UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

AJUSTE DE DATOS POR POLINOMIOS: CON MINIMOS CUADRADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

MARIO EIJI HAYASHI HONDA

México, D. F. 1983

INDICE

INTRODUCCION

Un problema que aparece frecuentemente es el de ajustar datos por medio de polinomios, esto es, si tenemos m valores dados x_i $(i=1, m)$ de una variable real independiente x y a cada valor x_i le corresponde un número real y_i (donde y_i es el valor observado o el valor calculado de alguna función f de variable x), determinar los coeficientes a_j $(j=o,..k)$ del polinomio $P_k(x)$, tal que el polinomio pase lo más "cerca" posible de los puntos (x_i , y_i) [ver fig. 1]. Donde

$$(1). \quad P_k(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k = \sum_{j=o}^{k} a_j x^j$$

y el subíndice k indica el grado del polinomio.

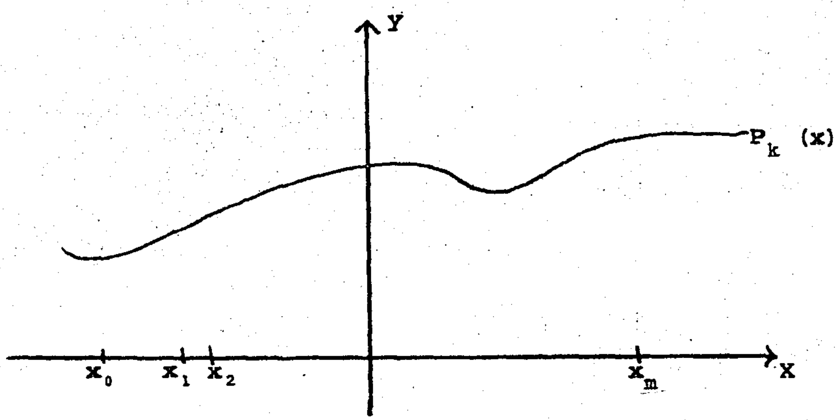

Figura 1.

Que el polinomio $P_k(x)$ pase lo más "cerca" posible, quiere decir que

(2). $r_i = y_i - P_k(x_i)$

sea "pequeño" para cada i $(i=1,\dots m)$. Vemos que las r_i son las componentes de un vector en $\mathbb{R}^m$ y, es deseable que alguna norma de tal vector sea cero. Debido a esto nos vemos en la necesidad de hablar de la norma de un vector.

Es bien conocido que toda norma de un vector satisface las siguientes condiciones:

Sean $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^m$ y $\gamma \in \mathbb{R}$

i) $||\bar{u}|| > o.$ y

$||\bar{u}|| = o$ si y solo si $\bar{u} = o.$

ii) $||\gamma\bar{u}|| = |\gamma|\,||\bar{u}||.$

iii) $||\bar{u}+\bar{v}|| < ||\bar{u}||+||\bar{v}||.$

Si el grado del polinomio es mayor o igual que el número de datos menos uno $(k > m - 1)$, la norma de $\bar{r}$ siempre puede ser hecha cero, ya que, los coeficientes aj se pueden escoger por cualquier método de interpolación polinomial, tal que, $P_k(x)$ pase a través de cada punto (x_i, y_i). El caso interesante y el que veremos de aquí en adelante es, cuando $k < m - 1$, ya que, en la medición de una gran cantidad de fenómenos se tienen mucho más datos que el grado del polinomio que se desea ajustar, en este caso, la norma de $\bar{r}$ no siempre puede ser hecha cero. Por esto, tenemos que elegir la norma de un vector tal que

(3) $||\bar{r}||$ sea mínima.

Los siguientes ejemplos de norma de un vector son los más usuales en el análisis numérico:

(4) La norma Gershgorin

$$||\bar{r}||_1 = \sum_{i=1}^{m} |r_i|$$

(5) La norma Euclidiana

$$||\bar{r}||_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} |r_i|^2\right)^{1/2}$$

(6) La norma Chebyshev

$$||\bar{r}||_\infty = \max |r_i| , \quad i = 1,\dots m .$$

Las figuras 2, 3 y 4 muestran las "bolas" unitarias de las normas Gershgorin, Euclidiana y Chebyshev respectivamente.

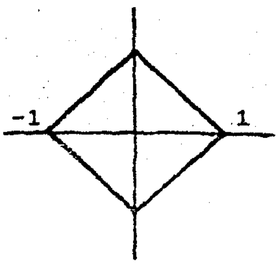

Figura 2

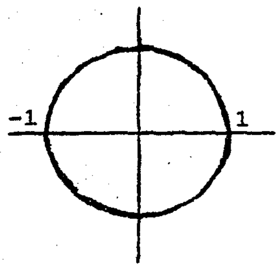

Figura 3

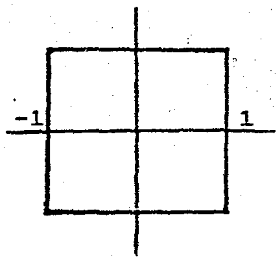

Figura 4

Las normas Euclidiana y Chebychev son las más populares. Su diferencia básica es que mientras la norma Chebychev reduce la desviación máxima al mínimo con el riesgo de incrementar el porcentaje del error cuadrado, la norma Euclidiana permite grandes desviaciones en algunos puntos pero mantiene el porcentaje del error cuadrado al mínimo.

Por lo tanto, la norma Chebychev puede ser usada si los valores y_i pueden ser observados o calculados con una gran exactitud. Generalmente, conocemos muy poco de la distribución de los errores en los datos y se supone que son normales, si esto es válido, la teoría de regresión pide el uso de la norma Euclidiana. Por otra parte, la determinación numérica de los polinomios $P_k(x)$ correspondiente a la norma Chebychev es considerablemente más difícil que con la norma Euclidiana, ya que la norma Chebychev no es una función diferenciable. Así que, desarrollaremos en la teoría y en la práctica del ajuste polinomial de datos el criterio de la norma Euclidiana. Por lo tanto en lo sucesivo omitiremos el subindice 2.

Nuestro problema es entonces, encontrar una $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_k)^t$ tal que $||\bar{r}||$ sea mínima, pero esto es equivalente a encontrar $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_k)^t$ tal que $||\bar{r}||^2$ sea mínima, como veremos en el capítulo 1.

Expresando a $\bar{r}$ en notación matricial tenemos:

$$(7) \qquad \bar{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^k \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^k \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & x_m & & x_m^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_k \end{bmatrix}$$

esto nos sugiere que la norma de $\bar{r}$ al cuadrado se puede expresar como:

$$(8) \qquad ||\bar{r}||^2 = \sum_{i=1}^{m} r_i^2 = ||\bar{y} - X\bar{a}||^2 ,$$

la cual tiene una interpretación geométrica como lo muestra la figura 5.

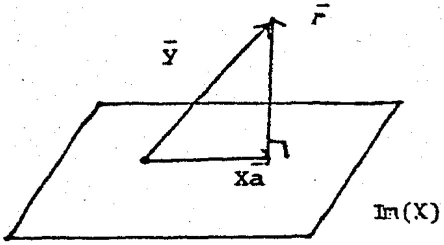

Figura 5

Si $\bar{a}$ es tal que minimiza $||\bar{y} - X\bar{a}||$ entonces $\bar{y} - X\bar{a}$ es ortogonal a la $I_m(X) = \langle \bar{x}_0 , \bar{x}_1 , \dots , \bar{x}_k \rangle$ donde $\bar{x}j = (x_1^j , x_2^j , \dots , x_m^j)^t$ para $j = 0, 1, \dots, k$. Ya que si no lo fuera, existiría un $\bar{a}'$ tal que $\bar{y} - X\bar{a}'$ si es ortogonal a la $I_m(x)$, luego los puntos $\bar{y}$, $X\bar{a}$ y $X\bar{a}'$ formarían un triángulo rectángulo, teniendo lo siguiente:

$$||\bar{y} - X\bar{a}'||^2 + ||X(\bar{a} - \bar{a}')||^2 = ||\bar{y} - X\bar{a}||^2$$

siendo $\bar{a}'$ el punto donde $||\bar{y} - X\bar{a}'||$ alcanza el mínimo.

Por lo tanto, claramente para $j = 0, 1, \ldots, k$ tenemos

(9) $\bar{x}_j^t (\bar{y} - X\bar{a}) = 0$,

donde $\bar{x}_j$ es un vector columna de m componentes y t denota la transpuesta. De (9) nos queda

(10) $X^t \bar{y} - X^t X\bar{a} = 0$

Por lo tanto

(11) $X^t X\bar{a} = X^t \bar{y}$

Donde al sistema de ecuaciones (11) se les conoce como Ecuaciones Normales.

<u>SUMARIO</u>. Nuestro trabajo consiste en la discusión de la solución del problema antes planteado y este será desarrollado a grandes rasgos como se describe a continuación:

En el capítulo 1 se deducen, via cálculo diferencial, las ecuaciones normales. Notando la dificultad de resolver nuestro problema por medio de estas, ya que, tienen un comportamiento numérico "malo" para un grado mayor que 7 u 8.

En el capítulo 2 hacemos ver que al usar polinomios ortogonales las ecuaciones normales se simplifican de tal manera que la solución se obtiene simplemente efectuando $k + 1$ divisiones.

En el capítulo 3, se implementan las ideas del capítulo 2 con algunas modificaciones, se presentan comentarios al respecto, así como las conclusiones generales.

Observación: En lo sucesivo, al hacer referencia de alguna fórmula, tabla o algoritmo, se usarán 2 números; el primero indicará el capítulo y el segundo la fórmula, tabla o algoritmo de ese capítulo. Si se refiere a alguna fórmula de la introducción, en vez del número del capítulo tendra una I.

CAPITULO 1

ECUACIONES NORMALES

DEDUCCION DE LAS ECUACIONES NORMALES VIA CALCULO DIFERENCIAL

Aunque en la introducción planteamos el problema a resolver, iniciamos este capítulo con la discusión de nuestro problema, desde un punto de vista vectorial. Con el objeto de plantearlo en forma más clara, así como también, resaltar los elementos relevantes.

Para ello, fijaremos nuestra atención en el espacio vectorial

V = {Todos los polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual a $m - 1$},

donde m es el número de datos (x_i, y_i) dados. Es bien conocido que la dimensión de V es m. Observese que para cada P en V existe un vector residual $\bar{r}(P)$ de la forma (I.7).

Denotamos por $\rho(P) \in \mathbb{R}$, a la norma del vector residual asociado con $P \in V$, esto es,

$$\rho(P) = ||\bar{r}(P)||.$$

En base a estos términos planteamos nuestro Problema a Resolver:

Determinar P^* en V tal que,

$$\rho(P^*) \leq \rho(P),$$

para todo P en V. En otras palabras que

(1) $$\rho(P^*) = \min_{P \in V} ||\bar{r}(P)||.$$

La idea fundamental para la solución al problema (1.1), es tomar subespacios;

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots . \subset V_k \subset \ldots . \subset V_{m-1} = V,$$

donde,

$$V_k = \{P \in V \mid P \text{ es de grado} \leq k\}.$$

Ahora, el problema (1.1) se divide esencialmente en dos partes, que son:

Primero. Determinar,

(1a) $$\rho_k = \min_{P \in V_k} ||\bar{r}(P)||$$

para $k = 0,1,2,\ldots, m-1$. (Cálculo de los coeficientes).

Segundo. Determinar,

(1b) $$\sigma_j = \min_{0 \leq k \leq m-1} \{\sigma_k\}.$$

(encontrar el grado). Definido en (1.4).

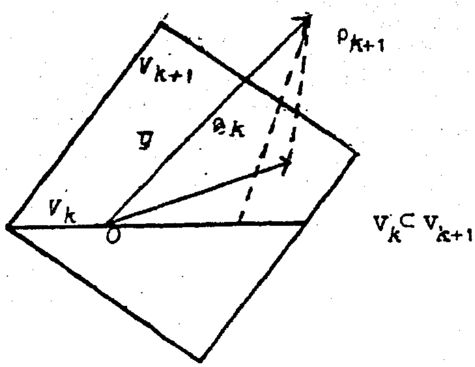

Figura 1.

Otro punto de importancia de nuestro trabajo, es que, a cada V_k se le asocia una base B_k, para $K = 0,1,\ldots m-1$, con la propiedad de que:

$$B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_{m-1}.$$

Así, a lo largo de nuestro trabajo se muestra lo siguiente:

1.- La selección de la base B_k

2.- La selección de un método para resolver (1.1a)

3.- La selección de un criterio para determinar (1.1b)

Ahora, en lugar de minimizar (1.1) minimizaremos

$$(2) \qquad ||\bar{r}||^2 = \sum_{i=1}^{m} r_i^2 = \sum_{i=1}^{m} [Y_i - P_k(x_i)]^2$$

por ser más fácil de trabajar.

Para poder hacer esto, veremos que (1.1) y (1.2) alcanzan su mínimo en el mismo punto (el mínimo de (1.1) es la raíz cuadrada del mínimo de (1.2)).

Sea $F(\bar{a}) = (\sum_{i=1}^{m} r_i^2)^{1/2}$,

donde $F: \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{o\}$

y sea $G(\bar{a}) = g \circ F = \sum_{i=1}^{m} r_i^2$

donde $g(\bar{z}) = \bar{z}^2$

y $G: \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{o\}$,

entonces afirmamos que:

$F(\bar{a})$ tiene un punto crítico si y sólo si $G(\bar{a})$ tiene un punto crítico.

Claramente, F y G son diferenciables y

$\nabla G(\bar{a}^*) = 2F(\bar{a}^*)\ \nabla F(\bar{a}^*)$.

Primero, veremos la suficiencia:

Si $F(\bar{a})$ tiene un punto crítico en $\bar{a}^*$, entonces,

$\nabla F(\bar{a}^*) = o$, lo que implica que,

$\nabla G(\bar{a}^*) = o$, por lo tanto,

$G(\bar{a})$ tiene un punto crítico en $\bar{a}^*$.

Ahora, veámos necesidad:

Si $G(\bar{a})$ tiene un punto crítico en $\bar{a}^*$, entonces

$\nabla G(\bar{a}^*) = o$, luego,

$F(\bar{a}^*) = o$ ó $\nabla F(\bar{a}^*) = o$.

Si $F(\bar{a}^*) = c$ entonces $\bar{a}^*$ es un mínimo y, por ser diferenciable $\nabla F(\bar{a}^*) = o$, lo que implica, que $F(\bar{a})$ tiene un punto crítico en $\bar{a}^*$. Por el otro lado, si $\nabla F(\bar{a}^*) = o$, entonces $F(\bar{a})$ tiene un punto crítico en $\bar{a}^*$. Con lo cual, queda probada la afirmación.

Ahora, para la existencia y unicidad del mínimo tenemos,

$$G(\bar{a}) = ||\bar{r}||^2 = \sum_{i=1}^{m} [y_i - P_k(x_i)]^2 .$$

sustituyendo $P_k(x_i)$ de (I.1) llegamos a

$$(3)\quad G(\bar{a}) = \sum_{i=1}^{m} [y_i - \sum_{h=o}^{k} a_h\, x_i^h]^2 .$$

como lo que nos interesa son los puntos críticos de $G(\bar{a})$, debemos tener

$$\nabla G(\bar{a}) = o .$$

Por otro lado

$$\nabla G(\bar{a}) = 2 \sum_{i=1}^{m} [y_i - \sum_{h=o}^{k} a_h\, x_i^h](-x_i^j), \quad \text{para} \quad j = 0,1,\ldots k .$$

De las dos igualdades anteriores tenemos,

$$\sum_{i=1}^{m} [y_i - \sum_{h=o}^{k} a_h\, x_i^h](-x_i^j) = o, \quad j = 0,1,\ldots k$$

De aquí tenemos,

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{h=o}^{k} a_h\, x_i^h\, x_i^j = \sum_{i=1}^{m} y_i\, x_i^j, \quad j = 0,1,\ldots k .$$

Intercambiando sumatorias nos dá

$$\sum_{h=o}^{k} a_h \sum_{i=1}^{m} x_i^h\, x_i^j = \sum_{i=1}^{m} y_i\, x_i^j\,, \qquad j = 0,1,\ldots k\,.$$

Pero esto en notación matricial es

$$X^t\, X\bar{a} = X^t\, \bar{y}$$

que son las Ecuaciones Normales (I.11).

<u>Afirmación</u>: Las columnas de la matriz X son linealmente independientes.

<u>Demostración</u>:Sabemos que

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \cdots\cdots & x_1^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 \cdots\cdots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 \cdots\cdots & x_m^k \end{bmatrix}$$

denotemos por $\bar{x}_0$, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2,\ldots,$ $\bar{x}_k$, las columnas de la matriz X. Tomemos una combinación lineal de estas columnas igualada a cero, esto es,

$$\sum_{i=o}^{k} \alpha_i\, \bar{x}_i = o\,,$$

haremos ver que $\alpha_i = o$ para $i = 0,1,\ldots k$. Para ello, basta ver que

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \dots\dots + \alpha_k x_1^k = P_k(x_1) = 0$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \dots\dots + \alpha_k x_2^k = P_k(x_2) = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_m + \dots\dots + \alpha_k x_m^k = P_k(x_m) = 0$$

con $k < m$, esto quiere decir que $P_k(x) \equiv 0$, cuando $\alpha_i = 0$, para $i = 0,1,\dots k$, debido a que el polinomio es de grado k y no puede tener m ceros. De donde se sigue nuestra afirmación.

Afirmación: La matriz $X^t X$ de las Ecuaciones Normales es definida positiva.

Demostración: Sea $\bar{z} \in \mathbb{R}^{k+1}$, con $\bar{z} \neq o$, entonces,

$$\bar{z}^t (X^t X)\bar{z} = (X\bar{z})^t (X\bar{z}) = ||X\bar{z}||^2 > o$$

Pero $||X\bar{z}||^2 = o$ si y sólo si $X\bar{z} = o$, pero X es de rango máximo, esto es, $X\bar{z} = o$ solo si $\bar{z} = o$. Por lo tanto,

$||X\bar{z}||^2 > o$ si $\bar{z} \neq o$ y $X^t X$ es definida positiva.

Afirmación: La matriz $X^t X$ es no-singular.

Demostración: Supongamos que $X^t X$ es singular, entonces existe $\bar{z} \neq o$ tal que $X^t X \bar{z} = o$, luego,

$$\bar{z}^t (X^t X)\bar{z} = \bar{z}^t (X^t X\bar{z}) = \bar{z}^t o = o$$

lo cual es una contradicción con la afirmación anterior. Por lo tanto, $X^t X$ es no-singular.

En base a esta última afirmación tenemos que solo existe un único punto crítico y por la forma de la función G este punto crítico corresponde a un mínimo de G . (ver figura 1.2.)

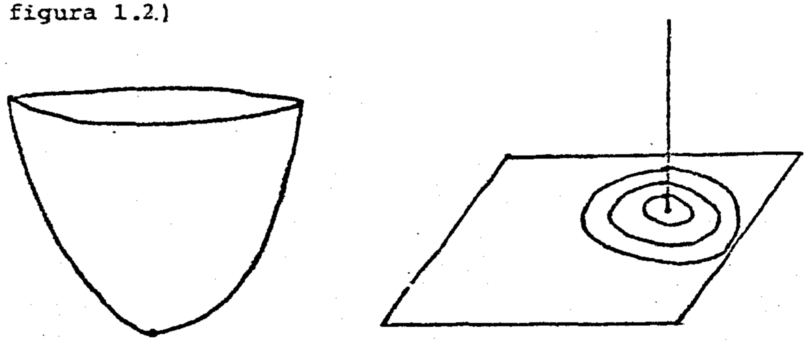

Figura 2.

Así hemos visto que (1.1) y (1.2) alcanzan su mínimo en el mismo punto.

Con esto, ya tenemos posibilidades de resolver nuestro problema mediante la resolución de las ecuaciones normales (I.11) y escogeremos dos métodos para su solución, estos son: Eliminación Gausiana con Pivoteo Parcial y Choleski.

METODO DE ELIMINACION GAUSIANA CON PIVOTEO PARCIAL.

El método de Eliminación Gausiana con Pivoteo Parcial consiste, a grandes rasgos, en hacer de la matriz $X^t X$ una matriz triangular superior, donde las operaciones que efectuemos con esta matriz, también las debemos hacer con el vector $X^t \bar{y}$, resultando así un sistema $A\bar{x} = \bar{b}$, donde, insistimos, A es una matriz triangular superior, el vector $\bar{x}$ en este caso sería el vector $\bar{a}$ (los coeficientes del polinomio) y el vector $\bar{b}$ el vector $X^t\ \bar{Y}$ modificado por las operaciones. El pivoteo toma como base el primer elemento del primer renglón para eliminar los elementos bajo este elemento, después se toma como base el segundo elemento del segundo renglón para eliminar los elementos bajo este elemento y así sucesivamente hasta el penúltimo renglón. Llegando así a la matriz triangular superior. El pivoteo parcial consiste en tomar como pivote el número mayor en valor absoluto e intercambiar los renglones, esto es, si el primer elemento del i-ésimo renglón es el número mayor en valor absoluto de la primera columna, se intercambia el primer renglón por el i-ésimo [2].

Ahora, este sistema $(A\bar{x} = \bar{b})$ se resuelve fácilmente usando sustitución hacia atras, esto es, tenemos $k + 1$ ecuaciones con $k + 1$ incognitas, donde la última ecuación solo tiene una incognita x_k, se determina esta incognita, se sustituye en la ecuación anterior y se determina la siguiente incognita x_{k-1} y así sucesivamente hasta determinar x_0.

Al resolver nuestro problema mediante este método, tendremos que calcular 1 coeficiente para el polinomio de grado cero, 2 coeficientes para el polinimio de grado uno, 3 para el de grado dos, así, hasta $k + 1$ para el de grado k, o sea, que en total tendremos que calcular $(k + 1)(k + 2)/2$ coeficientes, ya que, aunque hayamos calculado los coeficientes del grado j no es posible utilizar los coeficientes de este polinomio para calcular los coeficientes del polinomio de grado $j + 1$. Una vez calculados estos coeficientes debemos seleccionar el menor grado que mejor ajuste los datos. La pregunta sería ¿mediante qué criterio hacer esta selección?

El criterio que usaremos será el siguiente: suponer que las y_i $(i = 1, 2, \ldots m)$ se distribuyen normal e independientemente alrededor de alguna tendencia polinomial $P_{h+1}(x) = \sum_{j=o}^{h+1} r_j x^j$ con varianza σ^2 (error cuadrático medio mínimo) independiente de i. Entonces, se hace la hipótesis nula de que r_{h+1} sea igual a cero, sin importar que valores tengan $r_0, r_1, \ldots\ldots, r_h$ y σ^2. La función de la prueba estadística para probar esta hipótesis es una función simple de σ_h^2 y σ_{h+1}^2

Sea $P_k(x)$ el polinomio de grado k que mejor ajusta a los datos y_i. Entonces.

$$(4) \quad \sigma_k^2 = (m - k - 1)^{-1} \sum_{i=1}^{m} [y_i - P_k(x_i)]^2$$

Bajo la hipótesis nula se sigue que la esperanza de la estadística σ_k^2 es independiente de k, para $k = h+1, h+2, \ldots.,$ $m-2$.

Por lo tanto, en la práctica uno calcula σ_k^2 para $k = 1, 2, \ldots.$ Mientras σ_k^2 decrece significativamente según k va incrementando, podemos decir que $P_k(x)$ es un ajuste válido. Si, después de un cierto valor k_1, σ_k^2 no decrece en forma significativa o aumenta, entonces, el polinomio $P_{k_1}(x)$ representa realísticamente a los datos.

Note que para $k = m - 1$, podemos pasar un polinomio de interpolación $P_k(x)$ a través de los datos tal que (1.2) sea cero. Pero σ^2_{m-1} toma la forma indeterminada %, mostrando como el decrecimiento en el denominador de σ^2_k se compensa con el inevitable decrecimiento en (1.2).

Como no podemos hacer uso de los coeficientes del polino - mio de grado j para calcular los coeficientes del polinomio de grado $j + 1$, tampoco podemos hacer uso de σ^2_j para calcular σ^2_{j+1} [1].

De aquí, nuestro criterio para seleccionar el mejor grado del polinomio a usar, será cuando $|\sigma^2_{k+1} - \sigma^2_k|$ sea menor o igual a una cierta epsilon, que fijaremos de antemano, o cuando σ^2_{j+1} sea mayor que σ^2_j.

DESCRIPCION COMPUTACIONAL DEL METODO QUE USA ELIMINACION GAUSIANA

Dados los puntos (x_i, y_i), $i = 1,2,\ldots,m$, y epsilon. Primero calculamos la matriz A, esto es, $X^t X$ y el vector $\bar{b}$, esto es $X^t \bar{y}$, después hacemos la eliminación usando la subrutina DECOMP y hacemos la sustitución hacia atrás usando la subrutina SOLVE. A continuación se calcula σ^2_j y se compara con la anterior, σ^2_{j-1}, si es mayor el mejor polinomio es el de grado $j - 1$, si el valor absoluto de la diferencia es menor o igual que epsilon, el mejor polinomio es el de grado j y si no se cumplen estas condiciones volvemos a empezar con el siguien te grado. No podemos seguirnos indefinidamente, por lo tanto, si no se cumplen las condiciones de σ_j^2, terminaremos cuando $k = m - 1$, que es el máximo grado permitido y este será el mejor grado del polinomio.

Al calcular la matriz $X^t X$, resulta una matriz simétrica y las componentes son las mismas que las de la matriz anterior, por lo tanto, se utiliza esta información y solo se calcula la última columna. Y por ser simétrica no se necesita calcular las componentes que están debajo de la diagonal, solo basta asignarles el valor de su respectivo componente de la columna, esto es, al elemento a_{ij} le asignamos el valor a_{ji}. Tampoco es necesario calcular todo el vector $\bar{b}$, basta ir calculando únicamente el último elemento. No hay que confundir estas componentes con los coeficientes del polinomio.

DECOMP y SOLVE son subrutinas escritas en lenguaje FORTRAN y son de lo "mejor", hasta la fecha, para resolver sistemas $A\bar{x} = \bar{b}$ por eliminación gausiana [2].

<u>ALGORITMO EN LENGUAJE INFORMAL</u>.

La descripción que acabamos de dar para resolver nuestro problema vía ecuaciones normales, la presentaremos mediante un algoritmo en lenguaje informal. La característica principal de un algoritmo en lenguaje informal, es que nos permite utilizar una notación matemática común, lo que nos facilita entender lo que se está haciendo [3].

Este algoritmo calcula el polinomio $P_k(x)$ de mejor grado, resolviendo las ecuaciones normales por medio de la eliminación gausiana con pivoteo parcial (DECOMP y SOLVE). Dados los puntos (x_i , y_i) , $i = 1,2,\ldots m$ y epsilon·

1) Para $k = 0,1,2,\ldots,m - 1$

   1) $a_{j,k+1} \longleftarrow \sum_{i=1}^{m} x_i^j \, x_i^{k-1}$ $(j = 1,2,\ldots,k + 1)$

   2) $a_{k+1,j} \longleftarrow a_{j,k+1}$ $(j = 1,2,\ldots,k + 1)$

   3) $b_{k+1} \longleftarrow \sum_{i=1}^{m} x_i^k \, y_i$

   4) Resuelve $A\bar{z} = \bar{b}$
      (utilizando DECOMP y SOLVE).

   5) $\sigma_k^2 \longleftarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{m} [y_i - P_k(x_i)]^2}{m - k - 1}$

   6) Es $|\sigma_{k-1}^2 - \sigma_k^2| < \text{Epsilon}$
      1) Alto

   7) Es $\sigma_{k-1}^2 < \sigma_k^2$
      1) Alto

Algoritmo 1.

Este algoritmo está codificado en lenguaje FORTRAN y se encuentra en el apéndice I.

METODO DE CHOLESKI.

Este método, está diseñado especialmente para matrices simetricas y positivas definidas, y consiste en descomponer a la matriz A en dos matrices triangulares L y L^t, donde L es una matriz triangular inferior. Entonces, nuestro problema $A\bar{x} = \bar{b}$, se transforma en resolver

$$LL^t\bar{x} = \bar{b}.$$

Para esto, se supone que

$$L^t\bar{x} = \bar{y},$$

y primero se resuelve

$$L\bar{y} = \bar{b},$$

haciendo sustitución hacia adelante, encontrándose así al vector y después se resuelve

$$L^t\bar{x} = \bar{y},$$

haciendo sustitución hacia atrás, encontrándose así los coeficientes del polinomio.

A continuación damos el algoritmo en lenguaje informal para obtener la matriz L de la descomposición de Choleski [3].

1) Para $i = 1,2,\ldots.k$

  1) Para $j = 1,2,\ldots.i-1$

    1) $l_{i,j} \longleftarrow l_{j,j}^{-1} \, (a_{i,j} - \sum_{h=1}^{j-1} l_{j,h} \, l_{i,h})$

  2) $l_{i,i} \longleftarrow (a_{i,i} - \sum_{h=1}^{j-1} l_{i,h}^{2})^{2}$

Algoritmo 2.

El algoritmo para resolver las ecuaciones normales, por el método de Choleski, sería el mismo que el algoritmo 1.1, unicamente modificando el paso (4), en vez de resolver $A\bar{x} = \bar{b}$ utilizando DECOMP y SOLVE, se utiliza CHOLY1, SUSADE y SUSATR. CHOLY1 es la subrutina que encuentra la matriz L del método de Choleski (algoritmo 1.2), SUSADE es la subrutina que hace la sustitución hacia adelante y SUSATR es la subrutina que hace la sustitución hacia atras. La codificación de este algoritmo está hecha en lenguaje FORTRAN y se encuentra en el apendice II.

IMPLEMENTACION PRACTICA DE LOS DOS METODOS.

Se probaron los dos métodos con los siguientes 4 ejemplos:

Ejemplo 1. $x^3 + 2x - 1 = 0.$

Ejemplo 2. $x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = 0$

Ejemplo 3. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

Ejemplo 4. $x^8 - 3x^7 - 2x^6 + 5x^5 - 3x^4 + x^2 - x - 1 = 0.$

Se tomaron estos ejemplos polinomiales, ya que de antemano sabemos cual debe ser el grado adecuado del ajuste y los coeficientes exactos del problema, lo que nos facilita el análisis.

En el ejemplo 1, se tomaron 11 puntos igualmente espaciados en el intervalo [0,5], con un incremento de 0.5, en el ejemplo 2, se tomaron 11 puntos igualmente espaciados en el intervalo [0,10] con un incremento de 1, en el ejemplo 3, se tomaron 21 puntos igualmente espaciados en el intervalo [0,20] con un incremento de 1, y en el ejemplo 4 se tomaron 21 puntos igualmente espaciados en el intervalo [0,10] con un incremento de 0.5. El ejemplo 3 fué tomado de [4].

En la tabla 1.1 están las σ_i^2 $(i = 0,1,..k + 1)$, calculadas por el método de eliminación gausiana y en la tabla 1.2 las calculadas por el método de Choleski. Según nuestro criterio para determinar el grado adecuado vemos que en ambas tablas el grado seleccionado es el correcto. Como las σ_i^2 son los errores cuadráticos medios mínimos el error que se comete es la raíz cuadrada de estas σ_i^2. Los errores cometidos utilizando eliminación gausiana son:

Ejemplo 1: $\sigma_3 = .21867095292 \times 10^{-8}$

Ejemplo 2: $\sigma_4 = .16248114614 \times 10^{-5}$

Ejemplo 3: $\sigma_5 = .4922551134 \times 10^{-2}$

Ejemplo 4: $\sigma_8 = 1.2533350089$

y utilizando Choleski son:

Ejemplo 1: $\sigma_3 = .46454374458 \times 10^{-8}$

Ejemplo 2: $\sigma_4 = .78803554798 \times 10^{-5}$

Ejemplo 3: $\sigma_5 = .15849191211 \times 10^{-2}$

Ejemplo 4: $\sigma_8 = 8.8133339378$

En los ejemplos 1 y 2 el error es pequeño, en el ejemplo 3, es aceptable y en el ejemplo 4 es grande.

Observando las tablas 1.3 (eliminación gaussiana) y 1.4 (Choleski), de los coeficientes, vemos que en el ejemplo 1 tenemos hasta 8 cifras correctas, en el ejemplo 2 hasta 5 cifras correctas, en el ejemplo 3 unicamente 2 cifras correctas y en el ejemplo 4 errores hasta de una unidad en la eliminación gausiana y de decenas en Choleski. Por lo tanto, la determinación numérica de las ecuaciones normales (I.11), trabaja bien para un ajuste polinomial de grado menor o igual que 4 y quizá hasta 5 ó 6, pero para un grado mayor o igual que 7 u 8 falla de algún modo.

Al probar estos ejemplos y algunos otros con los dos métodos, observamos que la σ adecuada nos indica más o menos el número de dígitos correctos en los coeficientes y aunque no se demuestra esto, se usa este criterio para inferir acerca de los resultados.

	Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
Intervalo	[0,5]	[0,10]	[0,20]	[0,10]
Número de Puntos	11	11	21	21
Incremento	0.5	1	1	0.5
σ_0^2	2057.653125	9357953	.9407158604 x 10^{12}	.31654874932 x 10^{15}
σ_1^2	345.88125	2785277.7333	.32668476854 x 10^{12}	.17218794811 x 10^{15}
σ_2^2	12.065625001	283912.2	.49150426213 x 10^{11}	.58850488269 x 10^{14}
σ_3^2	.47816985653 x 10^{-17}	5883.4285696	.25980174397 x 10^{10}	.12076372127 x 10^{14}
σ_4^2	.10047062963 x 10^{-14}	.2640012285 x 10^{-11}	.27593428572 x 10^{8}	.13790642274 x 10^{13}
σ_5^2		.64244838869 x 10^{-9}	.24231509666 x 10^{-4}	.77098148103 x 10^{11}
σ_6^2			.85049543877 x 10^{-3}	.16611246535 x 10^{10}
σ_7^2				.7694364369 x 10^{7}
σ_8^2				1.5708486445
σ_9^2				40940.844284

Tabla 1. Error Cuadrático (Método de Eliminación Gausiana).

	Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
Intervalo	[0,5]	[0,10]	[0,20]	[0,10]
Número de Puntos	11	11	21	21
Incremento	0.5	1	1	0.5
σ_0^2	2057.653125	9357953	$.9407158604 \times 10^{12}$	$.31654874932 \times 10^{15}$
σ_1^2	345.88124999	2785277.7334	$.32668476854 \times 10^{12}$	$.17218794811 \times 10^{15}$
σ_2^2	12.065625	283912.2	$.49150426216 \times 10^{11}$	$.58850488269 \times 10^{14}$
σ_3^2	$.21580089063 \times 10^{-16}$	5883.428569	$.25980174397 \times 10^{10}$	$.12076372129 \times 10^{14}$
σ_4^2	$.21391028813 \times 10^{-14}$	$.62100002488 \times 10^{-10}$	$.27593428607 \times 10^{8}$	$.13790642286 \times 10^{13}$
σ_5^2		$.49658677975 \times 10^{-8}$	$.25119686205 \times 10^{-5}$	$.77098148113 \times 10^{11}$
σ_6^2			$.10913781211 \times 10^{-3}$	$.16611246327 \times 10^{10}$
σ_7^2				$.76965552066 \times 10^{7}$
σ_8^2				77.674855099
σ_9^2				301.34874085

Tabla 2. Error Cuadrático (Método de Choleski).

	Ejemplo 1		Ejemplo 2		Ejemplo 3		Ejemplo 4	
	Real	Calculado	Real	Calculado	Real	Calculado	Real	Calculado
a_0	-1	-.99999999864	-1	-.99999727883	1	.9921699147	-1	.38278308264
a_1	2	2.0000000036	-4	-4.0000043531	1	1.0164238964	-1	-23.220667147
a_2	0	-.27216899141 $\times 10^{-8}$	3	3.0000013599	1	.9939162683	1	41.233851734
a_3	1	1.0000000004	-1	-1.000000146	1	1.0008173053	0	-27.943550584
a_4			1	1.000000005	1	.99995441372	-3	6.710198309
a_5					1	1.0000008981	5	3.13785202
a_6							-2	-1.799595414
a_7							-3	-3.0113471122
a_8							1	1.0002632021

Tabla 3. Coeficientes (Método de Eliminación Gausiana).

	Ejemplo 1		Ejemplo 2		Ejemplo 3		Ejemplo 4	
	Real	Calculado	Real	Calculado	Real	Calculado	Real	Calculado
a_0	-1	-0.99999999412	-1	-.99999271259	1	.99821632199	-1	7.2833417417
a_1	2	1.9999999823	-4	-4.0000245194	1	1.0043781048	-1	-156.75073062
a_2	0	$.92363976658 \times 10^{-8}$	3	3.0000120698	1	.99824833455	1	303.45663424
a_3	1	.99999999877	-1	-1.0000019112	1	1.0002475316	0	-223.51580946
a_4			1	1.0000000949	1	.99998568268	-3	79.281305249
a_5					1	1.0000002899	5	-11.556206279
a_6							-2	-.11389428544
a_7							-3	-3.1120380064
a_8							1	1.0027190332

Tabla 4. Coeficientes (Método de Choleski).

BUEN CONDICIONAMIENTO

La matriz de las ecuaciones normales (I.11) es no-singular esto es, tiene sus columnas linealmente independientes. La solución correcta de estas ecuaciones depende en gran medida de que tan "linealmente independientes" sean las columnas de la matriz de las ecuaciones. Para hacer más claro este hecho, pensemos en dos ecuaciones lineales con dos incognitas, es decir:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2$$

de tal forma que los vectores $(a_{11}, a_{2\cdot})$ y (a_{12}, a_{22}) sean linealmente independientes pero "casi" paralelos, y sean $\bar{x}_e = (x_1^e, x_2^e)$, la solución exacta del sistema y $\bar{x}_* = (x_1^*, x_2^*)$, la solución aproximada. Cada una de las ecuaciones representa una recta, pensemos que estas rectas son "casi" paralelas de tal suerte que

$$a_{11} x_1^* + a_{12} x_2^* \doteq b_1$$

$$a_{21} x_1^* + a_{22} x_2^* \doteq b_2$$

(donde $\doteq$, significa "muy parecido"), y

$$a_{11} x_1^e + a_{12} x_2^e = b_1$$

$$a_{21} x_1^e + a_{22} x_2^e = b_2 ,$$

y sin embargo, $\|\bar{x}_* - \bar{x}_e\|$ sea "bastante grande" (ver figura 1.2).

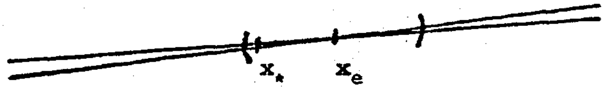

Figura 3.

Esta figura puede hacerse más drástica.

Esto puede apreciarse numéricamente, considerando el si - guiente sistema como ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 0.2161 & 0.1441 \\ 1.2969 & 0.8648 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1440 \\ 0.8642 \end{bmatrix}$$

Sea $\bar{x}_* = (0.9911, -0.4870)^t$, si se calcula $A\bar{x}_* - \bar{b}$, se encuentra que

$$A\bar{x}_* - \bar{b} = \begin{bmatrix} -0.000\ 000\ 01 \\ 0.000\ 000\ 01 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, la solución exacta es $\bar{x}_e = (2, -2)^t$. Y la $\|\bar{x}_* - \bar{x}_e\| > 1$, por lo que podría decirse que la diferen - cia es "grande".

CONDICION DE UNA MATRIZ.

Los algoritmos de eliminación gausiana con pivoteo parcial y de Choleski, son estables (ver [3]), pero falla para un grado mayor o igual que 7 u 8, lo que nos hace sospechar que muestra matriz $A(X^tX)$ es mal condicionada, por lo cual iniciaremos un breve estudio del mal comportamiento de matrices.

Como ya sabemos al resolver nuestro sistema $A\bar{x} = \bar{b}$, cometemos errores de observación o de redondeo, y esto nos lleva a la siguiente pregunta fundamental. ¿Cómo puede medirse la sensibilidad de $\bar{x}$ para cambios en A y $\bar{b}$?

La respuesta a esta cuestion se basa en hacer precisa la idea de matrices "casi" singulares. Si A es singular, entonces para algunas $\bar{b}$'s la solución $\bar{x}$ no existirá, mientras que para otras no será única. Así, si A es "casi" singular podemos esperar que, pequeños cambios en A y $\bar{b}$ causen cambios muy grandes en $\bar{x}$. Y por otra parte, si A es "casi" la matriz identidad, pequeños cambios en A y $\bar{b}$ resultarían en pequeños cambios en $\bar{x}$.

A primera vista, podría parecer que existe alguna relación entre el tamaño de los pivotes encontrados en la eliminación gausiana con pivoteo parcial y la proximidad a la sigularidad, ya que si la aritmética pudiera ser hecha en forma exacta, los pivotes serían distintos de cero, si y solo si, la matriz es no singular. También, hasta cierto punto, si los pivotes son pequeños entonces la matriz es "casi" singular. Sin embargo, una matriz podría ser "casi" singular, aunque ninguno de los pivotes sea pequeño. De aquí, que esta no sea una buena forma para medir la proximidad a la singularidad.

Para tener una medida de la proximidad a la singularidad más precisa y confiable, utilizaremos el concepto de norma de un vector, definida en la introducción. Aunque aquí usaremos $||\bar{x}||_1 = \Sigma |x_i|$, que es la norma Gershgorin (I.4), pues esta norma necesita bastante menos cálculos que la norma mínima cuadrada. No obstante algunas de las propiedades de la norma mínima cuadrada se pierdan, ya que para esto no son muy importantes.

Al multiplicar el vector $\bar{x}$ por una matriz A resulta un nuevo vector $A\bar{x}$, el cual puede tener una norma muy diferente de $\bar{x}$. Este cambio en la norma está directamente relacionada con la sensibilidad que deseamos medir. El rango de los posibles cambios puede ser expresado por 2 números

$$M = \max_{\bar{x}\neq o} \frac{||A\bar{x}||_1}{||\bar{x}||_1} , \qquad m = \min_{\bar{x}\neq o} \frac{||A\bar{x}||_1}{||\bar{x}||_1}$$

Note que si A es singular, entonces $m = o$. El cociente M/m es llamado el número de condición de A.

$$\text{Cond}(A) = \frac{\max\limits_{\bar{x} \neq o} \dfrac{\|A\bar{x}\|_1}{\|\bar{x}\|_1}}{\min\limits_{\bar{x} \neq o} \dfrac{\|A\bar{x}\|_1}{\|\bar{x}\|_1}}$$

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

y un segundo sistema obtenido de alterar el lado derecho

$$A(\bar{x} + \Delta\bar{x}) = \bar{b} + \Delta\bar{b}$$

Pensemos en $\Delta\bar{b}$ como el error en $\bar{b}$ y $\Delta\bar{x}$ como el error resultante en $\bar{x}$. Como $A(\Delta\bar{x}) = \Delta\bar{b}$, las definiciones de M y m nos llevan inmediatamente a

$$\|\bar{b}\|_1 \leq M\|\bar{x}\|_1 \quad \text{y} \quad \|\Delta\bar{b}\|_1 \leq m\|\Delta\bar{x}\|_1.$$

Consecuentemente, si $m \neq o$

$$\frac{\|\Delta\bar{x}\|_1}{\|\bar{x}\|_1} \leq \text{Cond}(A)\,\frac{\|\Delta\bar{b}\|_1}{\|\bar{b}\|_1}$$

La cantidad $\|\Delta\bar{b}\|_1 / \|\bar{b}\|_1$ es el cambio relativo en el lado derecho, y la cantidad $\|\Delta\bar{x}\|_1 / \|\bar{x}\|_1$ es el error causado por este cambio. La ventaja de usar cambios relativos es que no son afectados por factores escalares.

Esto demuestra que el número de condición es un factor de magnificación del error relativo, esto es, que cambios en el lado derecho pueden causar cambios de Cond(A) veces en la solución.

Citaremos algunas de las propiedades básicas del número de condición:

$$\mathrm{Cond}(A) \geq 1.$$

$$\mathrm{Cond}(P) = 1,$$

donde P es una matriz de permutaciones. En particular

$$\mathrm{Cond}(I) = 1,$$

donde I es la matriz identidad.

$$\mathrm{Cond}(\gamma A) = \mathrm{Cond}(A),$$

donde γ es un escalar.

$$\mathrm{Cond}(D) = \frac{\max_i |d_{ii}|}{\min_i |d_{ii}|}$$

donde D es una matriz diagonal.

El número de condición, también es una medida de la proximidad a la singularidad, o sea, puede pensarse que el número de condición es el recíproco de la distancia relativa de la matriz al conjunto de matrices singulares. Así, si Cond(A) es grande, entonces A está próxima a la singularidad. Para ver esto, demostraremos el siguiente teorema.

<u>Teorema</u>: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no-singular, A difiere de una

matriz singular en norma en no más que $\| A \| / \mathrm{Cond}(A)$, (Gastinel) esto es, dada A, $\| A \| / \mathrm{Cond}(A) = \min \| \Delta A \|$ sobre todas las matrices singulares $A + \Delta A$ ([5]).

<u>Demostración</u>: Claramente, si $A + \Delta A$ es singular, entonces existe algún $\bar{x} \neq o$, para el cual $(A + \Delta A)\bar{x} = o$.

$$\begin{aligned}
\text{Además} \quad \| \Delta A \| &\geq \| \Delta A\bar{x} \| / \| \bar{x} \| = \| A\bar{x} \| / \| \bar{x} \| \\
&= \| A\bar{x} \| / \| A^{-1}A\bar{x} \| \geq 1/ \| A^{-1} \| \\
&= \| A \| / \mathrm{Cond}(A).
\end{aligned}$$

Para encontrar una ΔA para la cual se cumpla la igualdad consideremos el vector $\bar{y}$ para el cual

$$\| A^{-1}\bar{y} \| = \| A^{-1} \| \; \| \bar{y} \| \neq o$$

Entonces, sea W^d el dual para $A^{-1}\bar{y}$, esto es,

$W^d A^{-1}\bar{y} = \| W^d \| \cdot \| A^{-1}\bar{y} \| = 1$, y sea $\Delta A = -\bar{y}W^d$

Tenemos $(A + \Delta A) A^{-1}\bar{y} = o$, luego $A + \Delta A$ es singular.

$$\begin{aligned}
Y \quad \| \Delta A \| &= \max \| \bar{y}W^d\bar{x} \| / \| \bar{x} \| \quad \text{con } \bar{x} \neq o \\
&= \| \bar{y} \|_1 \max \| W^d\bar{x} \| / \| \bar{x} \| = \| \bar{y} \| \cdot \\
&\quad \| W^d \| = \\
&= \| \bar{y} \| / \| A^{-1}\bar{y} \| = 1/ \| A^{-1} \| = \| A \| / \\
&\quad \mathrm{Cond}(A).
\end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

El teorema de Hahn-Banach garantiza que para cada $\bar{x} \neq o$ le corresponde una función dual y^d tal que

$$y^d\bar{x} = \| y^d \| \cdot \| \bar{x} \| = 1.$$

El número de condición también juega un papel fundamental en el análisis de los errores de redondeo introducidos durante la eliminación gausiana. Supongamos que A y $\bar{b}$ tienen elementos que son números punto flotante exactos, y sea $\bar{x}_*$ el vector de números punto flotante obtenido de la solución de la ecuación lineal. También supongamos que la singularidad exacta no se detecta y que no hay ni bajo-flujo ni sobre-flujo. Entonces es posible establecer las siguientes desigualdades:

$$\frac{\| \bar{b} - A\bar{x}_* \|_1}{\| A \|_1 \, \| \bar{x}_* \|_1} \leq \rho\beta^{-t}; \quad \frac{\| \bar{x} - \bar{x}_* \|_1}{\| \bar{x}_* \|_1} \leq \rho \operatorname{Cond}(A)\beta^{-t}$$

Aquí β es la base del sistema punto flotante y t es el número de dígitos, así, β^{-t} es casi el tamaño del número más pequeño representable por la máquina. La cantidad ρ se define después, pero generalmente tiene un valor menor que β.

La primera desigualdad dice que el residual relativo se puede esperar que sea casi del tamaño del error de redondeo, sin importar que malamente condicionada sea la matriz. La segunda desigualdad requiere que A sea no singular e involucra la solución exacta de $\bar{x}$. Se sigue directamente de la primera desigualdad y de la definición de Cond(A) que, el error relativo será pequeño si Cond(A) es pequeño, pero podría ser muy grande si la matriz es casi singular. En el caso extremo donde A es singular pero la singularidad no es detectada, la primera desigualdad se cumple, pero la segunda no tiene sentido.

Para precisar más acerca de la cantidad ρ, es necesario introducir la idea de norma de una matriz y establecer algunas desigualdades.

La cantidad M definida antes es conocida como la norma de la matriz. La notación para la norma matricial es la misma que para la vectorial.

$$|| A ||_1 = \max_{\bar{x} \neq o} \frac{|| A\bar{x} ||_1}{|| \bar{x} ||_1}$$

Demostraremos que si $\bar{a}_j$ $(j = o, j, \ldots, k)$ son las columnas de A, entonces,

$$|| A ||_1 = \max_j || \bar{a}_j ||_1$$

<u>Demostración</u>: Si $\bar{a}_j$, $(j = 1, 2, \ldots n)$ son las columnas de A, entonces,

$$|| A\bar{x} ||_1 = || \bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2 + \ldots + \bar{a}_n x_n ||_1$$

$$\leq || \bar{a}_1 ||_1 | x_1 | + || \bar{a}_2 ||_1 | x_2 | + \ldots + || \bar{a}_n ||_1 \cdot || x_n || .$$

$$\leq \max_j || \bar{a}_j ||_1 \cdot | x_1 | + \max_j || \bar{a}_j ||_1 \cdot | x_2 | + \ldots + \max_j || \bar{a}_j ||_1 | x_n |$$

$$= \max_j || \bar{a}_j ||_1 \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i | \right) = \max_j || \bar{a}_j || \, || \bar{x} ||_1$$

De aquí,

$$\| A\bar{x} \|_1 / \| \bar{x} \|_1 \leq \max_j \| \bar{a}_j \|_1$$

Pero existe $\bar{x}_*$ tal que

$$\| A\bar{x}_* \|_1 / \| \bar{x}_* \|_1 = \max_{x \neq o} \| A\bar{x} \|_1 / \| \bar{x} \|_1$$

Por lo que

$$\| A \|_1 = \max_{x \neq o} \| A\bar{x} \|_1 / \| \bar{x} \|_1 \leq \max_j \| \bar{a}_j \|_1$$

Por otra parte, sea $\bar{e}_j$ el j-ésimo vector ortonormal, entonces,

$$\| A\, \bar{e}_j \|_1 \leq \| A \|_1 \cdot \| \bar{e}_j \|_1 = \| A \|_1 .$$

Además

$$\| A\, \bar{e}_j \|_1 = \| \bar{a}_j \|_1 .$$

Y podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\max_j \| \bar{a}_j \|_1 = \| \bar{a}_j \|_1 .$$

De donde

$$\max_j \| \bar{a}_j \|_1 \leq \| A \|_1 ,$$

y como $\| A \|_1 \leq \max_j \| \bar{a}_j \|_1$,

concluimos que,

$$\| A \|_1 = \max_j \| \bar{a}_j \|_1$$

El resultado básico en el error de redondeo en la eliminación gausiana es que la solución computada $\bar{x}_*$ satisface exactamente

$$(A + E)\ \bar{x}_* = \bar{b}\ ,$$

donde E es la matriz cuyos elementos son casi del tamaño de los errores de redondeo en los elementos de A. Existen algunas situaciones raras, donde las matrices intermedias obtenidas durante la eliminación gausiana, tienen elementos mayores que los de A, hay algún efecto de acumulación de errores en matrices grandes, pero se puede esperar que si ρ está definida por

$$\frac{||\ E\ ||_1}{||\ A\ ||_1} = \rho\beta^{-t}$$

entonces, ρ raramente será mayor que β [2].

De aquí, podemos obtener desigualdades involucrando al residual y al error en la solución calculada. El residual está dado por $\bar{b} - A\bar{x}_* = E\bar{x}_*$ y de aquí

$$||\ \bar{b} - A\bar{x}_*\ ||_1 = ||\ E\bar{x}_*\ ||_1 < ||\ E\ ||\cdot||\ \bar{x}_*\ ||\ ,$$

El residual involucra el producto $A\bar{x}_*$, asi que es apropiado considerar el residual relativo el cual compara a la norma de $\bar{b} - A\bar{x}_*$ con las normas de A y $\bar{x}_*$. De la desigualdad anterior se sigue directamente que

$$\frac{||\ \bar{b} - A\bar{x}_*\ ||_1}{||\ A\ ||_1\cdot ||\ \bar{x}_*\ ||_1} \leqslant \rho\beta^{-t}$$

Donde A es no-singular, el error puede ser expresado usando la inversa de A por $\bar{x} - \bar{x}_* = A^{-1}(\bar{b} - A\bar{x}_*)$ y así,

$$\| \bar{x} - \bar{x}_* \|_1 \leq \| A^{-1} \|_1 \; \| E \|_1 \cdot \| \bar{x}_* \| .$$

Es más sencillo comparar la norma del error con la norma de la solución calculada. Así, el error relativo satisface

$$\frac{\| \bar{x} - \bar{x}_* \|_1}{\| \bar{x}_* \|_1} \leq \| A \|_1 \cdot \| A^{-1} \|_1 \frac{\|E\|_1}{\|A\|_1} \beta^{-t}$$

Esto produce que $\| A^{-1} \|_1 = \frac{1}{m}$, y así

$$\text{Cond } (A) = \| A \|_1 \; \| A^{-1} \|_1 .$$

Así

$$\frac{\| \bar{x} - \bar{x}_* \|_1}{\| \bar{x}_* \|_1} \leq \rho \text{ Cond } (A) \; \beta^{-t}$$

Estos calculos involucran el conocer A^{-1}. Si $\bar{a}_j$ son las columnas de A y $\tilde{a}_j$ las de A^{-1}, entonces en términos de la norma vectorial estamos usando.

$$\text{Cond}(A) = \max_j \| \bar{a}_j \|_1 \cdot \max_j \| \tilde{a}_j \|_1 .$$

Es fácil calcular $\| A \|_1$, pero encontrar $\| A^{-1} \|_1$ llevaría más o menos el triple del tiempo requerido para la eliminación gausiana. Afortunadamente, el valor exacto de Cond(A) es raramente requerido. Cualquier estimador razona - blemente bueno es satisfactorio.

La subrutina DECOMP estima el número de condición de la matriz por

$$\mathrm{Cond}(A) \simeq \max_j \| \bar{a}_j \|_1 \; \frac{\| \bar{z} \|_1}{\| \bar{y} \|_1}$$

donde $\bar{y}$ y $\bar{z}$ son dos vectores determinados por la subrutina tal que $\| \bar{z} \|_1 / \| \bar{y} \|_1 \simeq \| A^{-1} \|$. Esto involucra resolver dos sistemas de ecuaciones $A^t \bar{y} = \bar{e}$ y $A\bar{z} = \bar{y}$, donde $\bar{e}$ es un vector con componentes ± 1 escogidos para maximizar el crecimiento durante la sustitución hacia atras para $\bar{y}$.

Este estimador es solo una cota inferior para el número de condición real, pero se calcula de tal forma que está casi siempre dentro de un factor de n de la condición real y generalmente es muy cercana. Esto es,

$$\frac{\mathrm{Cond}\ (A)}{n} < \mathrm{COND} < \mathrm{Cond}\ (A).$$

Si durante la eliminación gausiana se encuentra un pivote exactamente cero, DECOMP hace COND = 10^{32} para señalar que ha detectado singularidad. Este valor está entre β^t y β^u en todo sistema punto flotante normalizado, así, está entre el recíproco de la exactitud de la máquina y el nivel de sobre-flujo ([2]).

En la tabla 1.5 se encuentran los números de condición calculados por la máquina utilizando el método de eliminación gausiana con pivoteo parcial con los mismos ejemplos polinomiales anteriores.

	Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
COND (1)	42.349576272	142.26086957	548.80620155	148.52325841
COND (2)	2047.0823819	19022.815073	282737.96093	21050.356629
COND (3)	145870.86197	2895395.1782	140696983.14	3435889.3803
COND (4)	13297776.261	575826061.89	73413067224	694659427.08
COND (5)		146801499460	$.43066240929 \times 10^{14}$	$.16347471577 \times 10^{12}$
COND (6)			$.28962479788 \times 10^{17}$	$.424558171607 \times 10^{14}$
COND (7)				$.120327988917 \times 10^{17}$
COND (8)				$.387168412402 \times 10^{19}$
COND (9)				$.188608795588 \times 10^{21}$

Tabla 5. Número de Condición (los números entre parentesis, indican el grado).

Como puede apreciarse, el número de condición para los grados adecuados es grande, pero bastante aceptable para los ejemplos 1 y 2, ya que son menores que β^t.

OTROS METODOS.

Podemos concluir que no es un buen método resolver nuestro problema por medio de las ecuaciones normales, debido al gran número de operaciones que tenemos que efectuar y por el mal condicionamiento de la matriz $X^t X$, que nos hace tener una gran inexactitud en los coeficientes del polinomio ajustado para un grado mayor o igual que 7 u 8.

Si trabajamos directamente con las ecuaciones (1.3)

$$G(\bar{a}) = \sum_{i=1}^{m} [y_i - P_k(x_i)]^2 = || \bar{y} - X\bar{a} ||^2 ,$$

Podríamos obtener mejores resultados, descomponiendo a la matriz X en dos matrices Q y R, esto es,

$$X = Q \cdot R$$

donde Q de $m \times k+1$ es ortogonal, y R de $k+1 \times k+1$ es triangular superior. Este método es conocido como la descomposición QR. O descomponiendo a la matriz X en tres matrices U, Σ y V^t, esto es,

$$X = U \cdot \Sigma \cdot V^t ,$$

donde U de $m \times m$ y V de $k+1 \times k+1$ son ortogonales, y Σ de $m \times k+1$ es diagonal. Este método es conocido como la descomposición de los Valores Singulares. Para detalles de estas dos descomposiciones y su aplicación a mínimos cuadrados véase [3].

Otro método, sería construir otra base $\{q_0(x), q_1(x), \ldots q_k(x)\}$, donde $q_i(x)$ son Polinomios Ortogonales, para $i = 0, 1, \ldots k$, para que las ecuaciones normales, que fueron construi das con la base $\{1, x, \ldots, x^k\}$, sean más sencillas de resolver o sea, lograr con esta nueva base que

$$X^t X = D,$$

donde D de $m \times m$ es una matriz diagonal.

En el siguiente capítulo desarrollaremos unicamente el último método, ya que es el que nos interesa.

CAPITULO 2

Polinomios Ortogonales

Producto Interior: Definición y Propiedades

Para poder resolver nuestro problema por medio de polinomios ortogonales, veremos primero la definición de producto interior (o escalar) y algunas de sus propiedades.

Usaremos la notación $<u, v>$ para denotar el producto interior de las funciones $u(x)$ y $v(x)$, definidas en el conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ para significar:

$$<u, v> = \sum_{\ell=1}^{m} u(x_\ell)\, v(x_\ell). \tag{1}$$

Para cualesquiera funciones $u(x)$ y $v(x)$, se cumplen las siguientes propiedades:

$$<u, u> \geq 0.$$

Si $<u, u> = 0$, entonces, $u(x_\ell) = 0$ para toda ℓ.

$$<u, v> = <v, u>$$

y para cualesquiera constantes reales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ y funciones $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_p(x)$, definidas en $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$

$$<u, \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i> = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i <u, v_i>$$

Veremos que efectivamente nuestra definición de producto interior cumple las propiedades anteriores

$$<u, u> = \sum_{\ell=1}^{m} u(x_\ell)u(x_\ell) = \sum_{\ell=1}^{m} u^2(x_\ell) \geq 0,$$

ya que $u^2(x_\ell) \geq 0$, para toda ℓ.

Si $<u, u> = \sum_{\ell=1}^{m} u^2(x_\ell) = 0$, entonces,

$u^2(x_\ell) = 0$, para cada ℓ,

de aquí $u(x_\ell) = 0$, para toda ℓ.

$$<u, v> = \sum_{\ell=1}^{m} u(x_\ell)v(x_\ell) = \sum_{\ell=1}^{m} v(x_\ell)u(x_\ell) = <v, u>.$$

$$<u, \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i> = \sum_{\ell=1}^{m} [u(x_\ell) \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i(x_\ell)]$$

$$= \sum_{\ell=1}^{m} [\sum_{i=1} \alpha_i u(x_\ell) v_i(x_\ell)]$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i [\sum_{\ell=1}^{m} u(x_\ell) v_i(x_\ell)]$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i <u, v_i>.$$

Si $u(x)$ y $v(x)$ están definidas en el intervalo $[a,b]$ también podríamos definir el producto interior como:

$$<u, v> = \int_a^b u(x)v(x)\,dx.$$

y la verificación de las propiedades es similar a la del caso discreto.

Construcción de Polinomios Ortogonales

Vamos a construir un conjunto de polinomios $q_0(x)$, $q_1(x)$..., $q_n(x)$, tales que para cada k, $q_k(x)$ es de grado exacto k, esto es, $q_k(x) = \gamma x^k$ + potencias menores de x, y $\gamma \neq 0$, y además

(2) $\qquad <q_i, q_j> = 0$, para $i \neq j$

Los polinomios que cumplen estas propiedades se dice que son ortogonales y harán que la resolución del problema de mínimos cuadrados sea más fácil.

Un método para determinar tales polinomios puede ser, utilizando la base canónica $\{1, x, \ldots, x^n\}$, para obtener la base ortogonal $\{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$, generada por la ortogonalización de Gram-Schmidt, donde los polinomios ortogonales serían:

$$q_0(x) = 1$$
$$q_1(x) = x - c_{01}q_0(x)$$
$$q_2(x) = x^2 - c_{02}q_0(x) - c_{12}q_1(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$q_n(x) = x^n - c_{0n}q_0(x) - c_{1n}q_1(x) - \ldots - c_{n-1\,n}q_{n-1}(x).$$

Donde

$$c_{jk} = \frac{\langle x^k, q_j\rangle}{\langle q_j, q_j\rangle}, \quad \text{para } j < k - 1$$

O sea que,

$$q_0(x) = 1$$
$$q_1(x) = x - \frac{\langle x, q_0\rangle}{\langle q_0, q_0\rangle} q_0(x)$$
$$q_2(x) = x^2 - \frac{\langle x^2, q_0\rangle}{\langle q_0, q_0\rangle} q_0(x) - \frac{\langle x^2, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} q_1(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$q_n(x) = x^n - \frac{\langle x^n, q_0\rangle}{\langle q_0, q_0\rangle} q_0(x) - \frac{\langle x^n, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} q_1(x) - \ldots - \frac{\langle x^n, q_{n-1}\rangle}{\langle q_{n-1}, q_{n-1}\rangle} q_{n-1}(x)$$

Con esta nueva base, las ecuaciones normales (I.11), se transforman en el nuevo sistema de ecuaciones normales

(3) $$Q^t Q\bar{a} = Q^t \bar{y}$$

donde Q es la matriz de $m \times (k+1)$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & q_1(x_1) & \cdots\cdots & q_k(x_1) \\ 1 & q_1(x_2) & \cdots\cdots & q_k(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & q_1(x_m) & \cdots\cdots & q_k(x_m) \end{bmatrix}$$

y los vectores $\bar{a}$ y $\bar{y}$ son los mismos. O sea que (2.3) sería:

$$\begin{bmatrix} \langle q_0, q_0\rangle & \langle q_0, q_1\rangle & \cdots\cdots & \langle q_0, q_k\rangle \\ \langle q_1, q_0\rangle & \langle q_1, q_1\rangle & \cdots\cdots & \langle q_1, q_k\rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle q_k, q_0\rangle & \langle q_k, q_1\rangle & \cdots\cdots & \langle q_k, q_k\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle q_0, \bar{y}\rangle \\ \langle q_1, \bar{y}\rangle \\ \cdot \\ \langle q_k, \bar{y}\rangle \end{bmatrix}$$

pero como $\langle q_i, q_j\rangle = 0$ para $i \neq j$, el sistema se reduce a resolver

$$(4) \quad \begin{bmatrix} \langle q_0, q_0\rangle & 0\ldots\ldots 0 \\ 0 & \langle q_1, q_1\rangle \ldots 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & \ldots \langle q_k, q_k\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0, \\ a_1 \\ \ldots \\ a_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle q_0, \bar{y}\rangle \\ \langle q_1, \bar{y}\rangle \\ \ldots \\ \langle q_k, \bar{y}\rangle \end{bmatrix}$$

Al aplicar el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base canónica, se preservan todas las propiedades. O sea, que las propiedades del capítulo 1 también se cumplen con esta nueva base ortogonal. Esto es, las columnas de Q son linealmente independientes, Q^tQ es definida positiva y no singular, y que las ecuaciones normales (2.3) tienen una solución que minimiza (1.3) y esta solución es única.

Así nuestro problema original, se reduce enormemente pues no existe ninguna dificultad en resolver el sistema (2.4) para valores grandes de k, ya que para calcular los coeficientes del polinomio ortogonal, solo es necesario efectuar una división,

$$(5) \ldots (aj = \langle qj, \bar{y}\rangle / \langle qj, qj\rangle),$$

además, la inconveniencia de no poder usar la información ya obtenida de las a_j y σ_j^2 desaparece, pues para calcular los coeficientes del polinomio de grado $k + 1$, solo se necesita calcular el coeficiente a_{k+1}, ya que los coeficientes anteriores, son los coeficientes del polinomio de grado k. Y tambien para calcular σ_{k+1}^2

podemos utilizar σ_k^2, ya que,

$$\sigma_k^2 = (m-k-1)^{-1} \sum_{i=1}^{m} [y_i - \sum_{h=0}^{k} a_h q_h(x_i)]^2 \text{, de aquí,}$$

$$\sigma_k^2 \quad (m-k-1) = \sum_{i=1}^{m} [y_i - \sum_{h=0}^{k} a_h q_h(x_i)]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m} [y_i - \sum_{h=0}^{k} a_h q_h(x_i)] \; [y_i - \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell q_\ell(x_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} [y_i^2 - 2y_i \sum_{h=0}^{k} a_h q_h(x_i) +$$

$$+ \sum_{h,\ell=0}^{k} a_h a_\ell q_h(x_i) q_\ell(x_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{h=0}^{k} a_h q_h(x_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{h,\ell=0}^{k} a_h a_\ell q_h(x_i) q_\ell(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2 \sum_{h=0}^{k} a_h \sum_{i=1}^{m} y_i q_h(x_i) +$$

$$+ \sum_{h,\ell=0}^{k} a_h a_\ell \sum_{i=1}^{m} q_h(x_i) q_\ell(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2 \sum_{h=0}^{k} a_h \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i q_h(x_i)}{\sum_{i=1}^{m} q_h^2(x_i)} \sum_{i=1}^{m} q_h^2(x_i) +$$

$$+ \sum_{h=0}^{k} a_h^2 \sum_{i=1}^{m} q_h^2(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2 \sum_{h=0}^{k} a_h a_h \sum_{i=1}^{m} q_h^2(x_i) +$$

$$+ \sum_{h=0}^{k} a_h^2 \sum_{i=1}^{m} q_h^2(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - \sum_{h=0}^{k} a_h^2 \sum_{i=1}^{m} q_h^2(x_i).$$

Entonces σ_k^2, también se puede expresar como:

$$\sigma_k^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i^2 - \sum_{h=0}^{k} a_h^2 \sum_{i=1}^{m} q_h^2(x_i)}{m-k-1}$$

y σ_{k+1}^2 sería:

$$\sigma_{k+1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i^2 - \sum_{h=0}^{k+1} a_h^2 \sum_{i=1}^{m} q_h^2(x_i)}{m-k-2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i^2 - \sum_{h=0}^{k} a_h^2 \sum_{i=1}^{m} q_h^2(x_i) - a_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{m} q_{k+1}^2(x_i)}{m-k-2}$$

$$= \frac{(m-k-1)\left[\sum_{i=1}^{m} y_i^2 - \sum_{h=0}^{k} a_h^2 \sum_{i=1}^{m} q_h^2(x_i)\right]}{(m-k-2) \quad (m-k-1)}$$

$$- \frac{a_{k+1}^2 < q_h , q_{k-1} >}{m-k-2}$$

$$= \frac{m-k-1}{m-k-2} \; \sigma_k^2 - \frac{a_{k+1}^2 < q_h , q_{k-1} >}{m-k-2}$$

Notamos que al utilizar polinomios ortogonales, desaparecen las principales dificultades que surgieron en el capítulo 1, con lo cual tenemos un nuevo camino para la solución de nuestro problema.

Relación del Tercer Término de Recurrencia

A pesar de las ventajas obtenidas al generar polinomios ortogonales por el método de ortogonalización de Gram-Schmidt aplicado a la base canónica, $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, observamos que el número de operaciones que se tienen que efectuar es bastante grande, ya que, requerimos de muchos productos interiores, por lo tanto, buscaremos otra base para tratar de reducir estos cálculos.

Esta nueva base, se generaría, tomando a la base ortogonal obtenida por el método de Gram-Schmidt, $\{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$, pero,donde el término aumentado, sería el último término multiplicado por x . Y aplicando nuevamente el proceso de Gram-Schmidt , o sea, para un grado i, tomar la base $\{q_0, q_1, \ldots, q_i, xq_i\}$ y aplicar el proceso de Gram-

Schmidt para obtener $\{q_\alpha, q_1, \ldots, q_i, q_{i+1}\}$.

Entonces, para obtener $\{q_\alpha, q_1\}$ tomamos $\{q_\alpha, xq_\alpha\}$ y vemos que:

$$q_1(x) = xq_\alpha(x) - \frac{\langle xq_\alpha, q_\alpha\rangle}{\langle q_\alpha, q_\alpha\rangle} q_\alpha(x)$$

sea

$$\alpha_1 = \frac{\langle xq_\alpha, q_\alpha\rangle}{\langle q_\alpha, q_\alpha\rangle}$$

entonces,

(6) $$q_1(x) = xq_\alpha(x) - \alpha_1 q_\alpha(x).$$

Para obtener $\{q_\alpha, q_1, q_2\}$ tomamos $\{q_\alpha, q_1, xq_1\}$ y vemos que:

$$q_2(x) = xq_1(x) - \frac{\langle xq_1, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} q_1(x) - \frac{\langle xq_1, q_\alpha\rangle}{\langle q_\alpha, q_\alpha\rangle} q_\alpha(x)$$

sean

$$\alpha_2 = \frac{\langle xq_1, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} \quad \text{y} \quad \beta_1 = \frac{\langle xq_1, q_1\rangle}{\langle q_\alpha, q_\alpha\rangle}$$

entonces,

(7) $$q_2(x) = xq_1(x) - \alpha_2 q_1(x) - \beta_1 q_\alpha(x)$$

Para obtener $\{q_\alpha, q_1, q_2, q_3\}$ tomamos $\{q_\alpha, q_1, q_2, xq_2\}$ y vemos que

$$(2.8)\quad q_3(x) = xq_2(x) - \frac{<xq_2,q_2>}{<q_2,q_2>} q_2(x) - \frac{<xq_2,q_1>}{<q_1, q_1>} q_1(x) - \frac{<xq_2,q_\alpha>}{<q_\alpha, q_\alpha>} q_\alpha(x),$$

pero el último término es cero, ya que,

$$<xq_2, q_\alpha> = \sum_{i=1}^{m} x_i q_2(x_i) q_\alpha(x_i) = \sum_{i=1}^{m} q_2(x_i) x_i q_\alpha(x_i) = <q_2, xq_\alpha>$$

ahora, despejando xq_α de (2.6) tenemos

$$<q_2, xq_\alpha> = <q_2, q_1> + \alpha_1 <q_2, q_\alpha>$$

pero cada sumando es cero por (2.2).

Entonces, si

$$\alpha_3 = \frac{<xq_2, q_2>}{<q_2, q_2>} \quad \text{y} \quad \beta_2 = \frac{<xq_2, q_1>}{<q_1, q_1>}$$

(2.8) quedaría como

$$(2.9)\qquad q_3(x) = xq_2(x) - \alpha_3 q_2(x) - \beta_2 q_1(x).$$

En general, para obtener $\{q_\alpha, q_1,\ldots,q_k\}$ de $\{q_\alpha, q_1,\ldots, q_{k-1}, xq_{k-1}\}$ vemos que:

$$(10)\; q_k(x) = xq_{k-1}(x) - \frac{\langle xq_{k-1}, q_{k-1}\rangle}{\langle q_{k-1}, q_{k-1}\rangle} q_{k-1}(x) - \frac{\langle xq_{k-1}, q_{k-2}\rangle}{\langle q_{k-2}, q_{k-2}\rangle} q_{k-2}(x)$$

$$- \frac{\langle xq_{k-1}, q_{k-3}\rangle}{\langle q_{k-3}, q_{k-3}\rangle} q_{k-3}(x) - \ldots - \frac{\langle xq_{k-1}, q_{\alpha}\rangle}{\langle q_{\alpha}, q_{\alpha}\rangle} q_{\alpha}(x)$$

donde, desde el cuarto término hasta el último son cero. Esto es fácil de demostrar si razonamos como en el paso anterior. Entonces, si,

$$\alpha_k = \frac{\langle xq_{k-1}, q_{k-1}\rangle}{\langle q_{k-1}, q_{k-1}\rangle} \quad y \quad \beta_{k-1} = \frac{\langle xq_{k-1}, q_{k-2}\rangle}{\langle q_{k-2}, q_{k-2}\rangle}$$

(2.10) quedaría como

$$(11)\; q_k(x) = xq_{k-1}(x) - \alpha_k q_{k-1}(x) - \beta_{k-1} q_{k-2}(x).$$

Si definimos $q_{-1}(x) = 0$ y $q_{\alpha}(x) = 1$ podremos fácilmente generar estos polinomios ortogonales utilizando la forma general (2.11). Y este método es conocido como Relación del Tercer Término de recurrencia, pues para generar un tercer término se necesitan conecer a los dos anteriores. Resumiendo, los polinomios ortogonales serían:

$$q_{\alpha}(x) = 1$$

$$q_1(x) = (x - \alpha_1)q_{\alpha}(x)$$

$$q_2(x) = (x - \alpha_2)q_1(x) - \beta_1 q_0(x)$$

....

$$q_{k+1}(x) = (x - \alpha_{k+1})q_k(x) - \beta_k q_{k-1}(x)$$

donde

$$\alpha_{i+1} = \frac{<xq_i, q_i>}{<q_i, q_i>}, \quad i = 0, 1, \ldots, k \tag{12}$$

y

$$\beta_i = \frac{<xq_i, q_{i-1}>}{<q_{i-1}, q_{i-1}>}, \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{13}$$

Ahora, comparemos el número de productos interiores y el número de multiplicaciones y divisiones que se tendrían que realizar en ambos métodos. El número de productos interiores a realizar utilizando el proceso de Gram-Schmidt es de $k(k+3)/2$, ya que para q_1 se necesitan 2, para q_2 se necesitan 3 y en general para q_k se necesitan $(k + 1)$, y por la relación del tercer término de recurrencia se necesitan 2 para cada polinomio q_i, para $i = 1, 2, \ldots k$, esto es, $2k$ productos interiores.

Al contar unicamente las multiplicaciones y divisiones - efectuadas por cada método, vemos que por el proceso de Gram-Schmidt se necesitan para q_1, $3m + 3$, y para q_i, para $i= 2, 3, \ldots k$, $3m + 5$, o sea, son $k(3m + 5) - 2$ multiplicaciones y divisiones, mientras que por la relación del tercer término de recurrencia son $k[(k + 3)(m + 1) + (k - 1)]/2$, ya que, para q_1 son $2(m + 1)$, para q_2 son $3(m + 1) + 1$ y en general para q_k son $(k + 1)(m + 1) + (k - 1)$.

Para apreciar mejor estas diferencias, supongamos que $m = 10$ y que $k = 8$, entonces, el número de productos interiores es de 44 para Gram-Schmidt y de 16 para la recurrencia del tercer término, y el número de multiplicaciones y divisiones es de 512 para Gram-Schmidt y de 278 para la recurrencia del tercer término, o sea, que por Gram-Schmidt es más o menos un 85% más de multiplicaciones y divisiones.

CAPITULO 3

IMPLEMENTACION PRACTICA DE LOS POLINOMIOS ORTOGONALES

Ortogonalidad de la Relación del Tercer Término de Recurrencia

Para saber si la relación del tercer término de recurrencia realmente genera polinomios ortogonales veremos que cumple las dos propiedades principales, las cuales demostraremos por inducción.

Primero probaremos que $q_0(x)$, $q_1(x), \ldots, q_k(x)$ están bien definidos y que son de grado exacto.

Si $k = 0$, es evidente que $q_0(x)$ es de grado cero. si $k = 1$,

$$q_1(x) = x - \Sigma x_i/m,$$

lo cual está bien definido y su grado es uno, ahora, suponiendo que $q_{k-2}(x)$ y $q_{k-1}(x)$ son de grado exacto $k - 2$ y $k - 1$ respectivamente, entonces, la definición

$$q_k(x) = xq_{k-1}(x) - \alpha_k q_{k-1}(x) - \beta_{k-1} q_{k-2}(x),$$

hace claramente a $q_k(x)$ de grado exacto k.

Demostrar que

$$\langle q_i, q_j \rangle = 0, \text{ para } i \neq j,$$

es equivalente a demostrar que

$$<q_k, q_i> = 0$$

si $i < k$, para cada k.

si $k = 0$, no hay nada que demostrar.

Si $k = 1$,

$$<q_1, q_0> = <x - \alpha_1, 1> = <x,1> - <\alpha_1, 1>$$

$$= <x,1> - \alpha_1 <1,1>$$

$$= <x,1> - \frac{<x,1>}{<1,1>} <1,1> = 0$$

Supongamos ahora que es cierto hasta $k - 1$, entonces

$$<q_k, q_{k-1}> = <xq_{k-1} - \alpha_k q_{k-1} - \beta_{k-1} q_{k-2}, q_{k-1}>$$

$$= <xq_{k-1}, q_{k-1}> - \alpha_k <q_{k-1}, q_{k-1}> - \beta_{k-1} <q_{k-2}, q_{k-1}>$$

$$= <xq_{k-1}, q_{k-1}> - \frac{<xq_{k-1}, q_{k-1}>}{<q_{k-1}, q_{k-1}>} <q_{k-1}, q_{k-1}> = 0$$

por la hipótesis y por la definición de α_k.

Por último si $i < k - 2$

$$<q_k, q_i> = <xq_{k-1} - \alpha_k q_{k-1} - \beta_{k-1} q_{k-2}, q_i>$$

$$= \langle xq_{k-1}, q_i\rangle - \alpha_k\langle q_{k-1}, q_i\rangle - \beta_{k-2}\langle q_{k-2}, q_i\rangle$$

$$= \langle xq_{k-1}, q_i\rangle$$

por la hipótesis de inducción, pero

$$\langle xq_{k-1}, q_i\rangle = \langle q_{k-1}, xq_i\rangle$$

$$= \langle q_{k-1}\ q_{i+1}\rangle + \alpha_{i+1}\langle q_{k-1}, q_i\rangle +$$

$$\beta_i\langle q_{k-1}, q_{i-1}\rangle = 0$$

ya que $i < k-2$ y por la hipótesis.

Algunas Modificaciones

Si en lugar de usar (2.13) para calcular β_k, utilizamos la forma alternante

(1) $$\beta_k = \langle q_k, q_k\rangle / \langle q_{k-1}, q_{k-1}\rangle,$$

la obtención de los polinomios ortogonales, se simplifica aún más. Pues, no necesitamos calcular $\langle q_k,\ q_k\rangle$ debido a que este producto interior se calculó para α_k. Para poder hacer esto, veremos que

$$\langle xq_k, q_{k-1}\rangle = \langle q_k, q_k\rangle.$$

Por un lado tenemos que

$$\langle xq_k, q_{k-1}\rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i q_k(x_i) q_{k-i}(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} q_k(x_i) x_i q_{k-1}(x_i)$$

$$= \langle q_k, xq_{k-1}\rangle,$$

y por el otro tenemos que

$$<q_k,q_k> = <q_k, xq_{k-1} - \alpha_k q_{k-1} - \beta_{k-1} q_{k-2}>$$

$$= <q_k, xq_{k-1}> - \alpha_k <q_k q_{k-1}> - \beta_{k-1} <q_k, q_{k-2}>$$

$$= <q_k, xq_{k-1}>$$

Otra modificación es que en lugar de usar la expresión (2.5) ara calcular a_k, usaremos la forma equivalente

2) $$a_k = <q_k, \bar{y} - P_{k-1}>/<q_k,q_k>$$

s equivalente, ya que

$$<q_k,\bar{y} - P_{k-1}> = <q_k,\bar{y}> - <q_k,P_{k-1}>$$

$$= <q_k,\bar{y}> - \sum_{j=0}^{k-1} a_j <q_k,q_j>$$

$$= <q_k,\bar{y}>$$

La forma (3.2) para calcular a_k, se comporta mejor numerica- ente, pues se esta calculando de tal forma que la expresión $_{k-1}(x) + a_k q_k(x)$ se aproxima a $\bar{y}$ lo mejor que se pueda; esto es, e escoge a_k tal que el término aumentado $a_k q_k(x)$ reduce el error - $P_{k-1}(x)$ tanto como se pueda.

La última modificación que harémos será al calcular σ_i, i = 0,1, ..k, que no las calcularémos con la fórmula recursiva.

$$\sigma_{k+1}^2 = [(m-k-1)/\sigma_k^2 - a_{k+1}^2 <q_k,q_k>]/(m-k-2),$$

pesar de ser una de las ventajas principales de los polinomios or ogonales, debido a que no nos proporciona la información necesaria para poder inferir acerca del grado adecuado, ya que, en algunos casos estas σ_i son negativas, como podemos apreciar en σ_5 y σ_6 del ejemplo 3. Y tampoco nos proporciona la información necesaria para saber mas o menos cuantos dígitos correctos tenemos en los coeficientes del polinomio ajustado, pues notamos que en los 4 ejemplos el número de dígitos correctos no coincide, ni se aproxima, con el número de dígitos correctos que predicen las σ_i adecuadas. Para comparar esto tomemos el ejmplo 1 en donde el número de dígitos correctos es de 9 y σ_3 nos indica que únicamente tenemos 4 ó 5.

Las σ_i calculadas con la fórmula recursiva y utilizando los mismos ejemplos del capítulo 1 se encuentran en la siguiente hoja y los coeficientes se encuentran en la tabla 3.2.

Por lo tanto, preferimos utilizar la fórmula directa

$$\sigma_{k+1}^2 = [\sum_{i=1}^{m}(y_i - P_{k+1}(x_i))^2]/(m-k-2)$$

para calcular σ_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, pues a pesar de que el número de operaciones es mayor, nos proporciona una medida del error más fidedigna del ajuste realizado. Las σ_i calculadas directamente se encuentran en la tabla 3.1.

Algoritmo en Lenguaje Informal

A continuación presentamos un algoritmo en lenguaje informal que calcula el polinomio $P_k(x)$ de mejor grado, tomando en cuenta las modificaciones que acabamos de realizar. Donde $P_k(x)$ es una

EJEMPLO I

LAS SIGMAS AL CUADRADO SON:

2.05765312500E+03	3.45881250004E+02	1.20656250045E+01
4.65661287310E-09	5.43271501861E-09	

EJEMPLO 2

LAS SIGMAS AL CUADRADO SON:

9.35795300000E+06	2.78527773334E+06	2.83912200012E+05
5.88342858888E+03	1.91529591878E-05	2.29835510254E-05

EJEMPLO 3

LAS SIGMAS AL CUADRADO SON:

9.40715860400E+11	3.26684768532E+11	4.91504262045E+10
2.59801743153E+09	2.75934207656E+07	-8.14010416672E+00
-8.72154017896E+00		

EJEMPLO 4

LAS SIGMAS AL CUADRADO SON:

3.16548749316E+14	1.72187948113E+14	5.88504882768E+13
1.20763721352E+13	1.37906423491E+12	7.70981547648E+10
1.66113138172E+09	7.70182701920E+06	8.08551236984E+03
8.82055894872E+03		

combinación lineal de los polinomios ortogonales generados por la relación del tercer término de recurrencia.

Dados los puntos (x_i, y_i), $i = 1,2,\ldots,$ m y Epsilon, y definiendo los polinomios $q_{-1}(x) = 0$ y $q_0(x) = 1$, para poder hacer uso de la relación de recurrencia. Este algoritmo determina el grado adecuado (κA), α_i, $i = 1,2,\ldots$ κA, β_i, $i = 0,1,\ldots,$κA-1, δ_i y σ_i^2, $i = 0,1,\ldots$κA.

1) Para $i = 1,2,\ldots,m$

   1) $p_i \longleftarrow 0$

   2) $q_i \longleftarrow 1$

2) $w_0 \longleftarrow \sum_{i=1}^{m} q_i y_i$

3) $w_{00} \longleftarrow \sum_{i=1}^{m} q_i^2$

4) $\delta_0 \longleftarrow w_0/w_{00}$

5) $\sigma_0^2 \longleftarrow \sum_{i=1}^{m} (y_i - PE_0)^2/(m-1)$

6) $\alpha_1 \longleftarrow \sum_{i=1}^{m} x q_i^2/w_{00}$

7) $\beta_0 \longleftarrow 0$

8) $\gamma_i \longleftarrow (x_i - \alpha_1)q_i$

9) Para $k = 1,2,\ldots, m-3$

   1) $w_T \longleftarrow w_{00}$

   2) $w_{00} \longleftarrow \sum_{i=1}^{m} \gamma_i^2$

3) $w_0 \longleftarrow \sum_{i=1}^{m}(y_i - PE_{k-1})$

4) $\delta_k \longleftarrow w_0/w_{00}$

5) $\sigma_k^2 \longleftarrow \sum_{i=1}^{m}(y_i - PE_k)^2/\ (m-k-1)$

6) ¿Es $\sigma_k^2 > \sigma_{k-1}^2$ ó $|\sigma_k^2 - \sigma_{k-1}^2| \leq$ Epsilon ?

   1) $\kappa A \longleftarrow k$ (grado adecuado)

   2) Alto

7) $\alpha_k \longleftarrow \sum_{i=1}^{m} x_i q_i^2\ /\ w_{00}$

8) $\beta_k \longleftarrow w_T/w_{00}$

9) Para $i = 1,2,\ldots,m$

   1) $p_i \longleftarrow q_i$

   2) $q_i \longleftarrow \gamma_i$

   3) $\gamma_i \longleftarrow (x_i - \alpha_k)q_i - \beta_k p_i$

Algoritmo 1.

Representación en Base Canónica

Debido a que la gente no está muy familiarizada con la representación de un polinomio como combinación lineal de polinomios ortogonales (base no usual) y por el hecho de poder analizar más claramente los resultados obtenidos con el ajuste de polinomios ortogonales es preferible expresar estos polinomios como combinación lineal de potencias de x. Esto es, pasar de

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \delta_i q_i(x)$$

a

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Para hacer esta transformación, utilizaremos la misma ecuación recursiva (2.11) con la que calculamos los polinomios ortogonales:

(3) $$q_i(x) = xq_{i-1}(x) - \alpha_i q_{i-1}(x) - \beta_{i-1} q_{i-2}(x).$$

Como el conjunto de todos los polinomios de grado $\leq n$ constituye un espacio vectorial, podemos representar cualquier polinomio de grado n como un vector con $n + 1$ componentes, esto es, $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ donde a_i es el coeficiente de x^i, $i = 0,1, \ldots, n$.

Entonces, si definimos

$$q_0(x) = (1,0,\ldots,0)$$

y

$$q_1(x) = (-\alpha_1, 1, \ldots, 0)$$

y como ya conocemos el grado adecuado, α_i, β_i y δ_i fácilmente podrémos obtener su representación en potencias de x, ya que para obtener los siguientes polinomios ortogonales solo basta aplicar la ecuación (3.3), donde para tener $xq_{i-1}(x)$ únicamente es necesario recorrer las componentes de $q_{i-1}(x)$ un lugar a la derecha y hacer cero la primera componente, multiplicar $q_{i-1}(x)$ por $-\alpha_i$ y multiplicar $q_{i-2}(x)$ por $-\beta_{i-1}$ y sumar componente a componente a componente estos 3 vectores. Después multiplicamos cada polinomio ortogonal por su respectivo coeficiente (δ_i) y así, al sumar componente a componente todos los vectores, obtenemos la representación en base canónica.

A continuación presentamos un algoritmo en lenguaje informal que lleva a cabo lo descrito en los parrafos anteriores.

Dados $\kappa A \geq 1$ (grado adecuado), α_i, $i = 1,2,\ldots \kappa A$, β_i, $i = 0,1,\ldots \kappa A - 1$, y δ_i, $i = 0,1,\ldots,\ldots \kappa A$. Transforma el polinomio ortogonal a la base canónica.

1) $q_0 \longleftarrow (1,0,\ldots, 0)$

2) $q_1 \longleftarrow (-\alpha_1,1,\ldots, 0)$

3) POLX $\longleftarrow \delta_0 q_0 + \delta_1 q_1$

4) Para $i = 2,3,\ldots,\kappa A$

   1) $q_i \longleftarrow (0, q_{i-1})$

   2) $q_i \longleftarrow q_i - \alpha_i q_{i-1} - \beta_{i-1} q_{i-2}$

   3) POLX $\longleftarrow$ POLX $+ \delta_i q_i$

Algoritmo 2.

Los algoritmos 3.1 y 3.2 están codificados en un programa en lenguaje Algol como los procesos APOVCM y TRANSF respectivamente, y se encuentran en el apéndice III. En este programa también se incluyen otros dos procesos que son: PRODIN, que calcula el producto interior de 2 vectores y, HORNER, que evalúa el polinomio en n puntos por el método de Horner. La codificación fué hecha en algol únicamente por tener la ventaja de poder declarar los arreglos variables.

Cambio de Intervalo

Sabemos que los polinomios ortogonales son de grado exacto, esto es,

$q_n(x) = \gamma_n x^n$ + potencias menores, con $\gamma_n \neq 0$. Y que los errores en un sistema punto flotante son sensibles al redondeo, entonces, al evaluar $q_n(x_i)$ y al calcular los productos interiores $<q_n, q_n>$ (que son necesarios para obtener α_n, β_{n-1} y δ_n), si x_i es "grande" los errores tienden a "dispararse" según n vaya creciendo, o sea, que si $x_i \in [ax, bx]$ donde ax ó bx es "grande" los errores serán mayores mientras el grado del polinomio ajustado sea mayor. Por esta razón, decidimos cambiar al intervalo $[0,1]$ donde este error es menor debido al sistema punto flotante. Entonces transformaremos las abscisas del intervalo $[ax, bx]$ al intervalo $[0,1]$, esto es, en vez de tener datos (x_i, y_i) para $x_i \in [ax, bx]$, tendrémos datos (t_i, y_i) para $t_i \in [0,1]$, o sea,

$$T: x_i \in [ax, bx] \rightarrow t_i \in [0,1]$$

$$T(x_i) = t_i$$

Donde además, T es invertible

$$T^{-1}: t_i \in [0,1] \rightarrow x_i \in [ax, bx]$$

$$T^{-1}(t_i) = x_i$$

Nuestro polinomio quedaría como

$$P_n(T(x)) = P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i' x^i$$

donde a_i' no necesariamente es igual a a_i, pero podríamos aplicar T^{-1} para obtener a_i, esto es,

$$P_n(T^{-1}(t)) = P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

aunque esta última transformación no la realizaremos.

En vista de esto; se probaron en el intervalo $[0,1]$ los mismos 4 ejemplos para el mismo número de puntos pero con las y_i generadas en este intervalo, con los 3 códigos, los resultados se encuentran en sus respectivos apéndices.

En los métodos del capítulo 1 notamos que en los ejemplos 1 y 2 los resultados son casi los mismos, pues mientras en el intervalo $[0,1]$ son mejores los coeficientes de grado menor, en el intervalo $[ax, bx]$ son mejores los de grado mayor, en los ejemplos 3 y 4 los coeficientes mejoran en el intervalo $[0,1]$, utilizando DECOMP y SOLVE- aunque en el ejemplo 4 la σ adecuada nos indica que debemos tener 6 ó 7 dígitos correctos y en algunos coeficientes solo tenemos 3, y en el ejemplo 4 utilizando CHOLY 1 nos indica que la matriz no es diagonal dominante, esto se debe a la gran cantidad de operaciones que tenemos que efectuar.

En el método de polinomios ortogonales, notamos que los coeficientes de los ejemplos 1 y 2 mejoran un poco, pues no hay mucha diferencia, pero en los ejemplos 3 y 4 tienen una gran mejoría.

	Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
Intervalo	[0,5]	[0,10]	[0,20]	[0,10]
Número de Puntos	11	11	21	21
Incremento	0.5	1	1	0.5
σ_0	2057.653125	9357953	9.407158604 $\times 10^{11}$	3.16548749316 $\times 10^{14}$
σ_1	345.881249998	2785277.73334	3.26684768539 $\times 10^{11}$	1.7218794811 $\times 10^{14}$
σ_2	12.0656249999	283912.200005	4.91504262143 $\times 10^{10}$	5.88504882696 $\times 10^{13}$
σ_3	8.59936964808 $\times 10^{-21}$	5883.42857216	2.59801744 $\times 10^{9}$	1.20763721286 $\times 10^{13}$
σ_4	9.33776620824 $\times 10^{-21}$	1.74339709336 $\times 10^{-16}$	2.75934285613 $\times 10^{7}$	1.3790642284 $\times 10^{12}$
σ_5		2.07571268252 $\times 10^{-16}$	8.8807516896 $\times 10^{-12}$	7.70981480872 $\times 10^{10}$
σ_6			9.18407316504 $\times 10^{-12}$	1.6611244137 $\times 10^{9}$
σ_7				7.69436097648 $\times 10^{6}$
σ_8				2.21919588399 $\times 10^{-8}$
σ_9				2.42064509543 $\times 10^{-8}$

TABLA 1

	Ejemplo 1		Ejemplo 2		Ejemplo 3		Ejemplo 4	
	Real	Calculado	Real	Calculado	Real	Calculado	Real	Calculado
α_0	-1	-1.00000000001	-1	-1.00000002133	1	.999999521414	-1	-.999944717653
α_1	2	2.00000000024	-4	-3.99999999375	1	.999997636651	-1	-.99998809841
α_2	0	$-.123691279441 \times 10^{-9}$	3	3.00000000252	1	1.00000102946	1	.999819103909
α_3	1	1.00000000001	-1	-1.00000000084	1	.999999861848	0	$1.46830326869 \times 10^{-4}$
α_4			1	1.00000000006	1	1.00000000881	-3	-3.00005034329
α_5					1	.999999999814	5	5.0000091922
α_6							-2	-2.00000093009
α_7							-3	-2.99999995122
α_8							1	.999999998974

TABLA 2

Comentarios

Para darnos cuenta del grado máximo en el cual el polinomio nos proporciona un ajuste "adecuado", se tomaron polinomios al azar (coeficientes generados aleatoriamente), 51 abscisas igualmente espaciadas en el intervalo [0,1] y se evaluaron estos polinomios en cada abscisa x_i para tener las ordenadas (y_i). Se empezó generando un polinomio de grado 9, después un polinomio de grado 10 y así sucesivamente hasta uno de grado 18, en donde nos dimos cuenta que el ajuste ya no era adecuado, pues nos indicaba que el grado adecuado era 17, de aquí, que nuestro código nos indica una predicción de grado correcto hasta 17, pero en la mayoría de los coeficientes del polinomio ajustado de grado 17 había errores de algunas decenas. Al comparar el ajuste de grado 16, notamos en algunos coeficientes errores de unidades, en los ajustes de grados 14 y 15 tenemos cuando menos un dígito correcto en los coeficientes, en el de grado 13 cuando menos 2 y en el de 12 cuando menos 3.

Entonces, podemos decir que tenemos un "buen" ajuste hasta un polinomio de grado 13, aceptable para 14 y 15 y malo a partir de 16.

Una desventaja que tenemos al usar el intervalo [0,1] para grados altos, es que la σ adecuada no nos indica el número de dígitos correctos, ya que en todos los polinomios generados al azar, según la σ adecuada deberíamos tener 8 ó 9 dígitos correctos y por ejemplo en el de grado 17, la mayoría de los coeficientes no tienen ni uno, la principal razón de esta discrepancia es debido a la transformación del polinomio como combinación lineal de polinomios ortogonales a potencias de x, pues el número de operaciones que se efectúan para esta transformación es de $3(n+1)(n+2)/2-8$ multiplicaciones y el mismo número de sumas, o sea, que para un polinomio de grado 15 se requieren 400 multiplicaciones y 400 sumas.

Se probaron los mismos polinomios generados al azar con el mismo código, pero utilizando doble precisión y los resultados obtenidos nos indican, que para el ajuste de datos por medio de polinomios ortogonales no es conveniente el uso de doble precisión, pues a pesar de que la predicción del grado correcto aumenta en uno, los coeficientes son casi los mismos que al utilizar precisión simple.

Todos los ejemplos de este trabajo fueron probados únicamente con una computadora Burroughs B6700, que trabaja un sistema punto flotante normalizado en base 8, con 13 dígitos y exponente mayor o igual que -51 y, menor o igual que 77.

En el apéndice IV, se presenta un listado en Fortran y en Algol de un método para generar números normalmente distribuidos. Los cuales se utilizan para perturbar los ordenes de los ejemplos del apéndice I y del apéndice III.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA

[1] Wilks S.S. *Mathematical Statistics.*
Princeton Univ. Press. 1943.

[2] Forsythe G. E., Malcom M.A., Moler C. B.
Computer Methods for Mathematical Computations.
Prentice-Hall 1977.

[3] Stewart G.W. *Introduction to Matrix Computations.*
Academic Press. 1973

[4] Wampler R.H. *A Report on the Accuracy of Some Widely Used Least Squares Computer Programs.*
Journal ASA 1970

[5] Kahan W. *Numerical Linear Algebra*
Canadian Math. Bull. 9 1966

[6] Forsythe G. E. *Generation and use of Orthogonal Poynomials for Data-Fitting with a Digital Computer.*
SIAM 5 1957

[7] Shampine L.F. *Discrete Least Squares Polynomials Fits.*
ACM 18 1975

[8] Shampine L.F., Allen R.C. *Numerical Computing: (An Introduction)*
W. B. Saunders Company 1973

APENDICE I

```
C*%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
C*   ESTE PROGRAMA RESUELVE EL PROBLEMA DE AJUSTE DE DATOS POR
C*   MEDIO DE LAS ECUACIONES NORMALES. EN LA MATRIZ A  GUARDA-
C*   MOS LA MATRIZ X'X Y EN EL VECTOR B EL VECTOR X'Y. COPIAN-
C*   DOLAS EN LA MATRIZ C Y EN EL VECTOR D RESPECTIVAMENTE, PA
C*   RA LLAMAR A DECOMP Y SOLVE, YA QUE, SI NO SE HACE ASI, SE
C*   PERDERIA ESTA INFORMACION Y SE TENDRIA QUE CALCULAR A Y B
C*   PARA CADA GRADO. Y DE ESTA FORMA SOLO SE NECESITA  CALCU-
C*   LAR LA ULTIMA COLUMNA DE A (COPIANDOLA EN EL ULTIMO  REN-
C*   GLON) Y EL ULTIMO ELEMENTO DE B.
C*
       INTEGER IPVT(22)
       REAL A(22,22),B(22),C(22,22),D(22),E(10),X(22),Y(22)
       REAL WORK(22), V(22),F(10),TEMP1(22),TEMP2(22),INC
       NDIM=22
C*   LEE M(NUMERO DE PUNTOS) Y DELTA(CANTIDAD PARA
C*      DECIDIR CUANDO DETENER EL PROCESO).
       READ(5,/)M,DELTA
C*   LEE LAS ABSCISAS DATOS.
       READ(5,/) (X(I), I=1,M)
C*   LEE LAS ORDENADAS DATOS.
       READ(5,/) (Y(I), I=1,M)
C*   IMPRIME LOS DATOS.
       WRITE(6,1)
       WRITE(6,2) (X(I),I=1,M)
       WRITE(6,3)
       WRITE(6,2) (Y(I),I=1,M)
C*   INICIALIZA LAS VARIABLES.
       K=0
       YI=0.0
       SIGMA1=0.0
       DO 10 I=1,M
       B(I)=0.0
       D(I)=0.0
       TEMP1(I)=1.0
       DO 10 J=1,M
       A(I,J)=0.0
    10 C(I,J)=0.0
C*   CALCULA LAS ECUACIONES NORMALES DE GRADO 0.
       DO 20 I=1,M
    20 YI=YI+Y(I)
       B(1)=YI/M
C*   CALCULA  SIGMA CERO.
       DO 30 I=1,M
    30 SIGMA1=SIGMA1+(Y(I)-B(1))**2
       SIGMA1=SIGMA1/(M-1)
       MI=0
#
```

```
          A(1,1)=M
          D(1)=B(1)
          B(1)=YI
          WRITE(6,4)
C*    CALCULOS GENERALES.
C*    ALMACENA LOS COEFICIENTES DEL GRADO ANTERIOR.
   40     DO 50 J=1,K+1
   50     F(J)=D(J)
          K=K+1
C*    CALCULA LA ULTIMA COLUMNA DE A.
          DO 80 J=1,K+1
          IF (J+MI-1. NE.K) GO TO 70
        . DO 60 II=1,M
   60     TEMP2(II)=TEMP1(II)
   70     DO 80 I=1,M
          TEMP1(I)=TEMP1(I)*X(I)
   80     A(J,K+1)=A(J,K+1)+TEMP1(I)
C*    COPIA LA ULTIMA COLUMNA DE A EN EL ULTIMO RENGLON.
          DO 90 J=1,K
   90     A(K+1,J)=A(J,K+1)
C*    CALCULA EL ULTIMO ELEMENTO DE B.
        · DO 95 I=1,M
   95     B(K+1)=B(K+1)+Y(I)*TEMP2(I)
C*    COPIA LA MATRIZ A.
          DO·85 J=1,K+1
          DO 85 L=1,K+1
   85     C(J,L)=A(J,L)
C*    COPIA EL VECTOR B.
          DO 75 J=1,K+1
   75     D(J)=B(J)
C*    LLAMA A DECOMP PARA HACER LA ELIMINACION GAUSIANA.
          CALL DECOMP(NDIM,K+1,C,COND,IPVT,WORK)
          IF (COND. EQ. .1E33) GO TO 35
C*    LLAMA A SOLVE PARA HACER LA SUSTITUCION RECURSIVA.
          CALL SOLVE(NDIM,K+1,C,D,IPVT)
C*    INVIERTE EL ORDEN DE LOS COEFICIENTES CALCULADOS.
          DO 65 I=1,K+1
          E(I)=D(K+2-I)
   65     V(I)=0
C*    LLAMA A HORNER PARA EVALUAR EL POLINOMIO.
          CALL HORNER(X,V,E,M,K+1)
C*    CALCULA SIGMA I.
          DO 55 J=1,M
   55     SIGMA2=SIGMA2+(Y(J)-V(J))**2
          SIGMA2=SIGMA2/(M-K-1)
          DIF=ABS(SIGMA2-SIGMA1)
C*    COMPARA LAS SIGMAS.
          IF (DIF. LE. DELTA)GO TO 25
          IF (SIGMA2. GT. SIGMA1) GO TO 15
          SIGMA1=SIGMA2
          SIGMA2=0.0
          IF (K. GE. 10) GO TO 25
$
```

```
      A(1,1)=M
      D(1)=B(1)
      B(1)=YI
      WRITE(6,4)
C*   CALCULOS GENERALES.
C*   ALMACENA LOS COEFICIENTES DEL GRADO ANTERIOR.
   40 DO 50 J=1,K+1
   50 F(J)=D(J)
      K=K+1
C*   CALCULA LA ULTIMA COLUMNA DE A.
      DO 80 J=1,K+1
      IF (J+MI-1. NE.K) GO TO 70
      DO 60 II=1,M
   60 TEMP2(II)=TEMP1(II)
   70 DO 80 I=1,M
      TEMP1(I)=TEMP1(I)*X(I)
   80 A(J,K+1)=A(J,K+1)+TEMP1(I)
C*   COPIA LA ULTIMA COLUMNA DE A EN EL ULTIMO RENGLON.
      DO 90 J=1,K
   90 A(K+1,J)=A(J,K+1)
C*   CALCULA EL ULTIMO ELEMENTO DE B.
      DO 95 I=1,M
   95 B(K+1)=B(K+1)+Y(I)*TEMP2(I)
C*   COPIA LA MATRIZ A.
      DO 85 J=1,K+1
      DO 85 L=1,K+1
   85 C(J,L)=A(J,L)
C*   COPIA EL VECTOR B.
      DO 75 J=1,K+1
   75 D(J)=B(J)
C*   LLAMA A DECOMP PARA HACER LA ELIMINACION GAUSIANA.
      CALL DECOMP(NDIM,K+1,C,COND,IPVT,WORK)
      IF (COND. EQ. .1E33) GO TO 35
C*   LLAMA A SOLVE PARA HACER LA SUSTITUCION RECURSIVA.
      CALL SOLVE(NDIM,K+1,C,D,IPVT)
C*   INVIERTE EL ORDEN DE LOS COEFICIENTES CALCULADOS.
      DO 65 I=1,K+1
      E(I)=D(K+2-I)
   65 V(I)=0
C*   LLAMA A HORNER PARA EVALUAR EL POLINOMIO.
      CALL HORNER(X,V,E,M,K+1)
C*   CALCULA SIGMA I.
      DO 55 J=1,M
   55 SIGMA2=SIGMA2+(Y(J)-V(J))**2
      SIGMA2=SIGMA2/(M-K-1)
      DIF=ABS(SIGMA2-SIGMA1)
C*   COMPARA LAS SIGMAS.
      IF (DIF. LE. DELTA)GO TO 25
      IF (SIGMA2. GT. SIGMA1) GO TO 15
      SIGMA1=SIGMA2
      SIGMA2=0.0
      IF (K. GE. 10) GO TO 25
```

```
      MI=MI+1
      DO 45 I=1,M
   45 TEMP1(I)=TEMP2(I)
C*   REGRASA PARA HACER LOS CALCULOS DEL GRADO SIGUIENTE.
      GO TO 40
C*   IMPRIME RESULTADOS.
   35 WRITE(6,5)K
      GO TO 12
   25 WRITE(6,6)
      GO TO 12
   15 WRITE(6,7)
   12 WRITE(6,8)K-1
C*   IMPRIME SIGMA I.
      WRITE(6,9)SIGMA1
C*   IMPRIME LOS COEFICIENTES.
      WRITE(6,11)
      WRITE(6,2)(F(L),L=1,K)
    1 FORMAT(/,5X,'LAS ABSCISAS DATOS SON:',/)
    2 FORMAT(3G21.11)
    3 FORMAT(/,5X,'LAS ORDENADAS DATOS SON:',/)
    4 FORMAT(/,5X,'CRITERIO SELECCIONADO ',
     -'PARA DETERMINAR EL GRADO:',/)
    5 FORMAT(/,5X,'LA MATRIZ ES SINGULAR PARA K= ',I3)
    6 FORMAT(/,10X,'!SIGMA I - SIGMA I+1!<= DELTA')
    7 FORMAT(/,10X,'SIGMA I+1>SIGMA I')
    8 FORMAT(/,5X,'EL GRADO ADECUADO ES:',I5)
    9 FORMAT(/,5X,'SIGMA AL CUADRADO ES:',G21.11)
   11 FORMAT(/,5X,'LOS COEFICIENTES SON',
     -'(DE GRADO MENOR A MAYOR):',/)
      CALL EXIT
      END
C*%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
      SUBROUTINE HORNER(X,Y,E,M,NC)
C*
C*   ESTA SUBRUTINA EVALUA POLINOMIOS POR EL METODO DE HORNER.
C*
C*                         PARAMETROS DE ENTRADA:
C*                X   VECTOR QUE CONTIENE LOS PUNTOS A EVALUAR.
C*                E   VECTOR CON LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO.
C*                M   NUMERO DE PUNTOS.
C*               NC   NUMERO DE COEFICIENTES.
C*
C*                          PARAMETRO DE SALIDA:
C*                Y   VECTOR QUE CONTIENE EL POLINOMIO EVALUADO.
C*
      DIMENSION X(M),Y(M),E(NC)
      DO 100 I=1,M
      Y(I)=E(1)
      DO 100 J=2,NC
  100 Y(I)=(Y(I)*X(I))+E(J)
      RETURN
      END
#
```

```
C*%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
      SUBROUTINE DECOMP(NDIM,N,A,COND,IPVT,WORK)
C*   ESTA SUBRUTINA HACE LA ELIMINACION GAUSIANA  CON  PIVOTEO
C*   PARCIAL Y ESTIMA EL NUMERO DE CONDICION. N ES EL ORDEN DE
C*   LA MATRIZ, A DE ENTRADA CONTIENE LA MATRIZ A SER TRIANGU-
C*   LARIZADA Y DE SALIDA LA MATRIZ YA TRIANGULARIZADA U, Y EN
C*   LA PARTE INFERIOR CONTIENE A LOS MULTIPLICADORES, EL VEC-
C*   TOR IPVT GUARDA EL NUMERO DEL RENGLON PIVOTE Y EN EL ULTI
C*   MO ELEMENTO (IPVT(N)) UN 1 O UN -1, DEPENDIENDO DEL NUME-
C*   RO DE INTERCAMBIOS, WORK ES UN VECTOR QUE SIRVE PARA GUAR
C*   DAR ALGUNAS VARIABLES QUE UTILIZA.
C*
C*                    PARAMETROS DE ENTRADA:
C*               A    MATRIZ QUE CONTIENE X'X.
C*             NDIM   DIMENSION DE LA MATRIZ A.
C*               N    DIMENSION DE LA MATRIZ U.
C*
C*                    PARAMETROS DE SALIDA:
C*               A    EN LA PARTE SUPERIOR CONTIENE LA MATRIZ U.
C*             COND   NUMERO DE CONDICION.
C*             IPVT   VECTOR QUE CONTIENE LOS RENGLONES PIVOTE.
C*             WORK   PROPORCIONA ALMACEN DE TRABAJO.
C*
      DIMENSION A(NDIM,1),IPVT(N),WORK(N)
      IPVT(N)=1
      IF (N. EQ. 1) GO TO 45
      NM1=N-1
C*   CALCULA LA NORMA DE A.
      ANORM=0.0
      DO 20 J=1,N
      T=0.0
      DO 10 I=1,N
   10 T=T+ABS(A(I,J))
   20 IF (T. GT. ANORM) ANORM=T
C*   HACE LA ELIMINACION GAUSIANA CON PIVOTEO PARCIAL.
      DO 70 K=1,NM1
      KP1=K+1
C*   ENCUENTRA EL PIVOTE.
      M=K
      DO 30 I=KP1,N
   30 IF (ABS(A(I,K)). GT. ABS(A(M,K)))  M=I
      IPVT(K)=M
      IF (M. NE. K) IPVT(N)=-IPVT(N)
      T=A(M,K)
      A(M,K)=A(K,K)
      A(K,K)=T
      IF (T. EQ. 0.0)  GO TO 70
C*   CALCULA LOS MULTIPLICADORES.
      DO 40 I=KP1,N
   40 A(I,K)=-A(I,K)/T
C*   INTERCAMBIA Y ELIMINA POR COLUMNAS.
      DO 60 J=KP1,N
```

```
          T=A(M,J)
          A(M,J)=A(K,J)
          A(K,J)=T
          IF (T. EQ. 0.0) GO TO 60
          DO 50 I=KP1,N
      50  A(I,J)=A(I,J)+A(I,K)*T
      60  CONTINUE
      70  CONTINUE
C*    RESUELVE  A'Y=E.
          DO 95 K=1,N
          T=0.0
          IF (K. EQ. 1) GO TO 90
          KM1=K-1
          DO 80 I=1,KM1
      80  T=T+A(I,K)*WORK(I)
      90  EK=1.0
          IF (T. LT. 0.0)  EK=-1.0
          IF (A(K,K). EQ. 0.0) GO TO 35
      95  WORK(K)=-(EK+T)/A(K,K)
          DO 75 KB=1,NM1
          K=N-KB
          T=WORK(K)
          KP1=K+1
          DO 85 I=KP1,N
      85  T=T+A(I,K)*WORK(I)
          WORK(K)=T
          M=IPVT(K)
          IF (M. EQ. K) GO TO 75
          T=WORK(M)
          WORK(M)=WORK(K)
          WORK(K)=T
      75  CONTINUE
          YNORM=0.0
          DO 65 I=1,N
      65  YNORM=YNORM+ABS(WORK(I))
C*    LLAMA A SOLVE PARA RESOLVER AZ=Y.
          CALL SOLVE(NDIM,N,A,WORK,IPVT)
          ZNORM=0.0
          DO 55 I=1,N
      55  ZNORM=ZNORM+ABS(WORK(I))
C*    ESTIMA EL NUMERO DE CONDICION.
          COND=ANORM*ZNORM/YNORM
          IF (COND. LT. 1.0)  COND=1.0
          RETURN
      45  COND=1.0
          IF (A(1,1). NE. 0.0) RETURN
      35  COND=1.0E32
          RETURN
          END
C*%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
          SUBROUTINE SOLVE(NDIM,N,A,B,IPVT)
C*    ESTA SUBRUTINA HACE LA SUSTITUCION HACIA ATRAS, ESTO  ES,
```

```
C*   RESUELVE EL SISTEMA AX=B, PERO ANTES REALIZA LAS OPERACIO
C*   NES QUE HIZO CON LA MATRIZ A AL VECTOR B. A ES  LA MATRIZ
C*   OBTENIDA POR DECOMP, EL VECTOR B TIENE DE ENTRADA AL VEC-
C*   TOR X'Y Y DE SALIDA LA SOLUCION DEL SISTEMA.
C*
C*                   PARAMETROS DE ENTRADA:
C*           A    CONTIENE A LA MATRIZ U.
C*         NDIM   DIMENSION DE LA MATRIZ A.
C*           N    DIMENSION DE LA MATRIZ U.
C*           B    VECTOR CON EL LADO DERECHO  DEL SISTEMA.
C*
C*                   PARAMETRO DE SALIDA:
C*           B    VECTOR CON LA SOLUCION DEL SISTEMA.
C*
       DIMENSION A(NDIM,1),B(N),IPVT(N)
C*   HACE OPERACIONES CON B.
       IF(N. EQ. 1) GO TO 30
       NM1=N-1
       DO 10 K=1,NM1
       KP1=K+1
       M=IPVT(K)
       T=B(M)
       B(M)=B(K)
       B(K)=T
       DO 10 I=KP1,N
   10  B(I)=B(I)+A(I,K)*T
C*   HACE LA SUSTITUCION HACIA ATRAS.
       DO 20 KB=1,NM1
       KM1=N-KB
       K=KM1+1
       B(K)=B(K)/A(K,K)
       T=-B(K)
       DO 20 I=1,KM1
   20  B(I)=B(I)+A(I,K)*T
   30  B(1)=B(1)/A(1,1)
       RETURN
       END
C*%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

EJEMPLO 1:

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	0.50000000000	1.0000000000
1.5000000000	2.0000000000	2.5000000000
3.0000000000	3.5000000000	4.0000000000
4.5000000000	5.0000000000	

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.0000000000	0.12500000000	2.0000000000
5.3750000000	11.000000000	19.625000000
32.000000000	48.875000000	71.000000000
99.125000000	134.00000000	

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

¦SIGMA I - SIGMA I+1¦<= DELTA

EL GRADO ADECUADO ES: 3

SIGMA AL CUADRADO ES: .47816985653E-17

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-0.99999999864	2.0000000036	-.27216899141E-08
1.0000000004		

EJEMPLO 2:

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	1.0000000000	2.0000000000
3.0000000000	4.0000000000	5.0000000000
6.0000000000	7.0000000000	8.0000000000
9.0000000000	10.000000000	

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.0000000000	-2.0000000000	11.000000000
68.000000000	223.00000000	554.00000000
1163.0000000	2176.0000000	3743.0000000
6038.0000000	9259.0000000	

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

!SIGMA I - SIGMA I+1!<= DELTA

EL GRADO ADECUADO ES: 4

SIGMA AL CUADRADO ES: .26400122850E-11

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-0.99999727883	-4.0000043531	3.0000013599
-1.0000001460	1.0000000050	

EJEMPLO 3:

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	1.0000000000	2.0000000000
3.0000000000	4.0000000000	5.0000000000
6.0000000000	7.0000000000	8.0000000000
9.0000000000	10.000000000	11.000000000
12.000000000	13.000000000	14.000000000
15.000000000	16.000000000	17.000000000
18.000000000	19.000000000	20.000000000

LAS ORDENADAS DATOS SON:

1.0000000000	6.0000000000	63.000000000
364.00000000	1365.0000000	3906.0000000
9331.0000000	19608.000000	37449.000000
66430.000000	111111.00000	177156.00000
271453.00000	402234.00000	579195.00000
813616.00000	1118481.0000	1508598.0000
2000719.0000	2613660.0000	3368421.0000

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

SIGMA I+1>SIGMA I

EL GRADO ADECUADO ES: 5

SIGMA AL CUADRADO ES: .24231509666E-04

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

0.99216991470	1.0164238964	0.99391626830
1.0008173053	0.99995441372	1.0000008981

EJEMPLO 4:

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	0.50000000000	1.0000000000
1.5000000000	2.0000000000	2.5000000000
3.0000000000	3.5000000000	4.0000000000
4.5000000000	5.0000000000	5.5000000000
6.0000000000	6.5000000000	7.0000000000
7.5000000000	8.0000000000	8.5000000000
9.0000000000	9.5000000000	10.000000000

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.0000000000	-1.3320312500	-3.0000000000
-25.878906250	-143.00000000	-419.61328125
-481.00000000	1724.0898438	12555.000000
47453.855469	138769.00000	347690.30859
781517.00000	1617636.0742	3135747.0000
5760025.7774	10113079.000	17083696.043
27910565.000	44284275.496	68470089.000

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

SIGMA I+1>SIGMA I

EL GRADO ADECUADO ES: 8

SIGMA AL CUADRADO ES: 1.5708486445

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

0.38278308264	-23.220667147	41.233851734
-27.943550584	6.7101983090	3.1378520200
-1.7995954140	-3.0113471122	1.0002632021

EJEMPLO 1:

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	0.10000000000	0.20000000000
0.30000000000	0.40000000000	0.50000000000
0.60000000000	0.70000000000	0.80000000000
0.90000000000	1.00000000000	

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.0000000000	-0.79900000000	-0.59200000000
-0.37300000000	-0.13600000000	0.12500000000
0.41600000000	0.74300000000	1.1120000000
1.5290000000	2.0000000000	

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

!SIGMA I - SIGMA I+1!<= DELTA

EL GRADO ADECUADO ES: 3

SIGMA AL CUADRADO ES: .14205054491E-18

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-1.0000000006	2.0000000078	-.19334712548E-07
1.0000000124		

EJEMPLO 2

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	0.10000000000	0.20000000000
0.30000000000	0.40000000000	0.50000000000
0.60000000000	0.70000000000	0.80000000000
0.90000000000	1.00000000000	

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.0000000000	-1.3709000000	-1.6864000000
-1.9489000000	-2.1584000000	-2.3125000000
-2.4064000000	-2.4329000000	-2.3824000000
-2.2429000000	-2.0000000000	

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

!SIGMA I - SIGMA I+1!<= DELTA

EL GRADO ADECUADO ES: 4

SIGMA AL CUADRADO ES: .23673159154E-17

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-1.0000000012	-3.9999999553	2.9999997717
-0.99999963161	0.99999981505	

EJEMPLO 3

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	.50000000000E-01	0.10000000000
0.15000000000	0.20000000000	0.25000000000
0.30000000000	0.35000000000	0.40000000000
0.45000000000	0.50000000000	0.55000000000
0.60000000000	0.65000000000	0.70000000000
0.75000000000	0.80000000000	0.85000000000
0.90000000000	0.95000000000	1.0000000000

LAS ORDENADAS DATOS SON:

1.0000000000	1.0526315625	1.1111100000
1.1764571875	1.2499200000	1.3330078125
1.4275300000	1.5356334375	1.6598400000
1.8030840625	1.9687500000	2.1607096875
2.3833600000	2.6416603125	2.9411700000
3.2880859375	3.6892800000	4.1523365625
4.6855900000	5.2981621875	6.0000000000

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

!SIGMA I - SIGMA I+1!<= DELTA

EL GRADO ADECUADO ES: 5

SIGMA AL CUADRADO ES: .68004790368E-16

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

0.99999998416	1.0000005983	0.99999579453
1.0000109080	0.99998814178	1.0000045805

EJEMPLO 4

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	.50000000000E-01	0.10000000000
0.15000000000	0.20000000000	0.25000000000
0.30000000000	0.35000000000	0.40000000000
0.45000000000	0.50000000000	0.55000000000
0.60000000000	0.65000000000	0.70000000000
0.75000000000	0.80000000000	0.85000000000
0.90000000000	0.95000000000	1.00000000000

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.0000000000	-1.0475172211	-1.0902522900
-1.1286667132	-1.1633638400	-1.1949920654
-1.2241984900	-1.2516393351	-1.2780518400
-1.3043907898	-1.3320312500	-1.3630375070
-1.4004966400	-1.4489135742	-1.5146628900
-1.6064910889	-1.7360614400	-1.9185319586
-2.1731554900	-2.5238893007	-3.0000000000

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

|SIGMA I - SIGMA I+1|<= DELTA

EL GRADO ADECUADO ES: 8

SIGMA AL CUADRADO ES: .21782236626E-14

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-0.99999993620	-1.0000071694	1.0001085609
-.64089983916E-03	-2.9981017011	4.9969075170
-1.9971965176	-3.0013185924	1.0002487321

APENDICE II

```
C*%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
C*    ESTE PROGRAMA RESUELVE EL PROBLEMA DE AJUSTE DE DATOS POR
C*    MEDIO DE LAS ECUACIONES NORMALES. EN LA MATRIZ A  GUARDA-
C*    MOS LA MATRIZ X'X, COPIANDOLA EN LA MATRIZ C PARA NO PER-
C*    DER ESTA INFORMACION Y TENER QUE CALCULAR NUEVAMENTE TODA
C*    LA MATRIZ, SINO QUE SOLAMENTE EL ULTIMO RENGLON DE  A.  Y
C*    EN EL VECTOR B EL VECTOR X'Y. EN ESTE PROGRAMA UTILIZAMOS
C*    EL METODO DE CHOLESKI PARA RESOLVER NUESTRO PROBLEMA,  YA
C*    QUE ESTA DISENADO ESPECIALMENTE PARA MATRICES SIMETRICAS,
C*    EL CUAL ES NUESTRO CASO.
C*
         DIMENSION A(22,22),C(22,22),B(22),E(10),X(22),Y(22)
         REAL INC,V(22),W(22),F(10),TEMP1(22),TEMP2(22)
         NDIM=22
C*    LEE M(NUMERO DE PUNTOS) Y DELTA(CANTIDAD PARA
C*       DECIDIR CUANDO DETENER EL PROCESO).
         READ(5,/)M,DELTA
C*    LEE LAS ABSCISAS DATOS.
         READ(5,/) (W(I), I=1,M)
C*    LEE LAS ORDENADAS DATOS.
         READ(5,/) (V(I), I=1,M)
C*    IMPRIME LOS DATOS.
         WRITE(6,1)
         WRITE(6,2) (W(I),I=1,M)
         WRITE(6,3)
         WRITE(6,2) (V(I),I=1,M)
C*    INICIALIZA LAS VARIABLES.
         K=0
         YI=0.0
         SIGMA1=0.0
         DO 10 I=1,M
         B(I)=0.0
         X(I)=0.0
         TEMP1(I)=1.0
         DO 10 J=1,I
         A(I,J)=0.0
      10 C(I,J)=0.0
C*    CALCULA LAS ECUACIONES NORMALES DE GRADO 0.
         DO 20 I=1,M
      20 YI=YI+V(I)
         B(1)=YI/M
C*    CALCULA  SIGMA CERO.
         DO 30 I=1,M
      30 SIGMA1=SIGMA1+(V(I)-B(1))**2
         SIGMA1=SIGMA1/(M-1)
         MI=0
         A(1,1)=M
```

```
            X(1)=B(1)
            B(1)=YI
            WRITE(6,4)
C*        CALCULOS GENERALES.
C*        ALMACENA LOS COEFICIENTES DEL GRADO ANTERIOR.
       40   DO 50 J=1,K+1
       50   F(J)=X(J)
            K=K+1
C*        CALCULA EL ULTIMO RENGLON DE A.
            DO 80 J=1,K+1
            IF (J+MI-1. NE. K) GO TO 70
            DO 60 II=1,M
       60   TEMP2(II)=TEMP1(II)
       70   DO 80 I=1,M
            TEMP1(I)=TEMP1(I)*W(I)
       80   A(K+1,J)=A(K+1,J)+TEMP1(I)
C*        COPIA LA MATRIZ A.
            DO 90 J=1,K+1
            DO 90 I=1,J
       90   C(J,I)=A(J,I)
C*        CALCULA EL ULTIMO ELEMENTO DE B.
            DO 95 I=1,M
       95   B(K+1)=B(K+1)+V(I)*TEMP2(I)
C*        LLAMA A CHOLY1 PARA HACER LA DESCOMPOCISION DE CHOLESKI.
            CALL CHOLY1(C,K+1,NDIM,IERR)
            IF (IERR. EQ. 1)   GO TO 55
C*        LLAMA A SUSADE PARA HACER LA SUSTITUCION HACIA ADELANTE.
            CALL SUSADE(C,K+1,NDIM,B,Y)
C*        LLAMA A SUSATR PARA HACER LA SUSTITUCION HACIA ATRAS.
            CALL SUSATR(C,K+1,NDIM,Y,X)
C*        INVIERTE EL ORDEN DE LOS COEFICIENTES CALCULADOS.
            DO 85 I=1,K+1
            E(I)=X(K+2-I)
       85   Y(I)=0
C*        LLAMA A HORNER PARA EVALUAR EL POLINOMIO.
            CALL HORNER(W,Y,E,M,K+1)
C*        CALCULA SIGMA I.
            DO 75 J=1,M
       75   SIGMA2=SIGMA2+(Y(J)-V(J))**2
            SIGMA2=SIGMA2/(M-K-1)
            DIF=ABS(SIGMA2-SIGMA1)
C*        COMPARA LAS SIGMAS.
            IF (DIF. LE. DELTA)GO TO 45
            IF (SIGMA2. GT. SIGMA1) GO TO 35
            SIGMA1=SIGMA2
            SIGMA2=0.0
            IF (K. GE. 10) GO TO 55
            MI=MI+1
            DO 65 I=1,M
       65   TEMP1(I)=TEMP2(I)
C*        REGRASA PARA HACER LOS CALCULOS DEL GRADO SIGUIENTE.
            GO TO 40
#
```

```
C*   IMPRIME RESULTADOS.
   55  WRITE(6,5)K
       GO TO 25
   45  WRITE(6,6)
       GO TO 25
   35  WRITE(6,7)
   25  WRITE(6,8)K-1
C*   IMPRIME SIGMA I.
       WRITE(6,9)SIGMA1
C*   IMPRIME LOS COEFICIENTES.
       WRITE(6,11)
       WRITE(6,2)(F(L),L=1,K)
    1  FORMAT(/,5X,'LAS ABSCISAS DATOS SON:',/)
    2  FORMAT(3G21.11)
    3  FORMAT(/,5X,'LAS ORDENADAS DATOS SON:',/)
    4  FORMAT(/,5X,'CRITERIO SELECCIONADO ',
     -'PARA DETERMINAR EL GRADO:',/)
    5  FORMAT(/,5X,'LA MATRIZ ES SINGULAR PARA K= ',I3)
    6  FORMAT(/,10X,':SIGMA I - SIGMA I+1:<= DELTA')
    7  FORMAT(/,10X,'SIGMA I+1>SIGMA I')
    8  FORMAT(/,5X,'EL GRADO ADECUADO ES:',I5)
    9  FORMAT(/,5X,'SIGMA AL CUADRADO ES:',G21.11)
   11  FORMAT(/,5X,'LOS COEFICIENTES SON',
     -'(DE GRADO MENOR A MAYOR):',/)
       CALL EXIT
       END
C*%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
       SUBROUTINE HORNER(X,Y,E,M,NC)
C*
C*   ESTA SUBRUTINA EVALUA POLINOMIOS POR EL METODO DE HORNER.
C*
C*                         PARAMETROS DE ENTRADA:
C*               X    VECTOR QUE CONTIENE LOS PUNTOS A EVALUAR.
C*               E    VECTOR CON LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO.
C*               M    NUMERO DE PUNTOS.
C*              NC    NUMERO DE COEFICIENTES.
C*
C*                          PARAMETRO DE SALIDA:
C*               Y    VECTOR QUE CONTIENE EL POLINOMIO EVALUADO.
C*
       DIMENSION X(M),Y(M),E(NC)
       DO 100 I=1,M
       Y(I)=E(1)
       DO 100 J=2,NC
  100  Y(I)=(Y(I)*X(I))+E(J)
       RETURN
       END
C*%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
       SUBROUTINE CHOLY1(A,N,NDIM,IERR)
C*
C*   ESTA SUBRUTINA HACE LA DESCOMPOSICION DE CHOLESKY A LA MA
C*   TRIZ A SI LA SALIDA ES NORMAL, EN LA PARTE INFERIOR  DE A
```

```
C*   SE GUARDA LA MATRIZ L DE LA DESCOMPOSICION A=LL' DE  CHO-
C*   LESKI. IERR ES UN PARAMETRO DE ERROR, SI ES IGUAL A CERO,
C*   LA SALIDA ES NORMAL, SI ES IGUAL A 1, LA MATRIZ ES NO PO-
C*   SITIVA DEFINIDA.
C*
C*                   PARAMETROS DE ENTRADA:
C*        A    MATRIZ QUE CONTIENE X'X.
C*        N    DIMENSION DE LA MATRIZ L.
C*      NDIM   DIMENSION DE LA MATRIZ A.
C*
C*                   PARAMETROS DE SALIDA:
C*        A    EN LA PARTE INFERIOR CONTIENE LA MATRIZ L.
C*      IERR   SI ES CERO LA MATRIZ ES POSITIVA DEFINIDA,
C*             SI ES UNO NO LO ES.
C*
      DIMENSION A(NDIM,1)
      DO 500 L=1,N
      IERR=0
C*   CALCULA LOS ELEMENTOS DEL K-ESIMO RENGLON HASTA LA
C*   COLUMNA K-1.
      IF (L. EQ. 1) GO TO 500
      DO 300 I=1,L-1
      IF (A(I,I). NE. 0.) GO TO 100
      WRITE(6,10)
      IERR=1
      RETURN
  100 SUM=0.0
      IF (I.EQ.1) GO TO 300
      DO 200 J=1,I-1
  200 SUM=SUM+A(I,J)*A(L,J)
  300 A(L,I)=(A(L,I)-SUM)/A(I,I)
      IF (L. EQ. 1) GO TO 500
      SUM=0.0
C*   CALCULA EL ELEMENTO DE LA DIAGONAL.
      DO 400 J=1,L-1
  400 SUM=SUM+A(L,J)*A(L,J)
      IF (A(L,L)-SUM. GE. 0) GO TO 500
      WRITE(6,20)
      IERR=1
      RETURN
  500 A(L,L)=SQRT(A(L,L)-SUM)
   10 FORMAT(/,5X,'ELEMENTO CERO EN LA DIAGONAL',/)
   20 FORMAT(/,5X,'LA MATRIZ NO ES DIAGONAL DOMINANTE',/)
      RETURN
      END
C*%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
      SUBROUTINE SUSADE(A,N,NDIM,B,Y)
C*
C*   ESTA SUBRUTINA HACE LA SUSTITUCION HACIA ADELANTE,  ESTO
C*   ES, RESUELVE L*Y=B DE LA DESCOMPOCISION DE CHOLESKI.
C*
C*                   PARAMETROS DE ENTRADA:
```

```
C*         A   MATRIZ QUE CONTIENE LA MATRIZ L.
C*         N   DIMENSION DE LA MATRIZ L.
C*      NDIM   DIMENSION DE LA MATRIZ A.
C*         B   VECTOR CON EL LADO DERECHO DEL SISTEMA.
C*
C*                  PARAMETRO DE SALIDA:
C*         Y   VECTOR CON LA SOLUCION DE LA SUSTITUCION HACIA
C*             ADELANTE.
C*
        DIMENSION A(NDIM,I),B(N),Y(N)
        Y(1)=B(1)/A(1,1)
        DO 200 I=2,N
        DO 100 J=1,I-1
    100 TEM=TEM+A(I,J)*Y(J)
        Y(I)=(B(I)-TEM)/A(I,I)
    200 TEM=0.0
        RETURN
        END
C*%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
        SUBROUTINE SUSATR(A,N,NDIM,Y,X)
C*
C*    ESTA SUBRUTINA HACE LA SUSTITUCION HACIA ATRAS, ESTO  ES,
C*    RESUELVE L'X=Y DE LA DESCOMPOCISION DE CHOLESKI.
C*
C*                  PARAMETROS DE ENTRADA:
C*         A   MATRIZ QUE CONTIENE LA MATRIZ L.
C*         N   DIMENSION DE LA MATRIZ L.
C*      NDIM   DIMENSION DE LA MATRIZ A.
C*         Y   VECTOR CON EL LADO DERECHO DEL SISTEMA.
C*
C*                  PARAMETRO DE SALIDA:
C*         X   VECTOR SOLUCION DE LA SUSTITUCION HACIA ATRAS.
C*
        DIMENSION A(NDIM,1),Y(N),X(N)
        I=N
        X(N)=Y(N)/A(N,N)
    100 TEM=0.0
        I=I-1
        DO 200 J=I+1,N
    200 TEM=TEM+A(J,I)*X(J)
        X(I)=(Y(I)-TEM)/A(I,I)
        IF (I. GT. 1) GO TO 100
        RETURN
        END
C*%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

EJEMPLO 1:

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	0.50000000000	1.0000000000
1.5000000000	2.0000000000	2.5000000000
3.0000000000	3.5000000000	4.0000000000
4.5000000000	5.0000000000	

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.0000000000	0.12500000000	2.0000000000
5.3750000000	11.000000000	19.625000000
32.000000000	48.875000000	71.000000000
99.125000000	134.00000000	

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

¦SIGMA I - SIGMA I+1¦<= DELTA

EL GRADO ADECUADO ES: 3

SIGMA AL CUADRADO ES: .21580089063E-16

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-0.99999999412	1.9999999823	.92363976658E-08
0.99999999877		

EJEMPLO 2:

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	1.0000000000	2.0000000000
3.0000000000	4.0000000000	5.0000000000
6.0000000000	7.0000000000	8.0000000000
9.0000000000	10.000000000	

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.0000000000	-2.0000000000	11.000000000
68.000000000	223.00000000	554.00000000
1163.0000000	2176.0000000	3743.0000000
6038.0000000	9259.0000000	

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

!SIGMA I - SIGMA I+1!<= DELTA

EL GRADO ADECUADO ES: 4

SIGMA AL CUADRADO ES: .6210000248BE-10

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-0.99999271259	-4.0000245194	3.0000120698
-1.0000019112	1.0000000949	

EJEMPLO 3:

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	1.0000000000	2.0000000000
3.0000000000	4.0000000000	5.0000000000
6.0000000000	7.0000000000	8.0000000000
9.0000000000	10.000000000	11.000000000
12.000000000	13.000000000	14.000000000
15.000000000	16.000000000	17.000000000
18.000000000	19.000000000	20.000000000

LAS ORDENADAS DATOS SON:

1.0000000000	6.0000000000	63.000000000
364.00000000	1365.0000000	3906.0000000
9331.0000000	19608.000000	37449.000000
66430.000000	111111.00000	177156.00000
271453.00000	402234.00000	579195.00000
813616.00000	1118481.0000	1508598.0000
2000719.0000	2613660.0000	3368421.0000

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

SIGMA I+1>SIGMA I

EL GRADO ADECUADO ES: 5

SIGMA AL CUADRADO ES: .25119686205E-05

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

0.99821632199	1.0043781048	0.99824833455
1.0002475316	0.99998568268	1.0000002899

EJEMPLO 4

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	0.50000000000	1.0000000000
1.5000000000	2.0000000000	2.5000000000
3.0000000000	3.5000000000	4.0000000000
4.5000000000	5.0000000000	5.5000000000
6.0000000000	6.5000000000	7.0000000000
7.5000000000	8.0000000000	8.5000000000
9.0000000000	9.5000000000	10.000000000

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.0000000000	-1.3320312500	-3.0000000000
-25.878906250	-143.00000000	-419.61328125
-481.00000000	1724.0898438	12555.000000
47453.855469	138769.00000	347690.30859
781517.00000	1617636.0742	3135747.0000
5760025.7774	10113079.000	17083696.043
27910565.000	44284275.496	68470089.000

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

SIGMA I+1>SIGMA I

EL GRADO ADECUADO ES: 8

SIGMA AL CUADRADO ES: 77.674855099

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

7.2833417417	-156.75073062	303.45663424
-223.51580946	79.281305249	-11.656206279
-0.11389428544	-3.1120380064	1.0027190332

EJEMPLO 1:

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	0.10000000000	0.20000000000
0.30000000000	0.40000000000	0.50000000000
0.60000000000	0.70000000000	0.80000000000
0.90000000000	1.00000000000	

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.0000000000	-0.79900000000	-0.59200000000
-0.37300000000	-0.13600000000	0.12500000000
0.41600000000	0.74300000000	1.1120000000
1.5290000000	2.0000000000	

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

:SIGMA I - SIGMA I+1:<= DELTA

EL GRADO ADECUADO ES: 3

SIGMA AL CUADRADO ES: .20655408908E-19

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-1.0000000002	2.0000000028	-.72407753878E-08
1.0000000047		

EJEMPLO 2:

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	0.10000000000	0.20000000000
0.30000000000	0.40000000000	0.50000000000
0.60000000000	0.70000000000	0.80000000000
0.90000000000	1.00000000000	

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.0000000000	-1.3709000000	-1.6864000000
-1.9489000000	-2.1584000000	-2.3125000000
-2.4064000000	-2.4329000000	-2.3824000000
-2.2429000000	-2.0000000000	

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

|SIGMA I - SIGMA I+1|<= DELTA

EL GRADO ADECUADO ES: 4

SIGMA AL CUADRADO ES: .44610048958E-17

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-1.0000000009	-3.9999999485	2.9999997142
-0.99999951947	0.99999975267	

EJEMPLO 3

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	.50000000000E-01	0.10000000000
0.15000000000	0.20000000000	0.25000000000
0.30000000000	0.35000000000	0.40000000000
0.45000000000	0.50000000000	0.55000000000
0.60000000000	0.65000000000	0.70000000000
0.75000000000	0.80000000000	0.85000000000
0.90000000000	0.95000000000	1.00000000000

LAS ORDENADAS DATOS SON:

1.0000000000	1.0526315625	1.1111100000
1.1764571875	1.2499200000	1.3330078125
1.4275300000	1.5356334375	1.6598400000
1.8030840625	1.9687500000	2.1607096875
2.3833600000	2.6416603125	2.9411700000
3.2880859375	3.6892800000	4.1523365625
4.6855900000	5.2981621875	6.0000000000

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

!SIGMA I - SIGMA I+1!<= DELTA

EL GRADO ADECUADO ES: 5

SIGMA AL CUADRADO ES: .63581681153E-17

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

0.99999999498	1.0000001864	0.99999871331
1.0000032875	0.99999646971	1.0000013501

EJEMPLO 4

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	.50000000000E-01	0.10000000000
0.15000000000	0.20000000000	0.25000000000
0.30000000000	0.35000000000	0.40000000000
0.45000000000	0.50000000000	0.55000000000
0.60000000000	0.65000000000	0.70000000000
0.75000000000	0.80000000000	0.85000000000
0.90000000000	0.95000000000	1.00000000000

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.0000000000	-1.0475172211	-1.0902522900
-1.1286667132	-1.1633638400	-1.1949920654
-1.2241984900	-1.2516393351	-1.2780518400
-1.3043907898	-1.3320312500	-1.3630375070
-1.4004966400	-1.4489135742	-1.5146628900
-1.6064910889	-1.7360614400	-1.9185319586
-2.1731554900	-2.5238893007	-3.0000000000

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

LA MATRIZ NO ES DIAGONAL DOMINANTE

LA MATRIZ ES SINGULAR PARA K= 9

EL GRADO ADECUADO ES: 8

SIGMA AL CUADRADO ES: .65834797785E-12

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-0.99999927498	-1.0001416179	1.0027669168
-.20480688541E-01	-2.9246331042	4.8476454186
-1.8278087363	-3.1020604582	1.0247116969

APENDICE III

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
BEGIN
  FILE ENT(KIND=REMOTE);
  FILE SAL(KIND=REMOTE);
  INTEGER K,M,H,KA,NC;
  REAL DELTA;
%      L E E   K(GRADO MAXIMO DEL POLINOMIO), M(NUMERO DE
%              PUNTOS) Y DELTA(CANTIDAD PARA DECIDIR CUANDO
%              DETENER EL PROCESO).
  READ(ENT,/,K,M,DELTA);
%      SE EMPIEZA UN SEGUNDO BLOQUE PARA PODER TENER ARREGLOS
%                         VARIABLES.
    BEGIN
      ARRAY F,X[1:M], C[0:K], SIGMA[0:K+1], ALFA,BETA[0:K],
            E[1:K];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
REAL PROCEDURE PRODIN(M,A,B);
COMMENT:  ESTE PROCESO EFECTUA EL PRODUCTO INTERIOR O ESCALAR
          DE DOS VECTORES.

               P A R A M E T R O S   D E   E N T R A D A:

          M   DIMENSION DE LOS VECTORES A Y B.
        A,B   ARREGLOS UNIDIMENSIONALES CON LOS CUALES SE
              REALIZA EL PRODUCTO INTERIOR.

               P A R A M E T R O   D E   S A L I D A:

     PRODIN  CONTIENE EL PRODUCTO INTERIOR DE A Y B.

INTEGER M;
ARRAY A,B[1];
BEGIN
  INTEGER J;
  PRODIN:=0;
  FOR J:=1 STEP 1 UNTIL M DO
    PRODIN:=*+A[J]*B[J];
END PRODIN;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
PROCEDURE APOVCM(M,KA,DELTA,F,X,SIGMA,ALFA,BETA,C);
COMMENT:  ESTE PROCESO AJUSTA UN POLINOMIO ORTOGONAL A UN CON-
          JUNTO DE DATOS VIA MINIMOS CUADRADOS, UTILIZANDO  LA
          FORMULA DE RECURRENCIA DEL TERCER TERMINO. Y ENCUEN-
          TRA EL GRADO ADECUADO DEL AJUSTE.

               P A R A M E T R O S   D E   E N T R A D A:

```

```
                M    NUMERO DE PUNTOS DADOS.
                K    GRADO MAXIMO DEL POLINOMIO.
            DELTA    CANTIDAD PARA DECIDIR CUANDO SIGMA[J+1]
                     -SIGMA[J] ES DESPRECIABLE.
                X    ARREGLO UNIDIMENSIONAL DE ABSCISAS DATOS.
                F    ARREGLO UNIDIMENSIONAL DE ORDENADAS DATOS.

                      P A R A M E T R O S   D E   S A L I D A:

               KA    GRADO DEL POLINOMIO ADECUADO.
            SIGMA    ARREGLO UNIDIMENSIONAL DE LAS SIGMAS AL CUADRADO.
             ALFA    ARREGLO UNIDIMENSIONAL CON LAS ALFAS.
             BETA    ARREGLO UNIDIMENSIONAL CON LAS BETAS.
                C    ARREGLO UNIDIMENSIONAL DE LOS COEFICIENTES DEL
                         POLINOMIO.
                                                                  ;
INTEGER M,KA;
REAL DELTA;
ARRAY F,X[1], SIGMA,ALFA,BETA,C[0];
BEGIN
  INTEGER J;
  REAL WI,WII,WHH;
  ARRAY P,Q,R,S,PE,FMPE[1:M];
%      D E F I N E   Q-1  Y  Q0.
  FOR J:=1 STEP 1 UNTIL M DO
    BEGIN
      P[J]:=0;
      Q[J]:=1;
    END;
%     C A L C U L A   C0.
  WI:=PRODIN(M,Q,F);
  WII:=PRODIN(M,Q,Q);
  C[0]:=WI/WII;
%     C A L C U L A   SIGMA 0.
  FOR J:=1 STEP 1 UNTIL M DO
    BEGIN
      PE[J]:=C[0];
      FMPE[J]:=F[J]-PE[J];
      SIGMA[0]:=*+FMPE[J]*FMPE[J];
    END;
  SIGMA[0]:=SIGMA[0]/(M-1);
  FOR J:=1 STEP 1 UNTIL M DO
    S[J]:=X[J]*Q[J];
%     C A L C U L A   ALFA 1.
  ALFA[0]:=PRODIN(M,S,Q)/WII;
%     D E F I N E   BETA 0.
  BETA[0]:=0;
%     C A L C U L A  Q1.
  FOR J:=1 STEP 1 UNTIL M DO
    R[J]:=(X[J]-ALFA[0]);
  FOR K:=1 STEP 1 UNTIL M-3 DO
%     C A L C U L A   CK.
```

```
      BEGIN
        WHH:=WII;
        WII:=PRODIN(M,R,R);
        WI:=PRODIN(M,FMPE,R);
        C[K]:=WI/WII;
%       C A L C U L A   SIGMA K.
      FOR J:=1 STEP 1 UNTIL M DO
        BEGIN
          PE[J]:=*+(C[K]*R[J]);
          FMPE[J]:=F[J]-PE[J];
          SIGMA[K]:=*+FMPE[J]*FMPE[J];
        END;
      SIGMA[K]:=SIGMA[K]/(M-K-1);
%       C O M P A R A   S I G M A S.
        IF SIGMA[K] GTR SIGMA[K-1] AND SIGMA[K] LSS .1@-16
           OR ABS(SIGMA[K]-SIGMA[K-1]) LEQ DELTA
          THEN
            BEGIN
              KA:=K-1;
              K:=M-2;
            END
          ELSE
            BEGIN
%       C A L C U L A   ALFA I.
              FOR J:=1 STEP 1 UNTIL M DO
                S[J]:=X[J]*R[J];
              ALFA[K]:=PRODIN(M,S,R)/WII;
%       C A L C U L A   BETA K.
              BETA[K]:=WII/WHH;
%       REASIGNA   VALORES   Y   CALCULA   QK+1.
              FOR J:=1 STEP 1 UNTIL M DO
                BEGIN
                  P[J]:=Q[J];
                  Q[J]:=R[J];
                  R[J]:=(X[J]-ALFA[K])*Q[J]-(BETA[K]*P[J]);
                END;
            END;
      END;
%     I M P R I M E   R E S U L T A D O S.
    WRITE(SAL,</,"EL GRADO ADECUADO ES:",X5,I5,/>,KA);
    WRITE(SAL,</,"LAS SIGMAS AL CUADRADO SON:">);
    WRITE(SAL,</,3(E21.11)>,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL KA+1 DO
          SIGMA[J]);
    WRITE(SAL,</,"LAS ALFAS SON:">);
    WRITE(SAL,</,3(E21.11)>,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL KA-1 DO
          ALFA[J]);
    WRITE(SAL,</,"LAS BETAS SON:">);
    WRITE(SAL,</,3(E21.11)>,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL KA-1 DO
          BETA[J]);
    WRITE(SAL,</,"LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO SON:">);
    WRITE(SAL,</,3(E21.11)>,FOR J:=0 STEP 1 UNTIL KA DO C[J]);
END APOVCM;
$
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
PROCEDURE TRANSF(KA,ALFA,BETA,C);
COMMENT:  ESTE PROCESO TRANSFORMA EL POLINOMIO ORTOGONAL AJUS-
          TADO A LA BASE CANONICA, ESTO ES, A POTENCIAS DE X.

               P A R A M E T R O S   D E   E N T R A D A:

           KA   GRADO DEL POLINOMIO ADECUADO.
          ALFA  ARREGLO UNIDIMENSIONAL CON LAS ALFAS.
          BETA  ARREGLO UNIDIMENSIONAL CON LAS BETAS.
            C   ARREGLO UNIDIMENSIONAL CON LOS COEFICIENTES DEL
                POLINOMIO ORTOGONAL.

INTEGER KA;
ARRAY ALFA,BETA,C[0];
BEGIN
  DOUBLE ARRAY P,Q,POLX[0:KA],R[0:KA+1];
  INTEGER L,I;
%     I N I C I A L I Z A   L A S   V A R I A B L E S.
  FOR L:=0 STEP 1 UNTIL KA DO
    BEGIN
      P[L]:=0;
      Q[L]:=0;
      POLX[L]:=0;
    END;
  P[0]:=1;
  Q[0]:=-ALFA[0];
  Q[1]:=1;
  POLX[0]:=C[0]+C[1]*Q[0];
  POLX[1]:=C[1];
%     REASIGNA VALORES Y TRANSFORMA EL POLINOMIO ORTOGONAL DE
%          GRADO I+1.
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL KA-1 DO
    BEGIN
      R[0]:=0;
      FOR L:=0 STEP 1 UNTIL I+1 DO
        BEGIN
          R[L]:=*-(ALFA[I]*Q[L])-(BETA[I]*P[L]);
          POLX[L]:=*+(C[I+1]*R[L]);
          R[L+1]:=Q[L];
          P[L]:=Q[L];
          Q[L]:=R[L];
        END;
    END;
  WRITE(SAL,</," POLINOMIO EXPRESADO EN POTENCIAS DE X",
       "(DE GRADO MENOR A MAYOR):">);
  WRITE(SAL,</,3(E21.11)>, FOR L:=0 STEP 1 UNTIL KA DO
        POLX[L]);
END TRANSF;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
PROCEDURE HORNER(X,F,E,M,NC);
COMMENT:  ESTE PROCESO EVALUA MEDIANTE LA REGLA DE HORNER.
```

```

                    P A R A M E T R O S   D E   E N T R A D A:

               X    ARREGLO UNIDIMENSIONAL CON LAS ABSCISAS DATOS.
               E    ARREGLO UNIDIMENSIONAL CON LOS COEFICIENTES DEL
                    POLINOMIO.
               M    NUMERO DE PUNTOS.
               NC   NUMERO DE COEFICIENTES.

                    P A R A M E T R O   D E   S A L I D A:

               F    ARREGLO UNIDIMENSIONAL CON LAS ORDENADAS DATOS.
                                                                   ;
ARRAY X,F[1],E[1];
INTEGER M,NC;
BEGIN
  INTEGER L,I;
  FOR L:=1 STEP 1 UNTIL M DO
    BEGIN
      F[L]:=E[1];
      FOR I:=2 STEP 1 UNTIL NC DO
        F[L]:=(F[L]*X[L])+E[I];
    END;
END HORNER;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%      L E E   L O S   D A T O S.
      READ(ENT,/,FOR H:=1 STEP 1 UNTIL M DO X[H]);
      READ(ENT,/,FOR H:=1 STEP 1 UNTIL M DO F[H]);
%      I M P R I M E   L O S   D A T O S.
      WRITE(SAL,</,"LAS ABSCISAS DATOS SON:">);
      WRITE(SAL,</,3(E21.11)>,FOR H:=1 STEP 1 UNTIL M DO
            X[H]);
      WRITE(SAL,</,"LAS ORDENADAS DATOS SON:">);
      WRITE(SAL,</,3(E21.11)>,FOR H:=1 STEP 1 UNTIL M DO
            F[H]);
       APOVCM(M,KA,DELTA,F,X,SIGMA,ALFA,BETA,C);
      TRANSF(KA,ALFA,BETA,C);
    END;
END.
#
```

EJEMPLO 1:

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	5.0000000000E-01	1.0000000000E+00
1.5000000000E+00	2.0000000000E+00	2.5000000000E+00
3.0000000000E+00	3.5000000000E+00	4.0000000000E+00
4.5000000000E+00	5.0000000000E+00	

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.0000000000E+00	1.2500000000E-01	2.0000000000E+00
5.3750000000E+00	1.1000000000E+01	1.9625000000E+01
3.2000000000E+01	4.8875000000E+01	7.1000000000E+01
9.9125000000E+01	1.3400000000E+02	

EL GRADO ADECUADO ES: 3

LAS SIGMAS AL CUADRADO SON:

2.05765312500E+03	3.45881249998E+02	1.20656249999E+01
8.59936964808E-21	9.33776620824E-21	

LAS ALFAS SON:

2.5000000000E+00	2.5000000000E+00	2.5000000000E+00

LAS BETAS SON:

0.	2.5000000000E+00	1.9500000000E+00

LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO SON:

3.83750000000E+01	2.52000000000E+01	7.5000000000E+00
1.00000000001E+00		

POLINOMIO EXPRESADO EN POTENCIAS DE X (DE GRADO MENOR A MAYOR):

-1.00000000001E+00	2.00000000024E+00	-1.23691279441E-10
1.00000000001E+00		

EJEMPLO 2:

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	1.0000000000E+00	2.0000000000E+00
3.0000000000E+00	4.0000000000E+00	5.0000000000E+00
6.0000000000E+00	7.0000000000E+00	8.0000000000E+00
9.0000000000E+00	1.0000000000E+01	

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.0000000000E+00	-2.0000000000E+00	1.1000000000E+01
6.8000000000E+01	2.2300000000E+02	5.5400000000E+02
1.1630000000E+03	2.1760000000E+03	3.7430000000E+03
6.0380000000E+03	9.2590000000E+03	

EL GRADO ADECUADO ES: 4

LAS SIGMAS AL CUADRADO SON:

9.3579530000E+06	2.78527773334E+06	2.83912200005E+05
5.88342857216E+03	1.74339709336E-16	2.07571268252E-16

LAS ALFAS SON:

5.0000000000E+00	5.0000000000E+00	5.0000000000E+00
5.00000000003E+00		

LAS BETAS SON:

0.	1.0000000000E+01	7.8000000000E+00
7.19999999992E+00		

LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO SON:

2.1120000000E+03	7.8920000000E+02	1.6300000000E+02
1.90000000003E+01	1.00000000006E+00	

POLINOMIO EXPRESADO EN POTENCIAS DE X (DE GRADO MENOR A MAYOR):

-1.00000002133E+00	-3.99999999375E+00	3.00000000252E+00
-1.00000000084E+00	1.00000000006E+00	

EJEMPLO 3:

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	1.00000000000E+00	2.00000000000E+00
3.00000000000E+00	4.00000000000E+00	5.00000000000E+00
6.00000000000E+00	7.00000000000E+00	8.00000000000E+00
9.00000000000E+00	1.00000000000E+01	1.10000000000E+01
1.20000000000E+01	1.30000000000E+01	1.40000000000E+01
1.50000000000E+01	1.60000000000E+01	1.70000000000E+01
1.80000000000E+01	1.90000000000E+01	2.00000000000E+01

LAS ORDENADAS DATOS SON:

1.00000000000E+00	6.00000000000E+00	6.30000000000E+01
3.64000000000E+02	1.36500000000E+03	3.90600000000E+03
9.33100000000E+03	1.96080000000E+04	3.74490000000E+04
6.64300000000E+04	1.11111000000E+05	1.77156000000E+05
2.71453000000E+05	4.02234000000E+05	5.79195000000E+05
8.13616000000E+05	1.11848100000E+06	1.50859800000E+06
2.00071900000E+06	2.61366000000E+06	3.36842100000E+06

EL GRADO ADECUADO ES: 5

LAS SIGMAS AL CUADRADO SON:

9.40715860400E+11	3.26684768539E+11	4.91504262143E+10
2.59801744000E+09	2.75934285613E+07	8.88075168960E-12
9.18407316504E-12		

LAS ALFAS SON:

1.00000000000E+01	1.00000000000E+01	1.00000000001E+01
9.99999999992E+00	9.99999999992E+00	

LAS BETAS SON:

0.	3.66666666666E+01	2.91333333331E+01
2.77714285718E+01	2.69841269844E+01	

LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO SON:

6.23960333336E+05	1.27957514286E+05	1.54031428573E+04
1.16155555555E+03	5.09999999994E+01	9.99999999816E-01

POLINOMIO EXPRESADO EN POTENCIAS DE X (DE GRADO MENOR A MAYOR):

9.99999521414E-01	9.99997636651E-01	1.00000102946E+00
9.99999851848E-01	1.00000000881E+00	9.99999999814E-01

EJEMPLO 4:

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	5.00000000000E-01	1.00000000000E+00
1.50000000000E+00	2.00000000000E+00	2.50000000000E+00
3.00000000000E+00	3.50000000000E+00	4.00000000000E+00
4.50000000000E+00	5.00000000000E+00	5.50000000000E+00
6.00000000000E+00	6.50000000000E+00	7.00000000000E+00
7.50000000000E+00	8.00000000000E+00	8.50000000000E+00
9.00000000000E+00	9.50000000000E+00	1.00000000000E+01

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.00000000000E+00	-1.33203125000E+00	-3.00000000000E+00
-2.58789062500E+01	-1.43000000000E+02	-4.19613281250E+02
-4.81000000000E+02	1.72408984375E+03	1.25550000000E+04
4.74538554688E+04	1.38769000000E+05	3.47690308594E+05
7.81517000000E+05	1.61763607422E+06	3.13574700000E+06
5.76002577736E+06	1.01130790000E+07	1.70836960430E+07
2.79105650000E+07	4.42842754961E+07	6.84700890000E+07

EL GRADO ADECUADO ES: 8

LAS SIGMAS AL CUADRADO SON:

3.16548749316E+14	1.72187948110E+14	5.88504882696E+13
1.20763721286E+13	1.37906422814E+12	7.70981480872E+10
1.66112441370E+09	7.69436097648E+06	2.21919588399E-08
2.42064509543E-08		

LAS ALFAS SON:

5.00000000000E+00	5.00000000000E+00	4.99999999993E+00
5.00000000004E+00	4.99999999997E+00	5.00000000009E+00
4.99999999997E+00	5.00000000006E+00	

LAS BETAS SON:

0.	9.16666666664E+00	7.28333333344E+00
6.94285714288E+00	6.74603174592E+00	6.56565656568E+00
6.37237762232E+00	6.15641025632E+00	

LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO SON:

8.55732132480E+06	3.98660352277E+06	1.25613941089E+06
2.96197931183E+05	5.28236534090E+04	6.96384615392E+03
6.42233333344E+02	3.70000000078E+01	9.99999998976E-01

POLINOMIO EXPRESADO EN POTENCIAS DE X (DE GRADO MENOR A MAYOR):

-9.999[illegible]4717653E-01	-9.99988098410E-01	9.99819103909E-01
1.[illegible]30326869E-04	-3.00005034329E+00	5.00000919220E+00
-2.[illegible]0009[illegible]009E+00	-2.99999995122E+00	9.99999998974E-01

```
EJEMPLO 1:

LAS ABSCISAS DATOS SON:

      0.                    1.00000000000E-01    2.00000000001E-01
      2.99999999999E-01     4.00000000000E-01    5.00000000000E-01
      6.00000000000E-01     7.00000000000E-01    8.00000000000E-01
      9.00000000000E-01     1.00000000000E+00

LAS ORDENADAS DATOS SON:

     -1.00000000000E+00    -7.99000000000E-01   -5.92000000000E-01
     -3.73000000003E-01    -1.35999999999E-01    1.25000000000E-01
      4.15999999997E-01     7.43000000000E-01    1.11199999999E+00
      1.52899999999E+00     2.00000000000E+00

EL GRADO ADECUADO ES:           3


LAS SIGMAS AL CUADRADO SON:

      9.62973000008E-01     2.21364000010E-02    7.72200000024E-04
      1.29069717723E-22     1.65987576253E-22

LAS ALFAS SON:

      5.00000000000E-01     4.99999999996E-01    5.00000000005E-01

LAS BETAS SON:

      0.                    1.00000000001E-01    7.79999999992E-02

LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO SON:

      2.74999999998E-01     2.92800000000E+00    1.50000000004E+00
      1.00000000001E+00

 POLINOMIO EXPRESADO EN POTENCIAS DE X(DE GRADO MENOR A MAYOR):

     -1.00000000000E+00     1.99999999997E+00    2.00088834390E-11
      1.00000000001E+00
```

EJEMPLO 2:

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	1.00000000000E-01	2.00000000001E-01
2.99999999999E-01	4.00000000000E-01	5.00000000000E-01
6.00000000000E-01	7.00000000000E-01	8.00000000000E-01
9.00000000000E-01	1.00000000000E+00	

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.00000000000E+00	-1.37089999999E+00	-1.68640000001E+00
-1.94890000000E+00	-2.15840000000E+00	-2.31250000000E+00
-2.40639999999E+00	-2.43290000000E+00	-2.38240000000E+00
-2.24290000000E+00	-2.00000000000E+00	

EL GRADO ADECUADO ES: 4

LAS SIGMAS AL CUADRADO SON:

2.17695433999E-01	1.01427993333E-01	8.23679999960E-04
5.88342857656E-05	1.76465197345E-22	2.11758236814E-22

LAS ALFAS SON:

5.00000000000E-01	4.99999999996E-01	5.00000000005E-01
4.99999999985E-01		

LAS BETAS SON:

0.	1.00000000001E-01	7.79999999992E-02
7.20000000000E-02		

LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO SON:

-1.99470000000E+00	-1.07200000000E+00	3.25000000001E+00
9.99999999960E-01	1.00000000044E+00	

POLINOMIO EXPRESADO EN POTENCIAS DE X(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-9.99999999997E-01	-4.00000000013E+00	3.00000000060E+00
-1.00000000090E+00	1.00000000044E+00	

EJEMPLO 3:

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	5.00000000000E-02	1.00000000000E-01
1.50000000000E-01	2.00000000001E-01	2.50000000000E-01
2.99999999999E-01	3.50000000000E-01	4.00000000000E-01
4.49999999999E-01	5.00000000000E-01	5.50000000000E-01
6.00000000000E-01	6.50000000000E-01	7.00000000000E-01
7.50000000000E-01	8.00000000000E-01	8.50000000000E-01
9.00000000000E-01	9.50000000000E-01	1.00000000000E+00

LAS ORDENADAS DATOS SON:

1.00000000000E+00	1.05263156250E+00	1.11111000000E+00
1.17645718750E+00	1.24992000000E+00	1.33300781250E+00
1.42753000000E+00	1.53563343751E+00	1.65984000001E+00
1.80308406250E+00	1.96875000000E+00	2.16070968751E+00
2.38336000001E+00	2.64166031250E+00	2.94116999999E+00
3.28808593750E+00	3.68928000001E+00	4.15233656250E+00
4.68558999999E+00	5.29816218748E+00	6.00000000000E+00

EL GRADO ADECUADO ES: 5

LAS SIGMAS AL CUADRADO SON:

2.22348331858E+00	2.89441207588E-01	1.86501012749E-02
4.75725223392E-04	2.69467076539E-06	1.69627170948E-22
1.82452409398E-22		

LAS ALFAS SON:

5.00000000000E-01	4.99999999998E-01	5.00000000002E-01
4.99999999995E-01	5.00000000002E-01	

LAS BETAS SON:

0.	9.16666666664E-02	7.28333333328E-02
6.94285714288E-02	6.74603174600E-02	

LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO SON:

2.50277708334E+00	4.49936696430E+00	6.06875000000E+00
5.80138888886E+00	3.50000000063E+00	1.00000000121E+00

POLINOMIO EXPRESADO EN POTENCIAS DE X(DE GRADO MENOR A MAYOR):

9.99999999996E-01	9.99999999992E-01	9.99999999829E-01
1.00000000139E+00	9.99999997610E-01	1.00000000121E+00

EJEMPLO 4:

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	5.00000000000E-02	1.00000000000E-01
1.50000000000E-01	2.00000000001E-01	2.50000000000E-01
2.99999999999E-01	3.50000000000E-01	4.00000000000E-01
4.49999999999E-01	5.00000000000E-01	5.50000000000E-01
6.00000000000E-01	6.50000000000E-01	7.00000000000E-01
7.50000000000E-01	8.00000000000E-01	8.50000000000E-01
9.00000000000E-01	9.50000000000E-01	1.00000000000E+00

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.00000000000E+00	-1.04751722106E+00	-1.09025229000E+00
-1.12866671324E+00	-1.16336383999E+00	-1.19499206543E+00
-1.22419849000E+00	-1.25163933513E+00	-1.27805184000E+00
-1.30439078981E+00	-1.33203125000E+00	-1.36303750699E+00
-1.40049664000E+00	-1.44891357418E+00	-1.51466289000E+00
-1.60649108887E+00	-1.73606143999E+00	-1.91853195855E+00
-2.17315549000E+00	-2.52388930072E+00	-3.00000000000E+00

EL GRADO ADECUADO ES: 8

LAS SIGMAS AL CUADRADO SON:

2.62182903465E-01	6.89854859152E-02	2.35583156702E-02
3.12301256668E-03	2.38344169944E-04	4.60505215861E-06
1.27961389211E-08	7.69436029016E-10	4.58809513098E-22
5.00519468832E-22		

LAS ALFAS SON:

5.00000000000E-01	4.99999999998E-01	5.00000000002E-01
4.99999999995E-01	5.00000000002E-01	4.99999999995E-01
5.00000000007E-01	4.99999999987E-01	

LAS BETAS SON:

0.	9.16666666664E-02	7.28333333328E-02
6.94285714288E-02	6.74603174600E-02	6.56565656560E-02
6.37237762232E-02	6.15641025648E-02	

LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO SON:

-1.50954017734E+00	-1.42936437365E+00	-2.51478963373E+00
-6.17323869944E+00	-8.66266420496E+00	-9.31923077032E+00
-5.00766665938E+00	9.99999989440E-01	9.99999954392E-01

POLINOMIO EXPRESADO EN POTENCIAS DE X(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-1.00000000001E+00	-1.00000000022E+00	1.00000000167E+00
3.67033400880E-09	-3.00000005685E+00	5.00000017806E+00
-2.00000025262E+00	-2.99999982810E+00	9.99999954389E-01

APENDICE IV

El objetivo del presente apéndice es el mostrar los resulta-
os de los apéndices I y III de una menera más completa, esto es, os resultados presentados aquí se obtienen a partir de los datos x_i, y_i) con $y_i = P(x_i) + E_i$ donde E_i $(i = 1, \ldots, m)$ se distribu-
en normalmente con media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 10^{-9}$.

Cabe aclarar, que una hipótesis central de nuestro trabajo es l que las observaciones y_i $(i = 1, \ldots, m)$ tienen "errores de medi-
ión" que se distribuyen normalmente. En base a esto, se incorpo-
ó el criterio para la determinación del grado.

```
?FILE (JL99)MARIO/A2 ON UNAM1
C*%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
      SUBROUTINE NORMAL(MU,SIGMAC,PI,IJ,EE,UU,VV)
      REAL MU
      DIMENSION EE(22)
      DESTAN=SQRT(SIGMAC)
      IF(MOD(IJ,2). EQ. 0)  GO TO 10
      UU=RANDOM(PI)
      VV=RANDOM(PI)
      EE(IJ)=(((-2)*ALOG(UU))**(1/2))*COS(6.2832*VV)
      GO TO 20
   10 EE(IJ)=(((-2)*ALOG(UU))**(1/2))*SIN(6.2832*VV)
   20 EE(IJ)=(EE(IJ)*DESTAN)+MU
      RETURN
      END
C*%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
#
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
PROCEDURE NORMAL(MU,SIGMAC,PI,IJ,EE);
REAL MU,SIGMAC;
INTEGER PI,IJ;
ARRAY EE[1];
  BEGIN
    REAL DESTAND;
      DESTAND:=SQRT(SIGMAC);
      IF IJ MOD 2 NEQ 0
        THEN
          BEGIN
            UU:=RANDOM(PI);
            VV:=RANDOM(PI);
            EE[IJ]:=(((-2)*LN(UU))**(1/2))*COS(6.2832*VV);
          END
        ELSE
            EE[IJ]:=(((-2)*LN(UU))**(1/2))*SIN(6.2832*VV);
      EE[IJ]:=(EE[IJ]*DESTAND)+MU;
END NORMAL;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
$
```

EJEMPLO 1: CON LAS ORDENADAS PERTURBADAS.

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	0.50000000000	1.0000000000
1.5000000000	2.0000000000	2.5000000000
3.0000000000	3.5000000000	4.0000000000
4.5000000000	5.0000000000	

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.0000086716	0.12509962331	2.0000725373
5.3750688357	10.999910145	19.625043887
31.999955864	48.874910267	71.000009911
99.124900493	134.00009897	

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

SIGMA I+1>SIGMA I

EL GRADO ADECUADO ES: 3

SIGMA AL CUADRADO ES: .44591881248E-08

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-0.99998548202	2.0001321731	-.92543202871E-04
1.0000136851		

EJEMPLO 2: CON LAS ORDENADAS PERTURBADAS.

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	1.0000000000	2.0000000000
3.0000000000	4.0000000000	5.0000000000
6.0000000000	7.0000000000	8.0000000000
9.0000000000	10.000000000	

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.0000788844	-1.9999385406	11.000087648
68.000048145	223.00006352	554.00007724
1162.9999110	2175.9999544	3743.0000853
6037.9999479	9258.9999099	

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

SIGMA I+1>SIGMA I

EL GRADO ADECUADO ES: 4

SIGMA AL CUADRADO ES: .38689404520E-08

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-1.0000801326	-3.9997886556	2.9999172997
-0.99998860138	0.99999947437	

EJEMPLO 3: CON LAS ORDENADAS PERTURBADAS.

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	1.0000000000	2.0000000000
3.0000000000	4.0000000000	5.0000000000
6.0000000000	7.0000000000	8.0000000000
9.0000000000	10.000000000	11.000000000
12.000000000	13.000000000	14.000000000
15.000000000	16.000000000	17.000000000
18.000000000	19.000000000	20.000000000

LAS ORDENADAS DATOS SON:

1.0000302849	5.9999908992	63.000017410
363.99997360	1365.0000223	3905.9999776
9331.0000315	19607.999997	37448.999979
66430.000024	111110.99998	177155.99998
271453.00000	402234.00003	579194.99999
813616.00003	1118481.0000	1508598.0000
2000719.0000	2613660.0000	3368421.0000

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

SIGMA I+1>SIGMA I

EL GRADO ADECUADO ES: 5

SIGMA AL CUADRADO ES: .95439875690E-04

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

0.983309401633	1.0340076832	0.98769487615
1.0016261339	0.99991041775	1.0000017477

EJEMPLO 4: CON LAS ORDENADAS PERTURBADAS.

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	0.50000000000	1.0000000000
1.5000000000	2.0000000000	2.5000000000
3.0000000000	3.5000000000	4.0000000000
4.5000000000	5.0000000000	5.5000000000
6.0000000000	6.5000000000	7.0000000000
7.5000000000	8.0000000000	8.5000000000
9.0000000000	9.5000000000	10.000000000

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.0000196542	-1.3320560232	-3.0000290423
-25.878918762	-143.00001373	-419.61325277
-481.00000809	1724.0898743	12555.000031
47453.855462	138768.99999	347690.30862
781516.99999	1617636.0742	3135747.0000
5760025.7774	10113079.000	17083696.043
27910565.000	44284275.496	68470089.000

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

SIGMA I+1>SIGMA I

EL GRADO ADECUADO ES: 8

SIGMA AL CUADRADO ES: 31.541634866

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-5.0082548954	86.785714137	-178.68153210
138.31282954	-55.677475066	15.977827818
-3.2747686123	-2.9225923661	0.99808463276

EJEMPLO 1: CON LAS ORDENADAS PERTURBADAS.

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	0.10000000000	0.20000000000
0.30000000000	0.40000000000	0.50000000000
0.60000000000	0.70000000000	0.80000000000
0.90000000000	1.00000000000	

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.0000859733	-0.79905107431	-0.59193889183
-0.37292084325	-0.13596908470	0.12490489877
0.41599271677	0.74290026558	1.1119009816
1.5290139769	1.9999000767	

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

!SIGMA I - SIGMA I+1!<= DELTA

EL GRADO ADECUADO ES: 3

SIGMA AL CUADRADO ES: .37927331459E-08

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-1.0000893123	2.0010018687	-.23915669455E-02
1.0014303268		

EJEMPLO 2: CON LAS ORDENADAS PERTURBADAS.

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	0.10000000000	0.20000000000
0.30000000000	0.40000000000	0.50000000000
0.60000000000	0.70000000000	0.80000000000
0.90000000000	1.0000000000	

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-0.99990423074	-1.3709287793	-1.6863449460
-1.9489834809	-2.1583294707	-2.3125708916
-2.4063004913	-2.4329099005	-2.3824658788
-2.2428247672	-2.0000602044	

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

SIGMA I+1>SIGMA I

EL GRADO ADECUADO ES: 4

SIGMA AL CUADRADO ES: .73835725728E-08

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-0.99991771136	-4.0008955956	3.0027133940
-1.0029473951	1.0010132488	

EJEMPLO 3: CON LAS ORDENADAS PERTURBADAS.

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	.50000000000E-01	0.10000000000
0.15000000000	0.20000000000	0.25000000000
0.30000000000	0.35000000000	0.40000000000
0.45000000000	0.50000000000	0.55000000000
0.60000000000	0.65000000000	0.70000000000
0.75000000000	0.80000000000	0.85000000000
0.90000000000	0.95000000000	1.00000000000

LAS ORDENADAS DATOS SON:

0.99990485577	1.0526007798	1.1111293747
1.1765552927	1.2500067132	1.3329580047
1.4276181842	1.5355862830	1.6597642990
1.8030187222	1.9688332091	2.1607651515
2.3833038596	2.6417430667	2.9410855183
3.2881394431	3.6893717928	4.1523762371
4.6856717813	5.2981046391	6.0000532946

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

SIGMA I+1>SIGMA I

EL GRADO ADECUADO ES: 5

SIGMA AL CUADRADO ES: .47992885970E-08

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

0.99988971909	1.0028371114	0.98383004838
1.0358789499	0.96590034621	1.0116890179

EJEMPLO 4: CON LAS ORDENADAS PERTURBADAS.

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	.50000000000E-01	0.10000000000
0.15000000000	0.20000000000	0.25000000000
0.30000000000	0.35000000000	0.40000000000
0.45000000000	0.50000000000	0.55000000000
0.60000000000	0.65000000000	0.70000000000
0.75000000000	0.80000000000	0.85000000000
0.90000000000	0.95000000000	1.0000000000

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-0.99992603208	-1.0475845170	-1.0901524877
-1.1286729983	-1.1632862245	-1.1949290112
-1.2242578337	-1.2515588471	-1.2781176120
-1.3044661160	-1.3319876210	-1.3631274876
-1.4004076886	-1.4488678834	-1.5147256208
-1.6065689660	-1.7360055772	-1.9186149004
-2.1732553497	-2.5238840061	-2.9999587242

CRITERIO SELECCIONADO PARA DETERMINAR EL GRADO:

SIGMA I+1>SIGMA I

EL GRADO ADECUADO ES: 8

SIGMA AL CUADRADO ES: .59175522339E-08

LOS COEFICIENTES SON(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-0.99993538278	-1.0043048782	1.0710234900
-0.44523042215	-1.6263110445	2.6831007345
0.18236310038	-4.0806526623	1.2199941787

EJEMPLO 1: CON LAS ORDENADAS PERTURBADAS.

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	5.00000000000E-01	1.00000000000E+00
1.50000000000E+00	2.00000000000E+00	2.50000000000E+00
3.00000000000E+00	3.50000000000E+00	4.00000000000E+00
4.50000000000E+00	5.00000000000E+00	

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.00018397099E+00	1.24940478506E-01	2.00002026076E+00
5.37510259202E+00	1.10000584106E+01	1.96249664491E+01
3.20001597329E+01	4.88749145863E+01	7.09999656248E+01
9.91249703296E+01	1.34000086714E+02	

EL GRADO ADECUADO ES: 3

LAS SIGMAS AL CUADRADO SON:

2.05765470121E+03	3.45880105499E+02	1.20660768474E+01
5.09121933018E-09	5.66200518904E-09	

LAS ALFAS SON:

2.50000000000E+00	2.50000000000E+00	2.50000000000E+00

LAS BETAS SON:

0.	2.50000000000E+00	1.95000000000E+00

LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO SON:

3.83750001098E+01	2.52000188042E+01	7.49998270048E+00
1.00001872421E+00		

POLINOMIO EXPRESADO EN POTENCIAS DE X(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-1.00019603281E+00	2.00037305800E+00	-1.57731104991E-04
1.00001872421E+00		

EJEMPLO 2: CON LAS ORDENADAS PERTURBADAS.

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	1.00000000000E+00	2.00000000000E+00
3.00000000000E+00	4.00000000000E+00	5.00000000000E+00
6.00000000000E+00	7.00000000000E+00	8.00000000000E+00
9.00000000000E+00	1.00000000000E+01	

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-9.99948034816E-01	-1.99993370488E+00	1.10000576142E+01
6.79999625224E+01	2.22999878400E+02	5.53999973504E+02
1.16300009232E+03	2.17600012261E+03	3.74300003506E+03
6.03799998336E+03	9.25899997992E+03	

EL GRADO ADECUADO ES: 4

LAS SIGMAS AL CUADRADO SON:

9.35795294904E+06	2.78527771625E+06	2.83912152206E+05
5.88342505888E+03	4.99235812408E-09	1.83776776342E-09

LAS ALFAS SON:

5.00000000000E+00	5.00000000000E+00	5.00000000000E+00
5.00000000003E+00		

LAS BETAS SON:

0.	1.00000000000E+01	7.80000000000E+00
7.19999999992E+00		

LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO SON:

2.11200001851E+03	7.89199997952E+02	1.63000000819E+02
1.89999984761E+01	9.99999701480E-01	

POLINOMIO EXPRESADO EN POTENCIAS DE X(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-9.99925615673E-01	-4.00002276974E+00	2.99998636206E+00
-9.99995553473E-01	9.99999701478E-01	

EJEMPLO 3: CON LAS ORDENADAS PERTURBADAS.

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	1.00000000000E+00	2.00000000000E+00
3.00000000000E+00	4.00000000000E+00	5.00000000000E+00
6.00000000000E+00	7.00000000000E+00	8.00000000000E+00
9.00000000000E+00	1.00000000000E+01	1.10000000000E+01
1.20000000000E+01	1.30000000000E+01	1.40000000000E+01
1.50000000000E+01	1.60000000000E+01	1.70000000000E+01
1.80000000000E+01	1.90000000000E+01	2.00000000000E+01

LAS ORDENADAS DATOS SON:

9.99985824992E-01	6.00001502648E+00	6.30000464968E+01
3.63999966233E+02	1.36500009195E+03	3.90600004809E+03
9.33100014976E+03	1.96080001534E+04	3.74489999757E+04
6.64300000304E+04	1.11111000016E+05	1.77156000073E+05
2.71453000031E+05	4.02234000015E+05	5.79194999768E+05
8.13616000024E+05	1.11848099988E+06	1.50859799999E+06
2.00071900004E+06	2.61366000000E+06	3.36842100009E+06

EL GRADO ADECUADO ES: 5

LAS SIGMAS AL CUADRADO SON:

9.40715860400E+11	3.26684768559E+11	4.91504262360E+10
2.59801744119E+09	2.75934284109E+07	5.55654727936E-09
5.83441991688E-09		

LAS ALFAS SON:

1.00000000000E+01	1.00000000000E+01	1.00000000001E+01
9.99999999992E+00	9.99999999992E+00	

LAS BETAS SON:

0.	3.66666666666E+01	2.91333333331E+01
2.77714285718E+01	2.69841269844E+01	

LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO SON:

6.23960333352E+05	1.27957514283E+05	1.54031428572E+04
1.16155555581E+03	5.10000000126E+01	9.99999997080E-01

POLINOMIO EXPRESADO EN POTENCIAS DE X(DE GRADO MENOR A MAYOR):

9.99998831335E-01	9.99981836277E-01	1.00001748396E+00
9.99997174621E-01	1.00000015866E+00	9.99999997081E-01

EJEMPLO 4: CON LAS ORDENADAS PERTURBADAS.

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	5.00000000000E-01	1.00000000000E+00
1.50000000000E+00	2.00000000000E+00	2.50000000000E+00
3.00000000000E+00	3.50000000000E+00	4.00000000000E+00
4.50000000000E+00	5.00000000000E+00	5.50000000000E+00
6.00000000000E+00	6.50000000000E+00	7.00000000000E+00
7.50000000000E+00	8.00000000000E+00	8.50000000000E+00
9.00000000000E+00	9.50000000000E+00	1.00000000000E+01

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-9.99981591752E-01	-1.33194835940E+00	-2.99999587430E+00
-2.58789657910E+01	-1.43000027725E+02	-4.19613196193E+02
-4.80999979960E+02	1.72408974005E+03	1.25549999807E+04
4.74538554392E+04	1.38768999776E+05	3.47690308521E+05
7.81517000040E+05	1.61763607411E+06	3.13574700009E+06
5.76002577720E+06	1.01130789999E+07	1.70836960430E+07
2.79105650002E+07	4.42842754961E+07	6.84700890000E+07

EL GRADO ADECUADO ES: 8

LAS SIGMAS AL CUADRADO SON:

3.16548749316E+14	1.72187948110E+14	5.88504882696E+13
1.20763721283E+13	1.37906422801E+12	7.70981480648E+10
1.66112441017E+09	7.69436077568E+06	3.56332012448E-08
3.89435938298E-08		

LAS ALFAS SON:

5.00000000000E+00	5.00000000000E+00	4.99999999993E+00
5.00000000004E+00	4.99999999997E+00	5.00000000009E+00
4.99999999997E+00	5.00000000006E+00	

LAS BETAS SON:

0.	9.16666666664E+00	7.28333333344E+00
6.94285714288E+00	6.74603174592E+00	6.56565656568E+00
6.37237762232E+00	6.15641025632E+00	

LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO SON:

8.55732132480E+06	3.98660352280E+06	1.25613941090E+06
2.96197931183E+05	5.28236534085E+04	6.96384615368E+03
6.42233333272E+02	3.69999999698E+01	9.99999985936E-01

POLINOMIO EXPRESADO EN POTENCIAS DE X(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-9.99928600846E-01	-9.99896207477E-01	9.99322571660E-01
6.5276976[illegible]01E-04	-3.00028186607E+00	5.00006469756E+00
-2.00000815506E+00	-2.99999946756E+00	7.99999985934E-01

EJEMPLO 1: CON LAS ORDENADAS PERTURBADAS.

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	1.00000000000E-01	2.00000000001E-01
2.99999999999E-01	4.00000000000E-01	5.00000000000E-01
6.00000000000E-01	7.00000000000E-01	8.00000000000E-01
9.00000000000E-01	1.00000000000E+00	

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-9.79950073064E-01	-7.98911187992E-01	-5.91901245472E-01
-3.72938950688E-01	-1.36060388055E-01	1.24957323579E-01
4.15957114521E-01	7.42970572656E-01	1.11195750430E+00
1.52900447825E+00	2.00009727917E+00	

EL GRADO ADECUADO ES: 3

LAS SIGMAS AL CUADRADO SON:

9.62946010920E-01	2.21511628956E-02	7.74263309032E-04
1.06660542148E-09	9.46595912048E-10	

LAS ALFAS SON:

5.00000000000E-01	4.99999999996E-01	5.00000000005E-01

LAS BETAS SON:

0.	1.00000000001E-01	7.79999999992E-02

LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO SON:

2.75016584290E-01	2.92793747495E+00	1.50045198936E+00
1.00133449919E+00		

POLINOMIO EXPRESADO EN POTENCIAS DE X(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-9.99323967754E-01	2.00024881913E+00	-1.54975943042E-03
1.00133449919E+00		

EJEMPLO 2: CON LAS ORDENADAS PERTURBADAS.

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	1.00000000000E-01	2.00000000001E-01
2.99999999999E-01	4.00000000000E-01	5.00000000000E-01
6.00000000000E-01	7.00000000000E-01	8.00000000000E-01
9.00000000000E-01	1.00000000000E+00	

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-9.99917129344E-01	-1.37089888770E+00	-1.68637498291E+00
-1.94881847600E+00	-2.15814868924E+00	-2.31249663742E+00
-2.40634813077E+00	-2.43294804938E+00	-2.38244438873E+00
-2.24289213051E+00	-1.99984103617E+00	

EL GRADO ADECUADO ES: 4

LAS SIGMAS AL CUADRADO SON:

2.17708737619E-01	1.01436597696E-01	8.27366129360E-04
5.97725850000E-05	5.28728449820E-09	4.90717002828E-09

LAS ALFAS SON:

5.00000000000E-01	4.99999999996E-01	5.00000000005E-01
4.99999999985E-01		

LAS BETAS SON:

0.	1.00000000001E-01	7.79999999992E-02
7.20000000000E-02		

LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO SL

-1.99464804893E+00	-1.07202357374E+00	3.25008597737E+00
1.00185344780E+00	1.00790433197E+00	

POLINOMIO EXPRESADO EN POTENCIAS DE X(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-9.99331178394E-01	-4.00102546194E+00	3.00718622061E+00
-1.01395521613E+00	1.00790433197E+00	

EJEMPLO 3: CON LAS ORDENADAS PERTURBADAS.

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	5.00000000000E-02	1.00000000000E-01
1.50000000000E-01	2.00000000001E-01	2.50000000000E-01
2.99999999999E-01	3.50000000000E-01	4.00000000000E-01
4.49999999999E-01	5.00000000000E-01	5.50000000000E-01
6.00000000000E-01	6.50000000000E-01	7.00000000000E-01
7.50000000000E-01	8.00000000000E-01	8.50000000000E-01
9.00000000000E-01	9.50000000000E-01	1.00000000000E+00

LAS ORDENADAS DATOS SON:

9.99941823264E-01	1.05261274015E+00	1.11111640702E+00
1.17648962994E+00	1.24993847105E+00	1.33299720279E+00
1.42758051197E+00	1.53560642734E+00	1.65982912974E+00
1.80307467999E+00	1.96877742115E+00	2.16072796541E+00
2.38334756556E+00	2.64167864159E+00	2.94114910121E+00
3.28809917351E+00	3.68929348754E+00	4.15234239207E+00
4.68562425618E+00	5.29813808190E+00	6.00001729576E+00

EL GRADO ADECUADO ES: 5

LAS SIGMAS AL CUADRADO SON:

2.22349506397E+00	2.89436807094E-01	1.86520206059E-02
4.75305082055E-04	2.71752129353E-06	5.26258366969E-10
5.61313609296E-10		

LAS ALFAS SON:

5.00000000000E-01	4.99999999998E-01	5.00000000002E-01
4.99999999995E-01	5.00000000002E-01	

LAS BETAS SON:

0.	9.16666666664E-02	7.28333333328E-02
6.94285714288E-02	6.74603174600E-02	

LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO SON:

2.50278011453E+00	4.49938535164E+00	6.06868056584E+00
5.80175800312E+00	3.49836626902E+00	1.00413983515E+00

POLINOMIO EXPRESADO EN POTENCIAS DE X(DE GRADO MENOR A MAYOR):

9.99940551321E-01	1.00116883808E+00	9.94005230881E-01
1.01273846375E+00	9.88016681160E-01	1.00413983515E+00

EJEMPLO 4: CON LAS ORDENADAS PERTURBADAS.

LAS ABSCISAS DATOS SON:

0.	5.00000000000E-02	1.00000000000E-01
1.50000000000E-01	2.00000000001E-01	2.50000000000E-01
2.99999999999E-01	3.50000000000E-01	4.00000000000E-01
4.49999999999E-01	5.00000000000E-01	5.50000000000E-01
6.00000000000E-01	6.50000000000E-01	7.00000000000E-01
7.50000000000E-01	8.00000000000E-01	8.50000000000E-01
9.00000000000E-01	9.50000000000E-01	1.00000000000E+00

LAS ORDENADAS DATOS SON:

-1.00000007242E+00	-1.04751707586E+00	-1.09025223830E+00
-1.12866635565E+00	-1.16336403784E+00	-1.19499186624E+00
-1.22419809058E+00	-1.25163948683E+00	-1.27805178189E+00
-1.30439065793E+00	-1.33203165840E+00	-1.36303781676E+00
-1.40049638272E+00	-1.44891378646E+00	-1.51466263174E+00
-1.60649072452E+00	-1.73606127519E+00	-1.91853229330E+00
-2.17315608123E+00	-2.52388925795E+00	-3.00000000837E+00

EL GRADO ADECUADO ES: 8

LAS SIGMAS AL CUADRADO SON:

2.62182965391E-01	6.89854904712E-02	2.35583132799E-02
3.12301389192E-03	2.38341117651E-04	4.60456446345E-06
1.28012710744E-08	7.63168361560E-10	7.21893752112E-14
6.46242584512E-14		

LAS ALFAS SON:

5.00000000000E-01	4.99999999998E-01	5.00000000002E-01
4.99999999995E-01	5.00000000002E-01	4.99999999995E-01
5.00000000007E-01	4.99999999987E-01	

LAS BETAS SON:

0.	9.16666666664E-02	7.28333333328E-02
6.94285714288E-02	6.74603174600E-02	6.56565656560E-02
6.37237762232E-02	6.15641025648E-02	

LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO SON:

-1.50954017049E+00	-1.42936458299E+00	-2.51478981751E+00
-6.17323815400E+00	-8.66267047776E+00	-9.31917910072E+00
-5.00739818469E+00	1.00045314034E+00	9.95875248424E-01

POLINOMIO EXPRESADO EN POTENCIAS DE X(DE GRADO MENOR A MAYOR):

-1.00000010243E+00	-9.99980713064E-01	9.99625984932E-01
2.93643397518E-03	-3.01145994047E+00	5.02421101345E+00
-2.[illegible]16001758E+00	-2.98304785336E+00	9.95875248427E-01