos rendimientos con un riesgo mínimo.

TABLA 3

EMISORA	RENDIMIENTO ESPERADO	VARIANZA
Alcan Aluminio, S.A. de C.V.	.0275	.0150
Anderson Clayton and Co., S.A DE C.V.	.01727	.0199
Apasco, S.A.	.0904	.1633
Aurrerá, S.A.	.0573	.0652
Celanese Mexicana, S.A.	-.0120	.0111
Cementos Guadalajara, S.A.	.1001	.2115
Cementos Mexicanos, S.A.	.0774	.0884
Cervecería Moctuzuma, S.A.	-.0047	.0192
Compañía Hulera Euzkadi, S.A.	.0086	.0133
Compañía Industrial San Cristóbal, S.A.	-.0210	.0310
Cydsa, S.A.	-.0041	.0217
Desc. Sociedad de Fomento Indus-- trial, S.A. de C.V.	-.0412	.0182
Eaton Manufacturera, S.A.	.0645	.0553
El Palacio de Hierro, S.A.	.0231	.0356
El Puerto de Liverpool, S.A.	.0018	.0100
Empresas Tolteca de México, S.A.	.0520	.0202
Empresas La Moderna, S.A.	-.026	.0163
Fábricas de Papel Loreto y Peña - Pobre, S.A.	.021	.0794
Frisco, S.A. de C.V.	-.033	.0264
Grupo Condumex, S.A. de C.V.	.030	.0181
Grupo Industrial Alfa, S.A. de C.V.	-.065	.0136
Grupo Industrial Bimbo, S.A. de - C.V.	.0469	.0050
Grupo Industrial Minera México, -- S.A. de C.V.	-.015	.0273
Grupo Pliana, S.A.	.0109	.0280
Grupo Saek, S.A.	.0380	.0341
Grupo Synkro, S.A.	.0527	.0210
Industrias CH., S.A.	-.02427	.0201
Industrias Luismin, S.A. de C.V.	.0255	.0159
Industrias Nacobre, S.A. de C.V.	.0181	.0169
Industrias Peñoles, S.A. de C.V.	.0309	.1043
Industrias Resistol, S.A.	.0232	.0079
Kymberly Klarck de México, S.A. de C.V.	.0049	.0399
Muresa, S.A.	.0155	.0347
Negromex, S.A.	.0305	.0047
Ponderosa Industrial, S.A.	.0394	.0177

E M I S O R A	RENDIMIENTO ESPERADO	VARIANZA
Química Hooker, S.A.	.0633	.0507
Sanborns Hermanos, S.A.	.0415	.0106
Spicer, S.A.	.0169	.0129
Transmisiones y Equipos Mecánicos, S.A.	.018	.0486
Tubos de Acero de México, S.A.	-.0304	.0165
Unión Carbide Mexicana, S.A. de - C.V.	.0043	.0102
Valores Industriales, S.A.	.238	1.013

Número de la cartera: 1

Contenido de la cartera: Bienes de Capital

Número de acciones: 4

RENDIMIENTO ESPERADO	VARIANZA	VECTOR DE PONDERACIONES
1%	.00880779	(.11, .26, .16, .47)
2%	.0108964	(.17, .19, .097, .543)
3%	.0139638	(.234, .11, .031, .625)
4%	.0180404	(.2961, .0068, 0, .6971)
5%	.0267662	(.57, 0, 0, .43)
6%	.0444338	(.86, 0, 0, .14)
7%	.0553596	(1, 0, 0, 0)
8%	.0553596	(1, 0, 0, 0)

Número de la cartera: 2

Contenido de la cartera: Bienes de Capital

Número de acciones: 9

RENDIMIENTO ESPERADO	VARIANZA	VECTOR DE PONDERACIONES
1%	.00719169	(.014, .028, .032, .057, .233, 0, .271, .0483, .3167)
2%	.00760078	(.024, .0223, .0000606, .0763, .180, 0, .3516,0,.34574)
3%	.0086336	(.049, 0, 0, .061, .3948, 0, .456, 0, .0392)
4%	.0119929	(.249, 0, 0, 0, 0, 0, .457, 0, .294)
5%	.0231473	(.544, 0, 0, 0, 0, .0287, .335, 0, .0923)
6%	.0428581	(.845, 0, 0, 0, 0, .074, .081, 0, 0)
7%	.0553685	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
8%	.0553685	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)

Número de la cartera: 3

Contenido de la cartera: Bienes de capital, intermedios y de consumo

Número de acciones: 6

RENDIMIENTO ESPERADO	VARIANZA	VECTOR DE PONDERACIONES
1%	.00395843	(.011, 0, .727, .161, .019, .082)
2%	.00395842	(.011, 0, .726, .161, .019, .083)
3%	.00395844	(.012, 0, .724, .159, .019, .086)
4%	.00414268	(.038, 0, .814, .123, .025, 0)
5%	.00683010	(.220, 0, .780, 0, 0, 0)
6%	.0331037	(.757, 0, .243, 0, 0, 0)
7%	.0553596	(1, 0, 0, 0, 0, 0)
8%	.0553596	(1, 0, 0, 0, 0, 0)

Número de la cartera: 4

Contenido de la cartera: Industria Extractiva

Número de acciones: 4

RENDIMIENTO ESPERADO	VARIANZA	VECTOR DE PONDERACIONES
1%	.0117139	(0, .653, .0108, .3362)
2%	.0127868	(0, .7908, .0631, .1461)
3%	.0737910	(0, .1717, .8283, 0)
4%	.104366	(0, 0, 1, 0)
5%	.104366	(0, 0, 1, 0)
6%	.104366	(0, 0, 1, 0)
7%	.104366	(0, 0, 1, 0)
8%	.104366	(0, 0, 1, 0)

Número de la cartera : 5

Contenido de la cartera: Sector Comercio

Número de acciones: 4

RENDIMIENTO ESPERADO	VARIANZA	VECTOR DE PONDERACIONES
1%	.00734538	(.0022, 0, .529, .4688)
2%	.00734538	(.0022, 0, .529, .4688)
3%	.00746373	(.0230, 0, .423, .554)
4%	.00916066	(.10, 0, .11, .79)
5%	.0235732	(.538, 0, 0, .462)
6%	.0652886	(1, 0, 0, 0)
7%	.0652886	(1, 0, 0, 0)
8%	.0652886	(1, 0, 0, 0)

Número de la cartera : 6

Contenido de la cartera: Industria Extractiva y Sector Comercio

Número de acciones: 8

RENDIMIENTO ESPERADO	VARIANZA	VECTOR DE PONDERACIONES
1%	.00471492	(0, .301, .308, .0076, .299, .0069, .0755, 0)
2%	.00471475	(0, .311, .298, .0065, .300, .0072, .0773, 0)
3%	.00515011	(0, .125, .462, .0451, .314, .0139, .040, 0)
4%	.00692702	(0, 0, .635, .126, .218, .021, .0, 0)
5%	.0211883	(0, 0, .501, .499, 0, 0, 0, 0)
6%	.0649548	(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)
7%	.0649548	(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)
8%	.0649548	(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)

Número de la cartera : 7

Contenido de la cartera: Una Acción

Número de acciones : 1

RENDIMIENTO ESPERADO	VARIANZA	VECTOR DE PONDERACIONES
1%	.0047267	1
2%	.0047267	1
3%	.0047267	1
4%	.0047267	1
5%	.0047267	1
6%	.0047267	1
7%	.0047267	1
8%	.0047267	1

Número de la cartera: 8

Contenido de la cartera: Dos Acciones

Número de acciones: 2

RENDIMIENTO ESPERADO	VARIANZA	VECTOR DE PONDERACIONES
1%	.00427504	(.936, .064)
2%	.00427504	(.936, .064)
3%	.00427504	(.936, .064)
4%	.103554	(0, 1)
5%	.103554	(0, 1)
6%	.103554	(0, 1)
7%	.103554	(0, 1)
8%	.103554	(0, 1)

Número de la cartora: 5

Contenido de la cartera: Tres Acciones

Número de acciones : 3

RENDIMIENTO ESPERADO	VARIANZA	VECTOR DE PONDERACIONES
1%	.00254796	(.677, .0599, .2631)
2%	.00271839	(.799, .0609, .1401)
3%	.00416017	(.9279, .0631, .009)
4%	.103555	(.00009, .99991, 0)
5%	.103555	(.00009, .99991, 0)
6%	.103555	(.00009, .99991, 0)
7%	.103555	(.00009, .99991, 0)
8%	.103555	(.00009, .99991, 0)

Número de la cartera: 10

Contenido de la cartera: Cuatro Acciones

Número de acciones: 4

RENDIMIENTO ESPERADO	VARIANZA	VECTOR DE PONDERACIONES
1%	.00208766	(.621, .0542, .233, .0918)
2%	.00218092	(.676, .0545, .171, .0985)
3%	.00344685	(.849, .0572, 0, .0938)
4%	.103554	(0, 1, 0, 0)
5%	.103554	(0, 1, 0, 0)
6%	.103554	(0, 1, 0, 0)
7%	.103554	(0, 1, 0, 0)
8%	.103554	(0, 1, 0, 0)

Número de la cartera: 11

Contenido de la cartera: Cinco Acciones

Número de acciones: 5

RENDIMIENTO ESPERADO	VARIANZA	VECTOR DE PONDERACIONES
1%	.00208767	(.621, .0545, .233, .0915, 0)
2%	.00217616	(.670, .05, .177, .0961, .0069)
3%	.00307585	(.757, .00169, .0609, .104, .07641)
4%	.00609688	(.718, 0, 0, .0716, .2104)
5%	.0165454	(.576, 0, 0, .00731, .41669)
6%	.0352591	(.371, 0, 0, 0, .629)
7%	.0625757	(.158,0, 0, 0, .842)
8%	.088467	(0, 0, 0, 0, 1)

Número de la cartera: 12

Contenido de la cartera: Altos Rendimientos

Número de acciones: 2

RENDIMIENTO ESPERADO	VARIANZA	VECTOR DE PONDERACIONES
1%	.0590371	(.651, .349)
2%	.0590371	(.651, .349)
3%	.0590371	(.651, .349)
4%	.0590371	(.651, .349)
5%	.0590371	(.651, .349)
6%	.0590371	(.651, .349)
7%	.0590371	(.651, .349)
8%	.0590371	(.651, .349)
9%	.0790591	(.364, .636)
10%	.162025	(0, 1)

IV. EXTENSIONES DEL MODELO DE MARKOWITZ

IV. EXTENSIONES DEL MODELO DE MARKOWITZ

Si un Inversionista explora todas las oportunidades-de inversión encontrará que la oportunidades de dar y pedir prestado existen.

Dos naturales extensiones del modelo de Markowitz --son:

1. Considerar la construcción de carteras que incluyan activos libres de riesgo.

2. Elaborar carteras constituídas con fondos prestados.

Hasta este momento la frontera eficiente se ha generado considerando tan sólo las combinaciones de títulos con riesgo que absorven un presupuesto determinado. Si suponemos ahora que todo o parte del presupuesto puede invertirse en títulos libres de riesgo con rendimientos positivos, se alterarán los conjuntos factible y eficiente.

Invertir en activos libres de riesgo es equivalente - a prestar dinero. Por ejemplo, si invertimos en Certificados de la Tesorería, lo que estamos haciendo, es prestar -- nuestro dinero al Gobierno Federal; lo mismo sucede con el papel comercial, solamente que esta vez estamos prestando-- nuestro dinero a una empresa privada.

Supongamos que tenemos dos valores, uno libre de --- riesgo y el otro una combinación de acciones riesgosas y -- sean E (R_1) y $E(Rp)$ sus rendimientos esperados y $\sigma^2(R_1)$ y -- $\sigma^2(Rp)$ sus consecuentes varianzas. Si invertimos 1-X en- el título libre de riesgo y X en la combinación de acciones riesgosas, el rendimiento esperado de la cartera será

$$E\ (Rc) = (1 - X)\ E\ (R_1) + XE\ (Rp) \qquad (15)$$

y la varianza será

$$(Rc) = (1-X)^2\sigma^2(R_1) + 2X(1-X)\sigma(R_1)\,\sigma(Rp)\,\rho(R_1, Rp)$$
$$+ X_2^2\ \sigma^2(Rp)$$

Como R1 es un título libre de riesgo $\sigma^2(R_1) = 0$, así

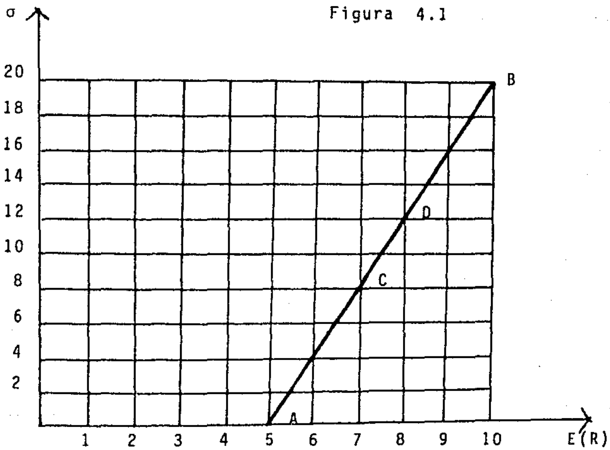
$$\sigma^2(Rc) = (1-X)^2.0 + 2X\ (1-X)\ 0\ \sigma(Rp)\,\rho(R_1 Rp)$$
$$+ X^2\ \sigma^2(Rp)$$
$$= X^2\ \sigma^2(Rp) \qquad (16)$$

Consideremos el siguiente ejemplo:

	Título A (Certificado de la Tesorería)	Título B (Cartera de Acciones riesgosas)	Cartera C	Cartera D
Proporción invertida en A (XA)	1.0	0.0	.6	.4
Proporción invertida en B (XB)	0.0	1.0	.4	.6
Rendimiento Esperado	5.0%	10.0%	7.0%	8.0%
Desviación Estándar del Rendimiento	0.0	20.0	8.0	12.0

Las carteras A,B,C y D son graficadas en la figura - 4.1 Cada punto representa el rendimiento esperado y el --- riesgo* (desviación estándar) de una cartera alternativa. - Como el riesgo y la desviación estándar son proporcionales- a la cantidad invertida, los puntos C y D están sobre la lí nea recta que conecta A y B. Esta relación es válida en ge- neral: Para cualquier combinación (cartera) de préstamos -- (títulos libres de riesgo) A con acciones riesgosas B, el in versionista puede obtener las combinaciones riesgo-rendi--- miento conectando con una línea recta los puntos A y B como se muestra en la figura 4.1

Figura 4.1



---

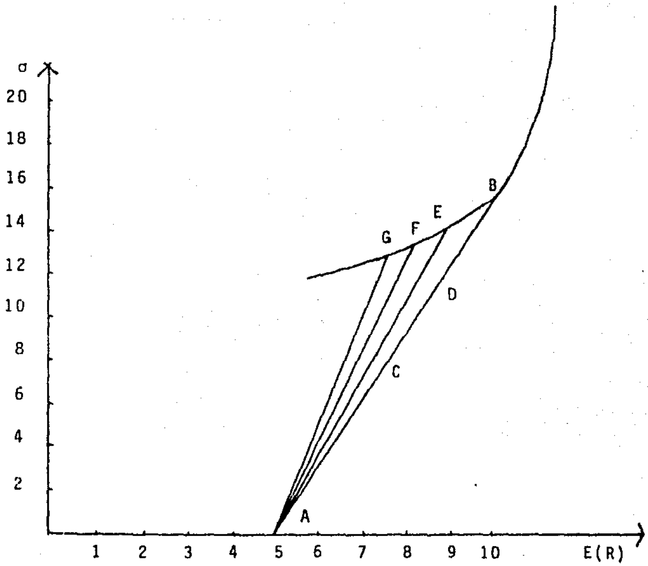
* En este capítulo utilizaremos como medida del riesgo a la desviación estándar unicamente haremos la observación de- que si expresáramos las carteras por su varianza en lugar de por sus desviaciones estándares los puntos A y B esta- rían conectados por una curva y no por una recta.

Consideremos los desplazamientos a partir del punto-B, a medida que vamos alterando parcialmente la cartera a--base de eliminar la combinación con riesgo e incrementar la posesión de título sin riesgo, se reducirá la desviación estándar y el rendimiento esperado.

En la figura 4.2 las carteras entre A y la cartera -eficiente (punto C, por ejemplo) representa a las combinaciones que contienen tanto a títulos libres de riesgo como-a títulos riesgosos. Los puntos sobre esta recta son factibles, dominan a todas las combinaciones a la izquierda y por encima (noroeste) de la recta. Por lo tanto esta recta forma parte del nuevo conjunto eficiente.

La recta representada en la figura 4.2 no es solo --una recta de combinaciones; en realidad existe una familia-de rectas que podrían dibujarse a partir del punto A. En la figura 4.2 también está representada esta familia. Como consideramos las rectas miembros posibles del conjunto eficiente, vemos que la situada más a la derecha domina las otras. Cada uno de los puntos E F y G son factibles, por lo tanto-cada una de las rectas que se conecta con el título A libre de riesgo es factible. La mejor recta es la que une el punto A con el B, en general, dominará aquella cartera que este sobre la curva original de oportunidades de inversión --donde una recta a partir del punto A sea tangente a la curva W.

Figura 4.2



Hasta este punto al estudiar la composición óptima - de una cartera hemos empleado una cifra presupuestaria fija y elegido las diversas combinaciones de títulos como si estuvieramos limitados en nuestro gasto a esta cifra. Ahora consideremos el efecto de ampliar la cartera mediante un -- endeudamiento del inversionista.

Consideremos la gráfica 4.2, Sharpe* ha establecido

---

*Sharpe W. "Capital Asset Prices: A. Tehory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk", Journal of Finance (Septiembre 1964).

que es posible tener carteras eficientes sobre la línea -- A, B más alla de el punto de tangencia, simplemente supo--- niendo que le es permisible al inversionista obtener prestamos.

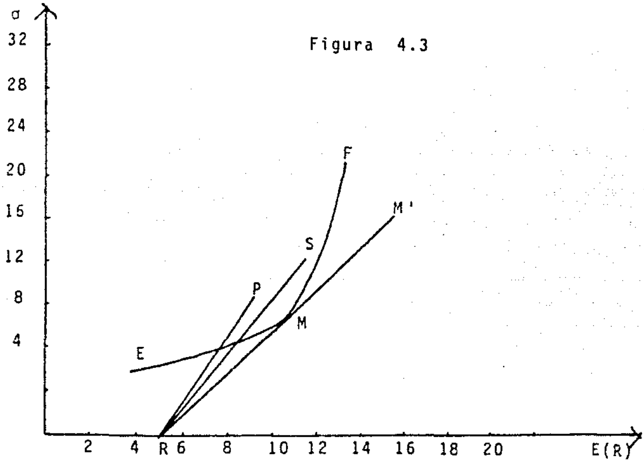
Veamos un ejemplo: Supóngase que invertimos $1000.00 en una cartera M de acciones riesgosas, las cuales pueden-- producir $1000.00 con una probabilidad de .5 o $1200.00 también con una probabilidad de .5. El rendimiento esperado y la desviación estándar del rendimiento son 10% y 10% respectivamente. Si ahora un inversionista pide prestado a una tasa de interés del 5% y compra una segunda cartera de acciones M', el inversionista tendrá en este caso probabilidades de .5 de obtener $950.00 y $1350.00 sobre sus originales -- $1000.00 esto dependiendo del éxito de la cartera M', veamos:

	Alternativas	
	Mala	Buena
Cantidad original a invertir	$ 1000.0	$ 1000.0
Préstamo al 5%	1000.0	1000.0
Total invertido en M'	2000.0	2000.0
Rendimiento sobre la cartera M'	2000.0	2400.0
Principal a pagar	1000.0	1000.0
Rendimiento neto sobre la cantidad invertida	950.0	1350.0
Probabilidad de realización	.5	.5

El rendimiento sobre la cartera M' apalancada es del 15% mientras que la desviación estándar es del 20%. Estos - resultados se muestran dentro de la figura 4.3 como las carteras M y M'.

Sin embargo, como en el caso de la concesión de créditos, existen varios planes de inversión, cuando el interés al que se pueden conseguir sus fondos es igual al -- que rige en los préstamos concedidos, el plan dominante- será el mismo qué cuando solo se podian conceder présta-- mos, recta RMM'.

Figura 4.3



Las carteras que pueden ser creadas con el titulo -- R y las acciones riesgosas P y S, son dominadas por la - cartera RMM', lo mismo sucede para los carteras eficientes- E y F.

La recta RMM' se le conoce como la recta del mercado de capitales.

Los inversionistas que son adversos al riesgo seleccionaran una cartera a lo largo del segmento RM y colocarán parte de su dinero en un titulo libre de riesgo y parte en una cartera riesgosa M. Otros inversionistas que son más --

atrevidos tenorán sus carteras a lo largo del segmento M y-M', pidiendo prestados fondos y colocando su capital original más los fondos obtenido en préstamos en la cartera M. - Los inversionistas restantes colocarán la totalidad de sus-fondos en la cartera M. Asi para el caso de conseción de -- préstamos y apalancamiento la localización de la cartera M constituye la solución al problema de la selección de la -- cartera. Como existe una única cartera riesgosa que es óptima para todos los inversionistas, esta debe de ser la cartera del mercado (ésta es aquella que incluye todas las acciones).

Describamos ahora la línea del mercado de capitales-en términos matemáticos. La desviación estándar de una cartera con títulos libres de riesgo y acciones riesgosas de - acuerdo a la ecuación(16)es:

$$\sigma(Rc) = X\ \sigma(Rp)$$

Despejando X

$$X = \frac{\sigma(Rc)}{\sigma(Rp)}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (15), obtenemos:

$$E(Rc) = (1- \frac{\sigma(Rc)}{\sigma(Rp)}).\ E(R_1) + \frac{\sigma(Rc)}{\sigma(Rp)}\ E(Rp)$$

Sabemos además que R1 es un rendimiento cierto por - lo que E(R1)= R1, así rearreglando términos:

$$E(Rc) = R_1 + \left(\frac{E(Rp) - R_1}{\sigma(Rp)} \right) \sigma\ (Rc) \qquad (17)$$

De esta forma hemos expresado la Línea de el mercado de capitales en términos de la tasa (libre de riesgo) de interés y de el rendimiento de la cartera de acciones riesgosas (cartera del mercado).

La ecuación (17) es una línea recta. La pendiente de la recta es el precio del riesgo, y nos dice el rendimiento esperado adicional por cada unidad de riesgo adicional.

En la figura 4.4 la tasa pura de interés es del 4%.- El rendimiento esperado de la cartera M es del 10% y su desviación estándar es del 12%. Un inversionista que escoge -- esta cartera obtendrá una recompensa del 6%, manteniendo -- una desviación estándar del 12%. La pendiente de la recta - es del 5%. En otras palabras cada unidad adicional del riesgo es rencompensada con la mitad de una unidad de rendimiento esperado.

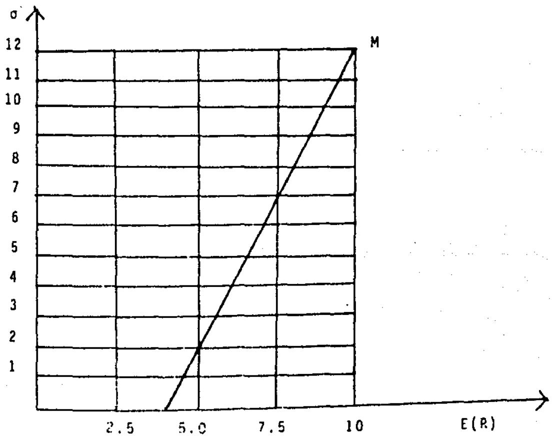


Figura 4.4

En el modelo de Markowitz-Sharpe las necesidades y gustos de los inversionistas determinarán únicamente la cantidad a dar o pedir en préstamo. El hecho de que esta elección sea independiente de la combinación óptima de acciones riesgosas es llamado el Teorema de la Separación.

V. CONCLUSIONES

V. CONCLUSIONES

Siguiendo el esquema general de la tesis, inicialmente concluiremos acerca de la estructura teórica del modelo de Markowitz, para después tratar de generalizar y concluir sobre su implementación en el Mercado Mexicano de Valores.

Consideramos que las aportaciones más importantes del modelo de Markowitz al campo de la inversión son:

1. Las dos características relevantes de una cartera son-- su rendimiento esperado y su riesgo.

2. Los inversionistas racionales eligirán carteras eficientes.

3. Es teóricamente posible identificar las carteras efi--- cientes por el adecuado análisis de la información que- produce cada acción, dada ésta (la información) por su- rendimiento esperado, su varianza y las interrelaciones entre cada acción.

El concepto de diversificación manejado por Markowitz (uso- de la covarianza) ha probado su eficacia sobre otras técnicas de diversificación, como podrían ser la diversificación intuitiva o la diversificación tomando como referencia los- distintos sectores de la economía.

Una de las deficiencias del modelo de Markowitz es el- volumen de cálculos que hay que realizar, por ejemplo, si - la cartera eficiente la fuéramos a obtener de una lista de- 100 acciones, habría que calcular 100 rendimientos espera--

dos, 100 varianza y 9800 covarianzas.

El modelo de Markowitz es "intemporal" en el sentido-- de que no distingue entre objetivos de inversión a corto y- a largo plazo, siendo que los inversionistas consideran que esta distinción es muy importante.

Aunque para el inversionista particular que no incluya acciones dentro de la composición de su riqueza los resultados a los que llegamos pueden ser de poca utilidad, para -- los fondos de inversiones, casas de bolsa o inclusive empresas con carteras ya establecidas la implementación del modelo de Markowitz sería una importante herramienta en sus decisiones de inversión.

El objetivo de la tesis queda satisfecho, al comprobar la factibilidad de aplicación, más aun, la eficiencia (bajo ciertos supuestos) del modelo de Markowitz en la Bolsa - Mexicana de Valores.

Es evidente que el modelo de Markowitz constituye una- tremenda simplificación del problema de la inversión en la- vida real. Sin embargo, con toda su atractiva simplicidad-- el modelo parece captar los elementos del problema real, -- por lo que independientemente de todas sus deficiencias, la capacidad descriptiva del modelo de Markowitz es necesario- reconocerla.

BIBLIOGRAFIA

B I B L I O G R A F I A

1. ABARCA Roberto y Rodríguez R. La Bolsa de Valores: Evolución Reciente y Perspectivas. Documento de Trabajo N.3. Secretaría de Hacienda y Crédito Público 1980

2. BAUMOL, William J. Teoría Económica y Análisis de Operaciones, Ed. Prentice Hall International, 1980

3. BIERMAN, H. y Smidt, S. Capital Budgetin Decision, Mac-Millan Publishing Co. 1975.

4. BLUME, Marshall Portfolio Theory: A Step Toward Its Practical Aplication, Journal of Business. 1970.

5. BORCH K. The Economics of Uncertainty Princeton University Press. 1968.

6. CASO, Bercht, J. El Mercado de Acciones en México, CEMLA. 1971.

7. CASO, Bercht, J. El Sistema de Libre Empresa y la Bolsa de Valores en México, Bolsa Mexicana de Valores, 1982.

8. CASTELAZO J. Riesgos de las Acciones que se Cotizan en la Bolsa de Valores. Escuela de Actuaría. Universidad Anahuac 1977.

9. CONOVER, William J. Practical Non Parametric Statistics, Wiley International Edition. 1971.

10. ELTON, Edwin J. y Grober, Martin J. Modern Portfolio -- Theory and Investment Analysis, John Wiley Inc.1981

11. FAMA,Eugene F. Foundation of Finance, Basic Books, Inc. 1976

12. FAMA, Eugene F. y Miller, Merton The Theory of Finance, Holt, Rine Hart and Winston, 1972.

13. FAMA, Eugene F. The Behavior of Stock Market Prices, - - Journal of Business, enero 1965.

14. FRANCIS, Jack C. Investments Mc. Graw Hill, 1980

15. GONZALEZ Antonio, Herrera Jaime y Presa Miguel, Teoría de la Cartera y el Mercado de Acciones en México, - Escuela de Economía. Instituto Tecnológico Autónomo de México.

16. HIRSHLEIFER, J. Investment, Interest and Capital, Prentice Hall International, 1970.

17. JEAN, William H. The Analitical Theory of Finance, Holt, Rine Hart And Winston Inc. 1970.

18. JOBSON J. D. y Korkie R. Putting Markowitz Theory to -- Work. The Journal of Portfolio Management, Verano 1981.

19. LATANE,A. y Tuttle, D. Security Analysis and Portfolio Management, The Ronald Press. 1975.

20. LORIE. James H. y Hamilton, Mary T. The Stock Market, - Theories and Evidence, Richard D. Irwin Inc. 1973.

21. MAKIN, H. John. Theory of Money, Driyden Press. 1971.

22. MARKOWITZ, Harry M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, John Wiley Inc. 1959

23. MARKOWITZ, Harry M. Portfolio Selection. Journal of Finance. Marzo 1952.

24. MARKOWITZ, Harry M. Markowitz Revisited, Financial Analyst Journal, Septiembre 1976.

25. MAO, James Quantitative Analysis of Financial Decisions, The Mac. Millan Company. 1969.

26. MARQUEZ.D.C. Javier Carteras de Inversión, Ed. Limusa, 1981.

27. MARTINEZ,Adolfo La Teoría de la Decisión en el Mercado de Valores, Escuela de Actuaría. Universidad Anahuac 1982.

28. MERTON, R. An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier, Journal of Financial and Quantitative Analysis. Septiembre 1972.

29. SHARPE, William F. Investments, Prentice Hill Inc. 1978.

30. SHARPE, William F. Portfolio Theory and Capital Markets, Mc. Graw Hill. 1970

31. SHARPE, William F. Capital Asset Prices: a Theory of - Market Equilibrium Under Conditions of Risk, Journal of Finance. Septiembre 1964.

32. SOLIS, Raúl. Rendimientos y Eficiencia en el Mercado Mexicano de acciones. Instituto Tecnológico Autónomo - de México, octubre 1980.

33. TERREIN, C. y Konzevik, D. La Bolsa Mexicana de Valores en los Ochentas, Examen de la Situación Económica - de México. Banamex

34. TOBIN, J. Liquidity Preference as Behavior Towards Risk, Review of Economic Studies. Febrero 1958.

35. TOBIN, J. Teoría de la Selección de la Cartera. En - - I.E.A. Theory of Interest Rates, Mac Millan Publising Co. 1965.

ANUARIOS E INFORMES

36. ANUARIO Financiero y Bursátil, Bolsa Mexicana de Valo-- res. 1980.

37. ANUARIO Financiero y Bursátil, Bolsa Mexicana de Valo-- res. 1981.

38. BANCO de México Informe Anual. 1981.