UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

1Eg N.52

PROYECTO DE UN LIBRO DE TEXTO PARA MATEMATICAS FINANCIERAS Y SUS APLICACIONES EN MEXICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

PRESENTA

MARIA DE LA LUZ VILLARREAL NAVARRO

MEXICO, D.F. 1982

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

CONTENIDO

BONOS

ÍNDICE

INTERÉS SIMPLE

Introducción:

Todas las actividades financieras, se basan en el hecho de pagar una cantidad de dinero llamado interés por hacer uso de un capital obtenido por medio de un préstamo.

La mayor parte de los ingresos de los bancos y compañías inversionistas se derivan de los intereses sobre préstamos de dinero.

En general todas las operaciones comerciales o financieras están relacionadas con la cantidad producida por la inversión de capital.

En consecuencia el dinero siempre se invierte en forma productiva. Toda persona, institución o empresa que obtiene un préstamo, queda obligada a pagar cierta cantidad por el uso del dinero obtenido.

Una inversión puede ser más o menos atractiva en cuanto a su rentabilidad o utilidad; esto está en función del riesgo que tenga dicha inversión y además del lugar en donde va a ser invertida.

Generalmente a mayor riesgo podrá existir mayor utilidad y una probabilidad grande de pérdida y viceversa.

DEFINICIONES

Interés: es la cantidad de dinero pagada por el uso de un capital obtenido como préstamo o la cantidad producida por la inversión de un capital. Se denota por la letra I.

Capital: es la cantidad de dinero que se tiene en una fecha determinada que se representa por las letras C ó P, cuyo valor aumenta a S que es el valor acumulado o el monto de C en una fecha posterior impuesto a una -

cierta tasa de interés.

Expresando lo anterior de otra forma, se tiene:

$$S = C + I, \quad \text{en donde} \quad I = S - C$$

Tasa de interés: es un porcentaje que se aplica al capital durante un tiempo t como resultado del empleo del capital que se ha usado como préstamo o como inversión.

Nota: El capital se denota por la letra P del inglés Principal.

1 Ejemplo

El Sr. X obtiene un préstamo por \$ 1 500 y al final de un año debe \$ 1 525.

¿ Cuál es el interés I que le están cobrando ?

Solución:

$C = 1\,500$

$S = 1\,525$

$I = ?$

$$I = S - C$$

$$I = 1\,525 - 1\,500$$

$$I = \$\,25$$

El capital colocado como inversión ganará intereses por todo el tiempo que dura la transacción. Al interés vencido al final del plazo se le conoce como Interés Simple. En el caso de Interés Simple el interés obtenido o pagado no formará parte del capital.

El Interés Simple I sobre un Capital C, durante t años, a una tasa de interés i es función del tiempo y está dado por la ecuación:

$$I = C\,i\,t$$

Por lo tanto, el monto simple S estará dado por:

$$S = C + I \qquad \ldots \quad (1)$$

Sustituyendo I en la ecuación (1), se tiene:

$$S = C + C\,i\,t$$

Factorizando en C, se tiene:

$$S = C\,(1 + it)$$

Es importante aclarar que a menos que se establezca lo contrario, la unidad de tiempo convenida es un año.

La tasa anual de interés se representa por la letra i, y está dada como por - centaje; es decir, tomando en cuenta una relación de cada 100 unidades. Se - expresa por el símbolo %. Por ejemplo, $i = 8\,\%$ ó su equivalente en forma decimal 0.08, ó en forma racional $\frac{8}{100}$.

1 Ejemplo

Por un capital de \$ 500 que se invierte a un año se pagan \$ 25 de interés I. Encontrar la tasa de interés que se está utilizando en esta operación.

Solución:

$C = 500$

$I = 25$

$t = 1$ año

$i = ?$

$$I = C\,i\,t, \text{ donde}$$

$$i = \frac{I}{C\,t}$$

$$i = \frac{25}{500} = 0.05$$

$$i = 5\,\%$$

INTERÉS SIMPLE EXACTO E INTERÉS SIMPLE ORDINARIO

El Interés Simple Exacto se calcula sobre la base del año de 365 días o 366 en años bisiestos. El Interés Simple Ordinario se calcula con base en un año de 360 días. El uso del año de 360 días simplifica algunos cálculos, sin embargo aumenta el interés cobrado por el acreedor y éste es el que generalmente se utiliza.

1 Ejemplo

Determinar el Interés Simple Exacto y el Interés Simple Ordinario sobre $ 3 000 al 6 % durante 45 días.

Solución:

C = 3 000

i = 0.06

t = 45 días

a) Cálculo del Interés Simple Exacto:

Utilizando el año de 365 días, se tiene que:

$$t = \frac{45}{365} = \frac{9}{73}$$

$$I = C\,i\,t$$

$$I = 3\,000\,(0.06)\left(\frac{9}{73}\right)$$

$$I = \frac{1620}{73}$$

$$I = \$\,22.19$$

b) Cálculo de Interés Simple Ordinario

Utilizando el año de 360 días, se tiene:

$$t = \frac{45}{360} = \frac{1}{8}$$

$$I = C\,i\,t$$

$$I = 3\,000\ (0.06)\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$I = \frac{8\,100}{360}$$

$$I = \$\ 22.50$$

Como se puede observar, a partir de los resultados obtenidos el Interés Simple Ordinario es mayor que el Interés Simple Exacto.

Cabe aclarar que al Interés Simple Ordinario se le conoce también como Interés Simple Comercial y que al Interés Simple Exacto se le conoce como Interés Simple Real.

RELACIÓN ENTRE EL INTERÉS SIMPLE EXACTO Y EL INTERÉS SIMPLE ORDINARIO

Demostrar que el Interés Simple Exacto es igual al Interés Simple Ordinario disminuido 1/73 de sí mismo.

Se designa:

I_e = Interés Simple Exacto

I_o = Interés Simple Ordinario

d = días en que se produce el interés

t_e = tiempo exacto

t_o = tiempo ordinario

Utilizando el tiempo exacto y el tiempo ordinario de un año de 365 y 360 días - respectivamente, se tiene:

$$t_e = \frac{d}{365} \qquad t_o = \frac{d}{360}$$

Siendo $I = C\,i\,t$, sustituyendo en I se tiene:

$$I_e = C\,i\left(\frac{d}{365}\right) \qquad I_o = C\,i\left(\frac{d}{360}\right)$$

Por tanto:

$$I_e = \frac{C\,i\,d}{365} \qquad I_o = \frac{C\,i\,d}{360}$$

Si se toma el cociente de I_e / I_o, se tiene:

$$\frac{I_e}{I_o} = \frac{C\,i\,d}{365} \cdot \frac{360}{C\,i\,d}$$

$$\frac{I_e}{I_o} = \frac{(C\,i\,d)\;(360)}{(365)\;(C\,i\,d)}$$

Por tanto:

$$\frac{I_e}{I_o} = \frac{360}{365}$$

Despejando I_e :

$$I_e = \left(\frac{72}{73}\right) I_o$$

$$I_e = \left[1 - \frac{1}{73}\right] I_o$$

$$I_e = I_o - \left[\frac{1}{73}\right] I_o$$

CÁLCULO DEL TIEMPO EXACTO Y TIEMPO APROXIMADO

Considerando el tiempo entre dos fechas determinadas, el número de días que ha- de calcularse puede ser determinado de dos maneras:

a) Cálculo del tiempo exacto:

Como su nombre lo indica, es el número exacto de días tal y como se encuentra - en el calendario.

b) Cálculo de tiempo aproximado:

Se determina, suponiendo cada mes de 30 días.

1 Ejemplo

Determinar el tiempo en forma exacta y aproximada transcurrido entre el 21 de - mayo de 1978 y el 3 de julio de 1978.

Solución:

Tiempo Exacto. Se puede obtener el resultado de dos formas:

a) El número de días es igual al número de días restantes del mes de mayo, más- el número de días de junio, más los días indicados para julio, es decir:

$10 + 30 + 3 = 43.$

b) En la Tabla I donde aparecen numerados los días desde el 1o. de Enero, se - encuentra el 21 de mayo al que le corresponde el número 141 y en la misma forma al 3 de julio le corresponde el 184. El número de días requerido es igual a la diferencia entre estos dos valores, es decir, 184 - 141 = 43, siendo el mismo resultado obtenido en el inciso a).

Tiempo aproximado.

Tomando en cuenta que los meses son de 30 días; se tienen 9 días del mes de mayo, más 30 días del mes de junio más 3 días del mes de julio, que sumados dan un total de 42 días.

2 Ejemplo

Determinar el interés simple exacto y el ordinario sobre $ 3 000 al 8 % del 20 de junio al 1o. de septiembre de 1979. Calcúlese el tiempo en forma a) exacta y b) en forma aproximada.

Solución:

El tiempo exacto es de 72 días y el tiempo aproximado es de 71 días.

$C = 3\,000$

$i = 0.08$

Interés Simple Exacto:

a) $$I = 3\,000\,(0.08)\left(\frac{72}{365}\right) = \$\,47.34$$

b) $$I = 3\,000\,(0.08)\left(\frac{71}{365}\right) = \$\,46.68$$

Interés Simple Ordinario:

a) $$I = 3\,000\,(0.08)\left(\frac{72}{360}\right) = \$\,48.00$$

b) $$I = 3\,000\,(0.08)\left(\frac{71}{360}\right) = \$\,47.33$$

De los cuatro métodos para calcular el interés simple, el más usual es el interés simple ordinario con el número exacto de días, (días exactos / 360 días), - este es el sistema utilizado por las instituciones bancarias porque es el que - produce mayor interés en cualquier transacción.

VALOR PRESENTE DE UNA DEUDA

El valor de una deuda en una fecha anterior a la de su vencimiento invertida - durante un cierto tiempo a una tasa de interés dada que sea suficiente para - producir un monto determinado se le denomina "valor presente".

De la función(1):

$$S = C(1 + it)$$

se despeja C obteniéndose:

$$C = \frac{S}{1 + it}$$

ó

$$C = S(1 + it)^{-1} \qquad \ldots (2)$$

En consecuencia, la ecuación (2) representa el valor presente de un monto S a- una tasa de interés i con vencimiento en t años.

1 Ejemplo

Encontrar el valor presente de \$ 1 800 al 5 % de interés simple con vencimiento en 8 meses.

Solución:

$S = 1\ 800$

$i = 0.05$

$t = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

$C = ?$

$$S = C(1 + it), \quad \text{donde} \quad C = \frac{S}{1 + it}$$

$$C = \frac{1\ 800}{1 + 0.05\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$C = \frac{1\ 800}{1.033333}$$

$$\therefore C = \$\ 1\ 741.94$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. El Sr. X xompró un televisor en \$ 10 000, dió un enganche de \$ 2 000. Solo - debe pagar \$ 8 000 a tres meses, más un cargo adicional de \$ 500.
Determinar la tasa de interés que se está pagando por el televisor.

Solución:

$C = 8\ 000$

$I = 500$

$t = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$i = ?$

$$I = C\,i\,t, \quad \text{donde} \quad i = \frac{I}{C\,t}$$

$$i = \frac{500}{8\ 000\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$i = \frac{500}{2\ 000}$$

$$i = 0.25$$

$$i = 25\ \%$$

2. ¿En qué tiempo el monto de \$ 4 000 será \$ 4 125 al 9 % de interés simple?

Solución:

$S = 4\ 125$

$C = 4\ 000$

$i = 0.09$

$I = ?$

$t = ?$

$$I = S - C$$

$$I = 4\ 125 - 4\ 000$$

$$I = \$\ 125$$

$$I = C\ i\ t,\ \text{donde}\ t = \frac{I}{C\ i}$$

$$t = \frac{125}{4\ 000\ (0.09)}$$

$$t = 0.347222$$

Se obtienen cero años porque no existen números enteros en el resultado. Para obtener los meses, se multiplica la parte decimal por 12. Análogamente, para obtener los días, se multiplica la parte decimal restante por 30. Por tanto:

$$\begin{array}{r} 0.347222 \\ \times\ 12 \\ \hline 4.166664 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.166664 \\ \times\ 30 \\ \hline 4.999920 \end{array}$$

t = 4 meses, 4 días, etc.

3. ¿ En qué tiempo se triplicará una cantidad de dinero al 5 % de interés simple ?

Solución:

$C = 1$

$S = 3$

$i = 0.05$

$I = ?$

$t = ?$

$$I = S - C$$

$$I = 3 - 1$$

$$I = 2$$

$$I = C\,i\,t, \qquad \text{donde} \qquad t = \frac{I}{C\,i}$$

$$t = \frac{2}{1\,(0.05)}$$

$$t = 40 \text{ años}$$

4. ¿ Qué capital produce en 8 meses \$ 50 al 6 % ?

Solución:

$t = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

$I = 50$

$i = 6\ \%$

$C = ?$

$$I = C\,i\,t, \quad \text{donde} \quad C = \frac{I}{i\,t}$$

$$C = \frac{50}{0.06\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$C = \frac{50}{0.04}$$

$$C = \$\ 1\ 250$$

5. ¿Qué suma debe ser invertida al 5.25 % para tener $ 2 000 después de 6 me - ses?

Solución:

$S = 2\ 000$

$t = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$i = 0.0525$

$C = ?$

$$S = C\,(1 + it), \quad \text{donde} \quad C = \frac{S}{1 + it}$$

$$C = \frac{2\ 000}{1 + 0.0525\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$C = \frac{2\ 000}{1.02625}$$

$$C = \$\ 1\ 948.84$$

ECUACIONES DE VALOR (INTERÉS SIMPLE)

Ciertamente es sabido que una ecuación es una igualdad que consta de dos miembros, uno a la izquierda y otro a la derecha del signo igual (=).

Una ecuación de valor representa financieramente, en el primer miembro los derechos de la persona o institución que otorga una o varias cantidades de dinero como préstamo (acreedor) y el segundo miembro representará las obligaciones de la persona o institución que pide el préstamo (deudor). Cabe aclarar que estas cantidades de dinero, de antemano se les deberá estipular las tasas de interés y el tiempo de su vencimiento correspondientes.

Las ecuaciones de valor son una herramienta de las matemáticas financieras que se utilizan cuando la forma de pago de dichas cantidades; previamente estipuladas, se desean modificar, ya sea efectuando un sólo pago o cambiando las fechas en que deben hacerse dichos pagos. Esto generalmente trae como consecuencia que la persona o institución solicite una tasa de interés denominada también tasa de rendimiento adicional referente a toda la operación.
Por otra parte, para efectuar la nueva evaluación se utilizan ecuaciones de valor que tendrán como función calcular dichas cantidades de tal manera que la operación sea equitativa para ambas partes.

Dado que las cantidades a pagar están distribuidas en el tiempo, siempre será conveniente visualizar el problema en forma integral utilizando una línea de tiempo.

Finalmente, para poder efectuar un cambio en cuanto a las condiciones de la operación y que ésta sea equitativa para ambas partes, se deberá elegir en forma arbitraria un punto de referencia dentro de la línea de tiempo y a este punto se le denominará fecha focal.

Existe una regla básica para evaluar las obligaciones y derechos y se divide en tres partes:

a) Cuando las obligaciones y derechos están a la izquierda de la fecha focal (f.f.), éstas se trasladarán al punto de evaluación utilizando el factor $(1 + it)$.

b) Cuando las obligaciones y derechos coinciden en la fecha focal (f.f.), éstas permanecerán sin ningún cambio.

c) Cuando las obligaciones y derechos están a la derecha de la fecha focal (f.f.), éstas se trasladarán al punto de evaluación utilizando el factor $(1 + it)^{-1}$.

1 Ejemplo

Determinar el valor que tienen en este momento las siguientes obligaciones de un deudor, suponiendo que se espera un rendimiento en la operación del 4 % de interés simple.

a) $ 4 000 con vencimiento el día de hoy

b) $ 3 000 con vencimiento en 8 meses con interés del 8 %

c) $ 2 500 con vencimiento en un año con interés del 5 %

Tomar como fecha focal el día de hoy.

Solución:

En primer lugar se deberá calcular el valor de cada una de las deudas y después representarlas en una línea de tiempo, indicando también la fecha focal.

a) Los $ 4 000 dado que coinciden con el día de hoy constituyen una deuda de $ 4 000.

b) $C = 3\,000$

$i = 0.08$

$t = 8 = \frac{2}{3}$

$S = ?$

$$S = 3\,000\left[1 + (0.08)(\tfrac{2}{3})\right]$$

$$S = 3\,000\left[1 + \frac{0.16}{3}\right]$$

$$S = 3\,000\ (1.053333)$$

$$S = \$\ 3\,160.00$$

c) $C = 2\,500$

$i = 0.05$

$t = 1$

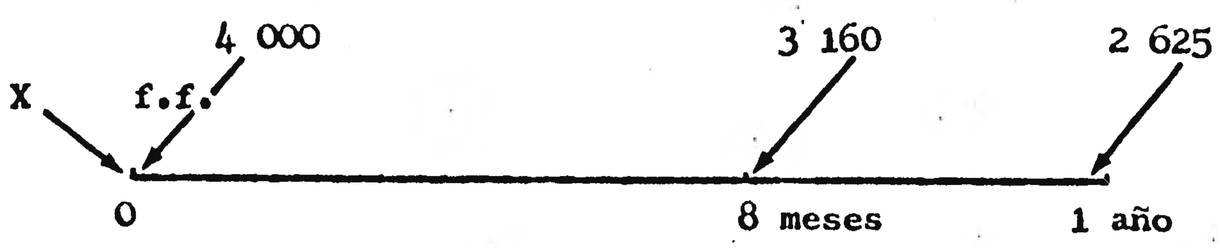
$S = ?$

$$S = 2\,500\left[1 + (0.05)\ (1)\right]$$

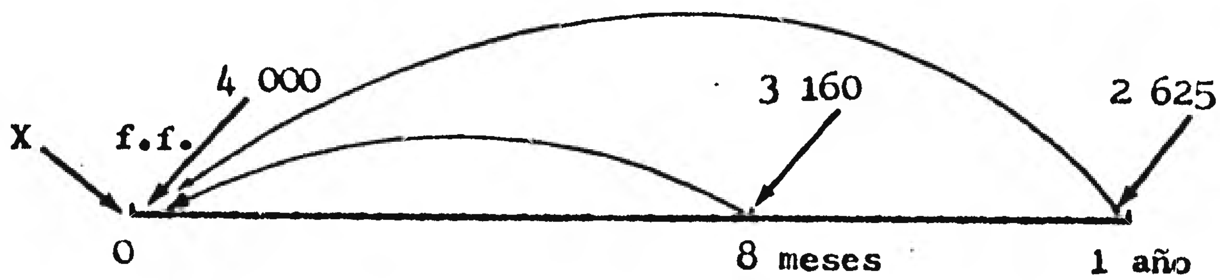
$$S = 2\,500\ (1.05)$$

$$S = \$\ 2\,625.00$$

Observando en una línea de tiempo, se tiene:



En este caso particular la cantidad buscada X y la deuda de \$ 4 000 coinciden en el punto de la fecha focal, por lo tanto, no sufrirá ningún cambio en todo el problema; en cuanto a las deudas de \$ 3 160 y \$ 2 625 por encontrarse a la derecha de la fecha focal se deberán traer a valor presente con la tasa del 4 % es decir:



La ecuación de valor queda planteada como sigue:

$$X = 4\ 000 + 3\ 160 \left[1 + (0.04)\left(\frac{2}{3}\right)\right]^{-1} + 2\ 625 \left[1 + (0.04)\ (1)\ \right]^{-1}$$

$$X = 4\ 000 + \frac{3\ 160}{1 + (0.04)\left(\frac{2}{3}\right)} + \frac{2\ 625}{1 + (0.04)\ \ (1)}$$

$$X = 4\ 000 + \frac{3\ 160}{1.03} + \frac{2\ 625}{1.04}$$

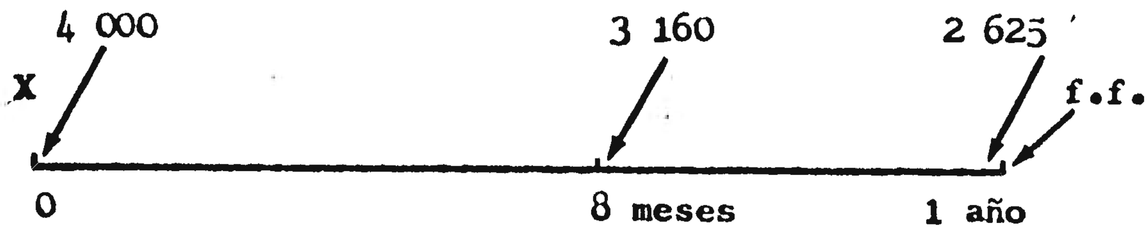
$$X = 4\ 000 + 3\ 067.96 + 2\ 524.04$$

$$X = \$\ 9\ 592.00$$

2 Ejemplo

Resuélvase el problema del ejemplo anterior, sólo que ahora considérese como fecha focal un año después.

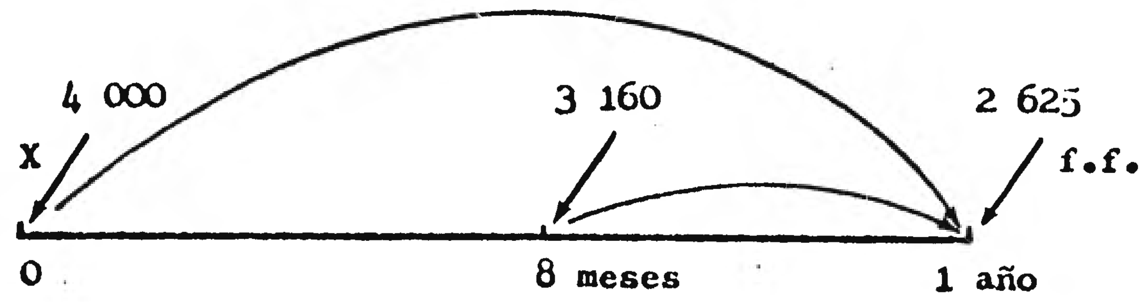
Visto en una línea de tiempo, se tiene:



En este caso, la deuda de \$ 2 625 coincide con la fecha focal (f.f.); por lo tanto no cambia.

El pago X, los \$ 4 000 y los \$ 3 160 están a la izquierda de la fecha focal, por lo tanto, para hacer la evaluación de la deuda tendrá que usarse el factor $(1 + it)$.

Es decir:



La ecuación de valor queda planteada como sigue:

$$X\left[1 + (0.04)\ (1)\right] = 4\ 000\left[1 + (0.04)\ (1)\right] + 3\ 160\left[1 + (0.04)\left(\frac{1}{3}\right)\right] +$$
$$+\ 2\ 625$$

$$X\ (1.04) = 4\ 000\ (1.04) + 3\ 160\ (1.013333) + 2\ 625$$

$$X\ (1.04) = 4\ 160 + 3\ 202.13 + 2\ 625$$

$$X\ (1.04) = 9\ 987.13$$

$$X = \frac{9\ 987.13}{1.04}$$

$$X = \$\ 9\ 603.01$$

Obsérvese que el valor de X cambia dependiendo de la fecha focal, esto sólo se presenta cuando se utiliza Interés Simple.

3 Ejemplo

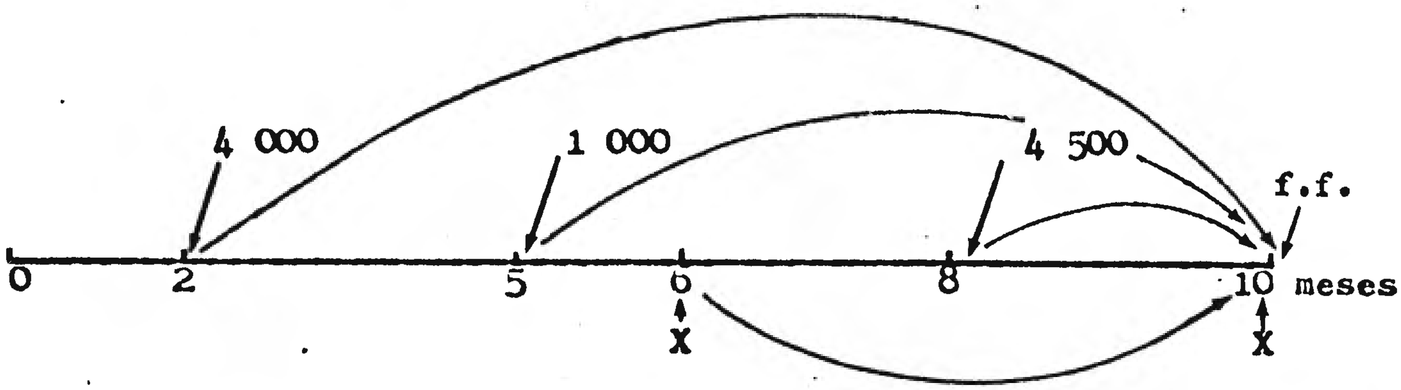
El Sr. M debe \$ 4 000 con vencimiento en 2 meses, \$ 1 000 con vencimiento en 5 meses y \$ 4 500 con vencimiento en 8 meses. Se desea saldar las deudas mediante dos pagos iguales, uno con vencimiento en 6 meses y otro con vencimiento en 10 meses. Determinar el importe de dichos pagos suponiendo un rendimiento del -

8 %. Tomar como fecha focal en 10 meses.

Solución:

Sean X_1 y X_2 los pagos, pero como deben ser iguales se denotarán con la letra X.

Visto en una línea de tiempo, se tiene:



$$X[1 + (0.08)(\tfrac{1}{3})] + X = 4\,000[1 + (0.08)(\tfrac{2}{3})] + 1\,000[1 + (0.08)(\tfrac{5}{12})] + $$
$$+ 4\,500[1 + (0.08)(\tfrac{1}{6})]$$

$$X\,(1 + 0.026667) + X = 4\,000\,(1.053333) + 1\,000\,(1.033333) +$$
$$+ 4\,500\,(1.013333)$$

$$X\,(1.026667) + X = 4\,213.32 + 7\,033.33 + 4\,560.00$$

$$X\,(1.026667) + X = 9\,806.65$$

Factorizando en X, se tiene:

$$X\,(1.026667 + 1) = 9\,806.65$$

$$X\,(2.026667) = 9\,806.65$$

$$X = \$\,4\,838.81$$

Concluyendo, los pagos en 6 y 10 meses respectivamente son de $ 4 838.81 .

4 Ejemplo

El Sr. M debe al Sr. Y \$ 2 500 pagaderos dentro de 8 meses sin intereses, -- \$ 1 000 con intereses al 4 % contratado originalmente por año y medio pero con vencimiento dentro de 9 meses y está dispuesto a recibir 3 pagos iguales, uno inmediato, otro dentro de 6 meses y el tercero dentro de un año.

Determinar el importe de cada pago utilizando como fecha focal 6 meses, supo- niendo que el Sr. Y espera un rendimiento del 8 % en la operación.

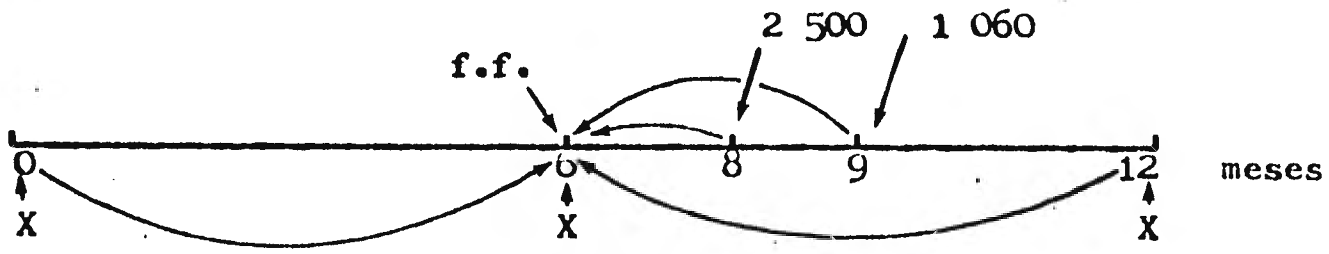
Solución:

Sea X cada uno de los tres pagos iguales. Considerando una línea de tiempo, se tiene que el valor al vencimiento del préstamo de \$ 1 000 con un interés del - 4 % es:

$$S = 1\,000\,[1 + (0.04)(1.5)] = \$\,1\,060$$

Ya sabiendo que todas las cantidades que se encuentren a la izquierda de la - fecha focal se llevarán a este punto con el factor $(1 + it)$ y las que es - tán a la derecha con el factor $(1 + it)^{-1} = \dfrac{1}{1 + it}$; quedando igua- les las cantidades que coinciden con este punto.

Considerando la línea de tiempo, se tiene:



$$X\,[1 + (0.08)(\tfrac{1}{2})] + X + \frac{X}{1 + (0.08)(\frac{1}{2})} = \frac{2\,500}{1 + (0.08)(\frac{1}{6})} + \frac{1\,060}{1 + (0.08)(\frac{1}{4})}$$

$$X\,(1.04) + X + X\,(0.961538) = 2\,500\,(0.986842) + 1\,060\,(0.980392)$$

Factorizando en X, se tiene:

$$X\,(1.04 + 1 + 0.961538) = 2\,500\,(0.986842) + 1\,060\,(0.981392)$$

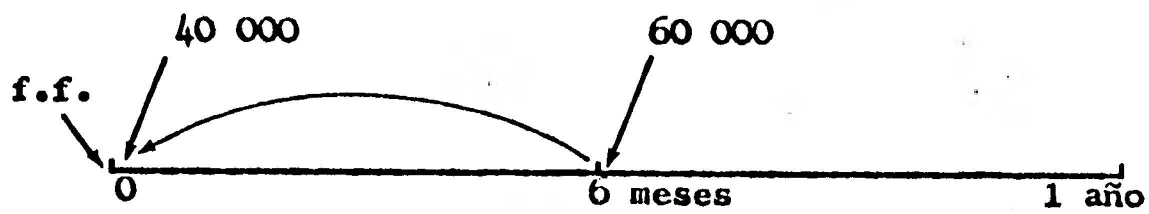
$$X\,(3.001538) = 3\,507.38$$

$$X = \$\,1\,168.19$$

5 Ejemplo

¿ Qué oferta será más conveniente para un comprador de un terreno? Dar $ 40 000 iniciales y $ 60 000 después de 6 meses, o dar $ 60 000 iniciales y $ 40 000 - después de un año. Suponiendo una tasa de interés del 6 %. Compárese en la fe - cha de compra, el valor de la oferta.

Solución para la primera oferta:



$$X = 40\,000 + \frac{60\,000}{1 + (0.06)(\frac{1}{2})}$$

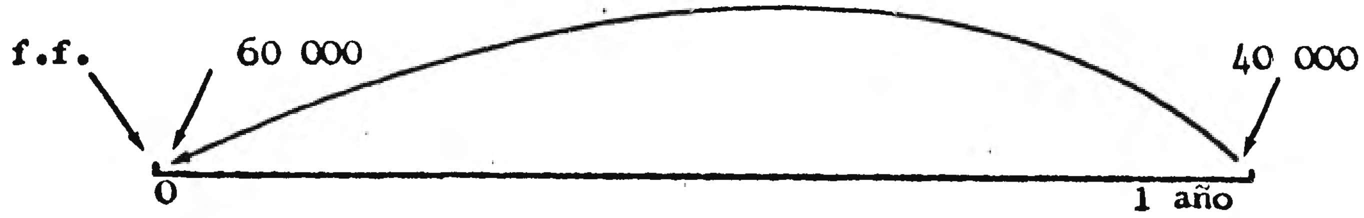
$$X = 40\,000 + \frac{60\,000}{1.03}$$

$$X = 40\,000 + 60\,000\,(0.970874)$$

$$X = 40\,000 + 58\,252.43$$

$$X = \$\,98\,252.43$$

Solución para la segunda oferta:



$$X = 60\ 000 + \frac{40\ 000}{1 + (0.06)(1)}$$

$$X = 60\ 000 + \frac{40\ 000}{1.06}$$

$$X = 60\ 000 + 40\ 000\ (0.943396)$$

$$X = 60\ 000 + 37\ 735.85$$

$$X = \$\ 97\ 735.85$$

Comparando el valor de cada una de las ofertas es más conveniente para el comprador aceptar la segunda.

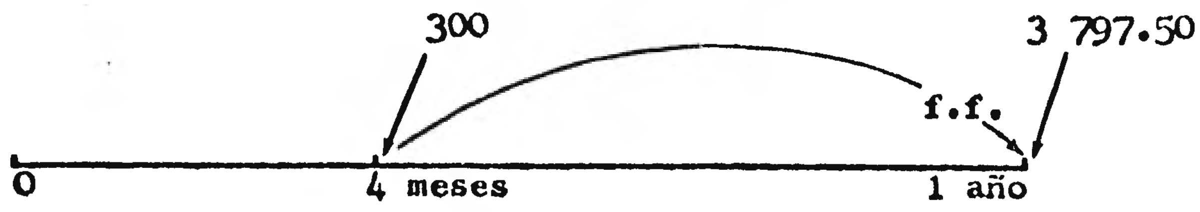
6 Ejemplo

Una persona debe \$ 3 500 para pagar en un año con intereses del 8.5 %, conviene en pagar \$ 300 al final de 4 meses. ¿Qué cantidad tendrá que pagar al final de un año para liquidar el resto de la deuda? Suponiendo un rendimiento del 8.5 %. Tómese como fecha focal al final de un año.

Solución:

Sea X la cantidad que va a pagar en un año.

La deuda de \$ 3 500 llevados a un año con un rendimiento del 8.5 % es igual a \$ 3 797.50. Dicha deuda será igual a \$ 300 llevados durante 8 meses más X que-es la cantidad a pagarse un año después considerando un rendimiento global del 8.5 %.



$$3\ 797.50 = 300\left[1 + (0.085)\left(\tfrac{2}{3}\right)\right] + X$$

$$3\ 797.50 = 300\,(1.056667) + X$$

$$3\ 797.50 = 317 + X$$

$$X = 3\ 797.50 - 317$$

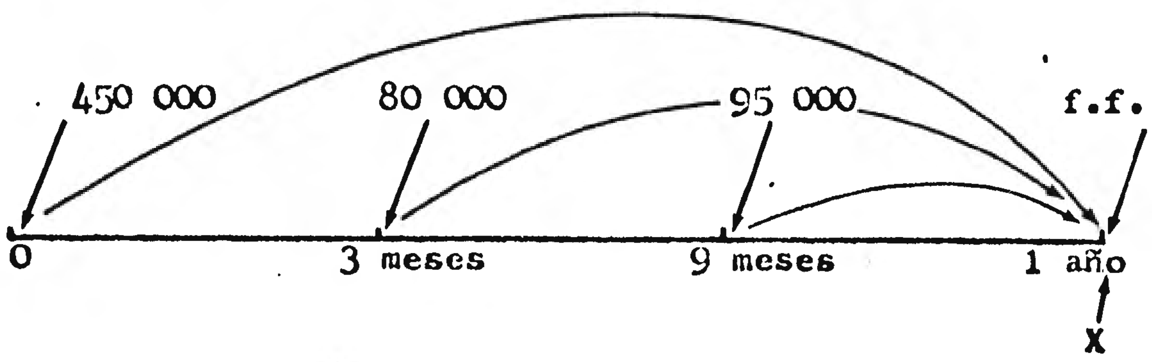
$$X = \$\ 3\ 480.50$$

7 Ejemplo

El Sr. M adquiere un condominio de \$ 500 000 mediante un pago al contado de \$ 50 000; conviene en pagar el 18.5 % sobre lo restante. Si paga \$ 80 000 después de 3 meses y \$ 95 000 seis meses más tarde.

¿ Cuál será el importe del pago único que tendrá que hacer un año después para liquidar totalmente el departamento ? Tómese como fecha focal al final de un año.

Solución:



$$450\,000\left[1 + (0.185)(1)\right] = 80\,000\left[1 + (0.185)(\tfrac{3}{4})\right] + 95\,000\left[1 + (0.185)(\tfrac{1}{4})\right] + X$$

$$450\,000\,(1.185) = 80\,000\,(1.138750) + 95\,000\,(1.046250) + X$$

$$533\,250 = 91\,100 + 99\,393.75 + X$$

$$X = 533\,250 - 190\,493.75$$

$$X = \$\,342\,756.25$$

PAGARÉS

Un pagaré es una promesa de pago escrita de una cantidad de dinero previamente determinada con o sin intereses, suscrita por un deudor y en favor de un acreedor.

Plazo: es el período de tiempo implícito en el documento estipulando número de meses ó número de días.

Valor Nominal: es la suma estipulada en el documento.

Fecha de Vencimiento: es la fecha en la cual debe ser pagada la deuda.

Valor de Vencimiento: es la suma que debe ser pagada en la fecha de vencimiento.

En todo pagaré, si los intereses no se encuentran estipulados, el valor nominal será igual al valor de vencimiento; en caso contrario el valor de vencimiento siempre será mayor que el valor nominal.

Para determinar la fecha de vencimiento de un pagaré, se procede de la siguiente forma:

a) Si el plazo está dado en meses, el tiempo se determinará aproximadamente.

b) Si el plazo está dado en días, el tiempo se determinará exactamente.

En un pagaré siempre se utilizará el interés simple ordinario en el cálculo de su valor de vencimiento.

1 Ejemplo

Encontrar el valor de vencimiento de un pagaré de $ 2 500 firmado el 15 de marzo y que va a ser liquidado dentro de tres meses, utilizando una tasa de interés del 6 %.

Solución:

En este caso el plazo es de tres meses, por lo que la fecha de vencimiento será el 15 de junio.

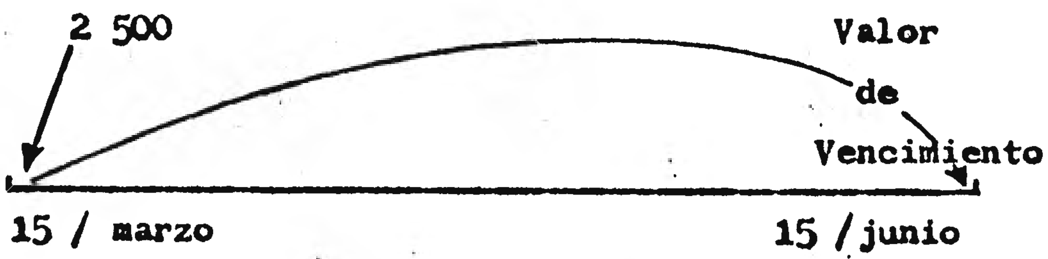
Sea X el valor del pagaré:

$$X = 2\ 500\ \left[1 + (0.06)\left(\tfrac{1}{4}\right)\right]$$

$$X = 2\ 500\ (1.015)$$

$$X = \$\ 2\ 537.50$$

Visto en una línea de tiempo:



2 Ejemplo

Un pagaré de $ 1 400 firmado el 1o. de mayo con vencimiento en seis meses y con intereses del 8 %, fué vendido al Sr. M el 14 de agosto con base de un rendimiento en la inversión del 12 %.

¿Cuánto pagó el Sr. M por el documento?

Solución:

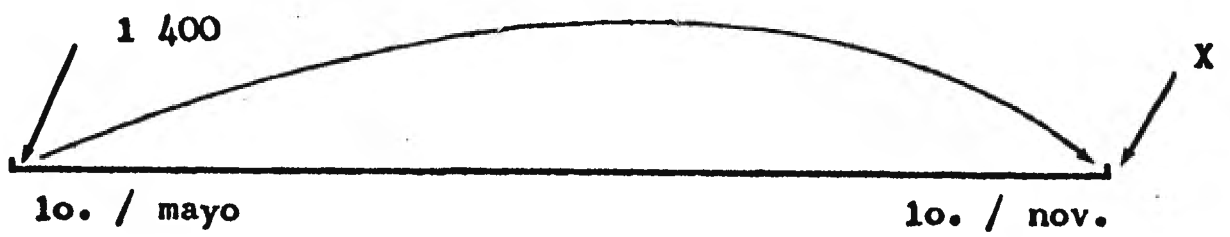
La Fecha de vencimiento del documento es el 1o. de noviembre y su valor de vencimiento es X; por lo tanto:

$$X = 1\ 400\ \left[1 + (0.08)\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]$$

$$X = 1\ 400\ (1.04)$$

$$X = \$\ 1\ 456.00$$

Visto en una línea de tiempo:



Una vez que se ha encontrado el valor del pagaré en su fecha de vencimiento, es necesario encontrar su valor presente al día 14 de agosto, es decir durante 79 días que es la diferencia en días entre el 1o. de noviembre y el 14 de agosto. Por lo tanto:

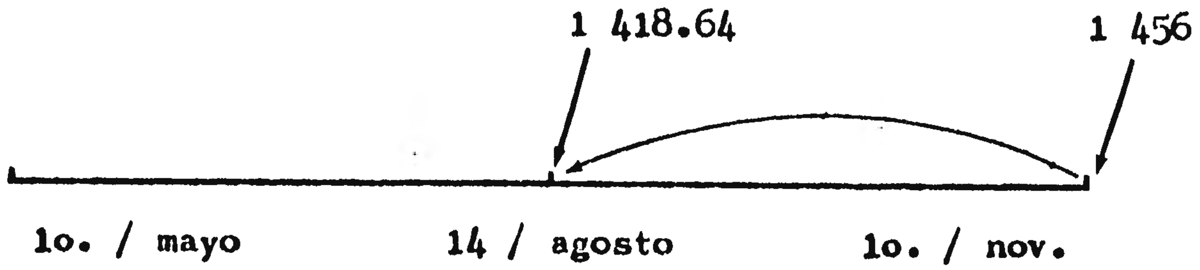
$$C = \frac{1\ 456}{1 + (0.12)\left(\frac{79}{360}\right)}$$

$$C = \frac{1\ 456}{1.026333}$$

$$C = \$\ 1\ 418.64$$

Que es el valor que debe pagar el Sr. M por el pagaré.

Visto en una línea de tiempo:



DESCUENTO SIMPLE

En muchas operaciones crediticias para calcular los intereses financieros que soportan se efectúan sobre la cantidad acumulada o monto en lugar de hacerlo sobre el valor actual del crédito solicitado.

El dinero obtenido por quien solicita un préstamo se define como el valor descontado simple o bancario.

Por ejemplo, un individuo que solicita un préstamo de \$ 1 000 a pagar en un año. El acreedor utiliza el 6 % de interés, sin embargo dicho acreedor se quedará con el 6 % de los \$ 1 000 y entregará al solicitante un capital de sólo \$ 940 .

DESCUENTO SIMPLE A UNA TASA DE INTERÉS

El descuento simple a una tasa de interés es el valor presente C de una cantidad S con vencimiento en una fecha posterior.

El descuento simple denotado por la letra D, puede ser interpretado como el valor descontado de S; por lo tanto: $D = S - C$

El descuento simple es conocido también como descuento racional.

A la diferencia $S - C$ se le dan dos interpretaciones:

i) Es el descuento simple D que al restarse de S produce C.

ii) Es el interés I que al sumarse a C produce S.

1 Ejemplo

Determinar el valor presente al 8 % de interés de \$ 1 500 con vencimiento en 3 meses. Calcular el descuento simple.

Solución:

$S = 1\ 500$

$i = 0.08$

$t = \frac{1}{4}$ año

$C = ?$

$D = ?$

$$S = C\,(1 + it), \quad \text{donde}$$

$$C = \frac{S}{1 + it}$$

$$C = \frac{1\ 500}{1 + (0.08)\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$C = \frac{1\ 500}{1.02}$$

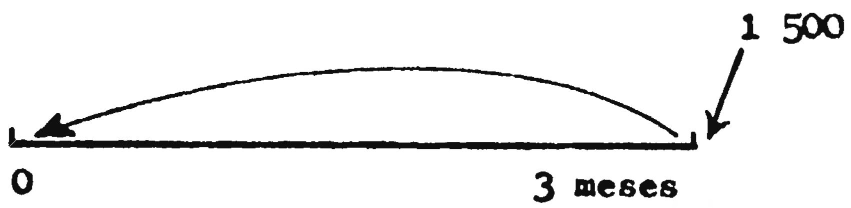
$$C = \$\ 1\ 470.59$$

$$D = S - C$$

$$D = 1\ 500 - 1\ 470.59$$

$$D = \$\ 23.41$$

Visto en una línea de tiempo:



DESCUENTO SIMPLE A UNA TASA DE DESCUENTO

La tasa de descuento se define como la razón de descuento dado por unidad de tiempo (en este caso un año), sobre un capital que va a ser descontado.

El descuento simple D de una cantidad S por t años y a una tasa de descuento d está dado por la siguiente expresión:

$$D = S\,d\,t$$

Y el valor presente de S está dado por:

$$C = S - D$$

$$C = S - S\,d\,t$$

$$C = S\,(1 - dt)$$

2 Ejemplo

Determinar el descuento simple sobre una deuda de \$ 2 500 con vencimiento en - 8 meses a una tasa de descuento del 5 %.

¿Cuál es el valor presente de la deuda?

Solución:

$S = 2\,500$

$d = 0.05$

$t = \frac{2}{3}$

$D = ?$

$S = ?$

$$D = S\,d\,t$$

$$D = 2\,500\,(0.05)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$D = \$\,83.33$$

$$C = S - D$$

$$C = 2\,500 - 83.33$$

$$C = \$\,2\,416.67$$

El resultado anterior pudo haberse obtenido de la siguiente forma:

$$C = S(1 - dt)$$

$$C = 2\,500 \left[1 - (0.05)\left[\frac{2}{3}\right]\right]$$

$$C = 2\,500\,(1 - 0.033333)$$

$$C = 2\,500\,(0.966667)$$

$$C = \$\,2\,416.67$$

Visto en una línea de tiempo:

DESCUENTO DE PAGARÉS

Descuento es la rebaja que se hace sobre una suma de dinero que quiere cobrarse antes de su vencimiento; dicha suma está amparada por un documento denominado pagaré.

Por vencimiento de un pagaré se entiende el cumplimiento del plazo en el que debe ser pagado.

El pagaré tiene dos valores, el nominal que es la suma escrita en el documento (la que debe ser pagada al vencimiento del plazo) y el efectivo que es la suma pagada antes del vencimiento.

Un pagaré puede ser vendido una o más veces antes de la fecha de su vencimiento. Cada comprador descuenta el valor del documento al vencimiento desde la fecha de la venta hasta la fecha de vencimiento a su tasa de descuento fija.

1 Ejemplo

Un documento de \$ 3 500 a 8 meses con intereses al 7 %, fechado el 30 de marzo fué descontado el 7 de julio al 6 %. Encontrar el valor del documento al 7 de julio.

Solución:

$C = 3\,500$

$t = 8 = \frac{2}{3}$

$i = 0.07$

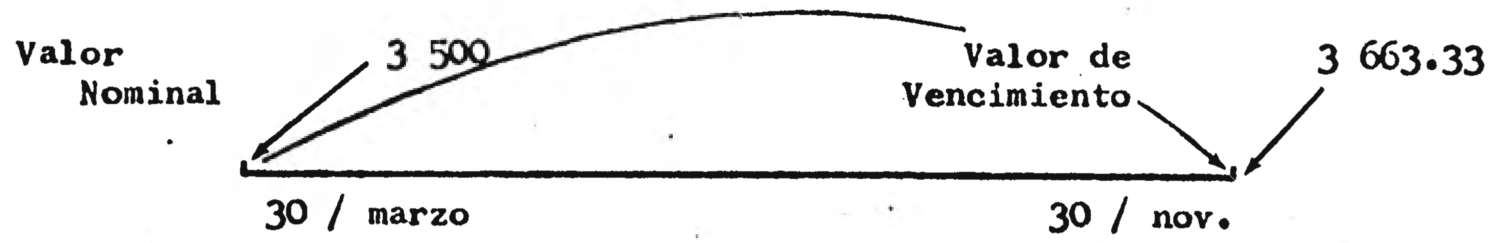
$S = ?$

$$S = C\,(1 + it)$$

$$S = 3\,500\left[1 + (0.07)\left(\tfrac{2}{3}\right)\right]$$

$$S = \$\,3\,663.33$$

Visto en una línea de tiempo:



Considerando un período de descuento (del 7 de julio al 30 de noviembre) de 75 días, se tiene:

$S = 3\,663.33$

$t = 75$ días

$d = 0.06$

$C = ?$

$$C = S(1 - dt)$$

$$C = 3\,663.33 \left[1 - (0.06)\left[\frac{75}{360}\right]\right]$$

$$C = \$\,3\,617.53$$

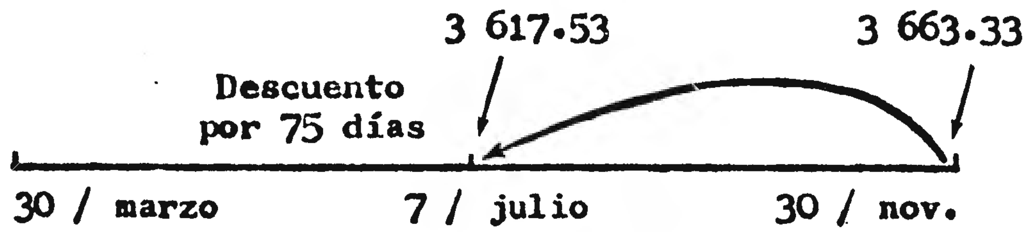
ó

$$C = S - S\,d\,t$$

$$C = 3\,663.33 - 3\,663.33\,(0.06)\left[\frac{75}{360}\right]$$

$$C = \$\,3\,617.53$$

Visto en una línea de tiempo:



DEMOSTRACIONES

Aplicando la ecuación $C = S(1 - dt)$

a) Demostrar que el Interés Simple que gana C en t años es: $I = \dfrac{C\,d\,t}{1 - dt}$

b) Demostrar que la tasa de interés es: $i = \dfrac{d}{1 - dt}$

c) Demostrar en base a la relación del inciso anterior que la tasa de descuento es: $d = \dfrac{i}{1 + it}$

a) **Por demostrar:**

$$I = \frac{C\,d\,t}{1 - dt}$$

De la relación $C = S\,(1 - dt)$, **donde** $S = \dfrac{C}{1 - dt}$ **y sustituyendo S en la relación** $I = S - C$, **se tiene:**

$$I = \frac{C}{1 - dt} - C$$

$$I = \frac{C - C\,(1 - dt)}{1 - dt}$$

$$I = \frac{C - C + C\,d\,t}{1 - dt}$$

$$\therefore \quad I = \frac{C\,d\,t}{1 - dt}$$

b) **Por demostrar:**

$$i = \frac{d}{1 - dt}$$

De la relación $C = S\,(1 - dt)$, **donde** $S = \dfrac{C}{1 - dt}$ **y sustituyendo S en la relación** $i = \dfrac{S - C}{C\,t}$, **se tiene:**

$$i = \frac{\dfrac{C}{1 - dt} - C}{C\,t}$$

$$i = \frac{\dfrac{C - C\,(1 - dt)}{1 - dt}}{C\,t}$$

$$i = \frac{\dfrac{C - C + C\,d\,t}{1 - dt}}{C\,t}$$

$$i = \frac{\dfrac{C\,d\,t}{1 - dt}}{C\,t}$$

$$i = \frac{C\,d\,t}{C\,t\,(1 - dt)}$$

$$\therefore\ i = \frac{d}{1 - dt}$$

c) En base a la relación obtenida anterior demostrar:

$$d = \frac{i}{1 + it}$$

Despejando d de la relación $i = \dfrac{d}{1 - dt}$, se tiene:

$$d = i\,(1 - dt)$$

$$d = i - i\,d\,t$$

$$d + i\,d\,t = i$$

$$d\,(1 + it) = i$$

$$\therefore\ d = \frac{i}{1 + it}$$

1 Ejemplo

Determinar la tasa de interés equivalente a una tasa de descuento del 4 % por - 4 meses.

Solución:

$S = 1$

$d = 4\ \%$

$t = 4$ meses

$i = ?$

De la relación:

$$C = S\,(1 - dt)$$
$$C = 1 - (0.04)\left(\tfrac{1}{3}\right)$$
$$C = 1 - 0.013333$$
$$C = 0.986 \qquad \ldots (1)$$

De la relación:

$$C = \frac{S}{1 + it}$$
$$C = \frac{1}{1 + i\left[\frac{1}{3}\right]}$$
$$C = \frac{3}{3 + i} \qquad \ldots (2)$$

Por tanto, igualando las relaciones (1) y (2), se tiene:

$$0.986 = \frac{3}{3 + i}$$
$$(3 + i)(0.986) = 3$$
$$2.961 + 0.986\,(i) = 3$$
$$0.986\,(i) = 3 - 2.961$$
$$0.986\,(i) = 0.039$$
$$i = 0.0395\ , \qquad i = 3.95\ \%$$

2 Ejemplo

Determinar la tasa de descuento equivalente a una tasa de interés del 6 % por 5 meses.

Solución:

$S = 1$

$i = 6\ \%$

$t = 5$ meses

$d = ?$

De la relación: $$C = S\,(1 + it)^{-1}$$

$$C = \left[1 + (0.06)\left[\frac{5}{12}\right]\right]^{-1}$$

$$C = 0.975610 \qquad \ldots \qquad (1)$$

De la relación: $$C = S\,(1 - dt)$$

$$C = 1 - d\left[\frac{5}{12}\right] \qquad \ldots \qquad (2)$$

Por tanto, igualando las relaciones (1) y (2), se tiene:

$$0.975610 = 1 - d\left[\frac{5}{12}\right]$$

$$0.975610 - 1 = -d\left[\frac{5}{12}\right]$$

$$-0.02439 = -d\left[\frac{5}{12}\right]$$

$$0.02439 = d\left[\frac{5}{12}\right]$$

$$\frac{(12)(0.02439)}{5} = d$$

$$d = 0.058536$$

$$d = 5.85\ \%$$

[redacted]

TABLA PARA ENCONTRAR EL NUMERO DE DIAS ENTRE DOS FECHAS DETERMINADAS

	PRIMER AÑO												SEGUNDO AÑO											
DIA	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	366	397	425	456	486	517	547	578	609	639	670	700
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	367	398	426	457	487	518	548	579	610	640	671	701
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	368	399	427	458	488	519	549	580	611	641	672	702
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	369	400	428	459	489	520	550	581	612	642	673	703
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339	370	401	429	460	490	521	551	582	613	643	674	704
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	371	402	430	461	491	522	552	583	614	644	675	705
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	372	403	431	462	492	523	553	584	615	645	676	706
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	373	404	432	463	493	524	554	585	616	646	677	707
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	374	405	433	464	494	525	555	586	617	647	678	708
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	375	406	434	465	495	526	556	587	618	648	679	709
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	376	407	435	466	496	527	557	588	619	649	680	710
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	377	408	436	467	497	528	558	589	620	650	681	711
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347	378	409	437	468	498	529	559	590	621	651	682	712
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	379	410	438	469	499	530	560	591	622	652	683	713
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	380	411	439	470	500	531	561	592	623	653	684	714
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	381	412	440	471	501	532	562	593	624	654	685	715
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	382	413	441	472	502	533	563	594	625	655	686	716
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	383	414	442	473	503	534	564	595	626	656	687	717
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353	384	415	443	474	504	535	565	596	627	657	688	718
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	385	416	444	475	505	536	566	597	628	658	689	719
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355	386	417	445	476	506	537	567	598	629	659	690	720
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	387	418	446	477	507	538	568	599	630	660	691	721
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	388	419	447	478	508	539	569	600	631	661	692	722
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	389	420	448	479	509	540	570	601	632	662	693	723
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	390	421	449	480	510	541	571	602	633	663	694	724
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	391	422	450	481	511	542	572	603	634	664	695	725
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	392	423	451	482	512	543	573	604	635	665	696	726
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	393	424	452	483	513	544	574	605	636	666	697	727
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	394		453	484	514	545	575	606	637	667	698	728
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	395		454	485	515	546	576	607	638	668	699	729
31	31		90		151		212	243		304		365	396		455		516		577	608		669		730

CRECIMIENTO GEOMÉTRICO

El crecimiento geométrico se encuentra muy frecuentemente en fenómenos naturales-tales como el crecimiento de poblaciones, el desarrollo de una vida, de una planta, etc., así como el crecimiento de un capital impuesto a una cierta tasa de interés. Estos ejemplos tienen una característica en común, son funciones del tiempo.

Considerando como ejemplo una población de bacterias, las cuales se encuentran en un medio favorable para su reproducción y desarrollo; es posible contar el número de ellas en un momento dado.

Supóngase que al iniciarse un experimento en un medio de cultivo determinado, - existe un cierto número de bacterias designado por $f(0) > 0$; transcurrido un - tiempo t habrá $f(t)$ bacterias y la diferencia $f(t) - f(0)$ representará el incremento en la población de bacterias ocurrido en el tiempo t.

Si se divide esta diferencia entre el número inicial de bacterias $f(0)$, se tendrá la tasa de crecimiento en el tiempo t, es decir:

$$\frac{f(t) - f(0)}{f(0)}$$

Este ejemplo es aplicable a cualquier fenómeno que esté en función del tiempo.

Considérese ahora en lugar de un lapso de tiempo t, un incremento en el tiempo Δt y sea $f(t)$ la población en el tiempo t, y $f(t + \Delta)$ la población después de haber-transcurrido un tiempo Δ, el incremento de la población será:

$$f(t + \Delta) - f(t)$$

y para obtener la tasa de crecimiento se divide en primera instancia la diferencia de tiempos entre $f(t)$, es decir:

$$\frac{f(t+\Delta) - f(t)}{f(t)}$$

y finalmente para obtener la tasa de crecimiento por unidad de tiempo, se tiene:

$$\frac{f(t+\Delta) - f(t)}{\Delta\, f(t)}$$

Para obtener la tasa de crecimiento instantáneo se recurre al límite de la expresión haciendo que Δ tienda a cero.

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{f(t+\Delta) - f(t)}{\Delta\, f(t)}$$

$\frac{1}{f(t)}$ puede salir fuera del operador por ser independiente de Δ; es decir:

$$\frac{1}{f(t)} \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(t+\Delta) - f(t)}{\Delta}$$

Pero esta expresión es la derivada de f(t), en consecuencia

$$\frac{1}{f(t)} \frac{d}{dt} f(t) \quad \text{lo que se denomina} \quad \delta(t)$$

por lo tanto, se tiene:

$$\frac{1}{f(t)} \frac{d}{dt} f(t) = \delta(t)$$

y como la derivada de una función por el recíproco de la función es igual a la derivada del logaritmo natural de la función, entonces se puede escribir:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Ln} f(t) = \delta(t)$$

ó

$$d \; Ln \; f(t) = \delta(t) \; dt$$

como es de interés conocer lo que sucede en una unidad de tiempo, se integrarán - ambos miembros de la ecuación anterior en el intervalo $[0,t]$; es decir:

$$\int_0^t d \; Ln \; f(t) = \int_0^t \delta(t) \; dt$$

Por otro lado se sabe que la integral de la derivada de una función es igual a la función misma, entonces:

$$Ln \; f(t) \Big]_0^t = \int_0^t \delta(t) \; dt$$

Evaluando la función de cero a t y basándose en el Teorema del Cálculo Diferen - cial e Integral que dice:

$$\int_a^b Ln \; f(t) = Ln \; f(b) - Ln \; f(a)$$

se tiene:

$$Ln \; f(t) - Ln \; f(0) = \int_0^t \delta(t) \; dt \quad .$$

Por la regla de los logaritmos que dice que el logarítmo del cociente de dos nú - meros es igual a la diferencia del logarítmo de dichos números, se obtiene:

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{f(t)}{f(0)}\right) = \int_0^t \delta(t)\,dt$$

Aplicando exponencial a ambos miembros de la igualdad, se tiene:

$$\exp\ \mathrm{Ln}\left(\frac{f(t)}{f(0)}\right) = \exp\left[\int_0^t \delta(t)\,dt\right]$$

Pudiéndose escribir también de la siguiente manera:

$$\exp\ \mathrm{Ln}\left(\frac{f(t)}{f(0)}\right) = e^{\left[\int_0^t \delta(t)\,dt\right]}$$

por tanto se tiene:

$$\frac{f(t)}{f(0)} = \exp\left[\int_0^t \delta(t)\,dt\right]$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por f(0), se tiene:

$$f(t) = f(0)\ \exp\left[\int_0^t \delta(t)\,dt\right]$$

Es de interés que se tome a la tasa de crecimiento instantáneo $\delta(t)$ constante, - para conocer lo que sucede en una unidad de tiempo.

Si $\delta(t) = \delta$ (constante), entonces:

$$f(t) = f(0) \exp \left[\int_0^t \delta \, dt \right]$$

Integrando el segundo miembro de la igualdad, se tiene:

$$f(t) = f(0) \exp (\delta t - 0)$$

ó

$$f(t) = f(0) \exp (\delta t)$$

Suponiendo que $f(0) = 1$, entonces

$$f(t) = \exp (\delta t)$$

ó

$$f(t) = e^{\delta t} \qquad \ldots \quad (1)$$

Por otra parte, una unidad con un incremento anual i y con un crecimiento geomé - trico, se comporta de la siguiente manera:

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 1+i$$

$$f(2) = 1+i + i(1+i) = (1+i) + (i+i^2)$$
$$= 1+2i+i^2 = (1+i)(1+i) = (1+i)^2$$

$$f(3) = (1+i)^2 + i(1+i)^2 = (1+i)^2 + i(1+2i+i^2)$$
$$= (1+i)^2 + (i+2i^2+i^3) = 1+2i+i^2 +$$
$$+ i+2i^2+i^3 = (1+i)^3$$

$$\vdots$$

$$f(t) = (1+i)^t \qquad \ldots (2)$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2) se tiene:

$$(1+i)^t = e^{\delta t}$$

Aplicando raíz t-ésima a ambos miembros de la igualdad, se tiene:

$$\sqrt[t]{(1+i)^t} = \sqrt[t]{e^{\delta t}}$$

por tanto

$$(1+i) = e^{\delta}$$

Aplicando logaritmos en ambos miembros de la igualdad, se tiene:

$$\text{Ln}\ (1 + i) = \text{Ln}\ e^{\delta}$$

$$\text{Ln}\ (1 + i) = \delta$$

Donde δ es la tasa de crecimiento o fuerza de crecimiento e i es la tasa de interés o crecimiento por período.

1 Ejemplo

Supóngase que se tiene una población de 10 000 mariposas al iniciarse un experimento y que después de un año hay 18 000.

¿Cuántas mariposas habrá en la población al término de 6 meses?

Solución:

$$f(0) = 10\ 000$$

$$f(1) = 18\ 000$$

$$t = 1 \text{ año}$$

La tasa de crecimiento anual se obtiene de la expresión:

$$\frac{f(t) - f(0)}{f(0)} = \frac{18\ 000 - 10\ 000}{10\ 000} = 0.80$$

Por lo tanto:

$$i = 80\ \%$$

Si se considera la tasa de crecimiento instantáneo $\delta(t)$ constante durante un año, se tiene:

$$\delta = \text{Ln}\ (1+i)$$

entonces $$\delta = \text{Ln}\ (1+0.80)$$

Para obtener el logaritmo natural de un número, se busca inicialmente su logaritmo decimal (base 10) y se multiplica por la constante 2.302585 que se obtiene de la siguiente expresión:

$$\log_e N = \frac{\log_{10} N}{\log_{10} e}$$

$$\log_e N = \frac{1}{0.43429}$$

$$\log_e N = 2.302585$$

Nota: La demostración de conversión de logaritmos decimales a logaritmos naturales se encuentra en el índice.

Por lo tanto:

$$\log_e 1.80 = \frac{\log_{10} 1.80}{\log_{10} e}$$

$$\log_e 1.80 = \frac{0.2552725}{0.43429}$$

$$\log_e 1.80 = 0.58779273$$

donde $$e = 2.7182818$$

entonces $\delta = \text{Ln}\ (1.80)$

$$\delta = 0.58779$$

Otra forma de calcular $\log_e\ 1.80$ es la siguiente:

$$\log_e\ 1.80 = \log\ 1.80\ (2.302585)$$

$$\log_e\ 1.80 = (0.2552725)\ (2.302585)$$

$$\log_e\ 1.80 = 0.58779$$

Con esto se concluye que $\delta < i$.

Para obtener el crecimiento a los 6 meses, se sabe que:

$$f(t) = f(0)\ e^{\delta t}$$

donde $f(0) = 10\ 000$

$$\delta = 0.58779$$

$$t = \tfrac{1}{2} \text{ año}$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = 10\ 000\ \exp\left[\frac{0.5877866}{2}\right]$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = 10\ 000\ \exp\ (0.29389)$$

Aplicando antilogarítmo a ambos miembros de la igualdad, se tiene:

$$\text{Ln}\ f(\tfrac{1}{2}) = \text{Ln}\ 10\ 000 + \text{Ln}\ \exp\ (0.2938952)$$

$$\text{Ln}\ f(\tfrac{1}{2}) = 9.2103404 + 0.2938952$$

$$\text{Ln}\ f(\tfrac{1}{2}) = 9.5042356$$

Aplicando antilogarítmo a ambos miembros de la igualdad:

$$\exp\left[\text{Ln}\ f(\tfrac{1}{2})\right] = \exp\ (9.5042356)$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = \exp\ (9.5042356)$$

Aplicando logarítmo a ambos miembros de la igualdad, se tiene:

$$\log f(\tfrac{1}{2}) = 9.5042356 \log e$$

$$\log f(\tfrac{1}{2}) = 9.5042356 \ (0.43429)$$

$$\log f(\tfrac{1}{2}) = 4.1275944$$

$$\text{antilog} \log f(\tfrac{1}{2}) = \text{antilog } 4.1275944$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = 13\,416$$

Por lo tanto, la población tuvo un crecimiento real en los primeros 6 meses de 3 416 nuevas mariposas, por lo que se deduce que en el segundo semestre hubo un crecimiento de 4 584, ya que el crecimiento total de la población de mariposas en un año fue de 8 000.

En el ejemplo anterior la tasa de crecimiento es del 80 %.

De donde la fuerza de interés es del 58.78 %.

Gráficamente se puede observar:

$$0 \underbrace{\hspace{3cm}}_{3\,416} 6 \text{ meses} \underbrace{\hspace{3cm}}_{4\,584} 1 \text{ año}$$

$$f(\tfrac{1}{2}) - f(0) = 13\,416 - 10\,000 = 3\,416$$

$$f(1) - f(\tfrac{1}{2}) = 18\,000 - 13\,416 = 4\,584$$

Cabe considerar que el incremento en número de elementos que existen a la mitad del año no será igual a la segunda mitad del incremento anual, ya que los elementos que se han incorporado originalmente a la población colaborarán a la procreación de otros.

Por otra parte, la tasa de crecimiento a los 6 meses es:

$$\frac{f(\frac{1}{2}) - f(0)}{f(0)} = \frac{13\,416 - 10\,000}{10\,000} = 0.3416$$

De donde $i = 34.16\ \%$ a los seis meses.

Y si se multiplica por dos, se tendrá una tasa del 68.32 % que representa el incremento que recibirá la población en un año; en el supuesto que las mariposas reproducidas en los primeros seis meses fueran retiradas del cultivo.

2 Ejemplo

El número N de bacterias de un cultivo crece a una velocidad por hora, que es siempre de un 30 % del número inicial en cualquier instante; si en un momento dado existen 100 000 bacterias. Determinar el número de bacterias después de 10 horas.

Solución:

$f(0) = 100\,000$

$n = 10$

$\delta = 0.30$

$f(10) = ?$

$$f(t) = f(0)\, e^{\delta t}$$

$$f(10) = 100\,000\, e^{0.30\,(10)}$$

$$f(10) = 100\,000\, e^{3}$$

$$\log f(10) = \log 100\,000 + 3 \log e$$

$$\log f(10) = 5 + 3\,(0.434294)$$

$$\log f(10) = 6.312882$$

$$\text{antilog} \log f(10) = \text{antilog}\ 6.312882$$

$$f(10) = 2\,008\,546.90$$

3 Ejemplo

El área metropolitana de una ciudad de Europa tuvo aproximadamente 17 000 000 habitantes en 1981, si el crecimiento continuase a un 7 % anual. Determinar la población que se tendrá al cabo de 5 años.

Solución:

$f(0) = 17\,000\,000$

$\delta = 0.07$

$n = 5$

$f(5) = ?$

$$f(t) = f(0)\ e^{\delta t}$$

$$f(5) = 17\,000\,000\ e^{0.07(5)}$$

$$f(5) = 17\,000\,000\ e^{0.35}$$

$$\log f(5) = \log 17\,000\,000 + 0.35\,(0.434294)$$

$$\log f(5) = 7.230449 + 0.152002$$

$$\log f(5) = 7.382451$$

$$\text{antilog}\ \log f(5) = \text{antilog}\ 7.382451$$

$$f(5) = 24\,124\,093$$

4 Ejemplo

La actividad de una muestra de fósforo radioactivo, era de 2 800 unidades el día 5 de mayo. Si ese material se desintegra a una velocidad por día, que es siempre de 4.95 % (es el valor constante de desintegración), determinar la actividad que se tendrá el 15 de mayo del mismo año.

Solución:

$f(0) = 2\ 800$

$\delta = 0.0495$

$n = 10$ días

$f(t) = ?$

$$f(t) = f(0)\ e^{-\delta t}$$

$$f(10) = 2\ 800\ e^{-0.0495\ (10)}$$

$$f(10) = 2\ 800\ e^{-0.495}$$

$$\log f(10) = \log 2\ 800 - 0.495\ (0.434294)$$

$$\log f(10) = 3.447158 - 0.214976$$

$$\log f(10) = 3.232182$$

$$\text{antilog} \log f(10) = \text{antilog}\ 3.232182$$

$$f(10) = 1\ 706.80$$

5 Ejemplo

Una nave espacial que lleva una velocidad de 83 000 Km por hora enciende sus retrocohetes que producen un decrecimiento de su velocidad del 10 % por segundo. Determinar la velocidad de la nave después de 60 segundos de encender los retrocohetes.

Solución:

83 000 Km / hora = 10 Km / segundo

$f(0) = 10$

$\delta = 0.10$

$n = 60$ segundos

$f(t) = ?$

$$f(t) = f(0)\ e^{-\delta t}$$

$$f(60) = 10\ e^{-0.10\,(10)}$$

$$f(60) = 10\ e^{-1}$$

$$\log f(60) = \log 10 - 1\,(0.434294)$$

$$\log f(60) = 1 - 0.434294$$

$$\log f(60) = 0.565706$$

$$\text{antilog} \log f(60) = \text{antilog}\ 0.565706$$

$$f(60) = 3.678798 \quad \text{Km por segundo}$$

$$f(60) = 30\,534.02 \quad \text{Km por hora}$$

INTERÉS COMPUESTO

El Interés se interpreta de la siguiente manera:

1. Por un lado, como interés vencido que se paga mediante cupones o cheques; es decir, el capital que produce los intereses permanece sin cambio durante el plazo de la transacción. En este caso, se trata de Interés Simple (véase capítulo - sobre interés simple).

2. Por otro lado, como interés vencido que es agregado al capital, en este caso se dice que el interés es capitalizable o convertible en capital y en consecuencia también gana intereses. Ejemplo: cuentas de ahorros.

Tratándose de Interés Compuesto el capital aumenta periódicamente y el interés - convertible en capital también aumenta periódicamente durante el período de la - transacción. La suma vencida al final de la transacción es conocida como monto compuesto. A la diferencia entre el monto compuesto y el capital original se le conoce como interés compuesto; es decir:

$$I = S - C$$

De donde, el capital más el interés pagado sobre él mismo produce el monto del - capital; es decir:

$$S = C + I$$

El interés es una función directa del tiempo, y puede ser convertido en capital anual, semestral, trimestral o mensualmente, etc..

El número de veces que el interés se convierte en un año se conoce como frecuencia de conversión.

El período de tiempo entre dos conversiones sucesivas se conoce como período de interés o conversión.

La tasa de interés efectiva de un monto contratado para ser pagado por unidad de tiempo y por unidad de capital invertido se establece normalmente como tasa - anual. Por ejemplo; por el interés al 8 % se entiende que el 8 % se convierte - anualmente, de otra forma la frecuencia de conversión se indica explícitamente; esto es, 5 % convertible semestralmente, 3 % convertible mensualmente, etc..

Los problemas de Interés Compuesto implican tres conceptos importantes:

1. El Capital original
2. La Tasa de Interés por período de tiempo
3. El número de períodos de conversión, durante todo el plazo de la transacción.

1 Ejemplo

Una cierta cantidad es invertida durante 5 años y medio al 8 % convertible tri - mestralmente, en este caso el período de conversión es 3 meses y la frecuencia - de conversión es 4.

A la frecuencia de conversión se le denota con la letra m.

De tal manera que la tasa de interés por período de conversión es:

$$\frac{i^{(m)}}{m} = \frac{\text{Tasa anual de interés convertible}}{\text{Frecuencia de Conversión}}$$

Por lo tanto:

$$\frac{i^{(m)}}{m} = \frac{0.08}{4} = 0.02$$

ó 2 % donde $m = 4$

El número de períodos de conversión es igual al producto de número de años por la frecuencia de conversión; es decir:

$$\text{Número de períodos} = (5.5)(4) = 22$$

MONTO COMPUESTO

Sea un capital C, invertido a una tasa de interés i por período de conversión, y designado con S al monto compuesto de C al final de n períodos.

Puesto que C produce Ci de interés durante el primer período de conversión, al final de dicho período se tendrá:

$$C + Ci = C(1 + i)$$

En consecuencia $C(1 + i)$ produce $Ci(1 + i)$ de interés durante el segundo período de conversión, al final de dicho período producirá:

$$\begin{aligned} C(1 + i) + Ci(1 + i) &= C\left[(1 + i) + i(1 + i)\right] \\ &= C(1 + i + i + i^2) \\ &= C(1 + 2i + i^2) \\ &= C(1 + i)^2 \end{aligned}$$

Al final del 3o. período de conversión se tendrá:

$$\begin{aligned} C(1 + i)^2 + Ci(1 + i)^2 &= C\left[(1 + i)^2 + i(1 + i)^2\right] \\ &= C\left[(1 + 2i + i^2) + i(1 + 2i + i^2)\right] \\ &= C\left[(1 + 2i + i^2) + (i + 2i^2 + i^3)\right] \\ &= C(1 + 2i + i^2 + i + 2i^2 + i^3) \\ &= C(1 + 3i + 3i^2 + i^3) \\ &= C(1 + i)^3 \end{aligned}$$

La sucesión de montos, $C(1 + i)$, $C(1 + i)^2$, $C(1 + i)^3$ forman una progresión geométrica cuyo n-ésimo término es:

$$C\,(1 + i)^n$$

por tanto el monto de un capital C al final del n-ésimo período de conversión,- a una tasa de interés i está dado por:

$$S = C\,(1 + i)^n$$

En otras palabras, el monto de un capital al final de un período de conversión se obtiene multiplicando el capital correspondiente en dicho período por el - - factor $(1 + i)$.

En consecuencia, para el final del primer período de conversión el monto será:

$$S = C\,(1 + i)$$

para el segundo período, el monto será:

$$S = C\,(1 + i)(1 + i) = C\,(1 + i)^2$$

y para el n-ésimo período, el monto será:

$$S = C\,(1 + i)^{n-1}\,(1 + i) = C\,(1 + i)^n$$

El factor $(1 + i)^n$ es el monto compuesto de un peso a la tasa de interés i - por período, por n períodos de conversión.

El valor de monto compuesto, en caso de tasas comunes de interés, pueden ser - leidos en tablas preparadas específicamente.

1 Ejemplo

Determinar el monto de \$ 2 000, si se invierten durante 5 años 9 meses, a una - tasa del 8 % convertible trimestralmente.

Solución:

$C = 2\,000$

$\dfrac{i^{(m)}}{m} = 0.08 \div 4 = 0.02$

$m = 4$

$n = 5$ años, 9 meses $= (5.75)(4) = 23$ períodos

$S = ?$

$$S = C(1 + i)^n$$

$$S = 2\,000\,(1 + 0.02)^{23}$$

$$S = 2\,000\,(1.576899)$$

$$S = \$\,3\,153.80$$

MONTO COMPUESTO CON PERIODOS DE CONVERSIÓN FRACCIONARIOS

La fórmula $S = C(1 + i)^n$ se deriva suponiendo n entero. En teoría puede ser aplicable para n entero o fraccionario. Al evaluar la fórmula cuando n es fraccionario, en ocaciones se utilizarán tablas elaboradas y en otros casos será necesario utilizar logaritmos.

1 Ejemplo

Determinar el monto compuesto (teórico) de \$ 2 000 en 6 años 3 meses al 4 % anual.

Solución:

$C = 2\,000$

$i = 0.04$

$n = 6.25 = \frac{25}{4}$

$S = ?$

$$S = C(1 + i)^n$$

$$S = 2\,000\,(1.04)^{\frac{25}{4}}$$

$$S = 2\,000\,(1.04)^6\,(1.04)^{\frac{1}{4}}$$

$$S = 2\,000\,(1.265319)(1.009853)$$

$$S = \$\,2\,555.57$$

En la práctica, ocacionalmente se aplica el procedimiento anterior; en su lugar se determina el monto compuesto correspondiente a los periodos completos de conversión y se calcula utilizando interés simple para el período fraccionario de conversión a la tasa anual estipulada.

Resolver el problema anterior utilizando interés simple en el período de conversión fraccionario.

Solución:

Aplicando interés compuesto por 6 periodos (años), e interés simple sobre el monto compuesto por $\frac{1}{4}$ de año, se tiene:

$$S = \left[2\,000\,(1.04)^6\right](1 + (0.04)(\tfrac{1}{4}))$$

$$S = \left[2\,000\,(1.04)^6\right](1 + (0.04)(0.25))$$

$$S = 2\,000\,(1.265319)\,(1.01)$$

$$S = \$\,2\,555.94$$

Esta regla es más práctica para simplificar los cálculos y produce un resultado ligeramente mayor que la regla teórica.

En ocaciones pueden surgir problemas al tratar de resolver este tipo de ejemplos, y esto sucede cuando el valor de n es demasiado grande con respecto al calculado en las tablas.

Lo anterior se puede resolver descomponiendo en factores que contengan valores para n que puedan ser localizados en las tablas.

2 Ejemplo

Supóngase que se quiere determinar el valor del siguiente factor:

$$(1 + 0.08)^{150}$$

Este factor se puede descomponer de muchas formas, por ejemplo:

$$(1 + 0.08)^{150} = (1.08)^{75}\ (1.08)^{75}$$

$$(1 + 0.08)^{150} = (321.20453)\ (321.20453)$$

$$(1 + 0.08)^{150} = 103\ 172.35$$

ó

$$(1 + 0.08)^{150} = (1.08)^{100}\ (1.08)^{50}$$

$$(1 + 0.08)^{150} = (2\ 199.761256)\ (46.901612)$$

$$(1 + 0.08)^{150} = 103\ 172.35$$

3 Ejemplo

Encontrar el monto compuesto de $ 2 500 invertidos durante 25 años suponiendo - una tasa efectiva del 6 % convertible bimestralmente.

Solución:

$C = 2\ 500$

$n = 25$

$m = 6$

$$\frac{i^{(m)}}{m} = \frac{0.06}{6} = 0.01$$

$S = ?$

$$S = 2\ 500 \left[1 + \frac{0.06}{6}\right]^{(25)(6)}$$

$$S = 2\ 500\ (1 + 0.01)^{150} \qquad \ldots (1)$$

dado que el factor $(1 + 0.01)^{150}$ no se puede localizar directamente en tablas se tiene que:

$$(1 + 0.01)^{150} = (1 + 0.01)^{100}\ (1 + 0.01)^{50}$$

$$(1 + 0.01)^{150} = (2.7048138)\ (1.644632)$$

$$(1 + 0.01)^{150} = 4.448423$$

Sustituyendo en la ecuación (1) el valor del factor $(1 + 0.01)^{150}$; se tiene:

$$S = 2\,500\ (4.448423)$$

$$S = \$\ 11\,121.06$$

Otro problema que se presenta frecuentemente al tratar de resolver estos ejemplos, consiste en que no se encuentra el valor del factor $(1 + i)^n$; porque en un momento dado no fué calculado para una tasa determinada y por lo tanto no se encuentra en tablas. Estos ejemplos pueden ser resueltos utilizando logaritmos.

4 Ejemplo

Acumular \$ 3 000 durante 8 años, suponiendo una tasa de interés efectiva del 6.3 % convertible trimestralmente.

Solución:

$C = 3\,000$

$n = 8$ años

$i' = \dfrac{0.063}{4} = 0.01575$

$m = 4$

$S = ?$

$$S = C\,(1 + i)^n$$

$$S = 3\,000\ (1 + 0.01575)^{32}$$

$$\log S = \log 3\,000 + 32 \log (1.01575)$$

$$\log S = 3.477121 + 32\ (0.006787)$$

$$\log S = 3.477121 + 0.217179$$

$$\log S = 3.6943$$

$$\text{antilog} \log S = \text{antilog}\ 3.6943$$

$$S = \$\ 4\,946.52$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1 Ejemplo

Un padre coloca $ 50 000 en una cuenta de ahorros al nacer su hijo.
Si el banco paga el 8 % de interés convertible semestralmente. ¿De qué cantidad podrá disponer su hijo cuando cumpla 18 años?

Solución:

$C = 50\ 000$

$n = 18\ (2) = 36$ periodos

$i' = \dfrac{0.08}{2} = 0.04$

$S = ?$

$$S = C\,(1 + i)^{n}$$
$$S = 50\ 000\ (1 + 0.04)^{36}$$
$$S = 50\ 000\ (4.103933)$$
$$S = \$\ 205\ 196.65$$

2 Ejemplo

Se estima que un terreno boscoso cuyo valor es de $ 250 000, aumentará su valor cada año en 8 % sobre el valor del año anterior durante 15 años. ¿Cuál será su valor al final de dicho plazo?

Solución:

$C = 250\ 000$

$i = 0.08$

$n = 15$ años

$S = ?$

$$S = C\,(1 + i)^{n}$$
$$S = 250\ 000\ (1 + 0.08)^{15}$$

$$S = 250\,000\ (3.172169)$$

$$S = \$\ 793\,042.25$$

3 Ejemplo

Una póliza dotal de $ 20 000 cuyo vencimiento fué el primero de agosto de 1975, se dejó en la compañía de seguros, la cual proporcionó intereses sobre dicha cantidad a razón del 4 % anual efectivo. ¿Cuál será el monto al primero de agosto de 1982?

Solución:

$C = 20\,000$

$i = 0.04$

$n = 7$

$S = ?$

$$S = C\ (1 + i)^n$$

$$S = 20\,000\ (1 + 0.04)^7$$

$$S = 20\,000\ (1.315932)$$

$$S = \$\ 26\,318.64$$

DIFERENCIA ENTRE MONTO SIMPLE Y MONTO COMPUESTO

1 Ejemplo

Encontrar el Monto Simple y el Monto Compuesto de \$ 100 al 10 % durante 4 años, año con año.

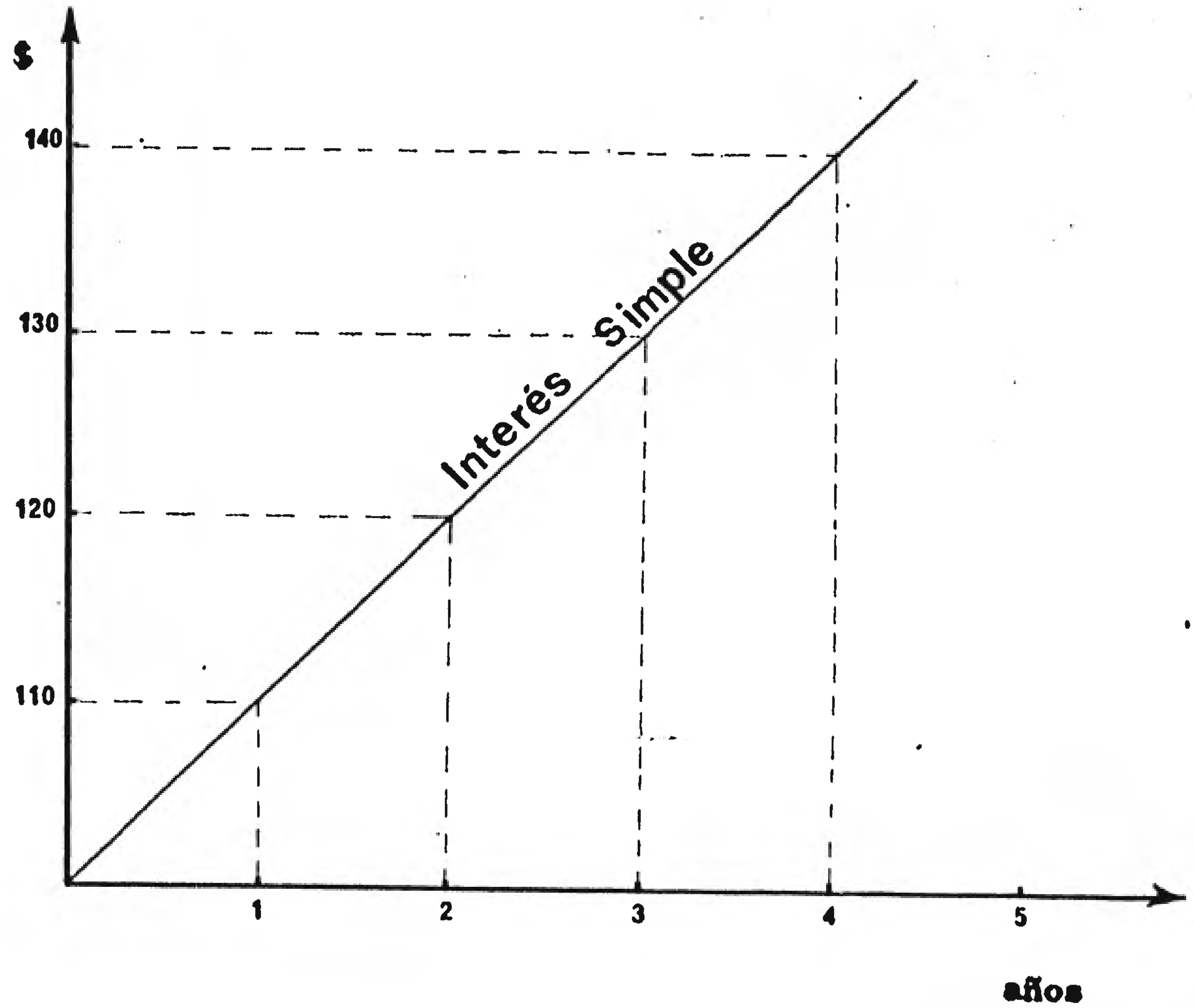
Solución:

a) Monto Simple

$$S = C\,(1 + it)$$

Para el 1er. año	$S = 100\,[1 + (0.10)\,(1)] = 110$
Para el 2do. año	$S = 100\,[1 + (0.10)\,(2)] = 120$
Para el 3er. año	$S = 100\,[1 + (0.10)\,(3)] = 130$
Para el 4to. año	$S = 100\,[1 + (0.10)\,(4)] = 140$

Gráficamente se puede observar:



b) Monto Compuesto

$$S = C(1 + i)^n$$

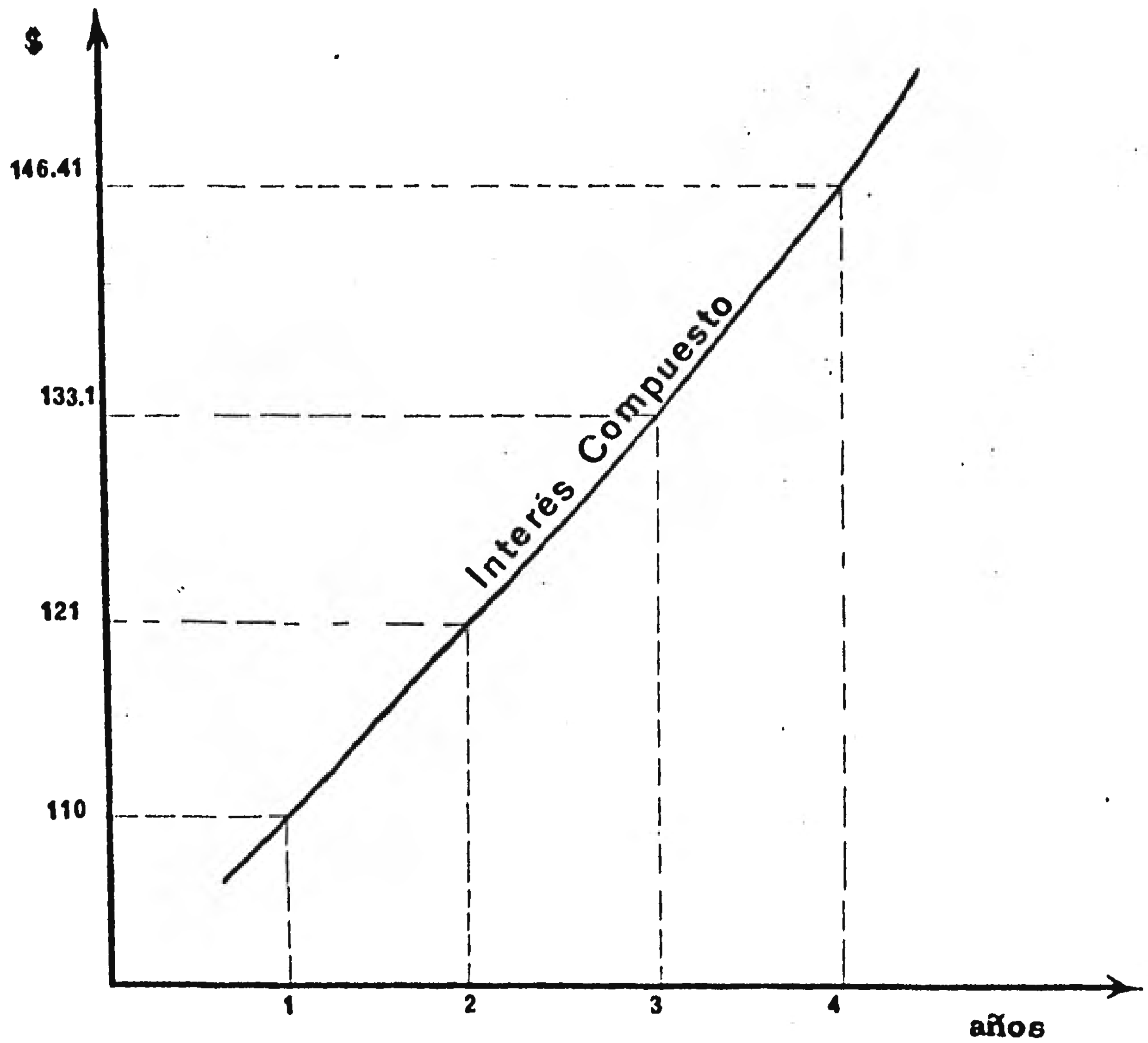
Para el 1er. año: $S = 100\,(1 + 0.10) = 110$

Para el 2do. año: $S = 110\,(1 + 0.10) = 121$

Para el 3er. año: $S = 121\,(1 + 0.10) = 133.10$

Para el 4to. año: $S = 133.10\,(1 + 0.10) = 146.41$

Gráficamente se puede observar:



Nótese que el monto simple de $ 100 es igual al monto compuesto al final del primer año. Es decir, el interés simple es igual al interés compuesto al final del primer año.

Tratándose de interés compuesto el interés producido en el primer año - - - ($I = S - C = 110 - 100 = 10$) formará parte del capital para alcanzar el monto al final del segundo año.

En otras palabras el interés es capitalizable o convertible en capital.

Cuando se trabaja con interés simple el capital simpre será el mismo para cada año, es decir; el interés no es capitalizable y no formará parte del capital.

El interés compuesto crece en forma exponencial.

EL INTERÉS COMPUESTO COMO ANALOGÍA CON EL CRECIMIENTO GEOMÉTRICO

La colocación de un capital a interés compuesto es análogo al crecimiento geo - métrico.

Sea: $f(0)$: capital en el tiempo cero

$f(t)$: monto al cabo de un tiempo t

$f(t + \Delta)$: monto al cabo de un tiempo $(t + \Delta)$

Incremento del capital en un tiempo (Δ):

$$f(t + \Delta) - f(t)$$

Incremento unitario del capital:

$$\frac{f(t + \Delta) - f(t)}{f(t)}$$

Tomando el límite de este cociente cuando el tiempo transcurrido tiende a cero, se tiene:

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{f(t + \Delta) - f(t)}{\Delta\, f(t)} = \frac{1}{f(t)} \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(t + \Delta) - f(t)}{\Delta} =$$

$$= \frac{1}{f(t)} \frac{d\, f(t)}{dt}$$

Del cálculo diferencial e integral se sabe que la derivada de una función por su recíproco es igual a la derivada del logarítmo natural de la función, esto es:

$$\frac{1}{f(t)} \quad \frac{d\,f(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \; Ln \; f(t)$$

Por definición, se tiene:

$$\frac{d}{dt} \; Ln \; f(t) = \delta(t)$$

$$d \; Ln \; f(t) = \delta(t) \; dt$$

Integrando ambos miembros de la igualdad en el intervalo $[0,t]$, se tiene:

$$\int_0^t d \; Ln \; f(t) = \int_0^t \delta(t) \; dt$$

$$Ln \; f(t) \Big]_0^t = \int_0^t \delta(t) \; dt$$

$$Ln \; f(t) - Ln \; f(0) = \int_0^t \delta(t) \; dt$$

$$Ln \left[\frac{f(t)}{f(0)}\right] = \int_0^t \delta(t) \; dt$$

Tomando antilogarítmo:

$$\exp \; Ln \left[\frac{f(t)}{f(0)}\right] = \exp \left[\int_0^t \delta(t) \; dt\right]$$

$$\frac{f(t)}{f(0)} = \exp\left[\int_0^t \delta\ (t)\ dt\right]$$

De donde:

$$f(t) = f(0)\ \exp\left[\int_0^t \delta\ (t)\ dt\right]$$

1 Ejemplo

En una rama de árbol, la longitud inicial es de 5 metros y al cabo de un año se efectúa una nueva medición y se ve que ha aumentado un metro.

¿Cuánto creció a los 6 meses?

Solución:

$f(0) = 5$ metros

$t = 1$ año

$f(1) = 6$ metros

La tasa de crecimiento anual es:

$$\frac{f(t) - f(0)}{f(0)} = \frac{6 - 5}{5} = 0.20$$

$$i = 0.20$$

$$i = 20\ \%$$

La tasa instantánea de crecimiento es:

$$\delta = \text{Ln}\ (1 + i)$$

$$\delta = \text{Ln}\ (1.20)$$

$$\delta = 0.18232$$

$$\delta = 18.23\ \%$$

De donde $\delta < i$

El incremento a los seis meses es:

con $t = \frac{1}{2}$ año

$$f(t) = f(0)\ e^{\delta t}$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = 5 \ \exp \left[\frac{0.18232}{2}\right]$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = 5 \ \exp\ (0.091160)$$

$$\mathrm{Ln}\ f(\tfrac{1}{2}) = \mathrm{Ln}\ 5 + \mathrm{Ln}\ \exp\ (0.091160)$$

$$\mathrm{Ln}\ f(\tfrac{1}{2}) = 1.609438 + 0.091160$$

$$\mathrm{Ln}\ f(\tfrac{1}{2}) = 1.700598$$

$$\exp\ \mathrm{Ln}\ f(\tfrac{1}{2}) = \exp\ (1.700598)$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = 5.477222$$

Se observa gráficamente:

1 año	6 metros	
		0.52 metros
6 meses	5.48 metros	
		0.48 metros
0	5 metros	

El incremento del árbol a los seis meses es:

$$f(\tfrac{1}{2}) - f(0) = 5.48 - 5 = 0.48 \text{ metros}$$

El incremento del árbol en la segunda mitad del año es:

$$f(1) - f(\tfrac{1}{2}) = 6 - 5.48 = 0.52 \text{ metros}$$

Por otra parte, la tasa de crecimiento a los seis meses es:

$$\frac{f(\frac{1}{2}) - f(0)}{f(0)} = \frac{5.48 - 5}{5} = 0.096$$

$$i = 9.6\ \%$$

Suponiendo que el árbol fuera podado a los seis meses, la tasa de crecimiento a los seis meses obtenida del 9.6 % se multiplicaría por dos, para obtener una tasa del 19.2 % anual.

En otras palabras, el incremento alcanzado en los primeros seis meses del 4.8 %, implica que el incremento durante los seis meses subsecuentes será a razón de 4.8 %, es decir, un crecimiento total del 9.6 % anual.

Por otra parte, el efecto de una tasa instantánea de crecimiento $\delta = 0.1823$ por año, puede ser considerada como la tasa de crecimiento anual del 20 % ó del 4.8 % de interés efectivo por los primeros seis meses.

En consecuencia, si el incremento del árbol alcanzado en cualquier tiempo es cortado, el árbol crecerá a la misma tasa de interés que originalmente fué impuesto.

De lo contrario, si se deja el árbol con el incremento obtenido durante los primeros seis meses, al final de un año se tendrá un incremento total de un metro.

Por otro lado, en caso de que el incremento no sea replantado será incapaz de crecer.

En interés compuesto se utilizan tasas de interés que se mencionan a continuación y que encuentran su equivalente en el incremento en longitud del árbol.

FUERZA DE INTERÉS: es la tasa continua con la cual crece una unidad de capital bajo una operación de interés.

TASA EFECTIVA DE INTERÉS: es el incremento por unidad de capital bajo el efecto de una fuerza de interés durante un período de tiempo equivalente a un año.

TASA NOMINAL DE INTERÉS: es la tasa anual cuando el interés es convertible ó pagadero más de una vez al año.

Basándose en el ejemplo anterior la tasa anual efectiva obtenida del 20 % está bajo el efecto de una fuerza de interés del 18.23 %, la tasa efectiva de interés obtenida por seis meses fué de 8.7 % y si ésta se multiplica por dos se obtiene una tasa nominal de interés por un año de 17.4 %.

Si el número de veces que el interés se convierte durante el año aumenta indefinidamente, la tasa nominal llega a ser igual a la fuerza de interés (δ).

RELACIÓN ENTRE TASAS DE INTERÉS

Es de importancia encontrar la equivalencia entre las siguientes tasas de interés.

Sean: δ : tasa de crecimiento instantáneo ó fuerza de interés

i : tasa efectiva de interés por período

$i^{(m)}$ ó $j^{(m)}$: tasa nominal de interés pagadera m veces al año

Por definición:

$$\frac{d}{dt} \ Ln \ f(t) = \delta$$

$$d \ Ln \ f(t) = \delta \ dt \quad \ldots (\overset{*}{1})$$

Integrando ambos miembros de la igualdad en el intervalo [0,1] para conocer lo que sucede en una unidad de tiempo, en este caso un año.

$$\int_0^1 d \ Ln \ f(t) = \int_0^1 \delta \ dt$$

$$Ln \ f(t) \Big]_0^1 = \int_0^1 \delta \ dt$$

$$\operatorname{Ln} f(1) - \operatorname{Ln} f(0) = \delta t \Big]_0^1$$

$$\operatorname{Ln} f(1) - \operatorname{Ln} f(0) = \delta$$

ó

$$\delta = \operatorname{Ln} f(1) - \operatorname{Ln} f(0)$$

Suponiendo que se tiene una unidad como capital original, entonces $f(0) = 1$, por lo tanto:

$$\delta = \operatorname{Ln} f(1) - \operatorname{Ln} (1)$$

pero $\operatorname{Ln} (1) = 0$, entonces:

$$\delta = \operatorname{Ln} f(1)$$

Por otro lado, el valor de una unidad al final del primer año bajo la tasa de - interés efectiva i anual evidente que es $(1 + i)$, entonces $f(1) = 1 + i$, de donde:

$$\delta = \operatorname{Ln} (1 + i)$$

Tomando antilogarítmo:

$$e^{\delta} = (1 + i) \qquad \ldots (1)$$

Integrando la ecuación $(\overset{*}{1})$ en el intervalo $\left[0, \frac{1}{m}\right]$ para conocer lo que suce - de en $\frac{1}{m}$ de tiempo.

$$\int_0^{\frac{1}{m}} \operatorname{Ln} f\left(\frac{1}{m}\right) = \int_0^{\frac{1}{m}} \delta \, dt$$

$$\operatorname{Ln} f\left(\frac{1}{m}\right)\Big]_0^{\frac{1}{m}} = \int_0^{\frac{1}{m}} \delta \, dt$$

$$\text{Ln} \quad f\left(\frac{1}{m}\right) - \text{Ln} \quad f(0) = \int_0^{\frac{1}{m}} \delta \, dt$$

$$\text{Ln} \quad f\left(\frac{1}{m}\right) - \text{Ln} \quad f(0) = \delta\left[\frac{1}{m}\right]$$

$$\text{Ln} \left[\frac{f\left[\frac{1}{m}\right]}{f\ (0)}\right] = \frac{\delta}{m}$$

Sustituyendo $\delta = \text{Ln} \ (1 + i)$, en la ecuación anterior, se tiene:

$$\text{Ln} \left[\frac{f\left[\frac{1}{m}\right]}{f\ (0)}\right] = \frac{\text{Ln}\ (1 + i)}{m}$$

Por la regla de los logaritmos que dice que el logarítmo de una potencia es - igual al exponente por el logarítmo de la base, entonces:

$$\text{Ln} \left[\frac{f\left[\frac{1}{m}\right]}{f\ (0)}\right] = \text{Ln} \ (1 + i)^{\frac{1}{m}}$$

Aplicando antilogarítmo:

$$\exp \ \text{Ln} \left[\frac{f\left[\frac{1}{m}\right]}{f(0)}\right] = \exp \ \text{Ln} \ (1 + i)^{\frac{1}{m}}$$

$$\frac{f\left[\frac{1}{m}\right]}{f\ (0)} = (1 + i)^{\frac{1}{m}}$$

$$f\left(\frac{1}{m}\right) = f(0) \ (1 + i)^{\frac{1}{m}}$$

Como $f(0) = 1$, entonces:

$$f\left(\frac{1}{m}\right) = (1 + i)^{\frac{1}{m}}$$

Considerando que el monto de una unidad de capital después de transcurrido $\frac{1}{m}$ de año impuesto a una tasa nominal de interés $i^{(m)}$ será: $\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)$ y como $f\left(\frac{1}{m}\right)$ es el monto de una unidad después de transcurrido un $\frac{1}{m}$ de tiempo, se tiene:

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right) = (1 + i)^{\frac{1}{m}}$$

Elevando ambos miembros de la igualdad, a la m-ésima potencia, se tiene:

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = (1 + i)$$

Igualando la ecuación (1) con la ecuación anterior, se deduce la Triple Igualdad:

$$e^{\delta} = (1 + i) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

La expresión $\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$ se puede obtener partiendo de un razonamiento general.

Si una unidad de capital es invertida a una tasa nominal $i^{(m)}$ anual, el interés obtenido después de $\frac{1}{m}$ de año será $\frac{i^{(m)}}{m}$, de donde el monto será: $\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)$, y si éste es reinvertido en el segundo m-ésimo de año el monto será:

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right) + \frac{i^{(m)}}{m}\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^2$$

y al final del tercer m-ésimo, el monto será:

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right) + \frac{i^{(m)}}{m}\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^2 = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^3$$

finalmente después de un año o m intervalos el monto será:

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

Una ecuación para encontrar la tasa efectiva de interés anual, cuando se conoce la tasa nominal, partiendo de la Triple Igualdad es:

$$(1 + i) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}$$

$$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} - 1$$

Análogamente, se deduce la ecuación para encontrar la tasa nominal conociendo - la tasa efectiva de interés, partiendo de la Triple Igualdad y es:

$$(1 + i) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}$$

Aplicando raíz m-ésima en ambos miembros de la igualdad, se tiene:

$$(1 + i)^{\frac{1}{m}} = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)$$

ó

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right) = (1 + i)^{\frac{1}{m}}$$

$$\frac{i^{(m)}}{m} = (1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

$$i^{(m)} = m\left\{(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1\right\}$$

CÁLCULO DE TASA DE INTERÉS

1 Ejemplo (Por medio de las Tablas apropiadas)

Si $ 1 000 se acumulan a $ 1 124.86 en 2 años.

Encontrar la tasa de interés con la cual se está operando.

Solución:

S = 1 124.86

C = 1 000

n = 2

i = ?

$$S = C(1 + i)^n$$

$$1\,124.86 = 1\,000\,(1 + i)^2$$

$$1.12486 = (1 + i)^2$$

Buscando en tablas se observa que el monto de 1.12486 se encuentra en la columna del 4 %, por lo tanto, la tasa de interés es del 4 %, es decir:

$$i = 4\,\%$$

2 Ejemplo (Por medio de Interpolación)

Determinar la tasa de interés a la cual $ 545 se acumularán a $ 1 250 en 13 años.

Solución:

S = 1 250

C = 545

n = 13 años

i = ?

$$S = C(1 + i)^n$$

$$1\,250 = 545\,(1+i)^{13}$$

$$\frac{1\,250}{545} = (1+i)^{13}$$

$$2.3119 = (1+i)^{13}$$

Buscando valores en Tablas se encuentra correspondiente a 13 años:

el monto de una unidad es 2.260903 a la tasa del 6 %,

el monto de una unidad es 2.414874 a la tasa del 6.5 %.

Un incremento del $\frac{1}{2}$ % causa un incremento en el monto de 0.153971 y la diferencia del monto 2.260903 y el monto buscado de 2.3119 es 0.050997.

Gráficamente se observa:

	Monto			Tasa	
	2.260903	0.050997		6 %	X
0.153971	2.3119		0.5 %	i	
	2.414874			6.5 %	

$$0.153971 \sim 0.5$$

$$0.050997 \sim X$$

$$X = 0.165605$$

Por tanto la tasa buscada es:

$$i = 6 + 0.165605$$

$$i = 6.16\ \%$$

CÁLCULO DE LA TASA DE INTERÉS POR LOGARITMOS

Utilizando la ecuación

$$S = C\,(1+i)^{n}$$

Despejando i, y aplicando logaritmos, se tiene:

$$\frac{S}{C} = (1 + i)^n$$

$$\log S - \log C = n \log (1 + i)$$

$$\frac{\log S - \log C}{n} = \log (1 + i)$$

3 Ejemplo .

Encontrar la tasa de interés a la cual \$ 1 000 se acumularán a \$ 1 191 en - -

3 años.

Solución:

S = 1 191

C = 1 000

n = 3 años

i = ?

$$\log (1 + i) = \frac{\log S - \log C}{n}$$

$$\log (1 + i) = \frac{\log 1\,191 - \log 1\,000}{3}$$

$$\log (1 + i) = \frac{3.075911 - 3}{3}$$

$$\log (1 + i) = \frac{0.075911}{3}$$

$$\log (1 + i) = 0.025303$$

$$\text{antilog} \log (1 + i) = \text{antilog } 0.025303$$

$$(1 + i) = 1.06$$

$$i = 1.06 - 1$$

$$i = 0.06$$

$$i = 6\ \%$$

CÁLCULO DE TASAS EQUIVALENTES

1 Ejemplo

Encontrar la tasa efectiva equivalente a una tasa de interés del 8 % converti - ble semestralmente.

Solución:

$i^{(m)} = 0.08$

$m = 2$

$i = ?$

$$i = \left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m} - 1$$

$$i = \left[1 + \frac{0.08}{2}\right]^{2} - 1$$

$$i = (1 + 0.04)^{2} - 1$$

$$i = 1.0816 - 1$$

$$i = 0.0816$$

$$i = 8.16\ \%$$

2 Ejemplo

Encontrar la tasa nominal convertible trimestralmente correspondiente a una ta- sa efectiva del 5 % anual.

Solución:

$i = 0.05$

$m = 4$

$i^{(4)} = ?$

$$i^{(m)} = m\left\{(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1\right\}$$

$$i^{(4)} = 4 \left\{ (1 + 0.05)^{\frac{1}{4}} - 1 \right\}$$

Calculando $(1.05)^{\frac{1}{4}}$ por logaritmos, se tiene:

$$X = (1.05)^{\frac{1}{4}}$$

$$\log X = \tfrac{1}{4} \log 1.05$$

$$\log X = \tfrac{1}{4} (0.021189)$$

$$\log X = 0.005297$$

$$\text{antilog} \log X = \text{antilog } 0.005297$$

$$X = 1.012272$$

$$i^{(4)} = 4 \, (1.012272 - 1)$$

$$i^{(4)} = 0.049088$$

$$i^{(4)} = 4.9 \, \%$$

3 Ejemplo

Por medio de δ (fuerza de interés), determinar la tasa nominal de interés convertible trimestralmente correspondiente a una tasa efectiva de interés del 4.5 %.

Solución:

$m = 4$

$i = 0.045$

$i^{(m)} = ?$

$n = 1$

$$e^{\delta n} = (1 + i)^{n}$$

$$e^{\delta} = (1 + 0.045)$$

$$\log e^{\delta} = \log (1.045)$$

$$\delta \log e = \log (1.045)$$

$$\delta = \frac{\log (1.045)}{\log e}$$

$$\delta = \frac{0.019116}{0.43429}$$

$$\delta = 0.044016$$

$$\delta = 4.4 \%$$

Por otra parte, de la fórmula:

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m n} = e^{\delta n}$$

Aplicando raíz n-ésima, se tiene:

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} = e^{\delta}$$

Tomando raíz m-ésima, se tiene:

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right) = \left[e^{\delta}\right]^{\frac{1}{m}}$$

donde:

$$i^{(m)} = m\left\{\left[e^{\delta}\right]^{\frac{1}{m}} - 1\right\}$$

Sustituyendo $\delta = 0.044016$ en la ecuación anterior, se tiene:

$$i^{(4)} = 4\left\{\exp (0.044016)^{\frac{1}{4}} - 1\right\}$$

$$i^{(4)} = 0.089998$$

$$i^{(4)} = 8.9 \%$$

CÁLCULO DEL TIEMPO O TÉRMINO POR LOGARITMOS

Utilizando la ecuación

$$S = C\,(1 + i)^{n}$$

despejando n y aplicando logaritmos, se tiene:

$$\frac{S}{C} = (1 + i)^{n}$$

$$\log S - \log C = n \log (1 + i)$$

$$n = \frac{\log S - \log C}{\log (1 + i)}$$

y para la ecuación

$$S = C\left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m\,n}$$

despejando n y aplicando logaritmos, se tiene:

$$\frac{S}{C} = \left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m\,n}$$

$$\log S - \log C = m\,n \log \left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]$$

$$n = \frac{\log S - \log C}{m \log \left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]}$$

1 Ejemplo

Encontrar el número de años en que $ 1 000 se convertirán en $ 1 230, a una tasa del 6 %.

Solución:

S = 1 230

C = 1 000

i = 0.06

n = ?

$$n = \frac{\log S - \log C}{\log (1 + i)}$$

$$n = \frac{\log 1\,230 - \log 1\,000}{\log 1.06}$$

$$n = \frac{3.089905 - 3}{0.025306}$$

$$n = \frac{0.089905}{0.025306}$$

$$n = 3.5527$$

n = 3 años, 6 meses, 7 días

2 Ejemplo

Encontrar el tiempo en que $ 5 000 se duplicarán al 5 % convertible trimestralmente.

Solución:

S = 10 000

C = 5 000

$i^{(4)}$ = 0.05

n = ?

$$n = \frac{\log S - \log C}{m \log \left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]}$$

$$n = \frac{\log 10\,000 - \log 5\,000}{4 \log \left[1 + \frac{0.05}{4}\right]}$$

$$n = \frac{4 - 3.698970}{4 \log (1.0125)}$$

$$n = \frac{0.30103}{4\ (0.005395)}$$

$$n = 13.94949$$

n = 13 años, 11 meses, 11 días

CÁLCULO DEL TÉRMINO O TIEMPO POR MEDIO DE INTERPOLACIÓN

1 Ejemplo

Encontrar el número de años requeridos para que \$ 400 se conviertan en \$ 854 a una tasa del 5 % anual.

Solución:

$S = 854$

$C = 400$

$i = 0.05$

$n = ?$

$$S = C\ (1 + i)^n$$

$$854 = 400\ (1.05)^n$$

$$\frac{854}{400} = (1.05)^n$$

$$2.135 = (1.05)^n$$

Buscando los valores en Tablas se observa que a la tasa del 5 % una unidad se acumulará a 2.1828 en 16 años y una unidad se acumulará a 2.0789 en 15 años.

Por consiguiente un incremento de 1 año resulta en un incremento de 0.1039 en el monto. El monto 2.135 evidentemente se acumulará en este incremento y se supondrá proporcional.

Un incremento de 2.0789 a 2.135 de 0.0561, es causado por un incremento en el término de 0.0561 / 0.1039 veces 1 ó 0.53 de año, por lo tanto n es igual a 15.53 años.

Gráficamente se observa:

	Monto			Años	
0.1039	2.0789	0.0561	1	15	X
	2.135			n	
	2.1828			16	

$$0.1039 \sim 1$$

$$0.0561 \sim X$$

$$n = 15 + 0.539942$$

$$n = 15.539942$$

n = 15 años, 6 meses, 14 días

PROBLEMAS PROPUESTOS (INTERÉS COMPUESTO)

1. Definir los siguientes conceptos:

a) Tasa efectiva de interés

b) Fuerza de interés

c) Tasa nominal de interés

2. Demostrar la Triple Igualdad.

3. Encontrar el valor de δ (fuerza de interés) a partir de la definición de tasa efectiva de interés.

Resp. $\delta = \dfrac{\log (1 + i)}{\log\ e}$

4. Por medio de δ (fuerza de interés), calcular la tasa nominal de interés convertible mensualmente correspondiente a una tasa efectiva de interés del $5\frac{1}{4}$ %.

Resp. $i^{(12)} = 5.22$ %

5. Encontrar el monto de $ 2 000 colocados a una tasa del 5 % convertible semestralmente durante $6\frac{1}{4}$ años.

Resp. S = $ 3 005.89

6. Encontrar el monto de $ 6 000 al cabo de 100 años invertidos a una tasa del 6 % anual efectivo.

Resp. S = $ 2 035 812.40

7. Encontrar el monto de $ 4 000 invertidos a una tasa del 8 % convertible trimestralmente durante 10 años.

Resp. S = $ 8 832.15

8. Encontrar el monto de $ 5 500 invertidos al 6 % convertible mensualmente al cabo de 18 años.

Resp. S = $ 8 877.78

9. En la población de cierta ciudad, en el año de 1970 fué de 64 000 habitantes

y si el porcentaje de crecimiento anual se estima en un 8 %. Determine la población que habrá en 1988 si la tasa permanece constante.

Resp. $S = 255\ 744.12$ habitantes

10. ¿En qué tiempo el monto de \$ 2 500 será \$ 3 500 al 6 % efectivo? (Por medio de logaritmos).

Resp. $n = 5.77 = 5$ años, 9 meses, 7 días

11. Encontrar el tiempo en que una cierta cantidad cuadruplicará su valor colocada a una tasa del 8 % convertible trimestralmente.

Resp. $n = 17.5 = 17$ años, 6 meses

12. Encontrar la tasa nominal convertible mensualmente equivalente al 6 % convertible semestralmente.

Resp. $i^{(12)} = 5.92\ \%$

13. Encontrar la tasa nominal convertible semestralmente equivalente al 4.2 % efectivo.

Resp. $i^{(2)} = 4.15\ \%$

14. ¿A qué tasa nominal convertible mensualmente de \$ 2 000 será \$ 2 650 en 6 años? (Por medio de logaritmos).

Resp. $i^{(12)} = 4.69\ \%$

15. ¿Qué tasa da mejor rendimiento?

a) 8 % convertible semestralmente ó

b) 8 % convertible mensualmente

Resp. b)

ECUACIONES DE VALOR (INTERÉS COMPUESTO)

Una ecuación de valor como se dijo anteriormente, es una igualdad en la que - las obligaciones que tiene el deudor son equivalentes a los derechos que tiene el acreedor; en una fecha determinada habiendo estipulado de antemano dichas - obligaciones y derechos, las tasas de interés y el tiempo de vencimiento - - correspondientes.

Con respecto a Interés Simple se considera que este conjunto de obligaciones y derechos son equivalentes en una cierta fecha determinada, no siéndolo en otra distinta.

Tratándose de Interés Compuesto, este conjunto de obligaciones y derechos son equivalentes en cualquier fecha estipulada; en que la ecuación de valor sea - valuada. Lo anterior se verifica con el ejemplo que a continuación se presenta aplicando la regla práctica.

Regla práctica para evaluar las obligaciones y derechos:

a) Cuando las obligaciones y derechos están a la izquierda de la fecha focal - (f.f.), éstas se trasladarán al punto de evaluación utilizando el factor - - $(1 + i)^{n}$.

b) Cuando las obligaciones y derechos coincidan con la fecha focal (f.f.), - éstas permanecerán sin ningún cambio.

c) Cuando las obligaciones y derechos están a la derecha de la fecha focal - (f.f.), éstas se trasladarán al punto de evaluación utilizando el factor - - $(1 + i)^{-n}$.

1 Ejemplo

El Sr. M debe \$ 1 000 pagaderos en 3 años y \$ 3 000 en 6 años.

Acuerda pagar sus deudas mediante un pago único al final del 4to. año, sobre la base de un rendimiento del 6 % convertible semestralmente.

Solución:

a) Tomar como fecha focal al final del 4to. año.

Se designa a X como el pago requerido al final del 4to. año. La deuda de $ 1 000 está vencida en un año y es $1\ 000\ (1.03)^{2}$, la deuda de $ 3 000 vence en dos años y su valor es $3\ 000\ (1.03)^{-4}$.

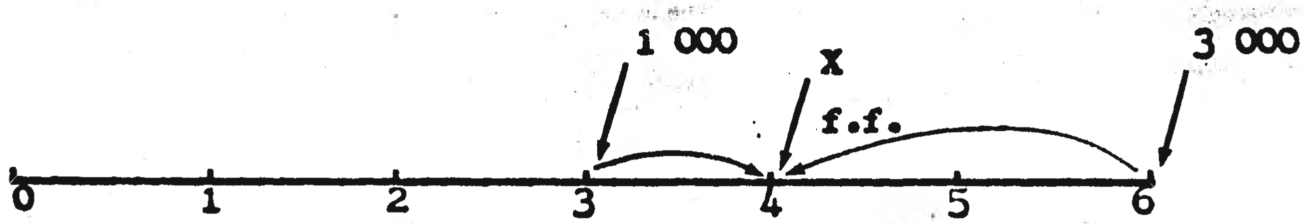
Igualando la suma de los valores de las deudas con el valor del pago único, en la fecha focal, se tiene:

$$X = 1\ 000\ (1.03)^{2} + 3\ 000\ (1.03)^{-4}$$

$$X = 1\ 060.90 + 2\ 665.46$$

$$X = \$\ 3\ 726.36$$

Gráficamente se observa:



b) Tomar como fecha focal el día de hoy.

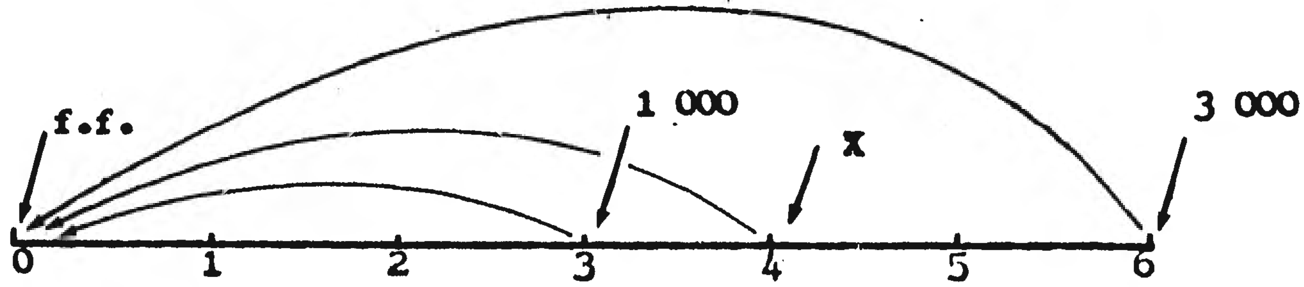
$$X\ (1.03)^{-8} = 1\ 000\ (1.03)^{-6} + 3\ 000\ (1.03)^{-12}$$

$$X\ (0.789409) = 837.48 + 2\ 104.14$$

$$X = \frac{2\ 941.62}{0.789409}$$

$$X = \$\ 3\ 726.36$$

Gráficamente se observa:



c) Tomar como fecha focal al final del 5o. año.

$$X\,(1.03)^{2} = 1\,000\,(1.03)^{4} + 3\,000\,(1.03)^{-2}$$

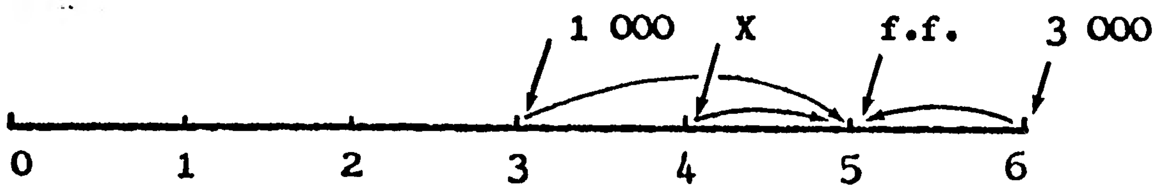
$$X\,(1.0609) = 1\,125.51 + 2\,827.79$$

$$X\,(1.0609) = 3\,953.30$$

$$X = \frac{3\,953.30}{1.0609}$$

$$X = \$\,3\,726.36$$

Gráficamente se observa:



2 Ejemplo

Suponiendo una tasa del 8 %. Determinar con que pagos iguales X al final del 2o. año, y al final del 5o. año es posible reemplazar las siguientes obligaciones: \$ 2 500 con vencimiento en 5 años sin intereses y \$ 8 500 con intereses al 6 % convertible trimestralmente con vencimiento en 6 años. Tomar como fecha focal al final del 6o. año.

Solución:

$$X\,(1.08)^{4} + X\,(1.08) = 2\,500\,(1.08) + 8\,500\,(1.015)^{24}$$

$$X\,(1.360489) + X\,(1.08) = 2\,700 + 12\,150.77$$

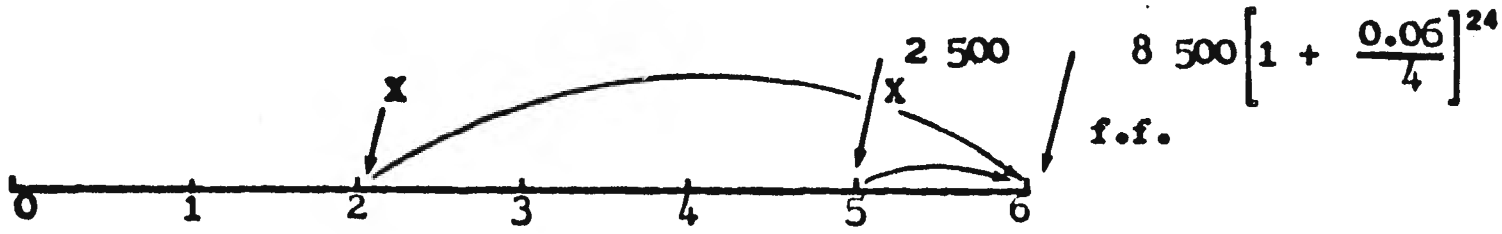
$$X\,(1.360489 + 1.08) = 14\,850.77$$

$$X\,(2.440489) = 14\,850.77$$

$$X = \frac{14\,850.77}{2.440489}$$

$$X = \$\,6\,085.16$$

Gráficamente se observa:



3 Ejemplo

Un comerciante debe \$ 15 000 pagaderos dentro de 4 años. Si efectúa un pago de \$ 8 000 el día de hoy. Determinar el importe del pago que tendrá que hacer en 2 años y medio para liquidar su deuda suponiendo un rendimiento del 8 % convertible semestralmente.

Tomar como fecha focal el día de hoy.

Solución:

$$X\,(1.04)^{-5} = 15\ 000\,(1.04)^{-8} - 8\ 000$$

$$X\,(0.821927) = 15\ 000\,(0.73069) - 8\ 000$$

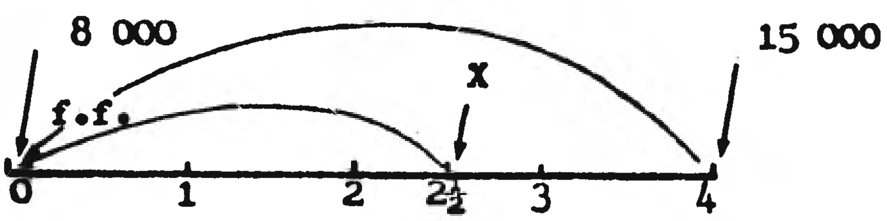
$$X\,(0.821927) = 10\ 960.35 - 8\ 000$$

$$X\,(0.821927) = 2\ 960.35$$

$$X = \frac{2\ 960.35}{0.821927}$$

$$X = \$\ 3\ 601.72$$

Gráficamente se observa:



4 Ejemplo

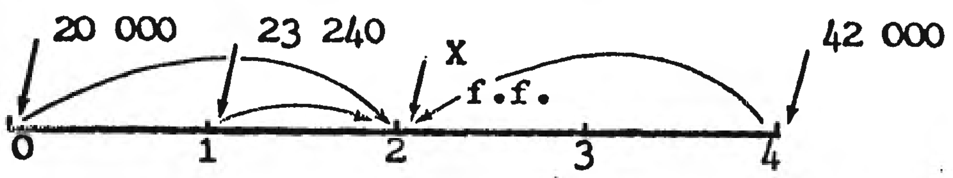
El Sr. Z debe \$ 23 240 pagaderos en un año, \$ 42 000 pagaderos dentro de 4 - -

años. Acuerda en pagar \$ 20 000 de inmediato y lo restante en 2 años.
Determine el importe de lo que tendrá que pagar al final del 2o. año suponiendo un rendimiento del 10 % convertible semestralmente.
Tomar como fecha focal al final del 2o. año.

Solución:

$$X + 20\,000\,(1.05)^4 = 23\,240\,(1.05)^2 + 42\,000\,(1.05)^{-4}$$
$$X + 20\,000\,(1.215506) = 23\,240\,(1.1025) + 42\,000\,(0.822702)$$
$$X + 24\,310.13 = 25\,622.10 + 34\,553.50$$
$$X + 24\,310.13 = 60\,175.60$$
$$X = 60\,175.60 - 24\,310.13$$
$$X = \$\ 35\,865.47$$

Gráficamente se observa:



5 Ejemplo

Determinar el importe de cada uno de los 5 pagos anuales que se tendrán que hacer para liquidar una deuda de \$ 2 500 con vencimiento el día de hoy, suponiendo un rendimiento del 8 % convertible trimestralmente si:

a) El primer pago se hace de inmediato.

b) El primer pago se hace al término de un año.

Tomar como fecha focal el día de hoy.

Solución:

Tomando la siguiente notación:

$$(1 + i)^{-1} = v, \quad (1 + i)^{-2} = v^2, \quad . . . \quad , \quad (1 + i)^{-n} = v^n$$

a) El primer pago se efectúa de inmediato con fecha focal el día de hoy.

$$2\,500 = X + X(1.02)^{-4} + X(1.02)^{-8} + X(1.02)^{-12} + X(1.02)^{-16}$$

$$2\,500 = X + X\,V^{4} + X\,V^{8} + X\,V^{12} + X\,V^{16}$$

$$2\,500 = X(1 + V^{4} + V^{8} + V^{12} + V^{16})$$

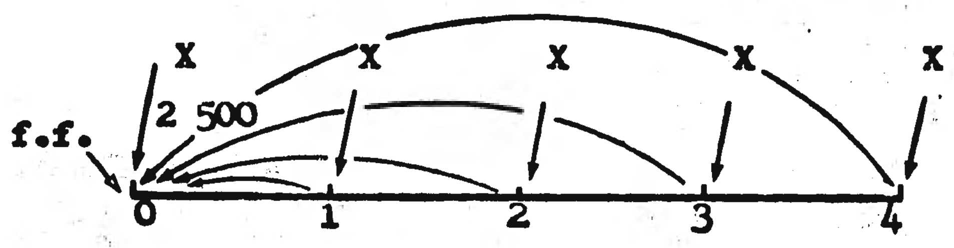
$$2\,500 = X(1 + 0.923845 + 0.853490 + 0.788493 + 0.728446)$$

$$2\,500 = X(4.294275)$$

$$X = \frac{2\,500}{4.294275}$$

$$X = \$\,582.17$$

Gráficamente se observa:



b) El primer pago se efectúa al final de un año con fecha focal el día de hoy.

$$2\,500 = X(1.02)^{-4} + X(1.02)^{-8} + X(1.02)^{-12} + X(1.02)^{-16} + X(1.02)^{-20}$$

$$2\,500 = X\,V^{4} + X\,V^{8} + X\,V^{12} + X\,V^{16} + X\,V^{20}$$

$$2\,500 = X(V^{4} + V^{8} + V^{12} + V^{16} + V^{20})$$

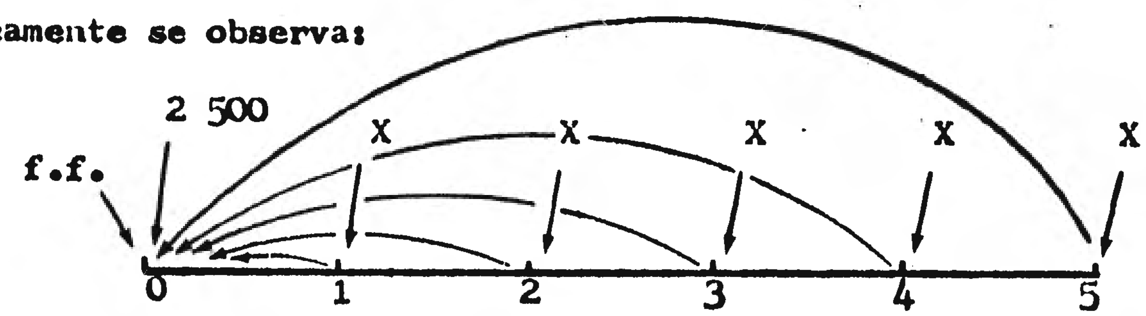
$$2\,500 = X(0.923845 + 0.853490 + 0.7884930 + 0.728446 + 0.672971)$$

$$2\,500 = X(3.967245)$$

$$X = \frac{2\,500}{3.967245}$$

$$X = \$\,630.16$$

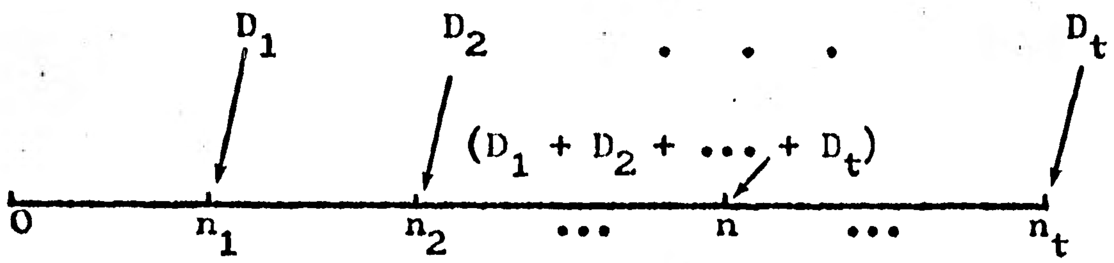
Gráficamente se observa:



TIEMPO EQUIVALENTE

La fecha en la cual un conjunto de obligaciones con vencimiento en fechas diferentes, puede ser liquidado mediante un pago único igual a las distintas deudas, se conoce como fecha de vencimiento promedio de las deudas.
El tiempo por transcurrir hasta dicha fecha se conoce como fecha equivalente.

Sean las deudas $D_1, D_2, \ldots, D_t$ con vencimiento en $n_1, n_2, \ldots, n_t$ años respectivamente y se desean cambiar las deudas por un pago único igual a la suma de las deudas $(D_1 + D_2 + \ldots + D_t)$ al final de n años; esto se ilustra de la siguiente manera:



Tomando el día de hoy como fecha focal, la ecuación de valor es:

$$D_1 V^{n_1} + D_2 V^{n_2} + \ldots + D_t V^{n_t} = (D_1 + D_2 + \ldots + D_t) V^{n}$$

$$V^{n} = \frac{D_1 V^{n_1} + D_2 V^{n_2} + \ldots + D_t V^{n_t}}{D_1 + D_2 + \ldots + D_t}$$

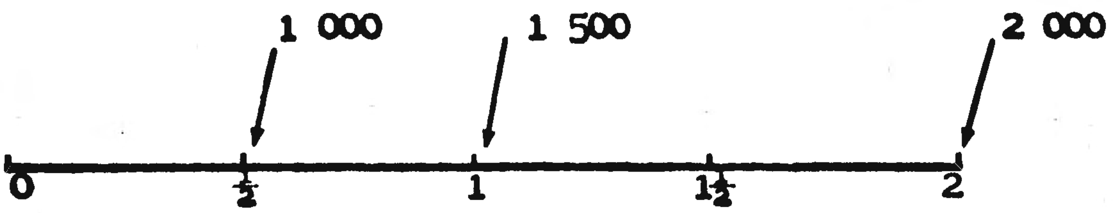
se resuelve la ecuación anterior para n, tomando logaritmos:

$$n = \frac{\log (D_1 V^{n_1} + D_2 V^{n_2} + \ldots + D_t V^{n_t}) - \log (D_1 + D_2 + \ldots + D_t)}{\log V}$$

1 Ejemplo

Encontrar la fecha equivalente para liquidar deudas de \$ 1 000, \$ 1 500 y \$ 2 000 pagaderos dentro de 6 meses, un año y 2 años respectivamente. La tasa de interés es del 8 % convertible semestralmente.

Solución:



$$n = \frac{\log (1\,000\, V + 1\,500\, V^2 + 2\,000\, V^4) - \log (1\,000 + 1\,500 + 2\,000)}{\log V}$$

$$n = \frac{\log (1\,000\, (1.04)^{-1} + 1\,500\, (1.04)^{-2} + 2\,000\, (1.04)^{-4}) - \log 4\,500}{\log (1.04)^{-1}}$$

$$n = \frac{\log (1\,000\, (0.961538) + 1\,500\, (0.924556) + 2\,000\, (0.854804)) - \log 4\,500}{\log 0.961538}$$

$$n = \frac{\log (961.53 + 1\,386.83 + 1\,709.61) - \log 4\,500}{-0.017033}$$

$$n = \frac{\log 4\,057.98 - \log 4\,500}{-0.017033}$$

$$n = \frac{3.608310 - 3.653213}{-0.017033}$$

$$n = \frac{-0.044903}{-0.017033} = 2.636183 \text{ semestres}$$

n = 1 año, 3 meses, 24 días

Regla práctica para encontrar la fecha equivalente

Es posible encontrar una regla práctica más sencilla que permita determinar el valor de n en forma aproximada y que evite cálculos laboriosos con logaritmos. Supóngase que el dinero está colocado a una fuerza de interés δ, entonces la ecuación de valor será:

$$D_1 e^{-n_1\delta} + D_2 e^{-n_2\delta} + \dots + D_t e^{-n_t\delta} = (D_1 + D_2 + \dots + D_t)\, e^{-n\delta}$$

Desarrollando en serie los valores de $e^{-n_j\delta}$

$$D_1\left[1 - n_1\delta + \frac{n_1^2\delta^2}{2!} - \dots + \dots\right] + D_2\left[1 - n_2\delta + \frac{n_2^2\delta^2}{2!} - \dots + \dots\right] + \dots$$

$$\dots + D_t\left[1 - n_t\delta + \frac{n_t^2\delta^2}{2!} - \dots + \dots\right] =$$

$$= D_1\left[1 - n\delta + \frac{n^2\delta^2}{2!} - \dots + \dots\right] + D_2\left[1 - n\delta + \frac{n^2\delta^2}{2!} - \dots + \dots\right] + \dots$$

$$\dots + D_t\left[1 - n\delta + \frac{n^2\delta^2}{2!} - \dots + \dots\right]$$

Desarrollando la expresión, se tiene:

$$\left[D_1 - D_1 n_1\delta + \frac{D_1 n_1^2\delta^2}{2!} - \dots + \dots\right] + \left[D_2 - D_2 n_2\delta + D_2\frac{n_2^2\delta^2}{2!} - \dots + \dots\right] +$$

$$\dots + \left[D_t - D_t n_t\delta + D_t\frac{n_t^2\delta^2}{2!} - \dots + \dots\right] =$$

$$= \left[D_1 - D_1 n\delta + D_1\frac{n^2\delta^2}{2!} - \dots + \dots\right] + \left[D_2 - D_2 n\delta + D_2\frac{n^2\delta^2}{2!} - \dots + \dots\right] +$$

$$\dots + \left[D_t - D_t n\delta + D_t\frac{n^2\delta^2}{2!} - \dots + \dots\right]$$

Asociando y suprimiendo las potencias de δ superiores al 2do. grado, entonces:

$$\left[D_1 + D_2 + \dots + D_t\right] - \left[D_1 n_1 \delta + D_2 n_2 \delta + \dots + D_t n_t \delta\right] + \\ + \left[D_1 \frac{n_1^2 \delta^2}{2!} + D_2 \frac{n_1^2 \delta^2}{2!} + \dots + D_t \frac{n_t^2 \delta^2}{2!}\right] =$$

$$= \left[D_1 + D_2 + \dots + D_t\right] - \left[D_1 n \delta + D_2 n \delta + \dots + D_t n \delta\right] + \\ + \left[D_1 \frac{n^2 \delta^2}{2!} + D_2 \frac{n^2 \delta^2}{2!} + \dots + D_t \frac{n^2 \delta^2}{2!}\right]$$

Tomando notación sumatoria, se tiene:

$$\sum_{j=1}^{t} D_j - \delta \sum_{j=1}^{t} D_j n_j + \frac{\delta^2}{2} \sum_{j=1}^{t} D_j n_j^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{t} D_j - n \delta \sum_{j=1}^{t} D_j + \frac{n^2 \delta^2}{2} \sum_{j=1}^{t} D_j$$

Por razones de simplicidad de notación, se puede suprimir los índices, sabiendo de antemano los valores que toman.

$$- \delta \sum n D + \frac{\delta^2}{2} D n^2 = - n \delta \sum D + \frac{n^2 \delta^2}{2} \sum D$$

Dividiendo ambos miembros entre $\delta \sum D$, se tiene:

$$\frac{-\sum n D}{\sum D} + \frac{\delta}{2} \frac{\sum n^2 D}{\sum D} = - n + \frac{n^2 \delta}{2}$$

$$\therefore n = \frac{\sum n D}{\sum D} - \frac{\delta}{2} \left[\frac{\sum n^2 D}{\sum D} - n^2\right] \quad \dots (*)$$

De lo anterior se tiene como primera aproximación para n:

$$n = \frac{\sum n D}{\sum D}$$

Sustituyendo esta primera aproximación en la ecuación original (*), se tiene:

$$n = \frac{\sum n\,D}{\sum D} - \frac{\delta}{2}\left[\frac{\sum n^2 D}{\sum D} - \left[\frac{\sum n^2 D}{\sum D}\right]^2\right]$$

Por tanto, se obtiene la fórmula de la 2da. aproximación para la valuación de la fecha equivalente.

Concluyendo, el valor aproximado de n es igual a la suma de los productos de las deudas por el tiempo en que deberán liquidarse dividido entre la suma de dichas deudas.

Regla:

1. Multiplíquese cada deuda por el tiempo (ya sea años, semestres, trimes - - tres, etc.) transcurrido hasta su vencimiento.

2. Súmese los productos obtenidos y divídase entre la suma de las deudas.

2 Ejemplo

Del ejemplo anterior, aplíquese la regla práctica para encontrar el valor de n.

$$n = \frac{1\,000\,(1) + 1\,500\,(2) + 2\,000\,(4)}{1\,000 + 1\,500 + 2\,000}$$

$$n = \frac{1\,000 + 3\,000 + 8\,000}{4\,500}$$

$$n = \frac{12\,000}{4\,500} = 2.666666 \text{ semestres}$$

$$n = 1 \text{ año, } 4 \text{ meses}$$

Si se toma la segunda aproximación, resolviendo el mismo ejemplo, se tiene:

Obteniendo δ en primer lugar:

$$(1 + 0.04) = e^{\delta}$$

$$Ln\,(1.04) = \delta$$

$$0.039221 = \delta, \text{ entonces}$$

$$n = 2.66 - \frac{0.039221}{2}\left\{\frac{1\,000 + 4\,(1\,500) + 16\,(2\,000)}{1\,000 + 1\,500 + 2\,000} - (2.66)^2\right\}$$

$$n = 2.66 - 0.01961\left\{\frac{1\,000 + 6\,000 + 32\,000}{4\,500} - 7.0756\right\}$$

$$n = 2.66 - 0.01961\left\{\frac{39\,000}{4\,500} - 7.0756\right\}$$

$$n = 2.66 - 0.01961\left\{8.666667 - 7.0756\right\}$$

$$n = 2.66 - 0.01961\left\{1.591067\right\}$$

$$n = 2.66 - 0.031201$$

$n = 2.628799$ semestres

$n =$ 1 año, 3 meses, 23 días

PROBLEMAS PROPUESTOS (INTERÈS COMPUESTO: ECUACIONES DE VALOR)

1. Una deuda de \$ 40 000 pagaderos dentro de 3 años y otra de \$ 75 000 pagaderos dentro de 5 años se van a liquidar mediante un pago único dentro de 4 años. Determinar el importe del pago único suponiendo un rendimiento del 12 % convertible trimestralmente.

Resp. X = \$ 111 656.90

2. Cierta deuda de \$ 13 500 vence en un año y otra de \$ 18 000 pagadera en 4 años se van a liquidar en la fecha mediante un pago único. Determinar el importe del pago suponiendo un rendimiento del 4.5 % convertible semestralmente.

Resp. X = \$ 27 977.28

3. Dos deudas, una de \$ 1 135 pagadera dentro de 7 años y otra de \$ 12 500 pagadera dentro de 3 años se quieren liquidar mediante un sólo pago dentro de un año. Determinar dicho pago si el rendimiento es del 8 % anual.

Resp. X = \$ 11 431.97

4. Cierta deuda de \$ 4 500 pagadera en 4 años sin intereses y otra de \$ 2 545 pagadera dentro de 6 años, con rendimiento del 8 % anual efectivo; se desean cambiar por un pago único dentro de 5 años. Determinar el pago requerido si el dinero devenga un interés del 9 % anual convertible trimestralmente.

Resp. X = \$ 8 613.54

5. Una casa fué adquirida en \$ 7 500 000 pagándose el 40 % en efectivo y se tomó una hipoteca devengando un interés del 9 % convertible trimestralmente por la diferencia. Si se han pagado \$ 250 000 al final del 3er. año. ¿Qué cantidad deberá cobrarse al final del 6o. año para saldar la hipoteca?

Rep. X = \$ 7 349 434.50

6. Las deudas de \$ 4 500, \$ 1 235, \$ 8 321 son pagaderas en 2,4 y 10 años respectivamente, si se pagan \$ 3 200. Determinar la cantidad que deberá pagarse -

dentro de 2 años si la tasa es del 9 % convertible semestralmente.

Resp. X = $ 6 155.61

7. Un cliente tiene las siguientes deudas: $ 5 000, $ 4 535, $ 6 384 que vencen en 8 meses, un año y 2 años respectivamente. El desea liquidarlas haciendo un solo pago dentro de un año. Determinar el importe de dicho pago si el interés es del 10 % anual.

Resp. X = $ 10 854.75

8. Se desea cambiar una deuda de $ 4 938 que vence en 3 años por tres pagos iguales, el primero se hará dentro de un año, el segundo al cabo de año y medio y el tercero al final del 2o. año. Considérese la tasa del 8 % convertible semestralmente. Determinar el importe de cada uno de los pagos.

Resp. X = $ 1 462.53

9. La Compañía XYZ firmó un documento por $ 60 000 con intereses acumulados por 4 años al 6 % convertible trimestralmente, vencido el día de hoy. Paga $ 5 000 únicamente y acuerda pagar el resto en 2 años. Determinar el importe del pago requerido utilizando la tasa del 6 % convertible semestralmente.

Resp. X = $ 80 067.68

10. Supóngase, en el problema 9 que la Compañía XYZ acuerda pagar el resto en tres pagos con vencimiento en 6 meses, un año y año y medio a partir de hoy. Determinar el importe de los pagos requeridos considerando la misma tasa de interés del 6 % convertible semestralmente.

Resp. X = $ 25 149.84

11. Una casa es vendida por $ 600 000 en efectivo y $ 25 000 anuales por los próximos 3 años. Suponiendo un rendimiento del 18 % efectivo. Determinar el precio de contado de la casa.

Resp. X = $ 654 356.80

12. El Sr. M debe $ 5 000 pagaderos en 3 años y $ 8 000 pagaderos en 4 años. Si abona $ 2 500 al final del 2o. año. ¿Cuánto deberá al final del 4o. año si el -

dinero obtiene el 6 % anual?

Resp. X = $ 10 491.00

13. El día de hoy, el Sr. A contrae el compromiso de pagar $ 32 000 en 10 años, con intereses al 6.2 %. Determinar el valor de la obligación dentro de 4 años, suponiendo un rendimiento del 5.4 %.

Resp. X = $ 42 594.27

14. El Sr. M debe $ 2 500 con vencimiento en 2 años sin intereses, $ 3 500 con- intereses al 8 % convertible trimestralmente pagaderos dentro de 8 años. Supo - niendo un rendimiento del 5 % convertible semestralmente. Determinar el pago - que se tiene que hacer dentro de 3 años para liquidar sus deudas.

Resp. X = $ 7 779.25

15. Determinar la manera de pagar con que se pueden sustituir dos deudas de - $ 8 500 y $ 2 500 con vencimiento en 2 y 4 años respectivamente por dos pagos - iguales con vencimiento en el 1o. y 6o. años suponiendo un rendimiento del 5 % convertible semestralmente.

Resp. X = $ 5 752.40

16. Una persona adeuda $ 45 000 pagaderos dentro de 4 años y $ 15 000 pagaderos en 7 años deseando cambiar estas deudas haciendo dos pagos iguales al cabo de 3 y 3 años y medio a partir de este momento. Determinar el valor de los pagos requeridos si el interés es del 8 % convertible semestralmente.

Resp. X = $ 26 798.04

17. El día de hoy una ama de casa compra artículos por valor de $ 18 000, paga $ 8 000 iniciales y $ 500 al término de 4 meses. Suponiendo un rendimiento del 5 % convertible mensualmente. Determinar el importe del pago final que tendrá - que hacer al término de 8 meses.

Resp. X = $ 9 829.80

18. El Sr. W se compromete a pagar al Sr. Z $ 55 400 al final del 4o. año, a -

cambio de recibir \$ 15 000 el día de hoy, \$ 12 400 al cabo de un año y una cantidad al final del 3er. año y que permita sea equitativa la operación para ambas partes. Determinar a cuanto ascenderá dicha cantidad si la tasa de interés es del 14 % anual efectivo.

Resp. X = \$ 10 258.29

19. La venta de una lavadora, se ofrece bajo dos formas de pago:

a) \$ 15 000 en efectivo ó

b) \$ 10 000 en este momento y dos pagos de \$ 2 500 al fin del 1er. y 3er. años respectivamente. ¿Cuál oferta se debe aceptar si el interés es del 10 % anual convertible semestralmente?

Resp. Mejor oferta b)

20. Encontrar el tiempo equivalente para el pago de tres deudas de \$ 3 250, \$ 1 000, \$ 4 050 con vencimiento en un año, 2 años y 2 años y medio suponiendo un rendimiento del 8 % convertible semestralmente.

Resp. n = 1 año, 9 meses, 18 días

21. Obtener por medio del método aproximado la fecha equivalente de las deudas de \$ 2 000, \$ 1 250, \$ 3 250 pagaderos en 3, 5 y 6 años respectivamente si la tasa de interés es del 8.5 % convertible semestralmente.

Resp. n = 4 años, 10 meses, 18 días.

22. A cambio de \$ 70 000 que se prestan al Sr. Z ahora, se desea encontrar la cantidad que deberá pagarse durante 10 años y en forma anual, considerando que la tasa a la cual se trabaja es del 8 % anual efectivo.

Resp. X = \$ 10 432.06

23. Determinar la tasa de interés efectiva de un pago único de \$ 52 563 el día de hoy que es equivalente a pagos anuales de \$ 6 000 cada uno en forma vencida durante 11 años.

Resp. i = 4 %

24. Una persona compra una cocina integral en \$ 45 000 dando un enganche del 20 % sobre el valor del aparato y el resto lo desea pagar en 12 pagos mensuales, el primero un mes después de la compra. ¿De cuánto serán los abonos si el interés es del 12 % convertible semestralmente?

Resp. X = \$ 4 293.97

25. En vez de un pago de \$ 605 000 ahora. ¿Qué suma deberá pagarse al final de cada año y durante 10 años, si la tasa es del 18 % anual efectivo?

Resp. X = \$ 134 621.27

VALOR PRESENTE Y DESCUENTO

Por el momento se han analizado problemas relativos a la obtención de monto - por medio del factor $(1 + i)^t$ denominado factor de acumulación en base a un cierto capital bajo el efecto de interés compuesto.

Análogamente se presenta el problema de calcular el importe del capital que es necesario invertir durante un cierto tiempo t, a una tasa de interés i para - producir un monto determinado. A dicha suma obtenida se le designa como el valor presente que se obtiene por medio del factor $(1 + i)^{-t}$.

Por otra parte, al proceso realizado se le denomina descontar. Es por eso que el factor $(1 + i)^{-t}$ se le llama factor de descuento.

Gráficamente se pueden observar las operaciones de acumulación y descuento.

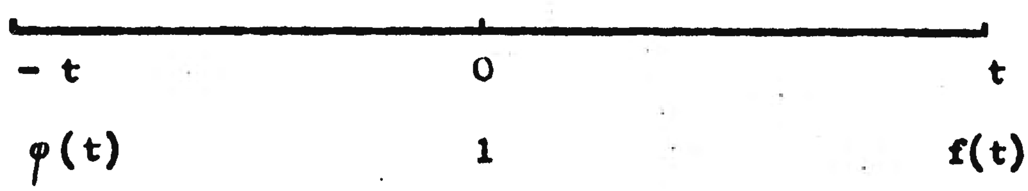
Sea $\varphi(t)$ el valor presente de una unidad en el tiempo t; es decir:

$$\varphi(t) = (1 + i)^{-t} = \frac{1}{(1 + i)^t}$$

y sea $f(t)$ el monto de una unidad en el tiempo t; es decir:

$$f(t) = (1 + i)^t$$

Visto en una línea de tiempo, se tiene:



Siendo $\varphi(t) = (1 + i)^{-t}$, $\varphi(t)$ se puede escribir como:

$$\varphi(t) = \frac{1}{(1 + i)^t}$$

Por tanto, como $f(t) = (1 + i)^t$, y sustituyendo $f(t)$ en la ecuación anterior, se tiene:

$$\varphi(t) = \frac{1}{f(t)}$$

Aplicando el concepto de la Triple Igualdad, se tiene:

$$\varphi(t) = (1 + i)^{-t} = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mt} = e^{-\delta t}$$

De la ecuación de monto compuesto $S = C(1 + i)^t$, donde

$$C = \frac{S}{(1 + i)^t} \qquad \acute{o} \qquad C = S(1 + i)^{-t}$$

Si $S = 1$ y $C = \varphi(t)$, entonces $\varphi(t) = (1 + i)^{-t}$.

Siendo $V_i = (1 + i)^{-1}$, $V_i^2 = (1 + i)^{-2}$, ..., $V_i^t = (1 + i)^{-t}$.

Por tanto:

$$\varphi(t) = V_i^t$$

Frecuentemente se presenta el caso de calcular el valor presente con base a una cierta tasa de descuento. Antes de definir la tasa de descuento se establecerán los siguientes conceptos.

Descuento: es la cantidad que se rebaja de la deuda antes del plazo estipulado. En consecuencia, el descuento es la diferencia entre el monto de la deuda y el valor presente de la misma.

$$D = S - C$$

Tasa efectiva de descuento: es la diferencia entre la unidad y su valor presente en un período unitario de tiempo t, es decir:

$$d = 1 - \varphi(1)$$

Fuerza de descuento:

Sea δ' = fuerza de descuento, $\varphi(t)$ = valor presente de una unidad en el tiempo t. Por definición,

$$\delta' = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t + \Delta)}{\Delta \quad \varphi(t)}$$

$$\delta' = - \frac{1}{\varphi(t)} \lim_{\Delta \to 0} \frac{\varphi(t + \Delta) - \varphi(t)}{\Delta}$$

$$\delta' = - \frac{1}{\varphi(t)} \quad d \frac{\varphi(t)}{dt}$$

$$\delta' = - d \frac{Ln \quad \varphi(t)}{dt}$$

Siendo $\varphi(t) = \dfrac{1}{f(t)}$, entonces

$$\delta' = - \frac{1}{dt} \quad Ln \frac{1}{f(t)}$$

Aplicando la ley de los logaritmos para un cociente, se tiene:

$$\delta' = \frac{1}{dt} \quad Ln \quad f(t)$$

Por definición:

$$\delta' = \delta$$

Se concluye que la fuerza de interés y la fuerza de descuento son iguales.

Por lo tanto, integrando δ' en el intervalo $[0,t]$, se tiene:

$$\int_0^t \delta' \, dt = -\int_0^t d \, Ln \frac{1}{f(t)}$$

$$\int_0^t \delta' \, dt = -\int_0^t d \, Ln \, \varphi(t)$$

Siendo $\varphi(t) = e^{-\delta t}$, y como $\delta' = \delta$ entonces

$$\varphi(t) = e^{-\delta t} = e^{-\delta' t}$$

Siendo $t = 1$, $\varphi(1) = e^{-\delta}$ ... (1)

Por definición: $d = 1 - \varphi(1)$

Sustituyendo la ecuación (1) en la ecuación anterior, se tiene:

$$d = 1 - e^{-\delta}$$

Despejando $e^{-\delta}$, se tiene:

$$e^{-\delta} = 1 - d$$

Por otra parte, siendo $t = \frac{1}{m}$, $\varphi\left(\frac{1}{m}\right) = e^{-\frac{\delta}{m}}$

Por definición: $\frac{d^{(m)}}{m} = 1 - \varphi\left(\frac{1}{m}\right)$

De donde $$\frac{d^{(m)}}{m} = 1 - e^{-\frac{\delta}{m}}$$

despejando $e^{-\delta}$, se tiene:

$$e^{-\frac{\delta}{m}} = 1 - \frac{d^{(m)}}{m}$$

$$e^{-\delta} = \left[1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right]^{m}$$

Por lo tanto, se concluye:

$$e^{-\delta} = (1 - d) = \left[1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right]^{m}$$

RELACIONES ENTRE TASAS DE INTERÉS Y DE DESCUENTO

Por definición de tasa de descuento:

$$d = 1 - \varphi(t)$$

$$d = 1 - V_i$$

$$d = 1 - \frac{1}{1 + i}$$

$$d = \frac{1 + i - 1}{1 + i}$$

$$d = \frac{i}{1 + i} \qquad \ldots (1)$$

Sabiendo que $d = i\,V_i$, donde $V_i = 1 - d$, por lo tanto:

$$d = i(1 - d)$$

despejando i de la ecuación (1), se tiene:

$$i = d(1 + i)$$

De la relación $\varphi(t) = \frac{1}{f(t)}$ se obtienen las siguientes relaciones:

RELACIONES ENTRE TASAS DE INTERÉS Y DE DESCUENTO

	FUERZA DE INTERÉS O DESCUENTO	TASA EFECTIVA DE INTERÉS	TASA NOMINAL DE INTERÉS	TASA EFECTIVA DE DESCUENTO	TASA NOMINAL DE DESCUENTO
MONTO DE UNA UNIDAD EN t AÑOS	$e^{\delta t}$	$(1 + i)^{t}$	$\left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^{mt}$	$(1 - d)^{-t}$	$\left[1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right]^{-mt}$
VALOR PRESENTE DE UNA UNIDAD EN t AÑOS	$e^{-\delta t}$	$(1 + i)^{-t}$	$\left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^{-mt}$	$(1 - d)^{t}$	$\left[1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right]^{mt}$

1 Ejemplo

Calcular el descuento de $ 2 000 pagaderos dentro de 10 años si la tasa de descuento es del 8 % convertible semestralmente.

Solución:

$S = 2\,000$

$d^{(2)} = 0.08$

$m = 2$

$n = 10$

D = ?

C = ?

$$C = S\left[1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right]^{m\,t}$$

$$C = 2\,000\left[1 - \frac{0.08}{2}\right]^{20}$$

$$C = 2\,000\ (1 - 0.04)^{20}$$

$$C = 2\,000\ (0.96)^{20}$$

$$C = 2\,000\ (0.442002)$$

$$C = \$\ 884.00$$

$$D = S - C$$

$$D = 2\,000 - 884$$

$$D = \$\ 1\,116.00$$

DEMOSTRACÍON

Por demostrar: $i > i^{(m)} > \delta > d^{(m)} > d$

a) $i > i^{(m)}$

Por la Triple Igualdad, se tiene:

$$(1 + i) = \left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m}$$

Desarrollando el segundo miembro de la igualdad, en serie de Maclaurin:

$$[1 + i] = 1 + \left[\frac{i^{(m)}}{m}\right]m + \frac{m\,(m - 1)}{2\,!}\left[\frac{i^{(m)}}{m}\right]^{2} +$$

$$+ \frac{m\,(m - 1)\,(m - 2)}{3\,!}\left[\frac{i^{(m)}}{m}\right]^{3} + \ . \ . \ .$$

$$i = i^{(m)} + \frac{m-1}{2m}\left[i^{(m)}\right]^2 + \ldots$$

De donde i (tasa efectiva de interés) es igual a $i^{(m)}$ (tasa nominal convertible m veces al año) más cierta cantidad positiva. Por lo tanto: $i > i^{(m)}$.

b) $i^{(m)} > \delta$

Sabiendo:
$$e^{\delta} = \left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^m$$

Despejando $i^{(m)}$, se tiene:

$$i^{(m)} = m\left\{e^{\frac{\delta}{m}} - 1\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Desarrollando $e^{\frac{\delta}{m}}$, se tiene:

$$e^{\frac{\delta}{m}} = 1 + \frac{\delta}{m} + \frac{1}{2!}\frac{\delta^2}{m^2} + \frac{1}{3!}\frac{\delta^3}{m^3} + \ldots$$

Sustituyendo en la ecuación (1) :

$$i^{(m)} = m\left\{\frac{\delta}{m} + \frac{1}{2!}\frac{\delta^2}{m^2} + \frac{1}{3!}\frac{\delta^3}{m^3} + \ldots\right\}$$

$$i^{(m)} = \delta + \frac{1}{2!}\frac{\delta^2}{m} + \frac{1}{3!}\frac{\delta^3}{m^2} + \ldots$$

De donde $i^{(m)} > \delta$.

c) $\delta > d^{(m)}$

Sabiendo que:
$$e^{-\delta} = \left[1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right]^m$$

Tomando logaritmos naturales, se tiene:

$$-\delta = m \ Ln \left[1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right] \quad \ldots (1)$$

Desarrollando $1 - \dfrac{d^{(m)}}{m}$, se tiene:

$$\left\{1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right\} = \left\{- \frac{d^{(m)}}{m} - \frac{1}{2}\left[\frac{d^{(m)}}{m}\right]^2 - \frac{1}{3}\left[\frac{d^{(m)}}{m}\right]^3 - \ldots\right\}$$

Sustituyendo en la ecuación (1), se tiene:

$$-\delta = m\left\{- \frac{d^{(m)}}{m} - \frac{1}{2}\left[\frac{d^{(m)}}{m}\right]^2 - \frac{1}{3}\left[\frac{d^{(m)}}{m}\right]^3 - \ldots\right\}$$

$$\delta = d^{(m)} + \frac{1}{2}\left[\frac{d^{(m)}}{m}\right]^2 + \frac{\left[d^{(m)}\right]^3}{3m^2} + \ldots$$

De donde: $\delta > d^{(m)}$.

d) $d^{(m)} > d$

Sabiendo:

$$\left[1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right] = (1 - d)$$

Despejando $d^{(m)}$, se tiene:

$$d^{(m)} = m\left\{1 - (1 - d)^{\frac{1}{m}}\right\} \quad \ldots (1)$$

Desarrollando $(1 - d)^{\frac{1}{m}}$, se tiene:

$$(1 - d)^{\frac{1}{m}} = 1 - \frac{d}{m} + \frac{\frac{1}{m}\left[\frac{1}{m} - 1\right]}{2\,!}\, d^2 - \ldots$$

Sustituyendo en la ecuación (1), se tiene:

$$d^{(m)} = m\left\{1 - \left(1 - \frac{d}{m} + \frac{\frac{1}{m}\left[\frac{1}{m} - 1\right]}{2\,!}\, d^2 - \ldots\right)\right\}$$

$$d^{(m)} = \frac{m\,d}{m} + \frac{\frac{1}{m} - 1}{2\,!\,m}\,d^2 + \ldots$$

De donde $d^{(m)} > d$.

Por lo tanto: $i > i^{(m)} > \delta > d^{(m)} > d$.

Algebraicamente se demuestra, correspondiente a la tasa efectiva del 8 %.

$$i = 0.08$$
$$i^{(2)} = 0.078461$$
$$i^{(4)} = 0.077706$$
$$i^{(12)} = 0.077208$$
$$\delta = 0.076961$$
$$d^{(12)} = 0.076714$$
$$d^{(4)} = 0.076225$$
$$d^{(2)} = 0.075499$$
$$d = 0.074074$$

1 Ejemplo

Encontrar el valor presente de \$ 3 500 pagaderos al final del 20o. año a las siguientes tasas:

a) 5 % instantáneo

b) 8 % convertible trimestralmente para los primeros 10 años y después 6 % efectivo.

Solución:

$\delta = 0.05$

$n = 20$

$f\,(t) = 3\,500$

$f(0) = ?$

a)

$$f(t) = f(0)\, e^{\delta t}$$

$$f(0) = f(t)\, e^{-\delta t}$$

Desarrollando $e^{-\delta t}$, se tiene:

$$e^{-\delta t} = 1 - \frac{\delta t}{1!} + \frac{(\delta t)^2}{2!} - \frac{(\delta t)^3}{3!} + \frac{(\delta t)^4}{4!} - \cdots$$

Siendo $\delta(t) = (0.05)(20) = 1$, entonces:

$$e^{-\delta t} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots$$

$$e^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \cdots$$

$$e^{-1} = \frac{44}{120}$$

$$f(0) = 3\,500\ (0.366666)$$

$$f(0) = \$\ 1\,283.33$$

b) $S = 3\,500$

$i_1^{(4)} = 0.08$

$m = 4$

$n_1 = 40$

$i_2 = 0.06$

$n_2 = 10$

$C = ?$

$$C = S\left[1 + \frac{i_1^{(m)}}{m}\right]^{-mn} (1 + i_2)^{-n}$$

$$C = 3\ 500\ (1.02)^{-40}\ (1.06)^{-10}$$

$$C = 3\ 500\ (0.452890)\ (0.558395)$$

$$C = 3\ 500\ (0.252892)$$

$$C = \$\ 885.12$$

2 Ejemplo

Encontrar el monto de $ 1 000, acumulados durante 15 años a las siguientes tasas de interés.

a) Tasa efectiva de interés correspondiente a una tasa nominal de descuento del 8 % convertible semestralmente.

b) 12 % por año convertible cada 3 años durante 10 años y después 6.5 % por año convertible cada 2 años.

c) Tasa de interés por año con la cual una suma de dinero se triplicará en 16 años.

Solución:

a) $C = 1\ 000$

$n = 15$

$d^{(2)} = 0.08$

$i = ?$

$S = ?$

$$(1 + i) = \left[1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right]^{-m}$$

$$i = \left[1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right]^{-m} - 1$$

$$i = (1 - 0.04)^{-2} - 1$$

$$i = (1.085069) - 1$$

$$i = 0.085069$$

$$S = C\,(1 + i)^n$$

$$S = 1\,000\,(1.085069)^{15}$$

$$S = 1\,000\,(3.402987)$$

$$S = \$\,3\,402.99$$

b) $C = 1\,000$

$i_1^{(3)} = 0.12$

$m_1 = 3$

$n_1 = 10$

$i_2^{(\frac{1}{2})} = 0.065$

$m_2 = \frac{1}{2}$

$n_2 = 5$

$S = ?$

$$S = C\left[1 + \frac{i_1^{(m_1)}}{m_1}\right]^{m_1 n_1}\left[1 + \frac{i_2^{(m_2)}}{m_2}\right]^{m_2 n_2}$$

$$S = 1\,000\,(1.04)^{30}\,(1.13)^{\frac{5}{2}}$$

$$S = 1\,000\,(3.243398)\,(1.357363)$$

$$S = \$\,4\,402.47$$

c) $C = 1\,000$

$n = 15$

$i = ?$

$S = ?$

$$3 = (1 + i)^{16}$$

$$3^{\frac{1}{16}} = (1 + i)$$

$$3^{\frac{1}{16}} - 1 = i$$

$$i = 0.071075$$

$$S = C\,(1 + i)^{n}$$

$$S = 1\,000 \quad (1 + 0.071075)^{15}$$

$$S = 1\,000 \quad (2.800904)$$

$$S = \$\ 2\,800.90$$

3 Ejemplo

Demostrar que aproximadamente:

$$\frac{i}{\delta} = 1 + \frac{1}{2}\, i \qquad \ldots \quad (1)$$

y encontrar con 5 decimales el error cometido cuando $\delta = 0.06$.

Solución:

$$\delta = \mathrm{L\,n}\,(1 + i) = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \ldots - \ldots$$

Despreciando los términos que tengan potencias superiores a 2, se tiene:

$$\delta = i - \frac{i^2}{2}$$

y sustituyendo en la ecuación (1):

$$\frac{i}{\delta} = \frac{i}{i - \frac{i^2}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\, i$$

Sabiendo que:

$e^{\delta} = 1 + i$, **donde** $i = e^{\delta} - 1$; **entonces**

$$i = 1 + \delta + \frac{\delta^2}{2\,!} + \frac{\delta^3}{3\,!} + \ldots - 1$$

$$i = 0.06 + 0.0018 + 0.000036$$

$$i = 0.061836$$

$$\frac{i}{\delta} = \frac{0.061836}{0.06} = 1.03600$$

Por otra parte:

$$1 + \frac{1}{2}\, i = 1 + \frac{0.061836}{2} = 1.030918$$

$$\begin{array}{lr} & 1.030918 \\ - & 1.030600 \\ \hline \text{error} & 0.000318 \end{array}$$

4 Ejemplo

Un prestamista presta pequeñas sumas de dinero cobrando interés del 4 % por mes en forma anticipada. Si después de un mes no se paga la deuda, nuevamente cobra el 4 % hasta que se liquide la cantidad prestada. Determinar la tasa efectiva por año que se está cobrando.

Solución:

$$0.96 \left[1 + \frac{i^{(12)}}{12}\right] = 1$$

$$\left[1 + \frac{i^{(12)}}{12}\right] = \frac{1}{0.96}$$

$$\left[1 + \frac{i^{(12)}}{12}\right]^{12} - 1 = \left[\frac{1}{0.96}\right]^{12} - 1$$

$$i = 1.632094 - 1$$

$$i = 0.632094$$

La tasa efectiva anual es del 63.21 %.

PROBLEMAS PROPUESTOS (VALOR PRESENTE Y DESCUENTO)

1. A partir de la definición de tasa de interés y de descuento demostrar que la fuerza de interés es igual a la fuerza de descuento.

2. Demostrar que aproximadamente:

$$\delta = \frac{i^{(m)} + d^{(m)}}{2}$$

3. Probar que aproximadamente se cumple la siguiente relación:

$$d = i - i^2 + i^3$$

4. Demostrar y verificar numéricamente la relación aproximada:

$$d^{(m)} = i - \frac{1 + m}{2 m} i^2 + \frac{(2m + 1)(m + 1)}{6 m^2} i^3$$

5. Encontrar el valor presente de \$ 6 000 pagaderos dentro de 8 años cuando el interés es del 6 % convertible semestralmente.

Resp. C = \$ 3 739.00

6. Encontrar el valor presente de \$ 2 000 si la tasa de interés es del 3 % anual efectivo y el término es de 6 años.

Resp. C = \$ 1 674.97

7. Encontrar el monto unitario a una tasa de interés del 6 % anual efectivo durante 6 años y 4 meses.

Resp. S = \$ 1.44

8. El Sr. X paga un interés del 12 % anual en pagos trimestrales. Desea cambiar y pagar en adelante 3 veces al año. Determinar la nueva tasa nominal.

Resp. $i^{(\frac{1}{3})}$ = 12.06 %

9. Determinar el tiempo en que una cierta suma de dinero duplicará su valor a una tasa de interés del 6 % de interés compuesto.

Resp. n = 11 años, 10 meses, 22 días.

10. Un beneficiario de una letra de cambio de $ 1 000 pagadero dentro de 2 años, desea tener ahora su dinero. Determinar que cantidad recibirá si se le descuentan las siguientes tasas:

a) Tasa efectiva de interés del 5 % anual.

b) Tasa de descuento correspondiente a una tasa efectiva de interés del 3 $\frac{1}{2}$ %

c) Tasa de interés anual efectiva del 5 % en el primer año y 4.75 % en el segundo.

Resp. a) $ 1 849.11 b) $ 1 876.07 c) $ 2 199.75

ANUALIDADES

Una anualidad es una serie de pagos, generalmente iguales efectuados a intervalos de tiempo iguales.

El tiempo transcurrido entre cada uno de los pagos sucesivos de la anualidad se conoce como intervalo de pago.

Se conoce como plazo de una anualidad al tiempo transcurrido desde que se efectúa el primer pago hasta que se hace el último.

La suma de todos los pagos hechos en un año se define como renta anual, en consecuencia, una renta anual de $ 3 600 pagaderos trimestralmente significa pagos de $ 900 cada 3 meses.

Existen únicamente dos tipos de anualidades:

A) Anualidades Contingentes

B) Anualidades Ciertas

A) Las anualidades contingentes están representadas por una serie de pagos que se efectúan, sujetos a algún evento fortuito, por ejemplo:

i) El pago de una prima de un seguro ordinario de vida se efectúa hasta que ocurre la muerte del asegurado; momento en que la compañía aseguradora paga al beneficiario el importe de la suma asegurada.

ii) La serie de pagos que recibe un pensionista hasta su fallecimiento.

iii) El propietario de una casa que paga una prima de un seguro contra incendio hasta el momento en que ocurre el siniestro y desaparece el bien asegurado.

B) Las anualidades cierta consisten, en una serie de pagos periódicos que deben efectuarse con certeza o independencia de cualquier evento fortuito durante un cierto tiempo preestablecido; por ejemplo:

i) El pago de intereses sobre un bono de renta fija.

ii) Los pagos periódicos que se efectúan para liquidar una hipoteca de una casa, independientemente de cualquier contingencia hasta la extinción de la deuda.

iii) Los pagos periódicos que se efectúan por concepto de la compra de un terreno.

iv) Los n pagos que una nación W recibe durante un tiempo por concepto de un empréstito que le hizo al país X.

Los pagos pueden realizarse en forma anual, semestral, trimestral, mensual o con una frecuencia dada. Sin embargo, se habla en todos los casos de anualidad.

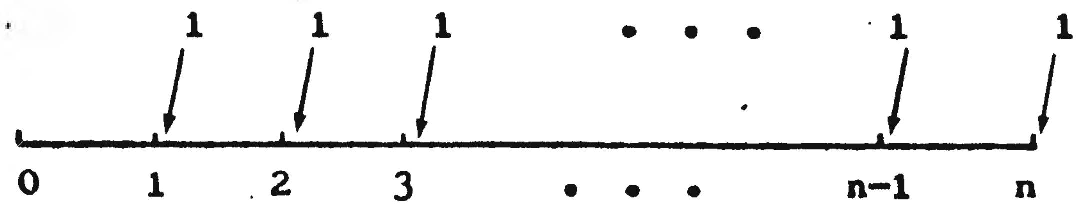
Por comodidad en la resolución de los problemas, se trabajará en todos los casos con una renta anual.

En este capítulo se tratarán anualidades ciertas en el caso simple; es decir, anualidades en las cuales, la frecuencia de los pagos coincide con la convertibilidad de la tasa.

VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD ORDINARIA

Una anualidad ordinaria es aquella que consiste en una serie de pagos que se efectúan un período después de su contratación y pagaderos durante n años.

Gráficamente se puede observar, considerando los pagos anuales unitarios.



Para encontrar el valor presente de dicha serie de pagos unitarios se procede - a encontrar la suma de los valores presentes de cada uno de ellos; obviamente - el punto de valuación o la fecha focal de esta serie de pagos será el punto cero en la línea de tiempo.

Sea $a_{\overline{n}|i}$ el valor presente de una anualidad, considerando los pagos unitarios, a una tasa anual de interés i.

$$a_{\overline{n}|i} = V_i + V_i^2 + V_i^3 + \ldots + V_i^{n-1} + V_i^n$$

La suma de los n-términos de una anualidad forman una progresión geométrica cuya razón se obtiene tomando cualquier término de la progresión y dividiéndolo - entre el término anterior; por lo tanto:

$$\frac{V_i^2}{V_i} = V_i \,, \quad \text{donde } V_i \text{ es la razón}$$

Sabiendo que la suma del valor presente de una anualidad es:

$$a_{\overline{n}|i} = V_i + V_i^2 + \ldots + V_i^{n-1} + V_i^n \qquad \ldots (1)$$

Multiplicando por V_i ambos miembros de la igualdad; se tiene:

$$V_i \; a_{\overline{n}|i} = V_i^2 + V_i^3 + \ldots + V_i^n + V_i^{n+1} \qquad \ldots (2)$$

Restando la ecuación (2) de la (1); se obtiene:

$$a_{\overline{n}|i} - V_i \; a_{\overline{n}|i} = V_i - V_i^2 + V_i^2 - V_i^3 + V_i^3 - V_i^4 + \ldots +$$
$$+ V_i^n - V_i^n - V_i^{n+1}$$

$$a_{\overline{n}|i}\,(1 - V_i) = V_i - V_i^{n+1}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{V_i - V_i^{n+1}}{1 - V_i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{V_i\,(1 - V_i^{n})}{1 - V_i}$$

Multiplicando numerador y denominador por (1 + i), se tiene:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{V_i\,(1 - V_i^{n})}{1 - V_i} \cdot \frac{(1 + i)}{(1 + i)}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - V_i^{n}}{i} \qquad \ldots \quad (1)$$

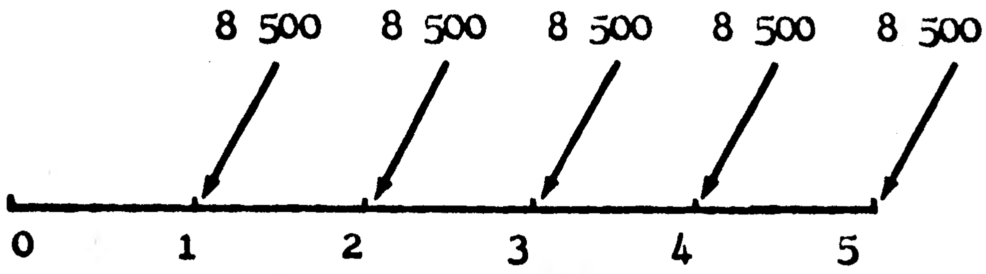
Dado que $a_{\overline{n}|i}$ es el valor presente de una serie de pagos unitarios a una tasa de interés i durante n períodos; y que en realidad dichos pagos son diferentes de la unidad se denotarán con la letra R (renta), entonces se representa el valor presente de dichos pagos como A, teniéndose:

$$A = R\,(V_i + V_i^{2} + V_i^{3} + \ldots + V_i^{n-1} + V_i^{n})$$

$$A = R\,a_{\overline{n}|i} \qquad \ldots \quad (2)$$

1 Ejemplo

Calcular el valor presente de 5 pagos anuales de \$ 8 500 . El primero se efec - túa un año después de haber hecho la operación y considerando un rendimiento - del 7 % anual efectivo.



$$A = 8\,500\ V_i + 8\,500\ V_i^2 + 8\,500\ V_i^3 + 8\,500\ V_i^4 + 8\,500\ V_i^5$$

$$i = 0.07$$

$$A = 8\,500\ (V_i + V_i^2 + V_i^3 + V_i^4 + V_i^5)$$

$$A = 8\,500\ (0.934579 + 0.873439 + 0.816298 + 0.762895 + 0.712986)$$

$$A = 8\,500\ (4.100197)$$

$$A = \$\ 34\,851.68$$

Utilizando la expresión (1):

$$A = 8\,500 \left(\frac{1 - V_i^n}{i} \right)$$

$$A = 8\,500 \left(\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right)$$

$$A = 8\,500 \left(\frac{1 - 0.712986}{0.07} \right)$$

$$A = 8\,500 \quad (4.100197)$$

$$A = \$\ 34\,851.68$$

que es el valor presente de los 5 pagos.

Frecuentemente se presentan problemas con pagos periódicos, y es así como se justifica la elaboración de tablas con los valores de $a_{\overline{n}|i}$, para distintas tasas de interés; por lo que basta aplicar la ecuación (2) como se observa a continuación:

Tomando en cuenta los datos del problema anterior, se tiene:

$$A = R\, a_{\overline{n}|i}$$

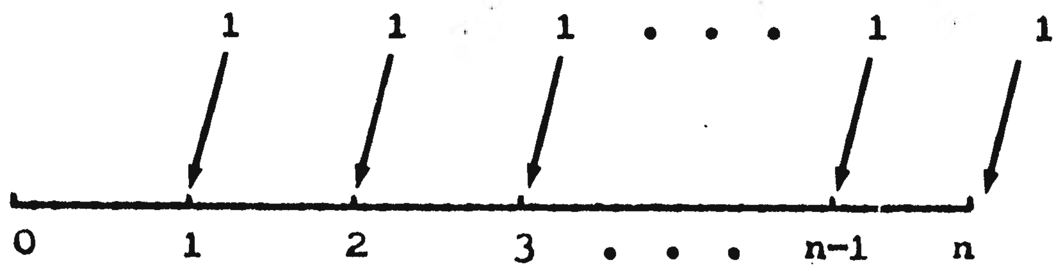
$$A = 8\,500\, a_{\overline{5}|0.07}$$

$$A = 8\,500 \quad (4.100197)$$

$$A = \$\ 34\,851.68$$

MONTO DE UNA ANUALIDAD ORDINARIA

Si se toma como fecha focal el punto n, para obtener el monto de una serie de pagos periódicos unitarios, se tiene:



y denotando con $S_{\overline{n}|i}$ a dicho monto, se obtiene la siguiente ecuación:

$$S_{\overline{n}|i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}$$

Teniéndose nuevamente una progresión geométrica cuya razón es $(1+i)$; y para obtener la suma de dicha progresión, se tiene:

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

La suma de los n-términos del monto de una anualidad forman una progresión geométrica cuya razón se obtiene tomando cualquier término de la progresión y dividiéndolo entre el término anterior, por tanto:

$$\frac{(1+i)^2}{1+i} = 1 + i \text{ , donde } 1 + i \text{ es la razón}$$

Sabiendo que la suma del monto de una anualidad es:

$$S_{\overline{n}|i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} \dots (1)$$

Multiplicando por $(1 + i)$ a ambos miembros de la igualdad, se tiene:

$$(1+i)\ S_{\overline{n}|i} = (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n \dots (2)$$

Restando la ecuación (2) de la ecuación (1), se obtiene:

$$S_{\overline{n}|i} - (1+i)\ S_{\overline{n}|i} = 1 - (1+i) + (1+i) - (1+i)^2 + (1+i)^2 - (1+i)^3 + \dots$$
$$+ (1+i)^{n-1} - (1+i)^{n-1} - (1+i)^n$$

$$S_{\overline{n}|i}\left[1 - (1 + i)\right] = 1 - (1+i)^{n}$$

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1 + i)^{n}}{1 - (1 + i)}$$

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1 + i)^{n}}{-i}$$

Multiplicando por 1, donde $1 = \frac{-1}{-1}$, se tiene finalmente:

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{(1 + i)^{n} - 1}{i} \qquad \ldots(3)$$

Si en lugar de efectuar pagos unitarios, se hacen pagos de R anualmente y se denomina como S al monto de una anualidad, se tiene:

$$S = R\, S_{\overline{n}|i}$$

Para encontrar el valor de $S_{\overline{n}|i}$, también existen tablas calculadas con diferentes tasas de interés; y en el caso de no existir el valor de $S_{\overline{n}|i}$ en las tablas o en un momento dado no contar con ellas, se puede utilizar la fórmula (3).

1 Ejemplo

Encontrar el monto de $ 8 500 anuales pagaderos durante 5 años; el primer pago se efectúa un año después de este momento, considerando una tasa de interés anual del 7 %.

Solución para el caso de que el valor de $S_{\overline{n}|i}$ se encuentre en tablas.

$$S = R\, S_{\overline{n}|i}$$

$$S = 8\,500\, S_{\overline{5}|0.07}$$

$$S = 8\,500\ (5.750739)$$

$$S = \$\ 48\,881.28$$

Solución para el mismo problema en caso de no contar con tablas.

$$S = R\, S_{\overline{n}|i}$$

$$S = R\left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}\right]$$

$$S = 8\,500\left[\frac{(1+0.07)^{5} - 1}{0.07}\right]$$

$$S = 8\,500\left[\frac{1.402552 - 1}{0.07}\right]$$

$$S = 8\,500\ (5.750739)$$

$$S = \$\ 48\,881.28$$

Otra manera de calcular $S_{\overline{n}|i}$ se deriva de la observación de que la serie de pagos son los mismos que para calcular $a_{\overline{n}|i}$, la única diferencia existente es el punto de valuación.

Observando los dos valores, se tiene:

$$a_{\overline{n}|i} = V_i + V_i^2 + \ldots + V_i^{n-1} + V_i^{n}$$

$$S_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i) + 1$$

Nótese que la segunda expresión es igual a la primera si se multiplica ésta - por el factor de acumulación $(1 + i)^n$ encontrándose la siguiente relación:

$$S_{\overline{n}|i} = (1 + i)^n \, a_{\overline{n}|i}$$

Despejando $a_{\overline{n}|i}$, se tiene que:

$$a_{\overline{n}|i} = V_i^n \, S_{\overline{n}|i} \qquad \ldots (4)$$

Para constatar (4), con los datos del problema anterior, se tiene:

$$a_{\overline{n}|i} = V_i^n \, S_{\overline{n}|i}$$

Despejando $S_{\overline{n}|i}$ se tiene:

$$S_{\overline{n}|i} = (1 + i)^n \, a_{\overline{n}|i}$$

$$S_{\overline{5}|0.07} = (1 + 0.07)^5 \, a_{\overline{5}|0.07}$$

$$S_{\overline{5}|0.07} = (1.402552) \; (4.100197)$$

$$S_{\overline{5}|0.07} = 5.750739$$

Por lo tanto, el monto será:

$$S = 8\,500 \; (5.750739)$$

$$S = \$\ 48\ 881.28$$

En caso de no contar con tablas, se puede resolver las ecuaciones (1) y (3) por medio de logaritmos o utilizando calculadora de bolsillo.

Concluyendo, las fórmulas (1) y (3) permiten obtener el valor presente y el monto de una anualidad cierta u ordinaria respectivamente.

2 Ejemplo

Encontrar el monto y el valor presente de una anualidad de \$ 1 500 cada 6 meses durante 5 años y medio, considerando una tasa del 4.5 % convertible semestralmente. Resolver el problema por medio de logaritmos.

Solución:

$$R = 1\ 500$$

$$i = 0.0225$$

$$n = 11$$

$$S = 1\ 500\ S_{\overline{11}|0.0225}$$

$$S = 1\ 500 \left[\frac{(1.0225)^{11} - 1}{0.0225} \right]$$

Calculando $N = (1.0225)^{11}$ por medio de logaritmos, se tiene:

$$\log N = 11 \log (1.0225)$$

$$\log N = 11\ (0.009663)$$

$$\log N = 0.106293$$

$$\text{antilog} \log N = \text{antilog}\ 0.106293$$

$$N = 1.277300$$

Por tanto:

$$S = 1\,500 \left[\frac{1.277300 - 1}{0.0225} \right]$$

$$S = 1\,500 \left[\frac{0.277300}{0.0225} \right]$$

$$\log S = \log 1\,500 + \log 0.277300 - \log 0.0225$$

$$\log S = 3.176091 - 0.557050 + 1.647817$$

$$\log S = 4.266858$$

$$\text{antilog } \log S = \text{antilog } 4.266858$$

$$S = \$18\,486.64$$

Por otro lado, se tiene:

$$A = 1\,500\, a_{\overline{11}|0.0225}$$

$$A = 1\,500 \left[\frac{1 - (1.0225)^{-11}}{0.0225} \right]$$

Calculando $N = (1.0225)^{-11}$ por medio de logaritmos, se tiene:

$$\log N = -11 \log 1.0225$$

$$\log N = -11\,(0.009663)$$

$$\log N = -0.106293$$

$$\text{antilog} \ \log N = \text{antilog} \ -0.106293$$

$$N = 0.782901$$

Por tanto:

$$A = 1\,500 \left(\frac{1 - 0.782901}{0.0225} \right)$$

$$A = 1\,500 \left[\frac{0.217098}{0.0225} \right]$$

$$\log A = \log 1\,500 + \log 0.217098 - \log 0.0225$$

$$\log A = 3.176091 - 0.663344 + 1.647817$$

$$\log A = 4.160564$$

$$\text{antilog} \ \log A = \text{antilog} \ 4.160564$$

$$A = \$\ 14\,473.18$$

ANUALIDADES VALUADAS CON TASAS NOMINALES

Primero se considera el caso en que la convertibilidad de la tasa nominal (m) - corresponde con la periodicidad de los pagos (p); es decir, m = p , por tanto el valor presente de una serie de pagos colocados a una tasa de interés nominal durante un período de tiempo n, pagadera m veces al año, se define de la si - - guiente manera:

$$A = \frac{Ra}{p} a_{\overline{m\,n}|\,i'} \qquad \text{donde} \qquad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

Análogamente, si se desea obtener el monto de dichos pagos, éste puede ser obtenido de la siguiente manera:

$$S = \frac{Ra}{p} S_{\overline{m\,n}|i'} \qquad \text{donde} \qquad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

1 Ejemplo

Cierta deuda va a ser liquidada mediante pagos trimestrales iguales, con una renta anual de \$ 2 500, durante 10 años considerando una tasa de interés del 8 % convertible trimestralmente. Se desea determinar el valor de la deuda.

Solución:

$$A = \frac{Ra}{p} a_{\overline{m\,n}|i'} \quad , \qquad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

$$A = \frac{2\ 500}{4} a_{\overline{4\times10}|i'} \quad , \qquad i' = \frac{0.08}{4}$$

$$A = 625\ a_{\overline{40}|i'} \quad , \qquad i' = 0.02$$

$$A = 625\ a_{\overline{40}|0.02}$$

Buscando en tablas el valor $a_{\overline{40}|0.02}$, se tiene:

$$A = 625\ (27.355479)$$

$$A = \$\ 17\ 097.17$$

2 Ejemplo

Una persona abre una cuenta de ahorros efectuando depósitos de $ 2 500 mensualmente, dicha cuenta reditúa el 4.5 % anual convertible mensualmente. ¿De qué cantidad de dinero dispondrá al final de 6 años?

Solución:

$$S = \frac{Ra}{p} S_{\overline{m\,n}|\,i'} \qquad , \qquad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

$$S = 2\,500\ S_{\overline{12\times 6}|\,i'} \qquad , \qquad i' = \frac{0.045}{12}$$

$$S = 2\,500\ S_{\overline{72}|\,i'} \qquad , \qquad i' = 0.00375$$

$$S = 2\,500 \left[\frac{(1 + 0.00375)^{72} - 1}{0.00375}\right]$$

$$S = 2\,500 \left[\frac{0.309303}{0.00375}\right]$$

$$S = 2\,500 \quad (82.480827)$$

$$S = \$\ 206\,202.07$$

ANUALIDADES FUERA DE LOS LIMITES DE LAS TABLAS, EN CUANTO A n

Para encontrar el valor presente o el monto de una anualidad, en el caso en que exceda el número de períodos (n) al máximo calculado en tablas; es posible-hacer $n = h + k$, considerando que los valores que se asignan tanto a h como a k si se encuentren tabulados en tablas, de tal manera:

Si $a_{\overline{n}|i}$ en donde $n > n$ de tablas, entonces se tiene:

$$a_{\overline{h+k}|i} = a_{\overline{h}|i} + V_i^h \, a_{\overline{k}|i}$$

Demostración:

$$a_{\overline{h+k}|i} = \frac{1 - V_i^{h+k}}{i}$$

Si se le suma $0 = V_i^h - V_i^h$

$$a_{\overline{h+k}|i} = \frac{1 - V_i^h + V_i^h - V_i^{h+k}}{i}$$

$$a_{\overline{h+k}|i} = \frac{1 - V_i^h}{i} + \frac{V_i^h - V_i^{h+k}}{i}$$

Factorizando V_i^h en el segundo sumando, se tiene:

$$a_{\overline{h+k}|i} = \frac{1 - V_i^h}{i} + \frac{V_i^h\,(1 - V_i^k)}{i}$$

$$a_{\overline{h+k}|i} = \frac{1 - V_i^h}{i} + V_i^h \left[\frac{1 - V_i^k}{i} \right]$$

$$a_{\overline{h+k}|i} = a_{\overline{h}|i} + V_i^h \, a_{\overline{k}|i}$$

Para el monto se tiene:

Si $S_{\overline{n}|i}$ en donde $n > n$ de tablas, entonces se tiene:

$$S_{\overline{h+k}|i} = (1+i)^h \, S_{\overline{k}|i} + S_{\overline{h}|i}$$

Demostración:

$$S_{\overline{h+k}|i} = \frac{(1+i)^{h+k} - 1}{i}$$

Si se le suma $0 = (1+i)^h - (1+i)^h$, se tiene:

$$S_{\overline{h+k}|i} = \frac{(1+i)^{h+k} - (1+i)^h + (1+i)^h - 1}{i}$$

$$S_{\overline{h+k}|i} = \frac{(1+i)^{h+k} - (1+i)^h}{i} + \frac{(1+i)^h - 1}{i}$$

Factorizando $(1 + i)^h$ en el primer sumando, se tiene que:

$$S_{\overline{h+k}|i} = \frac{(1+i)^h \left[(1+i)^k - 1\right]}{i} + \frac{(1+i)^h - 1}{i}$$

$$S_{\overline{h+k}|i} = (1+i)^h \left[\frac{(1+i)^k - 1}{i}\right] + \frac{(1+i)^h - 1}{i}$$

$$S_{\overline{h+k}|i} = (1+i)^h \, S_{\overline{k}|i} + S_{\overline{h}|i}$$

1 Ejemplo

Para comprar una casa se abonan $ 23 586.75 mensualmente durante 15 años. Si se consideró una tasa de interés del 21 % anual convertible mensualmente. ¿Cuál es el valor actual de la casa?

Solución:

$Rm = 23\,586.75$

$n = 15$ años

$$i' = \frac{0.21}{12}$$

$A = ?$

$$A = Rm \, a_{\overline{mn}|i'} \, , \qquad i' = \frac{0.21}{12}$$

$$A = 23\,586.75 \; a_{\overline{12 \times 15}|i'} \, , \quad i' = 0.0175$$

$$A = \$\ 23\ 586.75\ a_{\overline{180}|0.0175}$$

Para calcular el valor de $a_{\overline{180}|0.0175}$ se tiene que $n = 180$. Si este valor de n no se encuentra en tablas, entonces: $n = h + k$

$$180 = 90 + 90$$

ó

$$180 = 100 + 80,\ \text{etc.}$$

$$a_{\overline{h+k}|i} = a_{\overline{h}|i} + v_i^h\ a_{\overline{k}|i}$$

$$a_{\overline{90+90}|0.0175} = a_{\overline{90}|0.0175} + v_{0.0175}^{90}\ a_{\overline{90}|0.0175}$$

$$a_{\overline{90+90}|0.0175} = 45.151610 + (0.209847)(45.151610)$$

$$a_{\overline{90+90}|0.0175} = 54.626532$$

o también:

$$a_{\overline{h+k}|i} = a_{\overline{h}|i} + v_i^h\ a_{\overline{k}|i}$$

$$a_{\overline{100+80}|0.0175} = a_{\overline{100}|0.0175} + v_{0.0175}^{100}\ a_{\overline{80}|0.0175}.$$

$$a_{\overline{100+80}|0.0175} = 47.061473 + (0.176424)(42.879935)$$

$$a_{\overline{100+80}|0.0175} = 54.626532$$

Sustituyendo el valor de $a_{\overline{180}|0.0175}$, se tiene:

$$A = 23\,586.75\ (54.626532)$$

$$A = \$\ 1\,288\,462.35$$

DETERMINACIÓN DE LA RENTA

Frecuentemente se presenta el problema de determinar la renta o pago periódico, mediante el cual se desea obtener una suma de dinero después de transcurrido un cierto tiempo a una tasa de interés; o también, encontrar el pago que saldará una deuda contraida en este momento durante un tiempo determinado a una tasa de interés. En el primer caso se despejará R de la fórmula para obtener el monto de una serie de pagos ($S = R\, s_{\overline{n}|i}$); y en el segundo caso se despejará R de la fórmula para determinar el valor presente de una serie de pagos ($A = R\, a_{\overline{n}|i}$).

1 Ejemplo

Una persona desea disponer de un capital de $ 200 500 dentro de 10 años, formado mediante depósitos mensuales en una cuenta de inversión que le ofrece el 12 % de interés anual convertible mensualmente. ¿A cuánto ascenderá la renta anual para que pueda lograr su objetivo?

Solución:

$S = 200\,500$

$n = 10$ años

$i^{(12)} = 0.01$

$m = p = 12$

$Ra = ?$

$$S = \frac{Ra}{p}\, s_{\overline{mn}|i'} \quad , \quad i' = \frac{0.12}{12}$$

$$Ra = \frac{Sp}{S_{\overline{m\,n}|i'}}$$

$$Ra = \frac{200\ 500\ (12)}{S_{\overline{120}|0.01}}$$

$$Ra = \frac{2\ 406\ 000}{(1+i')^{100} S_{\overline{20}|i'} + S_{\overline{100}|i'}}$$

$$Ra = \frac{2\ 406\ 000}{(2.704814)\ (22.019004) + 170.481383}$$

$$Ra = \frac{2\ 406\ 000}{59.557310 \quad + \quad 170.481383}$$

$$Ra = \frac{2\ 406\ 000}{230.038693}$$

$$Ra = \$\ 10\ 459.11$$

2 **Ejemplo**

Una persona compra un stereo, cuyo valor es de $ 10 500 con la opción de pa - garlo mediante 12 abonos, el primero un mes después de efectuada la compra. Si la tasa de interés que le carga es del 4 % mensual efectivo. ¿ A cuánto - ascienden los abonos mensuales?

Solución:

A = 10 500

i = 0.04

n = 12 meses

Rm = ?

$$A = Rm \quad a_{\overline{n}|i}$$

$$Rm = \frac{A}{a_{\overline{12}|0.04}}$$

$$R_m = \frac{10\ 500}{9.385074}$$

$$R_m = \$\ 1\ 118.80$$

Dado que frecuentemente se presentan este tipo de problemas, existen tabulados los valores de $\frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$. Para obtener el valor de $\frac{1}{S_{\overline{n}|i}}$ se puede utilizar la expresión:

$$\frac{1}{S_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} - i$$

Demostración:

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} - i = \frac{i}{1 - V_i^n} - i$$

$$= \frac{i - i\left[1 - V_i^n\right]}{1 - V_i^n}$$

$$= \frac{i - i + i\,V_i^n}{1 - V_i^n}$$

$$= \frac{i\,V_i^n}{1 - V_i^n}$$

Multiplicando numerador y denominador por el factor $(1 + i)^n$, se tiene:

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} - i = \frac{i\,V_i^n}{1 - V_i^n} \cdot \frac{(1 + i)^n}{(1 + i)^n}$$

$$= \frac{i}{(1 + i)^{n} - 1}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} - i = \frac{1}{s_{\overline{n}|i}}$$

CÁLCULO DEL TIEMPO O TÉRMINO

Existen básicamente dos procedimientos para el cálculo de n, resolviendo la ecuación exponencial correspondiente por medio de logaritmos o mediante interpolación con tablas de montos o de valores presentes.

1 Ejemplo

Una persona adeuda \$ 30 000 y desea efectuar pagos anuales de \$ 1 000. Determinar el tiempo necesario en que deberá efectuar dichos pagos a fin de liquidar el adeudo si la tasa de interés involucrada es del 2 % anual efectivo.

Solución:

A = 30 000

Ra = 1 000

i = 0.02

n = ?

$$A = Ra\, a_{\overline{n}|i}$$

$$30\,000 = 1\,000 \left[\frac{1 - (1 + 0.02)^{-n}}{0.02} \right]$$

$$30 = \frac{1 - (1.02)^{-n}}{0.02}$$

$$30\ (0.02) = 1 - (1.02)^{-n}$$

$$0.60 = 1 - (1.02)^{-n}$$

$$0.60 - 1 = -(1.02)^{-n}$$

$$-0.40 = -(1.02)^{-n}$$

$$0.40 = (1.02)^{-n}$$

$$\log 0.40 = -n \log 1.02$$

$$n \log 1.02 = -\log 0.40$$

$$n \log 1.02 = \operatorname{colog} 0.40$$

$$n = \frac{\operatorname{colog} 0.40}{\log 1.02}$$

$$n = \frac{0.397940}{0.008601}$$

$$n = 46.217558$$

n = 46 años, 2 meses, 18 días

2 Ejemplo

¿Cuántos pagos anuales completos de \$ 2 500 y que pago incompleto un período después deben efectuarse con el objeto de acumular al 6 % anual la cantidad de \$ 42 000 ?

Solución:

$S = 42\,000$

$i = 0.06$

$Ra = 2\,500$

$n = ?$

$X = ?$

$$S = Ra\, S_{\overline{n}|i}$$

$$42\,000 = 2\,500\; S_{\overline{n}|0.06}$$

$$16.8 = S_{\overline{n}|0.06}$$

En Tablas de $S_{\overline{n}|0.06}$ se observa que el valor 16.8 corresponde a una n entre 11 y 12 años.

En este caso n resulta fraccionario, pudiendo interpretarse tal hecho en el sentido de que se efectuarán 11 pagos completos y una cantidad adicional generalmente pagada un período después de efectuado el último pago completo.

Para determinar el pago irregular que se hará en el año 12 se puede plantear una ecuación de valor de la siguiente manera:

$$42\,000 = 2\,500\ S_{\overline{11}|0.06}(1.06) + X$$

$$X = 42\,000 - 2\,500\ S_{\overline{11}|0.06}\ (1.06)$$

$$X = 42\,000 - 2\,500\ (14.971642)\ (1.06)$$

$$X = 42\,000 - 39\,674.85$$

$$X = \$\ 2\,325.15$$

3 Ejemplo

Una anualidad de \$ 300 trimestrales tiene un valor presente de \$ 4 000. Si el interés es del 4 % convertible trimestralmente. ¿ Cuántos pagos completos y que pago irregular al fin del siguiente trimestre se efectuará con el objeto de hacer la operación equitativa?

Solución:

$A = 4\,000$

$\frac{Ra}{4} = 300$

$m = p = 4$

$n_1 = ?$

$X = ?$

$$A = \frac{Ra}{4}\ a_{\overline{m\,n}|i'}\ , \qquad i' = \frac{0.04}{4}$$

$$4\,000 = 300\ a_{\overline{n_1}|0.01}$$

$$13.333 = a_{\overline{n_1}|0.01}$$

En tablas de $a_{\overline{n_1}|0.01}$ se observa que el valor 13.333 corresponde a una n_1 entre 14 y 15 trimestres.

Para determinar el pago irregular que se efectuará el 15o. trimestre se puede plantear la ecuación de valor de la siguiente manera:

$$4\,000 = 300\ a_{\overline{14}|0.01} + X\ V_{0.01}^{15}$$

$$4\,000 = 300\ (13.003703) + X\ (0.861349)$$

$$4\,000 = 3\,901.11 + X\ (0.861349)$$

$$X\ (0.861349) = 4\,000 - 3\,901.11$$

$$X\ (0.861349) = 98.89$$

$$X = \frac{98.89}{0.861349}$$

$$X = \$\ 114.81$$

CÁLCULO DE LA TASA DE INTERÉS

Para poder encontrar la tasa de interés se utiliza el procedimiento de interpolación o mediante el desarrollo de $a_{\overline{n}|i}$ que se analizará más adelante.

1 Ejemplo

Para liquidar una deuda de \$ 262 815 se efectuarán pagos anuales de \$ 30 000 en forma vencida durante 11 años. Calcular la tasa de interés con la cual se está operando.

Solución:

A = 262 815

n = 11

R = 30 000

$i = ?$

$$A = R\ a_{\overline{n}|i}$$

$$262\ 815 = 30\ 000\ a_{\overline{n}|i}$$

$$a_{\overline{11}|i} = \frac{262\ 815}{30\ 000}$$

$$a_{\overline{11}|i} = 8.7605$$

En las tablas de anualidades se observa que la ecuación se satisface para $i = 0.04$.

2 Ejemplo

Una persona desea formar con sus gratificaciones de fin de año ($ 300) un fondo para dentro de 24 años, fecha en que se jubilará. Un banco de ahorro le ofrece que para entonces dispondrá de $ 9 874.60 . Determinar la tasa anual efectiva que está considerando el banco en la operación.

Solución:

$S = 9\ 874.60$

$Ra = 300$

$n = 24$ años

$i = ?$

$$S = Ra\ S_{\overline{n}|i}$$

$$9\ 874.60 = 300\ S_{\overline{24}|i}$$

$$32.915333 = S_{\overline{24}|i}$$

Buscando en las tablas de $S_{\overline{n}|i}$, se observa que los valores que corresponden a 32.915333 son:

$$S_{\overline{24}|0.025} = 32.349040$$

$$S_{\overline{24}|i} = 32.915333$$

$$S_{\overline{24}|0.0275} = 33.368220$$

Donde i se encuentra en el intervalo $0.025 < i < 0.0275$

Interpolando entre dos tasas y tomando:

i_1 = tasa menor i_2 = tasa mayor

A_1 = valor correspondiente a la tasa menor

A_2 = valor correspondiente a la tasa mayor

A = valor obtenido de la tasa deseada

Entonces:

$$i = i_1 + \frac{A - A_1}{A_2 - A_1}(i_2 - i_1)$$

$$i = 0.025 + \frac{32.915333 - 32.349040}{33.368220 - 32.349040}(0.0275 - 0.025)$$

$$i = 0.026416$$

$$i = 2.64 \%$$

3 Ejemplo

Una institución otorga préstamos de \$ 200 pagaderos con 12 mensualidades de - \$ 20.15 cada una. Encontrar la tasa convertible mensualmente que se carga.

Solución:

$A = 200$

$R = 20.15$

$n = 12$

$i = \frac{X}{12}$

$$A = R \, a_{\overline{n}|i}$$

$$200 = 20.15 \, a_{\overline{12}|i}$$

$$9.925558 = a_{\overline{12}|i}$$

Interpolando entre las dos tasas y tomando:

$$i_1 = 0.03 \qquad i_2 = 0.035$$

$$A = 9.925558 \qquad A_2 = 9.663334 \qquad A_1 = 9.954003$$

$$i = 0.03 + \left[\frac{9.925558 - 9.954003}{9.663334 - 9.954003} \right] (0.035 - 0.03)$$

$$i = 0.029511$$

$$i^{(12)} = (0.029511)(12)$$

$$i^{(12)} = 0.354132$$

$$i^{(12)} = 35.41 \%$$

PROBLEMAS RESUELTOS (ANUALIDADES)

1 Ejemplo

Cierta persona depositó cada 6 meses \$ 1 000 en una cuenta de ahorros, la cual le producía intereses al 8 % convertible semestralmente. El primer depósito se hizo cuando el hijo tenía 6 meses de edad y el último cuando cumplió 21 años. El dinero permaneció en la cuenta y fué entregado al hijo cuando cumplió 25 - años. Determinar la cantidad que recibió.

Solución:

$R = 1\ 000$

$i = 0.04$

$n_1 = 42$ semestres

$S = ?$

$n_2 = 8$ semestres

$X = ?$

El monto de la anualidad justamente después del último depósito es:

$$S = 1\ 000\ S_{\overline{42}|0.04}$$

$$S = \$\ 104\ 819.60$$

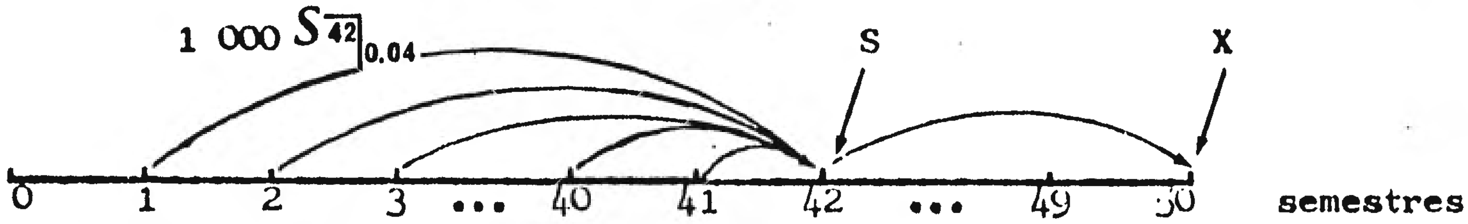
y, X el monto acumulado de S después de 8 períodos de interés es:

$$X = 104\ 819.59\ (1.04)^8$$

$$X = 104\ 819.59\ (1.368569)$$

$$X = \$\ 143\ 452.85$$

Visto en una línea de tiempo:



Solución alterna: Una forma simple de cálculo se obtiene con el siguiente razonamiento. Imagínese que se hicieron 8 pagos adicionales (50 en total). En este caso X es el monto de 50 pagos menos el monto de los 8 pagos que en realidad no se hicieron, por tanto:

$$X = 1\,000\ s_{\overline{50}|0.04} - 1\,000\ s_{\overline{8}|0.04}$$

$$X = 152\,667.08 - 9\,214.22$$

$$X = \$\ 143\,452.84$$

2 Ejemplo

El Sr. W compró un terreno por $ 500 000 de cuota inicial, comprometiéndose a pagar $ 2 000 cada 3 meses durante los próximos 10 años. Se pactó un interés del 6 % convertible trimestralmente.

a) Encontrar el valor de contado del terreno.

b) Si el Sr. W omitiera los primeros 11 pagos. Encontrar la cantidad que debe pagar en el vencimiento del 12o. pago para ponerse al corriente.

c) Después de haber hecho 7 pagos. El Sr. W desea liquidar el saldo existente mediante un pago único en el vencimiento del 8o. pago. Determinar la cantidad que debe pagar además del pago regular vencido.

d) Si el Sr. W omitiera los 9 primeros pagos. Encontrar lo que debe pagar cuando venza el 10o. pago para liquidar totalmente la deuda.

Solución:

a) Sea C el valor de contado del terreno, entonces:

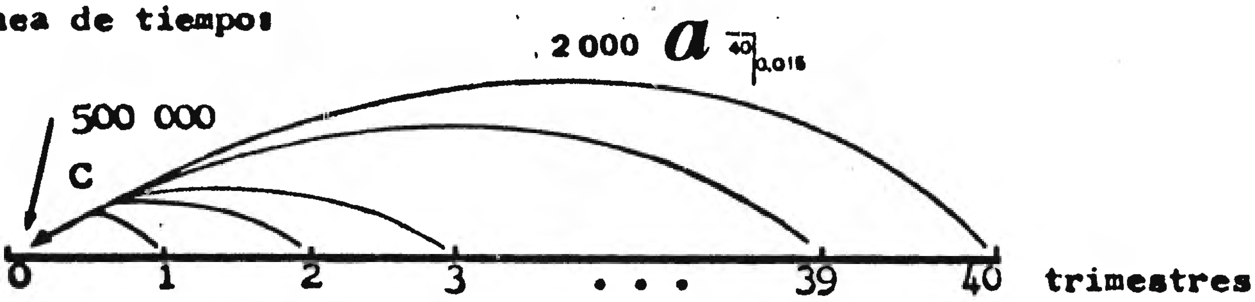
$$C = 500\,000 + 2\,000\ a_{\overline{40}|0.015}$$

$$C = 500\,000 + 2\,000\ (29.915854)$$

$$C = 500\,000 + 59\,381.70$$

$$C = \$\ 559\,831.70$$

Visto en una línea de tiempo:



b) Sea X el pago requerido.

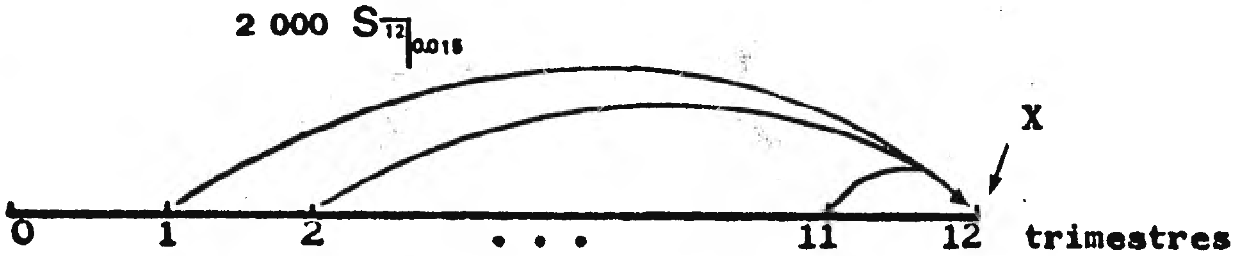
El Sr. W debe el monto acumulado de los 12 pagos en la fecha del 12o. pago, por tanto X es igual:

$$X = 2\,000\, s_{\overline{12}|0.015}$$

$$X = 2\,000\ (13.041210)$$

$$X = \$\ 2\,608.42$$

Visto en una línea de tiempo:



c) Sea Y el pago requerido.

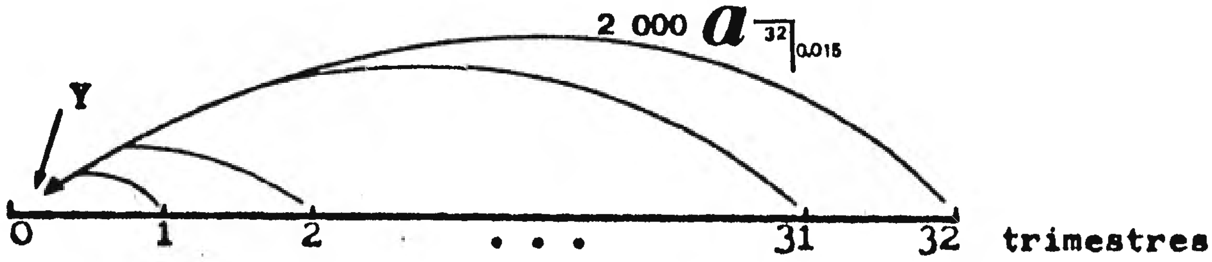
Después que el 8o. pago regular ha sido efectuado, quedan 40 − 8 = 32 pagos por hacerse. Por lo tanto,

$$Y = 2\,000\, a_{\overline{32}|0.015}$$

$$Y = 2\,000\ (25.267138)$$

$$Y = \$\ 50\,534.27$$

Visto en una línea de tiempo:



d) Sea Z el pago requerido.

En la fecha indicada por Z en la línea de tiempo, el Sr. W pagará 9 pagos vencidos con un pago inmediato en el 10o. trimestre mas el valor presente de los $40 - 10 = 30$ pagos restantes. Por un lado el monto de los 9 pagos vencidos es de $2\ 000\ S_{\overline{10}|0.015}$ y el valor presente de los 30 pagos restantes es $2\ 000\ a_{\overline{30}|0.015}$, de donde:

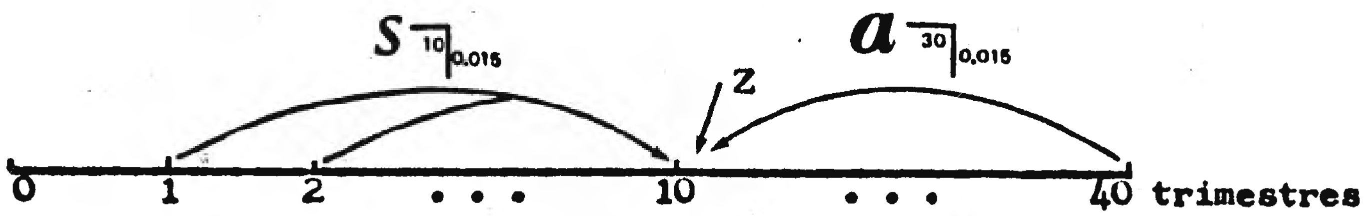
$$Z = 2\ 000\ S_{\overline{10}|0.015} + 2\ 000\ a_{\overline{30}|0.015}$$

$$Z = 2\ 000\ (10.702720) + 2\ 000\ (24.015837)$$

$$Z = 21\ 405.44 + 48\ 031.67$$

$$Z = \$\ 69\ 437.11$$

Visto en una línea de tiempo:



3 Ejemplo

Como beneficiaria de una póliza de \$ 100 000 de seguro, una viuda recibirá \$ 10 000 inmediatamente y posteriormente \$ 5 000 cada tres meses. Si la compañía de seguros paga intereses del 8 % convertible trimestralmente.

a) Determine el número de pagos completos de \$ 5 000 que recibirá.

b) Encontrar la suma adicional pagada con el último pago completo con la cual cesará el beneficio.

c) ¿Con qué suma pagada 3 meses después del último pago completo cesará el beneficio?

Solución:

a) Para encontrar el número de pagos completos de \$ 5 000 que la viuda recibirá, se plantea la ecuación de valor. Siendo $S = 100\ 000 - 10\ 000 = 90\ 000$.

$$90\ 000 = 5\ 000\ a_{\overline{n}|0.02}$$

$$18 = a_{\overline{n}|0.02} \quad \text{, buscando en tablas}$$

$$n = 22 \text{ trimestres}$$

b) Sea X la suma adicional pagada en el mismo período del último pago completo.

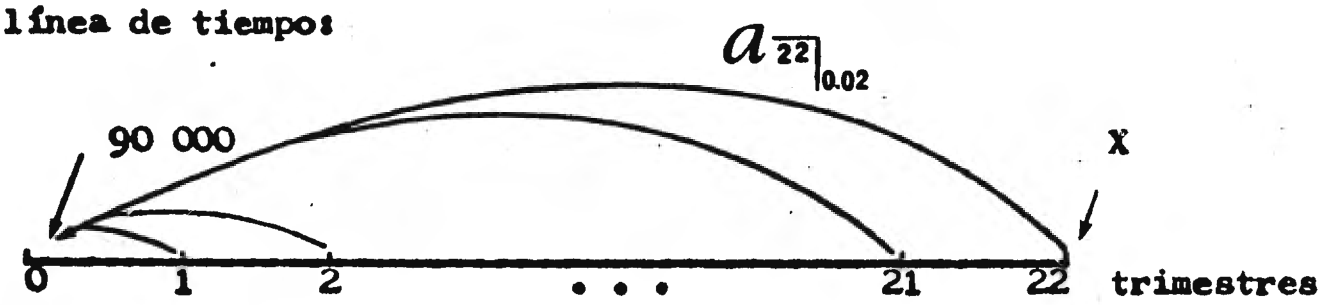
$$90\ 000 = 5\ 000\ a_{\overline{22}|0.02} + X\ (1.02)^{-22}$$

$$X = (90\ 000 - 88\ 290.23)\ (1.02)^{22}$$

$$X = (1\ 709.77)\ (1.545979)$$

$$X = \$\ 2\ 643.26$$

Visto en una línea de tiempo:



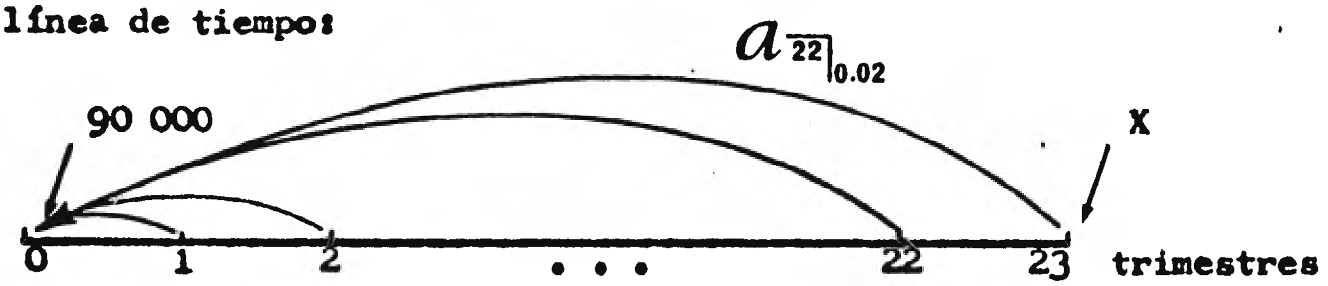
c) Sea X la suma pagada 3 meses después del último pago completo que cesará el beneficio.

$$90\ 000 = 5\ 000\ a_{\overline{22}|0.02} + X\ (1.02)^{-23}$$

$$X = 1\ 709.77\ (1.02)^{23}$$

$$X = \$\ 2\ 696.13$$

Visto en una línea de tiempo:



4 Ejemplo

Comenzando el 1o. de diciembre de 1984 y continuando por 5 años más, se necesitarán $ 25 000 anuales para redimir ciertos bonos escolares. Determinar el importe de cada uno de los depósitos anuales que deberá hacerse en un fondo que paga el 3 % efectivo, comenzando el 1o. de diciembre de 1974 y continuando

por 15 años más para redimir los bonos en su vencimiento.

Solución:

Sea X el depósito anual requerido. Los pagos para redimir los bonos constituyen una anualidad de 6 pagos de \$ 25 000 cada uno y los depósitos constituyen una anualidad de 16 pagos de X pesos cada uno. Igualando los montos de ambas anualidades, es decir, planteando una ecuación de valor con fecha focal el 1o. de diciembre de 1989, se tiene:

$$X \; S_{\overline{16}|0.03} = 25\,000 \; S_{\overline{6}|0.03}$$

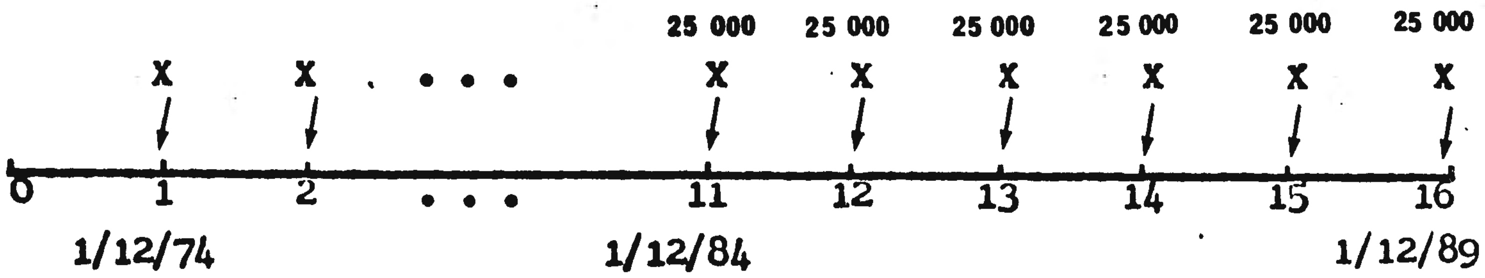
$$X = 25\,000 \; S_{\overline{6}|0.03} \left(\frac{1}{S_{\overline{16}|0.03}} \right)$$

$$X = 161\,710.24 \; (0.049108)$$

$$X = \frac{25\,000 \; (6.468409)}{20.156881}$$

$$X = \$ \; 8\,022.58$$

Visto en una línea de tiempo:



5 Ejemplo

El Sr. W está acumulando un fondo al 6 % efectivo, el cual le proporcionará un ingreso de \$ 3 000 anuales durante 15 años, haciéndose el primer pago al cumplir 65 años de edad. Se desea reducir el número de pagos a 10. Determinar la cantidad que recibirá anualmente.

Solución:

Sea X el nuevo pago anual. El conjunto de los pagos originales forma una anualidad cuyo valor presente es $3\,000\, a_{\overline{15}|0.06}$ y el nuevo conjunto de pagos forman una anualidad cuyo valor presente es: $X\, a_{\overline{10}|0.06}$, por tanto:

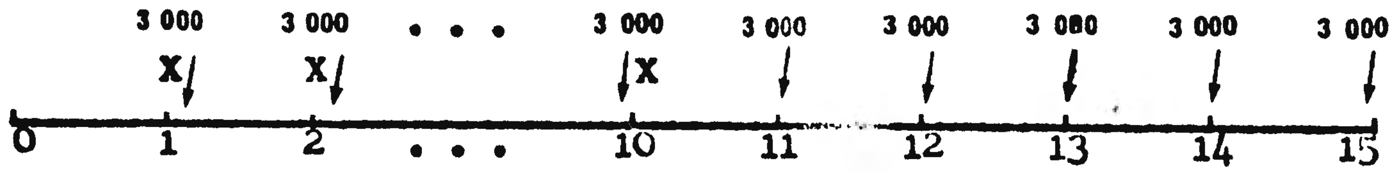
$$X\, a_{\overline{10}|0.06} = 3\,000\, a_{\overline{15}|0.06}$$

$$X = 3\,000\, a_{\overline{15}|0.06} \left[\frac{1}{a_{\overline{10}|0.06}} \right]$$

$$X = 29\,136.74 \left(\frac{1}{7.360086} \right)$$

$$X = \$\,3\,958.75$$

Visto en una línea de tiempo:



PROBLEMAS PROPUESTOS (ANUALIDADES)

1. Deducir

a) $$S_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

b) $$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

2. Demostrar:

a) $$(1+i)\, S_{\overline{n}|i} = S_{\overline{n+1}|i} - 1$$

b) $$\frac{1}{S_{\overline{n}|i}} + i = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

3. Demostrar:

a) $$S_{\overline{h-k}|i} = S_{\overline{h}|i} - (1+i)^h\, a_{\overline{k}|i} \qquad (h > k)$$

b) $$a_{\overline{h-k}|i} = a_{\overline{h}|i} - (1+i)^{-h}\, S_{\overline{k}|i} \qquad (h > k)$$

4. Demostrar:

a) $$(1+i)\, a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n-1}|i} + 1$$

b) $$\frac{1}{S_{\overline{n+m}|i}} = \frac{\dfrac{1}{S_{\overline{n}|i}}}{\dfrac{1}{S_{\overline{n}|i}} \cdot S_{\overline{m}|i} + (1+i)^m}$$

5. El día de hoy el Sr. M compra una anualidad de \$ 1 200 anuales durante 12 años en una compañía de seguros que utiliza el 8 % anual. Si el primer pago vence en un año a partir de este momento, determine el costo de la anualidad.

Resp. A = \$ 9 043.29

6. Determinar que alternativa es más conveniente, comprar un juego de comedor en \$ 20 000 de contado o pagar \$ 5 000 iniciales y \$ 1 500 al final de cada mes por los próximos 12 meses, suponiendo un interés del 9 % convertible mensualmente.

Resp. X = \$ 22 152.36, la primera opción es más conveniente.

7. La compañía de muebles metálicos Z tiene en oferta un mueble con \$ 20 000 de cuota inicial y \$ 500 durante 12 meses. Si la tasa de interés es del 8 % convertible mensualmente. Encontrar el valor de contado del mueble.

Resp. X = \$ 7 748.13

8. Se estima que cierto terreno producirá \$ 25 000 anuales por su explotación en los próximos 5 años y entonces la tierra podrá venderse en \$ 100 000. Determinar el valor actual suponiendo un interés de 7 % anual efectivo.

Resp. X = \$ 173 803.54

9. Para liquidar una cierta deuda con un interés del 12 % convertible mensualmente. El Sr. X acuerda hacer pagos de \$ 5 000 al final de cada mes por los próximos 24 meses y un pago final de \$ 9 000.50 un mes después. Encuentre el importe de la deuda.

Resp. X = \$ 113 235.23

10. Al comprar el Sr. Z un automóvil nuevo de \$ 250 000 le reciben su automóvil usado en \$ 150 000. Determinar el importe en efectivo si el saldo restante lo liquidará mediante el pago de \$ 1 250 al final de cada mes durante 22 meses cargando intereses al 6 % convertible mensualmente.

Resp. X = \$ 74 019.93

11. El Sr. Y está pagando \$ 3 250 al final de cada semestre por concepto de la prima de una póliza dotal, la cual pagará \$ 10 000 al término de 20 años. Determinar la cantidad que tendría si en su lugar depositara cada pago en una cuenta de ahorros que le rindiera el 8 % convertible semestralmente.

Resp. X = \$ 308 832.92

12. Cierto inversionista invierte \$ 4 250 al final de cada 6 meses en un fondo que paga el $4 \frac{1}{4}$ % convertible semestralmente. Determinar el importe del fondo:

a) Precisamente después del 13o. depósito.

b) Antes del 13o. depósito.

Resp. a) X = \$ 62 873.55 b) X = \$ 57 403.72

13. Con el objeto de reunir cierta cantidad que le será entregada a su hijo al cumplir 18 años, un padre deposita \$ 2 000 cada 6 meses en una cuenta de ahorro que paga el 4 % convertible semestralmente. Encontrar el monto de la entrega si el primer depósito se hizo el día del nacimiento del hijo y el último cuando tenía 17 años y medio.

Resp. X = \$ 108 068.50

14. El 1o. de noviembre de 1978, el Sr. Z depositó \$ 1 000 en una cuenta de ahorro que paga el 5 % convertible semestralmente y continuó haciendo depósitos similares cada 6 meses desde entonces. Después del 1o. de noviembre de 1979, el banco elevó el interés al 6 % convertible semestralmente. Determinar la cantidad que existe en la cuenta después del depósito del 1o. de mayo de 1982.

Resp. X = \$ 11 445.08

15. El Sr. Z acuerda liquidar una deuda mediante 11 pagos trimestrales de \$ 3 000 cada uno. Si omite los 4 primeros pagos, determinar el pago que tendrá que hacer en el vencimiento del siguiente para:

a) Quedar al corriente en sus pagos.

b) Saldar la deuda.

Tómese la tasa del 8 % convertible trimestralmente.

Resp. a) X = \$ 15 612.12 b) X = \$ 32 416.41

16. La Compañía Textil, S.A., debe acumular \$ 135 000 durante los próximos 5 años para reemplazar alguna maquinaria. Encontrar la cantidad que debe invertir al final de cada año en un fondo que paga el 5 % efectivo para lograr su propó-

sito.

Resp. $R = \$ 24\,431.59$

17. Encuentre el importe de cada uno de los depósitos semestrales que deberán hacerse en una cuenta de ahorro que paga el $6\frac{1}{2}\%$ convertible semestralmente durante 15 años para que el monto sea de \$ 35 000 precisamente después del último depósito.

Resp. $R_s = \$ 897.04$

18. Tres meses antes de ingresar a la Universidad un estudiante recibe la cantidad de \$ 100 000 los cuales son invertidos al 4 % convertible trimestralmente. Encontrar el importe de cada uno de los retiros trimestrales que podrá hacer durante 5 años iniciando el primero transcurridos tres meses.

Resp. $R_t = \$ 5\,541.53$

19. El Sr. L compra un auto usado en \$ 35 000, acuerda pagar \$ 2 250 de cuota inicial y la diferencia en 18 abonos mensuales, el primero con vencimiento en un mes. Si el concesionario carga el 6 % convertible mensualmente, encontrar el importe del abono mensual.

Resp. $R_m = \$ 1\,907.08$

20. Se obtiene un préstamo de \$ 32 800, acordando pagar capital e intereses al 9 % convertible semestralmente mediante pagos semestrales de \$ 2 250 cada uno haciendo el primero en 6 meses.

a) Encontrar el número de pagos que deberá hacer.

b) Determine el pago incompleto efectuado un período después del pago completo.

Resp. a) $n = 24$ b) $X = \$ 556.54$

21. El Sr. X compró una huerta con valor de \$ 35 000. Pagó \$ 13 000 iniciales y acordó pagar el saldo con intereses al 4 % efectivo mediante pagos anuales de \$ 3 000 tanto tiempo como fuera necesario y un pago final menor un año más tarde. Justamente después del tercer pago anual, los documentos firmados por el Sr. X se vendieron a un inversionista que esperaba ganar el $4\frac{1}{2}\%$. Determine el

precio de venta.

Resp. $X = \$ 10\ 565.40$

22. Se va a constituir un fondo de \$ 45 000 mediante depósitos de \$ 4 500 cada 3 meses. Si el fondo gana el 12 % convertible trimestralmente, encontrar el número de depósitos de \$ 4 500 que tendrán que hacerse y el depósito que será necesario hacer 3 meses más tarde.

Resp. $n = 8$, $X = \$ 1\ 877.42$

23. Tan pronto el Sr. A ahorre \$ 10 500, montará una tienda de ropa. Pudiendo ahorrar \$ 800 cada tres meses e invertirlos al 3 % convertible trimestralmente. Determinar el número de depósitos de \$ 800 que deben efectuarse y el importe del depósito tres meses después.

Resp. $n = 12$, $X = \$ 418.88$

24. Al 1o. de enero de 1978, el Sr. L tiene acumulado \$ 3 875 en un fondo que paga el 4 % convertible trimestralmente. Efectuando depósitos trimestrales iguales en el fondo el 1o. de abril de 1978 y el último el 1o. de octubre de 1988, tendrá en esta última fecha \$ 10 000 en el fondo. Determinar el depósito requerido.

Resp. $X = \$ 75.95$

25. El Sr. L desea acumular \$ 8 500 en un fondo que paga el 6 % convertible semestralmente, efectuando depósitos semestrales de \$ 350 cada uno.

a) Determinar el número de pagos completos que tendrá que hacer.

b) Determine el importe del depósito adicional, hecho en la fecha del último depósito que completará los \$ 8 500.

c) Determine el depósito, hecho 6 meses después del último depósito completo.

Resp. a) $n = 18$, b) $X = \$ 304.94$ c) $X = \$ 59.09$

26. El 1o. de enero de 1979, el Sr. W obtuvo un préstamo de \$ 50 000 del banco ABC, el cual carga el 6 % de interés convertible trimestralmente. Acuerda pa -

gar su deuda mediante pagos trimestrales de \$ 4 000 cada uno, haciendo el primero el 1o. de abril de 1979.

a) Determinar cuando tendrá que hacer el último pago de \$ 4 000.

b) Encontrar el pago final que tendrá que hacer 3 meses después del último pago completo.

c) Determinar lo que le debe al banco ABC precisamente después de efectuar el 9o. pago.

Resp. a) 1o. de abril de 1982. b) X = \$ 3 786.26 c) X = \$ 18 932.17

27. Con el objeto de liquidar una deuda de \$ 25 000 con intereses del 9 % convertible semestralmente, la Sra. L acuerda hacer una serie de pagos de X pesos cada uno, el primero con vencimiento al término de 6 meses y el último con vencimiento en 4 años y un año después un pago de \$ 1 500. Determinar el valor de X.

Resp. X = \$ 3 643.80

28. Al cumplir 35 años el Sr. Z depositó \$ 1 200 en un fondo que paga el $5\frac{1}{2}$ % y continuó efectuando depósitos similares cada año, el último al cumplir 50 años. A partir de los 51 años el Sr. Z desea efectuar retiros anuales de \$ 2 000.

a) Determinar el número de retiros que puede efectuar.

b) Encuentre el importe del retiro final hecho en un año después del último retiro completo que agotará el fondo.

Resp. a) n = 31 b) X = \$ 674.04

29. Para comprar una recámara con costo de \$ 6 500 puede obtenerse un préstamo del banco XXX y liquidarla con 13 pagos mensuales de \$ 600 cada uno.

También puede conseguirse el dinero en el banco YYY y pagarlo con una suma de \$ 7 500 al término de un año.

Comparar las tasas efectivas de interés cargadas y demostrar que el plan del -

banco YYY es más conveniente.

Resp. $i_1 = 33.41\ \%$, $i_2 = 15.30\ \%$

30. Una aspiradora es comprada con \$ 2 345 al contado ó con \$ 1 600 de cuota inicial y \$ 45 mensuales durante 18 meses.

a) Determinar la tasa nominal de interés que se está cargando.

b) Determinar la tasa efectiva de interés que se está cargando.

Resp. a) $i^{(12)} = 10.76\ \%$, b) $i = 11.31\ \%$

AMORTIZACIÓN

Uno de los procedimientos más usuales para liquidar gradualmente una deuda, es el de amortización.

Dicho procedimiento consiste en abonar cierta cantidad de dinero al capital y otra a intereses de tal manera que en un momento dado sea saldada totalmente la deuda.

Como su nombre lo indica proviene del latín mors, mortis -muerte- que significa extinguir una deuda mediante pagos generalmente iguales en los que se incluye tanto intereses como capital.

La parte de la deuda no cubierta en cada período se conoce como saldo insoluto o capital insoluto en dicho período. El capital insoluto al inicio del plazo es precisamente la deuda original.

El capital insoluto al final del plazo es cero en teoría, sin embargo, debido a la práctica de redondear al centavo más próximo, puede variar ligeramente de cero.

El capital insoluto justamente después de que se ha efectuado el primer pago es igual al valor presente de todos los pagos que aún falten por efectuarse.

Los intereses pagados justamente después de que se ha efectuado el primer pago, también conocidos como intereses contenidos en el pago, se obtienen multiplicando la deuda original por la tasa de interés estipulada con anterioridad.

El capital pagado después de que se ha efectuado el primer pago, también conocido como capital contenido en el pago, se obtiene de la diferencia de la deuda original menos los intereses pagados en dicho período.

Sin embargo, para efectos contables es necesario tener un registro que indique período a período, la parte del pago que se aplica al pago de intereses y la que se destina para abonar parte de capital; de esta forma podrá conocerse de -

inmediato la suma con la cual podrá ser liquidada dicha deuda.

Este registro recibe el nombre de Tabla de Amortización.

Para la elaboración de dicha tabla, se procede a encontrar la renta o pago periódico con el cual se va ir liquidando la deuda; después se elaborará la Tabla de Amortización.

ELABORACIÓN DE LA TABLA DE AMORTIZACIÓN

La deuda de un capital, durante n años a una tasa de interés i es:

$$a_{\overline{n}|i}$$

entonces la renta anual para liquidar este adeudo será la unidad, es decir:

donde:

$$a_{\overline{n}|i} = v_i + v_i^2 + v_i^3 + \dots + v_i^{n-1} + v_i^n$$

Un año después de recibido el préstamo $a_{\overline{n}|i}$, los intereses que hay que pagar en el período será:

$$i\, a_{\overline{n}|i} = 1 - v_i^n$$

y siendo la renta unitaria, la parte destinada al pago de capital será:

$$1 - i\, a_{\overline{n}|i} = 1 - (1 - v_i^n) = v_i^n$$

y una vez efectuado el pago unitario o renta unitaria, el capital que se adeuda será igual a la diferencia de la deuda original menos el capital que ha sido pagado, obteniéndose:

$$a_{\overline{n}|i} - V_i^n$$

El capital que se adeuda en cada período recibe el nombre de capital insoluto.

La Tabla de Amortización queda de la siguiente manera:

TABLA NO. 1

TABLA DE AMORTIZACIÓN

PAGO	CAPITAL INSOLUTO AL PRINCIPIO DEL PERÍODO	DISTRIBUCIÓN DEL PAGO	
		INTERESES CONTENIDOS EN EL PAGO	CAPITAL CONTENIDO EN EL PAGO
1	$a_{\overline{n}\|i}$	$i\,a_{\overline{n}\|i} = 1 - V_i^n$	V_i^n
2	$a_{\overline{n}\|i} - V_i^n = a_{\overline{n-1}\|i}$	$i\,a_{\overline{n-1}\|i} = 1 - V_i^{n-1}$	V_i^{n-1}
3	$a_{\overline{n-1}\|i} - V_i^{n-1} = a_{\overline{n-2}\|i}$	$i\,a_{\overline{n-2}\|i} = 1 - V_i^{n-2}$	V_i^{n-2}

1 Ejemplo

Una deuda de \$ 20 000 va a ser amortizada mediante 6 pagos anuales iguales conteniendo interés y capital. Si la tasa es del 8 % anual, determinar el pago anual y construir la tabla de amortización correspondiente.

Solución:

A = 20 000

n = 6

i = 0.08

R = ?

$$A = R\, a_{\overline{n}|i}$$

$$R = \frac{20\ 000}{a_{\overline{6}|0.08}}$$

$$R = \$\ 4\ 326.31$$

TABLA DE AMORTIZACIÓN

NÚMERO DE PAGO	PAGO O RENTA	CAPITAL INSOLUTO AL PRINCIPIO DEL PERÍODO	INTERÉS CONTENIDO EN EL PAGO	CAPITAL CONTENIDO EN EL PAGO
1	4 326.31	20 000.00	1 600.00	2 726.31
2	4 326.31	17 273.69	1 381.90	2 944.41
3	4 326.31	14 329.28	1 146.34	3 179.97
4	4 326.31	11 149.31	891.94	3 434.37
5	4 326.31	7 714.94	617.20	3 709.11
6	4 326.31	4 005.83	320.47	4 005.84
	25 957.86		5 957.85	20 000.01

OTROS PROCEDIMIENTOS DE CÁLCULO DE TABLAS DE AMORTIZACIÓN

En la Tabla no. 1 puede observarse que la columna correspondiente al capital contenido en el pago para el primer período se puede calcular en forma independiente de las demás columnas multiplicando el valor del pago o renta por $(1 + i)^{-n}$ y después en forma sucesiva por la razón $(1 + i)$ por formar una progresión geométrica y a partir de esta columna construir el resto de la tabla. Este procedimiento es especialmente útil si se cuenta con una calculadora de bolsillo.

2 Ejemplo

Construir la columna de capital contenido en el pago de una deuda de $ 8 354.32 que se amortiza mediante 5 pagos anuales conteniendo capital e intereses, si -

el interés es del 6 % anual.

Solución:

A = 8 354.32

n = 5

i = 0.06

R = ?

$$A = R\, a_{\overline{n}|i}$$

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n}|i}}$$

$$R = \frac{8\ 354.32}{a_{\overline{5}|0.06}}$$

$$R = \$\ 1\ 983.29$$

Multiplicando el valor del pago por $(1 + i)^{-n}$ donde n = 5 y después en forma sucesiva por $(1 + i)$, se tiene:

NÚMERO DE PAGO	CAPITAL CONTENIDO EN EL PAGO
1	1 482.03
2	1 570.95
3	1 665.21
4	1 765.12
5	1 871.03

Si se desea construir la columna de capital insoluto al principio del período es posible efectuarlo multiplicando el pago periódico por el valor de la anualidad correspondiente al número de pago.

3 Ejemplo

Con los datos del problema anterior construir la columna capital insoluto al principio del período.

Solución:

Multiplicando el pago o renta por los valores $a_{\overline{n}|i}$ **correspondientes al número de pago, se tiene:**

NÚMERO DE PAGO	CAPITAL INSOLUTO AL PRINCIPIO DEL PERÍODO
1	$a_{\overline{5}\|0.06} R$ = 8 354.34
2	$a_{\overline{4}\|0.06} R$ = 6 872.31
3	$a_{\overline{3}\|0.06} R$ = 5 301.36
4	$a_{\overline{2}\|0.06} R$ = 3 636.15
5	$a_{\overline{1}\|0.06} R$ = 1 871.03

Nótese que con cualquiera de las columnas en los ejemplos anteriores es posible completar la tabla de amortización.

4 Ejemplo

Con las dos columnas previamente calculadas complétese la tabla de amortización, indicando en una columna el capital total pagado.

TABLA DE AMORTIZACIÓN

NÚMERO DE PAGO	CAP. INSOLUTO AL PRINCIPIO DEL PERÍODO	PAGO O RENTA	CAP. CONTENIDO EN EL PAGO	INTERÉS CONT. EN EL PAGO	CAP. TOTAL PAGADO
1	8 354.34	1 983.29	1 482.03	501.26	1 482.03
2	6 872.31	1 983.29	1 570.95	412.34	3 052.98
3	5 301.36	1 983.29	1 665.21	318.08	4 718.19
4	3 636.15	1 983.29	1 765.12	218.17	6 483.31
5	1 871.03	1 983.29	1 871.03	112.26	8 354.34

DETERMINACIÓN DEL T-ÉSIMO RENGLÓN

Si se desea conocer un renglón o término de la tabla de amortización, no es necesario construir la tabla completa, para ello se construye la siguiente tabla.

TABLA DE AMORTIZACIÓN

NÚMERO DE PAGO	CAPITAL INSOLUTO AL PRINCIPIO DEL PERÍODO	DISTRIBUCIÓN DEL PAGO	
		INTERÉS CONTENIDO EN EL PAGO	CAPITAL CONTENIDO EN EL PAGO
1	$a_{\overline{n}\rceil i}$	$1 - V_i^{n}$	V_i^{n}
2	$a_{\overline{n-1}\rceil i}$	$1 - V_i^{n-1}$	V_i^{n-1}
3	$a_{\overline{n-2}\rceil i}$	$1 - V_i^{n-2}$	V_i^{n-2}
⋮	⋮	⋮	⋮
t	$a_{\overline{n-(t-1)}\rceil i}$	$1 - V_i^{n-(t-1)}$	$V_i^{n-(t-1)}$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$a_{\overline{1}\rceil i} = V_i$	$1 - V_i$	V_i

Para efectos de comprobación se verifica que la suma de la columna capital - contenido en el pago es igual a la deuda original $a_{\overline{n}\rceil i}$; es decir:

$$\sum_{t=1}^{n-1} V_i^{n-(t-1)} = a_{\overline{n}\rceil i}$$

Por otra parte, para calcular el capital total pagado después de efectuar el pago correspondiente en cada uno de los periodos se utiliza la expresión:

$$a_{\overline{n}|i} \;-\; \sum_{t=1}^{n} a_{\overline{n-t}|i}$$

La suma de los intereses contenidos en el pago será igual a la expresión $n - a_{\overline{n}|i}$ multiplicado por la renta unitaria, es decir:

$$\sum_{t=1}^{n-1}\left[1 - V_i^{\,n-(t-1)}\right] = n - a_{\overline{n}|i}$$

Por último, la suma de capitales insolutos al principio del período es igual a la expresión: $\dfrac{n - a_{\overline{n}|i}}{i}$; es decir:

$$\sum_{t=1}^{n-1} a_{\overline{n-(t-1)}|i} = \frac{n - a_{\overline{n}|i}}{i}$$

Tanto la tabla de amortización como las expresiones anteriores son válidas para el caso más general donde la renta es unitaria o simplemente basta multiplicar por la renta periódica correspondiente.

5 Ejemplo

Del ejemplo anterior calcular.

a) Capital Insoluto al principio del tercer pago.

$$R\, a_{\overline{n-t+1}|i} = 1\,983.29\; a_{\overline{5-3+1}|0.06}$$

$$R\, a_{\overline{3}|0.06} = \$\,5\,301.36$$

b) Capital Contenido en el quinto pago.

$$R \quad V_i^{n-t+1} = 1\,983.29 \quad V_{0.06}^{5-5+1}$$

$$R \quad V_i = \$\ 1\,871.03$$

c) Total de Capital pagado después de efectuar el cuarto pago.

$$R\left[a_{\overline{n}|i} - a_{\overline{n-t}|i}\right] = 1\,983.29\left[a_{\overline{5}|0.06} - a_{\overline{1}|0.06}\right]$$

$$R\left[a_{\overline{5}|0.06} - a_{\overline{1}|0.06}\right] = \$\ 6\,483.31$$

OTROS TIPOS DE TABLAS DE AMORTIZACIÓN

Se ha analizado el caso de cubrir una deuda mediante pagos completos iguales, sin embargo, en ocaciones además de cubrir los pagos completos se debe efectuar un pago irregular para amortizar completamente la deuda.

Generalmente el pago irregular se efectúa un período después de cubrir los pagos completos en lugar de efectuarlo junto con el último pago completo con el fin de obtener mayor interés.

1 Ejemplo

Cierta deuda de \$ 5 000 devengando intereses al 5 % convertible semestralmente debe ser pagada con un renta anual de \$ 1 600 pagaderos semestralmente, más un pago parcial final (si es necesario). Construir la tabla de amortización correspondiente.

Solución:

$$A = 5\,000$$

$$R_s = \frac{1\,600}{2}$$

$i' = 0.025$

$n = ?$

$$A = \frac{Ra}{p} \, a_{\overline{mn}|i'}$$

$$5\,000 = 800 \, a_{\overline{2n}|0.025}$$

$$a_{\overline{2n}|0.025} = 6.25$$

En tablas el valor de $a_{\overline{2n}|0.025} = 6.25$ **correspondiente al valor que se encuentra entre el período 6 y el período 7, es decir:** $6 < 2n < 7$.

Por lo tanto, la ecuación de valor para encontrar el pago irregular es:

$$5\,000 = 800 \, a_{\overline{6}|0.025} + X \, V^{7}_{0.025}$$

$$X = \frac{5\,000 - 800 \, a_{\overline{6}|0.025}}{V^{7}_{0.025}}$$

$$X = \frac{593.50}{0.841265}$$

$$X = \$\,705.48$$

En consecuencia se efectúan 6 pagos semestrales completos de $ 800 cada uno y un pago incompleto de $ 705.48 .

TABLA DE AMORTIZACIÓN

NÚMERO DE PAGO	CAP. INSOLUTO AL PRINCIPIO DEL PERÍODO	CAP. CONTENIDO EN EL PAGO	INTERÉS CONT. EN EL PAGO	CAP. TOTAL PAGADO
1	5 000.00	675.00	125.00	675.00
2	4 325.00	691.87	108.13	1 366.87
3	3 633.13	709.17	90.83	2 076.04
4	2 923.96	726.90	73.10	2 802.94
5	2 197.06	745.07	54.93	3 548.01
6	1 451.99	763.70	36.30	4 311.71
7	688.29	688.27	17.21	4 999.98
TOTALES	20 219.43	505.49	4 999.98	

PROBLEMAS PROPUESTOS (AMORTIZACIÓN)

1. Demostrar que la suma de intereses contenidos en el pago es igual a:

$$n - a_{\overline{n}|i}$$

2. Demostrar que la suma de capitales insolutos es igual a:

$$\frac{n - a_{\overline{n}|i}}{i}$$

3. Elaborar una tabla de amortización de una deuda de \$ 1 200 pagaderos en 4 años con pagos semestrales y con una tasa de interés del 8 % convertible semestralmente.

Resp. R_s = \$ 178.23

4. Por una deuda de \$ 48 000 se hacen pagos anuales para su amortización en 10 años a una tasa del 8 %. Sin elaborar la tabla calcular:

a) Capital Contenido en el 8o. pago.

b) Interés Contenido en el 9o. pago.

c) Capital Total pagado después de que se han hecho 5 pagos.

Resp. a) Capital Contenido en el 8o. pago = \$ 5 678.62

b) Interés Contenido en el 9o. pago = \$ 1 474.80

c) Capital Total pagado después de los 5 pagos = \$ 19 438.51

5. Se amortiza una deuda de \$ 829 324 por medio de pagos mensuales iguales durante 15 años a una tasa de interés del 6 % convertible mensualmente. Determinar el 85o. renglón de la tabla, sin elaborar completamente la tabla.

Resp. a) Capital Insoluto = \$ 532 537.92

b) Interés Contenido en el pago = \$ 2 662.69

c) Capital Contenido en el pago = \$ 4 335.62

6. Un préstamo de \$ 22 000, se amortiza en un plazo de 5 años, mediante pagos semestrales, el primero de ellos un año después de recibir el préstamo. Si el interés es del 8 % convertible semestralmente elaborar la tabla de amortización.

Resp. R_s = \$ 2 820.89

7. Una deuda de \$ 15 000 devenga un interés del 6 % y va a ser amortizada mediante pagos iguales de \$ 2 000 al final de cada año durante 10 años. Determinar cuantos pagos completos se deben efectuar y que pago incompleto deberá pagarse un año después del último pago completo. Construir la tabla de inversión correspondiente.

Resp. n = 10, X = \$ 531.19

TABLA DE AMORTIZACIÓN

NÚMERO DE PAGO	CAPITAL INSOLUTO AL PRINCIPIO DEL PERÍODO	INTERÉS CONTENIDO EN EL PAGO	CAPITAL CONTENIDO EN EL PAGO
1	15 000.00	900.00	1 100.00
2	13 900.00	834.00	1 166.00
3	12 734.00	764.04	1 235.96
4	11 498.04	689.88	1 310.12
5	10 187.92	611.27	1 388.72
6	8 799.19	527.95	1 472.05
7	7 327.14	439.63	1 560.37
8	5 766.78	346.01	1 653.99
9	4 112.79	246.77	1 753.23
10	2 359.56	141.57	1 858.43
11	501.13	30.07	501.12

FONDOS DE AMORTIZACIÓN

El método de fondo de amortización se utiliza frecuentemente para liquidar una deuda. El acreedor recibe el interés pactado en su vencimiento y el reembolso de la deuda al término del plazo preestablecido.

Con el objeto de poder cubrir completamente la deuda o parte de ella, el deudor crea un fondo por separado en el cual efectúa depósitos periódicos iguales durante un cierto tiempo, de tal manera que justamente después del último depósito, el importe en el fondo es el valor original de la deuda.

Es de suponerse que el fondo gana intereses, pero no necesariamente a la misma tasa que carga el acreedor. Siendo i la tasa ganada por el fondo de amortización y r la tasa cargada por el acreedor, S el importe de la deuda original, R los depósitos anuales efectuados y n el número de depósitos efectuados.

1 Ejemplo

Cierta deuda de $ 10 000 con vencimiento en 6 años sin intereses, va a ser liquidada mediante el sistema de fondo de amortización. Si se van a efectuar 6 depósitos iguales, el primero con vencimiento en un año, en un fondo donde gana el 4 %, determinar el importe de cada depósito.

Solución:

$S = 10\,000$

$i = 0.04$

$n = 6$

$R = ?$

$$10\,000 = R\, S_{\overline{6}|0.04}$$

$$R = \frac{10\,000}{S_{\overline{6}|0.04}}$$

$$R = \$\ 1\,507.62$$

2 Ejemplo

Cierta deuda de \$ 8 000 que devenga intereses al 6 % convertible semestral - mente va a ser liquidada mediante el método de fondo de amortización. Si se desea hacer 9 depósitos semestrales iguales, siendo el primero con venci - miento en 6 meses, en un fondo que gana el 3 % convertible semestralmente:

a) determinar el importe de cada depósito,

b) costo semestral de la deuda,

c) construir la tabla del fondo de amortización

Solución:

$S = 8\,000$

$n = 9$

$i = 0.015$

$r = 0.03$

$R = ?$

a)

$$8\,000 = R\, S_{\overline{9}|0.015}$$

$$R = \frac{8\,000}{S_{\overline{9}|0.015}}$$

$$R = \$\ 836.88$$

b) El cargo semestral por el interés cargado por el acreedor; $r = 0.03$

$$8\,000\ (0.03) = \$\ 240$$

En consecuencia el costo semestral de la deuda es el cargo por intereses más el depósito periódico en el fondo de amortización.

$$C = 240 + 836.88$$

$$C = \$\ 1\,076.88$$

ELABORACIÓN DE LA TABLA DE AMORTIZACIÓN

El crecimiento del fondo de amortización del ejemplo 2 se construye de la siguiente manera:

1er. Renglón:

Al final del primer período se efectúa un depósito b) de 836.88 y este constituye tanto el incremento al fondo c) como el importe del fondo d) al final del primer período.

2do. Renglón:

Al final del segundo período, el aumento por intereses a) es 836.88 (0.015) = 12.55, el depósito b) siempre será de 836.88, el incremento en el fondo c) es de 12.55 + 836.88 = 849.43 y finalmente el importe del fondo d) es 836.88 + 849.43 = 1 686.31 .

3er. Renglón:

Al final del tercer período, el aumento por interés a) es 1 686.31 (0.015) = 25.29, el depósito b) es 836.88, el incremento en el fondo c) es 25.29 + 836.88 = 862.17 y el importe del fondo d) es 1 686.31 + 862.17 = 2 548.48, y así sucesivamente.

La diferencia de \$ 0.01 en la última cifra de d) es debida al redondeo de cada cifra a la centena.

c)

TABLA DEL FONDO DE AMORTIZACIÓN

PERÍODO	AUMENTO DE INTERESES a)	DEPÓSITO b)	INCREMENTO AL FONDO c)	IMPORTE DEL FONDO AL FINAL DEL PERÍODO d)
1	0	836.88	836.88	836.88
2	12.55	836.88	849.43	1 686.31
3	25.29	836.88	862.17	2 548.48
4	38.23	836.88	875.11	3 423.59
5	51.35	836.88	888.23	4 311.82
6	64.68	836.88	901.56	5 213.38
7	78.20	836.88	915.08	6 128.46
8	91.93	836.88	928.81	7 057.27
9	105.86	836.88	942.74	8 000.01
TOTALES	468.09	7 531.92	8 000.01	

3 Ejemplo

Del ejemplo anterior:

a) determinar el importe del fondo justamente después del 6o. depósito,

b) la cantidad del incremento al fondo por el 6o. depósito es debido a intereses.

Solución:

a) El importe del fondo justamente después del 6o. depósito es:

$$836.88 \; S_{\overline{6}|0.015} = \$\ 5\,213.38$$

b) El aumento por intereses al efectuarse el 7o. depósito es el interés producido en un período por el monto en el fondo justamente después del 6o. depósito. En consecuencia, el incremento es:

$$5\,213.38 \; (0.015) = \$\ 78.20$$

PROBLEMAS PROPUESTOS (FONDOS DE AMORTIZACIÓN)

1. Determinar el importe del depósito anual que es necesario hacer en un fondo de amortización que paga el 8.5 % efectivo, para liquidar una deuda de $ 35 000 con vencimiento en 15 años.

Resp. R = $ 1 239.71

2. La empresa Z obtiene un préstamo de $ 150 000 a 10 años, acordando pagar intereses del 4 % al final de cada año y al mismo tiempo establecer un fondo de amortización para el pago del capital. Determinar:

a) el costo anual de la deuda si el fondo paga el 2.5 % ,

b) la cantidad que habrá en el fondo justamente después del 7o. depósito,

c) el incremento al fondo en la fecha del 5o. depósito que es debido a intereses y

d) construir la tabla del fondo de amortización.

Resp. a) C = $ 23 138.81 b) S = $ 129 353.95 c) S = $ 1 779.23

3. Una deuda de $ 85 000 va a ser liquidada al término de 18 años, teniéndose que pagar intereses del 4 % convertible trimestralmente, cada 3 meses. Puede establecerse un fondo de amortización mediante depósitos trimestrales, el primero de los cuales vencerá en tres meses, ganando el fondo intereses del 3 % convertible trimestralmente. Determinar:

a) el costo trimestral de la deuda y

b) la tasa nominal convertible trimestralmente a la cual podrá ser amortizada la deuda con el mismo gasto trimestral.

Resp. a) C = $ 1 744.67 b) $i^{(4)}$ = 4.63 %

4. Si un fondo de amortización está siendo acumulado al 8 % mediante depósitos de $ 800 anuales teniendo el fondo $ 20 844.96 justamente después del k-ésimo depósito.

a) ¿ Cuánto tendrá justamente después del (k - 1) depósito ?

b) ¿ Cuánto tendrá justamente después del (k + 1) depósito ?

Resp. a) S = \$ 21 721.69 b) S = \$ 17 196.24

5. Una deuda está siendo amortizada al 3 % mediante pagos de \$ 500 anuales. Si el capital insoluto es \$ 8 232.37 justamente después del k-ésimo pago.

a) ¿ Cuánto habrá justamente después del (k - 1) pago ?

b) ¿ Cuánto habrá justamente después del (k + 1) pago ?

Resp. a) A = \$ 8 467.77 b) A = \$ 7 968.46

6. La compañía A obtiene un préstamo de \$ 100 000 por 4 años al 8 % convertible semestralmente. Con el objeto de pagar el capital al término de 4 años, se establece en una cuenta de ahorros que paga el 6 % convertible semestralmente un fondo de amortización mediante depósitos semestrales iguales, el primero con vencimiento en 6 meses. Determinar:

a) el costo semestral de la deuda,

b) la tasa nominal convertible semestralmente que la compañía A está pagando para liquidar la deuda, y

c) construya la tabla de fondo de amortización.

Resp. a) C = \$ 15 245.64 b) $i^{(2)}$ = 17.01 %

7. El Sr. X desea un préstamo de \$ 30 000 a 7 años. El banco ABC presta el dinero al 4.5 % y la deuda se amortiza en anualidades. El banco XYZ presta el dinero al 4 %. Si el interés se paga anualmente y el capital al término de 7 años; estableciendo un fondo de amortización pagando el 2 % mediante depósitos iguales, el primero con vencimiento en 1 año

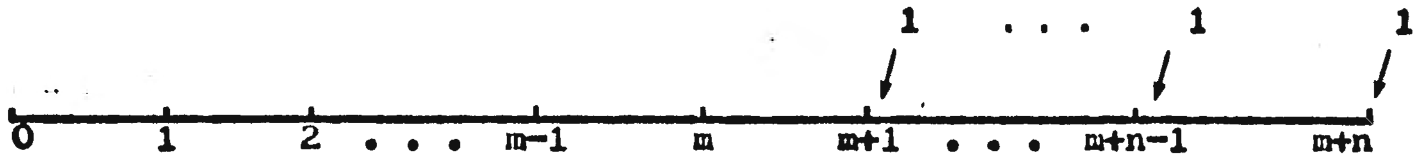
¿ Qué plan es más barato y qué cantidad se ahorraría anualmente aceptándolo ?

Resp. El plan del banco ABC con \$ 144.31 más baráto.

CASOS ESPECIALES DE ANUALIDADES

ANUALIDADES DIFERIDAS

Una anualidad diferida es una anualidad-ordinaria en la que se establece que-el primer pago se fectúe transcurrido un cierto número de años o períodos. Supóngase que se tiene una anualidad unitaria pagadera después de m años o - períodos diferidos. Es decir, que el primer pago se hará en el año $m + 1$ y, el último en el año $m + n$ como se ilustra en la siguiente gráfica.



La notación de una anualidad unitaria diferida m periodos a una tasa de interés i con punto de valuación el origen será:

$$m/a_{\overline{n}|i} = V_i^{m+1} + V_i^{m+2} + \dots + V_i^{m+n-1} + V_i^{m+n}$$

Factorizando el término V^m del segundo miembro de la ecuación anterior, se - tiene:

$$m/a_{\overline{n}|i} = V_i^{m} (V_i + V_i^2 + \dots + V_i^{n-1} + V_i^{n})$$

y finalmente:

$$m/a_{\overline{n}|i} = V_i^{m} \, a_{\overline{n}|i}$$

En consecuencia el valor presente de una anualidad diferida m períodos con - una renta anual Ra a una tasa de interés i, será:

$$A = Ra \; m/a_{\overline{n}|i}$$

Otra relación puede obtenerse si se considera que se pagará una renta unita - ria durante todo el período $m + n$ y después se restará la anualidad corres - pondiente al período en que no se pagó, o sea:

$$ {}_{m/}a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{m+n}|i} - a_{\overline{m}|i} $$

1 Ejemplo

Cierta persona desea un préstamo por el cual puede pagar $ 22 100 anuales durante 5 años, efectuando el primer pago al final del tercer año. Si el rendimiento es del 8 % anual. Determinar la cantidad de dinero que se le puede prestar.

Solución:

$Ra = 22\ 100$

$i = 0.08$

$n = 5$

$m = 2$

$A = ?$

1er. procedimiento:

$$ A = Ra\ {}_{m/}a_{\overline{n}|i} $$

$$ A = Ra\ V_i^n\ a_{\overline{n}|i} $$

$$ A = 22\ 100\ V_{0.08}^2\ a_{\overline{5}|0.08} $$

$$ A = 22\ 100\ (0.857339)\ (3.992710) $$

$$ A = \$\ 75\ 650.62 $$

2do. procedimiento:

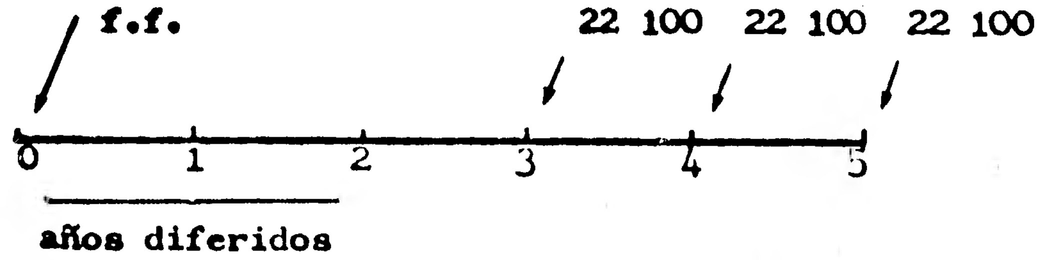
$$ A = Ra\left[a_{\overline{m+n}|i} - a_{\overline{m}|i}\right] $$

$$ A = 22\ 100\left[a_{\overline{7}|0.08} - a_{\overline{2}|0.08}\right] $$

$$ A = 22\ 100\ (5.206370 - 1.783265) $$

$$ A = \$\ 75\ 650.62 $$

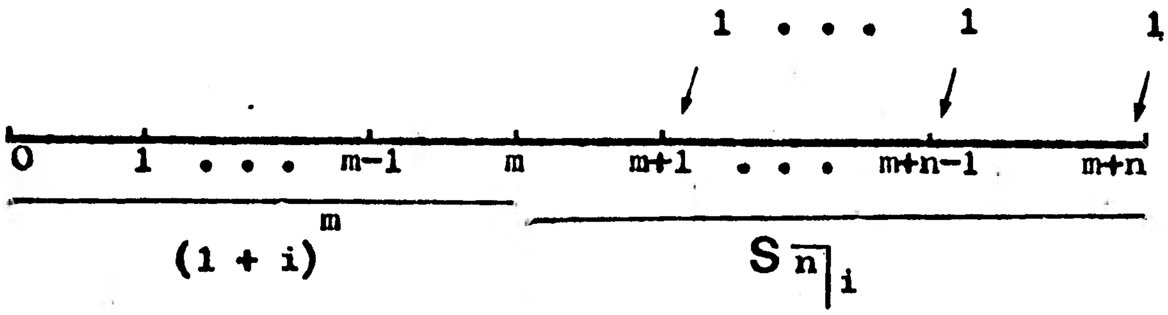
Gráficamente se puede observar:



El monto de una anualidad diferida m periodos con una renta anual Ra bajo una tasa de interés i es:

$$S = Ra \ m/ \ S_{\overline{n}|i} \ (1 + i)^{m}$$

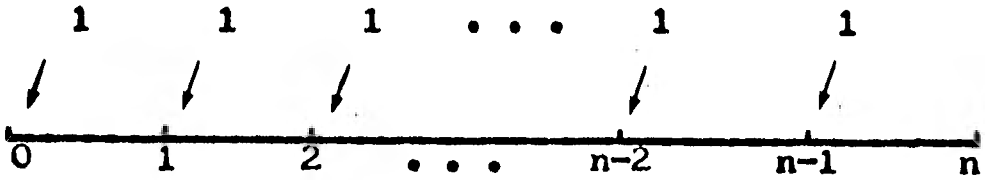
Gráficamente se observa:



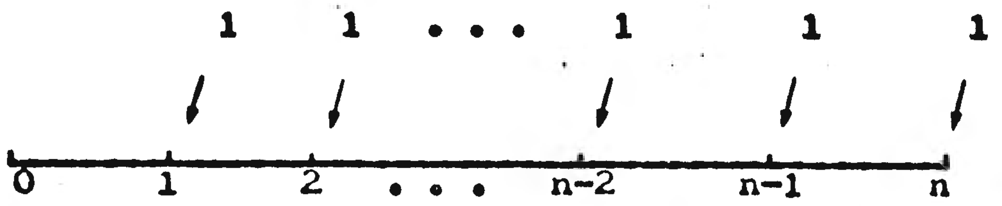
Se han analizado hasta este momento anualidades ordinarias en las cuales se efectúa el primer pago al finalizar el primer período. Sin embargo, existen otro tipo de anualidades en las cuales el primer pago se efectúa al principio del período, dichas anualidades reciben el nombre de anualidades anticipadas.

Como ejemplo de anualidades anticipadas son las primas de seguros, rentas de inmuebles o casos en que los intereses se pagan por adelantado.

Gráficamente se puede observar el caso de una anualidad unitaria anticipada pagadera anualmente durante n años comparada con una anualidad unitaria ordinaria pagadera anualmente durante n años.



Anualidad Unitaria Anticipada



Anualidad Unitaria Ordinaria

VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA

El símbolo utilizado para designar el valor presente de una anualidad unitaria - anticipada durante n años a una tasa de interés i es $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$, y siendo el punto de valuación el origen, su valor será:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + V_i + V_i^2 + \ldots + V_i^{n-2} + V_i^{n-1}$$

El valor presente de una anualidad unitaria ordinaria durante n años como se vió anteriormente es:

$$a_{\overline{n}|i} = V_i + V_i^2 + \ldots + V_i^{n-1} + V_i^n$$

Existe una relación entre ambas anualidades. Nótese que una anualidad unitaria - ordinaria se obtiene multiplicando una anualidad unitaria anticipada por el factor V_i , en consecuencia:

$$V_i \ \ddot{a}_{\overline{n}|i} = V_i \left[1 + V_i + V_i^2 + \ldots + V_i^{n-2} + V_i^{n-1} \right]$$

$$V_i \ \ddot{a}_{\overline{n}|i} = V_i + V_i^2 + \ldots + V_i^{n-1} + V_i^n$$

$$V_i \ \ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}$$

despejando $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ de la ecuación anterior:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1 + i) \ a_{\overline{n}|i}$$

También se puede observar lo siguiente:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + \underbrace{v_i + v_i^2 + \ldots + v_i^{n-2} + v_i^{n-1}}_{a_{\overline{n-1}|i}}$$

Donde $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ **es igual a la unidad más una anualidad unitaria ordinaria de n-1 términos, es decir:**

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + a_{\overline{n-1}|i}$$

Por lo tanto, el valor presente de una anualidad anticipada considerando una renta anual Ra durante n años a una tasa de interés i es:

$$A = Ra\ \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

1 Ejemplo

Determinar el valor presente de 5 pagos anuales de \$ 6 000, el primero de ellos se efectúa en este momento y la tasa de interés es del 9 % de interés anual efectivo.

Solución:

$Ra = 6\ 000$

$n = 5$

$i = 0.09$

$A = ?$

1er. procedimiento:

$$A = Ra\ \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

$$A = Ra\left[(1+i)\ a_{\overline{n}|i}\right]$$

$$A = 6\ 000\left[(1+0.09)\ a_{\overline{5}|0.09}\right]$$

$$A = 6\ 000\ (1.09)\ (3.889651)$$

$$A = 6\ 000\ (4.239720)$$

$$A = \$\ 25\ 438.32$$

2do. procedimiento:

$$A = Ra\left[1 + a_{\overline{n-1}|i}\right]$$

$$A = 6\ 000\left[1 + a_{\overline{4}|0.09}\right]$$

$$A = 6\ 000\ (1 + 3.219720)$$

$$A = \$\ 25\ 438.32$$

MONTO DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA

El monto de una anualidad ordinaria anticipada en el caso de una renta unitaria durante n años a una tasa de interés i se represente por el símbolo $\ddot{S}_{\overline{n}|i}$ siendo el punto de valuación el año n:

$$\ddot{S}_{\overline{n}|i} = (1+i) + (1+i)^{2} + \ldots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n}$$

Recordando la expresión de un monto de una anualidad unitaria ordinaria durante n años a una tasa de interés i es:

$$S_{\overline{n}|i} = 1 + (1 + i) + \ldots + (1 + i)^{n-1}$$

Nótese que existe una relación entre ambos montos si se multiplica el monto de una anualidad unitaria anticipada por el factor V_i obteniéndose el monto de una anualidad unitaria ordinaria, en consecuencia:

$$V_i\ \ddot{S}_{\overline{n}|i} = V_i\left[(1 + i) + (1 + i)^{2} + \ldots + (1 + i)^{n}\right]$$

$$V_i\ \ddot{S}_{\overline{n}|i} = 1 + (1 + i) + \ldots + (1 + i)^{n-1}$$

ó

$$S_{\overline{n}|i} = V_i\ \ddot{S}_{\overline{n}|i}$$

Despejando $\ddot{S}_{\overline{n}|i}$ de la ecuación anterior:

$$\ddot{S}_{\overline{n}|i} = (1 + i)\ S_{\overline{n}|i}$$

También se puede observar, si se agrega una unidad a ambos miembros de la ecuación del monto de una anualidad unitaria anticipada, se tiene:

$$\ddot{S}_{\overline{n}|i} + 1 = 1 + (1+i) + (1+i) + \dots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n}$$

$$\ddot{S}_{\overline{n}|i} + 1 = S_{\overline{n+1}|i}$$

$$\ddot{S}_{\overline{n}|i} = S_{\overline{n+1}|i} - 1$$

Por lo tanto, el monto de una anualidad anticipada considerando una renta anual Ra durante n años a una tasa de interés i es:

$$S = Ra \ \ddot{S}_{\overline{n}|i}$$

1 Ejemplo

Determinar el monto de 5 pagos anuales anticipados de \$ 8 000 si la tasa de interés es del 9 % anual efectivo.

Solución:

$Ra = 8\ 000$

$n = 5$

$i = 0.09$

$S = ?$

1er. procedimiento:

$$S = Ra \ \ddot{S}_{\overline{n}|i}$$

$$S = Ra \left[(1 + i) \ S_{\overline{n}|i}\right]$$

$$S = 8\ 000 \ (1 + 0.09) \ S_{\overline{5}|0.09}$$

$$S = 8\ 000\ (1.09)\ (5.984711)$$

$$S = \$\ 52\ 186.68$$

2do. procedimiento:

$$S = Ra \left[S_{\overline{n+1}|i} - 1\right]$$

$$S = 8\,000 \left[s_{\overline{6}|0.09} - 1 \right]$$

$$S = 8\,000 \; (6.523334)$$

$$S = \$\, 52\,186.68$$

PERPETUIDADES

Dentro de las transacciones financieras existen algunas en las cuales se efectúan pagos en forma indefinida creándose así un tipo de anualidades que reciben el nombre de perpetuidades cuya notación es a_{∞}.

Ejemplos de ellas son la renta de un inmueble, los dividendos de una acción o el filantrópico deseo de proporcionar una beca anual de cierta cantidad de dinero por tiempo indefinido o también en las fundaciones de tipo cultural como bibliotecas, museos, etc., que se establecen con una donación inicial que se supone será conservada indefinidamente.

Por supuesto es imposible obtener o incluso hablar del monto final de una perpetuidad. Sin embargo, para determinar el valor presente de una anualidad a una tasa de interés i, se considerará que n crece indefinidamente.

Siendo

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - V_i^n}{i}$$

y cuando n crece, V_i^n disminuye hasta alcanzar un valor nulo y bajo estas condiciones:

$$a_{\infty} = \frac{1}{i}$$

Por lo tanto, el valor presente de una perpetuidad con una renta anual Ra cuando n crece indefinidamente será:

$$A = \frac{Ra}{i}$$

1 Ejemplo

Determinar la cantidad de dinero que se puede pagar por una casa que proporciona una renta neta de $ 15 000 al año, si el interés que se desea obtener es del 9 % anual efectivo.

Solución:

Ra = 15 000

i = 0.09

A = ?

$$A = \frac{Ra}{i}$$

$$A = \frac{15\ 000}{0.09}$$

$$A = \$\ 166\ 666.67$$

En el caso de una renta que se otorga indefinidamente, en vez de retirar los pagos anuales según se van produciendo se considerará ahora conservarlos más de un período.

Sea n el número de periodos de interés transcurridos hasta que se retiran los pagos, permaneciendo el capital original intacto.

Entonces el monto de una renta indefinida para que produzca intereses durante n periodos al transcurrir éstos es:

$$a_{\infty}\ (1 + i)^{n}$$

Si a la expresión anterior se le resta el pago periódico, se obtendrá el valor original, es decir:

$$a_{\infty}\ (1 + i)^{n} - Ra = a_{\infty}$$

y despejando Ra de la ecuación anterior se tiene:

$$a_\infty (1+i)^n - a_\infty = Ra$$

$$a_\infty \left[(1+i)^n - 1\right] = Ra$$, despejando a_∞ se tiene:

$$a_\infty = \frac{Ra}{(1+i)^n - 1}$$

Multiplicando numerador y denominador por i y reagrupando se tiene:

$$a_\infty = \frac{Ra}{i}\left(\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right) \quad \dots (1)$$

y como

$$\frac{i}{(1+i)^n - 1} = \frac{1}{S_{\overline{n}|i}}$$

entonces sustituyendo en la ecuación (1):

$$a_\infty = \frac{Ra}{i} \times \frac{1}{S_{\overline{n}|i}}$$

2 Ejemplo

Una universitaria quiere proporcionar a su escuela una beca anual de $ 400 - indefinidamente, debiéndose conceder la primera dentro de un año. Si se puede invertir al 4 %. ¿Cuál será la cuantía de la donación?

Solución:

Ra = 400

i = 0.04

a_∞ = ?

$$a_\infty = \frac{Ra}{i}$$

$$a_\infty = \frac{400}{0.04}$$

$$a_\infty = \$\ 10\ 000.00$$

3 Ejemplo

Si en el ejemplo anterior el dinero se pudiera invertir al 4 % convertible semestralmente. ¿ Cuál sería entonces la cuantía de la donación?

Solución:

Ra = 400

i = 0.02

a_∞ = ?

$$a_\infty = \frac{Ra}{i}\left[\frac{1}{S_{\overline{n|}\,i}}\right]$$

$$a_\infty = \frac{400}{0.02}\left[\frac{1}{S_{\overline{2|}\,0.02}}\right]$$

$$a_\infty = \left(\frac{400}{0.02}\right)(0.495050)$$

$$a_\infty = \$\ 9\ 900.99$$

Es interesante observar de que forma, esta donación inicial va constituyendo los $ 400 anuales.

Donación anual	$ 9 900.99
2 % de interés durante 6 meses	198.02
Nuevo Capital	10 099.01
2 % de interés durante 6 meses después	201.98
Nuevo Capital	10 300.99
Deducción de la primera beca	400.00
	$ 9 900.99

Por lo tanto, la escuela podrá suministrar becas anuales de $ 400 por tiempo - indefinido si continúa invirtiendo al 4 % convertible semestralmente los - $ 9 900.99 iniciales de la donación.

ANUALIDADES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Se conoce como anualidad creciente o decreciente a una anualidad ordinaria en donde los pagos efectuados anualmente varían en forma de una progresión arit - mética o geométrica.

Una progresión aritmética es una sucesión de términos en donde cada término se obtiene sumando al término anterior una cantidad constante llamada razón y, - análogamente una progresión geométrica es una sucesión de términos en donde - cada término se obtiene multiplicando el término anterior por una cantidad - constante también llamada razón.

(Ver capítulo referente a progresiones).

Si la razón es mayor que cero se tratará de una anualidad creciente, si la - razón es menor que cero se tratará de una anualidad decreciente.

VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD CRECIENTE EN FORMA ARITMÉTICA

Considerando una anualidad creciente en forma aritmética con n pagos efectua - dos anualmente en donde P es el primer pago y Q es la razón mayor que cero, se tiene:

$$P\ ,\ P+Q\ ,\ P+2\,Q\ ,\ P+3\,Q\ ,\ \ldots\ ,\ P+(n-2)\,Q\ ,\ P+(n-1)\,Q$$

El valor presente de estos pagos valuados el día de hoy será:

$$X = P\,V_i + (P+Q)\,V_i^2 + (P+2\,Q)\,V_i^3 + \ldots$$

$$\ldots + \left\{P+(n-2)\,Q\right\}V_i^{n-1} + \left\{P+(n-1)\,Q\right\}V_i^{n} \qquad \ldots (1)$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por (1 + i), se tiene:

$$(1+i)\,X = P + (P+Q)\,V_i + (P+2Q)\,V_i^2 + \cdots$$
$$\cdots + \left[P + (n-2)\,Q\right] V_i^{n-2} + \left[P + (n-1)\,Q\right] V_i^{n-1} \quad \ldots (2)$$

Restando (2) menos (1)

$$(1+i)\,X - X = P - \cancel{P V_i} + \cancel{P V_i} + Q\,V_i - \cancel{P V_i^2} - Q\,V_i^2 +$$
$$+ \cancel{P V_i^2} + 2\,Q\,V_i^2 - \cancel{P V_i^3} - 2\,Q\,V_i^3 + \cdots$$
$$\cdots + \cancel{P V_i^{n-2}} + (n-2)\,Q\,V_i^{n-2} - \cancel{P V_i^{n-1}} - (n-2)\,Q\,V_i^{n-1} +$$
$$+ \cancel{P V_i^{n-1}} + (n-1)\,Q\,V_i^{n-1} - P\,V_i^{n} - (n-1)\,Q\,V_i^{n}$$

$$X\,(1+i-1) = P + Q\,V_i \underline{\underline{- Q\,V_i^2}} + \underline{\underline{2\,Q\,V_i^2}} - 2\,Q\,V_i^3 + \cdots$$
$$\cdots + (n-2)\,Q\,V_i^{n-2} - (n-2)\,Q\,V_i^{n-1} + (n-1)\,Q\,V_i^{n-1} - P\,V_i^{n}$$
$$\underbrace{-\,(n-1)\,Q\,V_i^{n}}$$

Sabiendo que: $-\,(n-1)\,Q\,V_i^{n} = -\,n\,Q\,V_i^{n} + Q\,V_i^{n}$ **y reagrupando:**

$$i\,X = P + \underline{\underline{Q\,V_i}} + \underline{\underline{Q\,V_i^2}} + \underline{\underline{Q\,V_i^3}} + \cdots$$
$$+ \underline{\underline{Q\,V_i^{n-1}}} + \underline{\underline{Q\,V_i^{n}}} - P\,V_i^{n} - n\,Q\,V_i^{n}$$

$$i\,X = P + Q\,(V_i + V_i^2 + V_i^3 + \cdots + V_i^{n-1} + V_i^{n}) -$$
$$-\,P\,V_i^{n} - n\,Q\,V_i^{n}$$

$$i\,X = P + Q\,a_{\overline{n}|i} - P\,V_i^{n} - n\,Q\,V_i^{n}$$

factorizando en términos de P, se tiene:

$$i\,X = P\left[1 - V_i^n\right] + Q\,a_{\overline{n}|i} - n\,Q\,V_i^n$$

$$X = P\left[\frac{1 - V_i^n}{i}\right] + \frac{Q\,a_{\overline{n}|i} - n\,Q\,V_i^n}{i}$$

$$X = P\,a_{\overline{n}|i} + Q\left[\frac{a_{\overline{n}|i} - n\,V_i^n}{i}\right] \quad \cdots (3)$$

La ecuación anterior es el valor presente de una anualidad ordinaria creciente en forma aritmética cuyo primer término es P y cuya razón es Q.

Si $P = Q = 1$ se obtiene el valor presente de una anualidad unitaria ordinaria creciente en forma aritmética y es:

$$\left[I\,a\right]_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} + \frac{a_{\overline{n}|i} - n\,V_i^n}{i}$$

$$\left[I\,a\right]_{\overline{n}|i} = \frac{i\,a_{\overline{n}|i} + a_{\overline{n}|i} - n\,V_i^n}{i}$$

$$\left[I\,a\right]_{\overline{n}|i} = \frac{a_{\overline{n}|i} + i\,a_{\overline{n}|i} - n\,V_i^n}{i}$$

Siendo $i\,a_{\overline{n}|i} = 1 - V_i^n$, entonces

$$\left[I\,a\right]_{\overline{n}|i} = \frac{a_{\overline{n}|i} + 1 - V_i^n - n\,V_i^n}{i}$$

$$\left[I\ a\right]_{\overline{n}|\,i} = \frac{a_{\overline{n-1}|\,i} + 1 - n\,V_i^{\,n}}{i}$$

Si P = n y Q = -1 se obtiene una anualidad unitaria ordinaria decreciente en forma aritmética. Utilizando la ecuación (3) se tiene:

$$\left[D\ a\right]_{\overline{n}|\,i} = n\,a_{\overline{n}|\,i} - \frac{a_{\overline{n}|\,i} - n\,V_i^{\,n}}{i}$$

$$\left[D\ a\right]_{\overline{n}|\,i} = \frac{i\,n\,a_{\overline{n}|\,i} - a_{\overline{n}|\,i} + n\,V_i^{\,n}}{i}$$

$$\left[D\ a\right]_{\overline{n}|\,i} = \frac{n\left[i\,a_{\overline{n}|\,i} + V_i^{\,n}\right] - a_{\overline{n}|\,i}}{i}$$

$$\left[D\ a\right]_{\overline{n}|\,i} = \frac{n\left[\left(i\,\frac{1 - V_i^{\,n}}{i}\right) + V_i^{\,n}\right] - a_{\overline{n}|\,i}}{i}$$

$$\left[D\ a\right]_{\overline{n}|\,i} = \frac{n - a_{\overline{n}|\,i}}{i}$$

la expresión encontrada es igual a la suma de capitales insolutos como se vió en el capítulo de amortización.

Análogamente se pueden encontrar expresiones valuadas para montos de anualidades crecientes y decrecientes en forma aritmética.

El monto de una anualidad ordinaria creciente en forma aritmética donde P es el primer término y Q la razón mayor que cero es:

$$S = P\,s_{\overline{n}|\,i} + Q\left[\frac{s_{\overline{n}|\,i} - n}{i}\right]$$

El monto de una anualidad ordinaria decreciente en forma aritmética donde P es el primer término y Q la razón menor que cero es:

$$S = P\, S_{\overline{n}|i} - Q\left[\frac{S_{\overline{n}|i} - n}{i}\right]$$

VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD EN FORMA GEOMÉTRICA

Considerando ahora una anualidad con n pagos anuales en donde la unidad es el primer término y la razón es $(1 + s)$ mayor que uno, se tiene:

$$1,\ (1+s),\ (1+s)^2,\ \ldots,\ (1+s)^{n-1}$$

su valor presente será:

$$A = V_i + (1+s)\,V_i^2 + \ldots + (1+s)^{n-1}\,V_i^n$$

$$A = V_i\left[1 + (1+s)\,V_i + \ldots + (1+s)^{n-1}\,V_i^{n-1}\right]$$

Reduciendo la expresión entre corchetes siendo ésta una progresión geométrica cuya razón es $(1 + s)\,V_i$, y sabiendo que la suma de dicha progresión es:

$$S = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1}\,, \qquad r > 1$$

por lo tanto:

$$A = \frac{V_i\left[(1+s)^n\,V_i^n - 1\right]}{(1+s)\,V_i - 1}$$

Multiplicando numerador y denominador por $(1 + i)$, se tiene:

$$A = \frac{(1+s)^n\,V_i^n - 1}{(1+s) - (1+i)}$$

$$A = \frac{\dfrac{(1+s)^n}{(1+i)^n} - 1}{1 + s - 1 - i}$$

$$A = \frac{\left(\dfrac{1+s}{1+i}\right)^n - 1}{s - i}$$

La ecuación obtenida es el valor presente de una anualidad ordinaria creciente en forma geométrica cuya razón es $(1 + s)$ mayor que uno.

Por otra parte, considerando una anualidad con n pagos anuales en donde la unidad es el primer término y la razón es $(1 + s)^{-1}$ menor que uno, se tiene:

$$1, \ (1+s)^{-1}, \ (1+s)^{-2}, \ \ldots \ , \ (1+s)^{-(n-1)}$$

su valor presente será:

$$A = V_i + (1+s)^{-1} V_i^2 + \ldots + (1+s)^{-(n-1)} V_i^n$$

$$A = V_i \left[1 + (1+s)^{-1} V_i + \ldots + (1+s)^{-(n-1)} V_i^{n-1} \right]$$

Reduciendo la expresión entre corchetes siendo ésta una progresión geométrica - cuya razón es $(1 + s)^{-1} V_i$, y sabiendo que la suma de dicha progresión es:

$$S = \frac{a\,(1 - r^n)}{1 - r}, \qquad r < 1$$

por lo tanto:

$$A = \frac{V_i \left[1 - (1+s)^{-n} V_i^n \right]}{1 - (1+s)^{-1} (1+i)^{-1}}$$

Multiplicando numerador y denominador por $(1 + i)$, se tiene:

$$A = \frac{1 - (1 + s)^{-n}(1 + i)^{-n}}{(1 + i) - (1 + s)^{-1}}$$

$$A = \frac{1 - \left(\dfrac{(1 + s)^{-n}}{(1 + i)^{n}}\right)}{(1 + i) - (1 + s)^{-1}}$$

La ecuación obtenida es el valor presente de una anualidad ordinaria creciente en forma geométrica cuya razón es $(1 + s)^{-1}$ menor que uno.

MONTO DE UNA ANUALIDAD EN FORMA GEOMÉTRICA

Considerando una anualidad con n pagos anuales en donde la unidad es el primer término y la razón es $(1 + s)$ mayor que uno, se tiene:

$$1,\ (1 + s),\ (1 + s)^{2},\ \ldots\ ,\ (1 + s)^{n-1}$$

su monto será:

$$S = (1 + i)^{n-1} + (1 + s)(1 + i)^{n-2} + (1 + s)^{2}(1 + i)^{n-3} + \ldots + (1 + s)^{n-1}$$

$$S = (1 + i)^{-1}\Big[(1 + i)^{n} + (1 + s)(1 + i)^{n-1} + (1 + s)^{2}(1 + i)^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + (1 + s)^{n-1}(1 + i)\Big]$$

Reduciendo la expresión entre corchetes siendo ésta una progresión geométrica cuya razón es $(1 + s)\ V_i$, y sabiendo que la suma de dicha progresión es:

$$S = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1}, \qquad r > 1$$

por lo tanto:

$$S = \frac{(1+i)^{-1}\,(1+i)^{n}\left[(1+s)^{n} \cdot V_i^{n} - 1\right]}{(1+s)\,V_i - 1}$$

$$S = \frac{(1+i)^{n-1}\left[\dfrac{(1+s)^n}{(1+i)^n} - 1\right]}{(1+s)\,(1+i)^{-1} - 1}$$

$$S = \frac{(1+i)^{n-1}\left[\left(\dfrac{1+s}{1+i}\right)^{n} - 1\right]}{\dfrac{1+s}{1+i} - 1}$$

$$S = \frac{(1+i)^{n-1}\left[\left(\dfrac{1+s}{1+i}\right)^{n} - 1\right]}{\dfrac{1+s-1-i}{1+i}}$$

$$S = \frac{(1+i)^{n-1}\left[\left(\dfrac{1+s}{1+i}\right)^{n} - 1\right]}{\dfrac{i-s}{1+i}}$$

$$S = \frac{(1+i)^{n}\left[\left(\dfrac{1+s}{1+i}\right)^{n} - 1\right]}{i-s}$$

La ecuación obtenida es el monto de una anualidad ordinaria creciente en forma geométrica cuya razón es $(1 + s)$ mayor que uno.

Por otra parte, considerando una anualidad con n pagos anuales en donde la unidad es el primer término y la razón es $(1 + s)^{-1}$ menor que uno, se tiene:

$$1, \quad (1 + s)^{-1}, \quad (1 + s)^{-2}, \quad \ldots, \quad (1 + s)^{-(n-1)}$$

su monto será:

$$S = (1 + i)^{n-1} + (1 + s)^{-1}(1 + i)^{n-2} + \ldots + (1 + s)^{-(n-1)}$$

$$S = (1 + i)^{-1}\left[(1 + i)^{n} + (1 + s)^{-1}(1 + i)^{n-1} + \ldots + (1 + s)^{-(n-1)}(1 + i)\right]$$

Reduciendo la expresión entre corchetes siendo ésta una progresión geométrica cuya razón es $(1 + s)^{-1} V_i$, y sabiendo que la suma de dicha progresión es:

$$S = \frac{a\,(1 - r^{n})}{1 - r}, \qquad r < 1$$

por lo tanto:

$$S = \frac{(1 + i)^{-1}(1 + i)^{n}\left[1 - (1 + s)^{-n} V_i^{n}\right]}{1 - (1 + s)^{-1} V_i}$$

$$S = \frac{(1 + i)^{n-1}\left[1 - \dfrac{(1 + s)^{-n}}{(1 + i)^{n}}\right]}{1 - \dfrac{(1 + s)^{-1}}{(1 + i)}}$$

$$S = \frac{(1+i)^{n-1}\left[1 - \dfrac{(1+s)^{-n}}{(1+i)^{n}}\right]}{\dfrac{(1+i) - (1+s)^{-1}}{1+i}}$$

$$S = \frac{(1+i)^{n}\left[1 - \dfrac{(1+s)^{-n}}{(1+i)^{n}}\right]}{(1+i) - (1+s)^{-1}}$$

La ecuación obtenida es el monto de una anualidad ordinaria creciente en forma geométrica cuya razón es $(1 + s)^{-1}$ menor que uno.

COSTO CAPITALIZABLE

El costo capitalizable C de un activo es el costo inicial F más el valor presente de un número ilimitado de costos de reemplazo de cada R, es decir de una perpetuidad de R por intervalo de reemplazo.

1 Ejemplo

Una cierta máquina costó \$ 4 500 y tiene una duración de 10 años, al término de los cuales su valor de salvamento es de \$ 500. Si los reemplazos también cuestan \$ 4 500. Determinar el costo capitalizable de la máquina sobre la base del 4 %.

Solución:

El reemplazo le cuesta a la compañía 4 500 - 500 = 4 000. La tasa de interés i por intervalo de reemplazo, esto es convertible cada 10 años equivalente al 4 % convertible anualmente, se determina resolviendo:

$$(1 + i) = (1.04)^{10}$$

para

$$i = (1.04)^{10} - 1 = 0.480244$$

El valor presente de la perpetuidad será:

$$\frac{4\ 000}{0.480244} = \$\ 8\ 329.09$$

por lo cual el costo capitalizable será:

$$C = 4\ 500 + 8\ 329.09$$

$$C = \$\ 12\ 829.09$$

PROBLEMAS RESUELTOS (CASOS ESPECIALES DE ANUALIDADES)

1. Un puente recién construido, se estima no necesitará reparación hasta el término de 5 años, cuando se requerirán \$ 4 000 para reparaciones de ahí en adelante al final de cada año durante 20 años. Determinar el valor presente del mantenimiento del puente, sobre la base del 3 % .

Solución:

$Ra = 4\ 000$

$n = 21$

$m = 4$

$i = 0.03$

$A = ?$

$$A = Ra \quad m \,/\, a_{\overline{n}|i}$$

$$A = 4\ 000 \quad v^{4}_{0.03} \ (15.415024)$$

$$A = 4\ 000\ (0.888487)\ (15.415024)$$

$$A = \$\ 54\ 784.20$$

ó

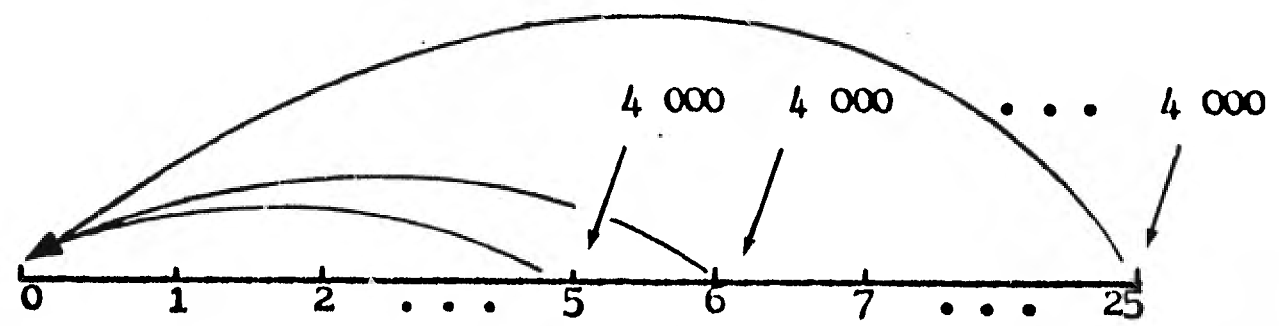
$$A = 4\ 000 \left[a_{25_{0.03}} - a_{5_{0.03}} \right]$$

$$A = 4\ 000\ (17.413148 - 3.717098)$$

$$A = 4\ 000\ (13.696050)$$

$$A = \$\ 54\ 784.20$$

Gráficamente se observa:



2. Una huerta valuada en \$ 125 000 es vendida en \$ 15 000 de cuota inicial. El comprador acuerda pagar el saldo con intereses al 5 % convertible semestralmente, mediante 10 pagos semestrales iguales, el primero con vencimiento dentro de 4 años. Determinar el pago semestral.

Solución:

$A = 110\,000$

$i^{(2)} = 0.05$

$n = 10$

$m = 7$

$R_s = ?$

$$A = R_s \; {}_{m/}a_{\overline{n}|i}$$

$$110\,000 = R_s \; v^{7}_{0.025} \; a_{\overline{10}|0.025}$$

$$R_s = \frac{110\,000}{(0.841265)\,(8.752064)}$$

$$R_s = \$\ 14\,939.96$$

ó

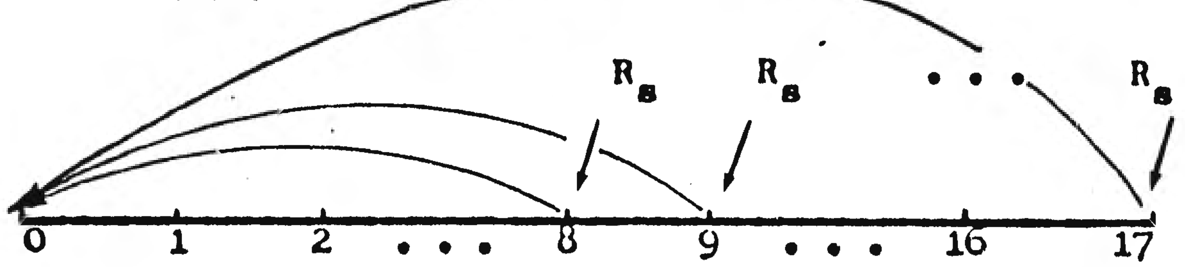
$$110\,000 = R_s \left[a_{\overline{17}|0.025} - a_{\overline{7}|0.025} \right]$$

$$110\,000 = R_s \; (13.712200 - 6.349392)$$

$$110\,000 = R_s \; (7.362808)$$

$$R_s = \$\ 14\,939.96$$

Gráficamente se observa:



3. La compañía ABC espera pagar $ 2 500 cada 6 meses indefinidamente como dividendos sobre sus acciones preferentes.

Suponiendo un rendimiento del 6 % convertible semestralmente. Determinar la cantidad que deberá estar dispuesto a pagar la compañía ABC por cada acción.

Solución:

$R = 2\ 500$

$i = 0.03$

$A = ?$

$$A = \frac{R}{i}$$

$$A = \frac{2\ 500}{0.03}$$

$$A = \$\ 83\ 333.33$$

4. En un colegio se calcula que el nuevo edificio de la sociedad, requerirá $ 8 500 de mantenimiento al final de cada año, por los próximos 10 años y posteriormente $ 2 600 al final de cada año indefinidamente. Determinar el donativo que se hace necesario para asegurar el mantenimiento del edificio suponiendo intereses del 4 %.

Solución:

$R_1 = 8\ 500$

$n = 10$

$i = 0.04$

$R_2 = 2\ 600$

$A = ?$

$$A = R_1\, a_{\overline{n}|i} + \frac{R_2 \left[V_i^n \right]}{i}$$

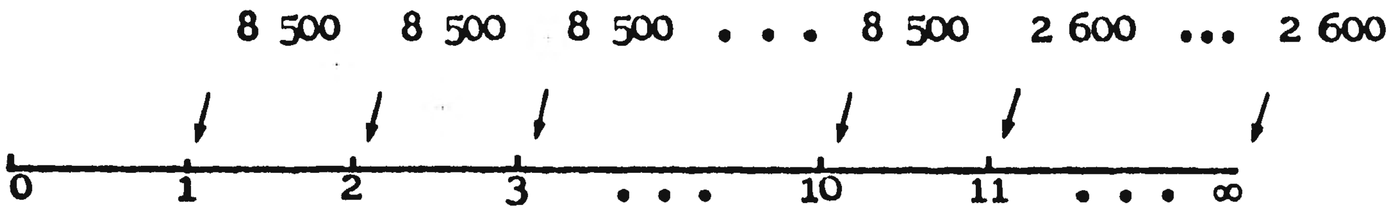
$$A = 8\ 500\, a_{\overline{10}|0.04} + 2\ 600 \left[\frac{V_{0.04}^{10}}{0.04} \right]$$

$$A = 8\,500\,(8.110896) + \frac{2\,600\,(0.675564)}{0.04}$$

$$A = 68\,942.62 + 43\,911.67$$

$$A = \$\,112\,854.29$$

Gráficamente se observa:



5. El Sr. M decide comprar una casa en vez de seguir pagando \$ 12 500 de renta al principio de cada mes por los próximos 8 años. Determinar a cuanto asciende el valor en efectivo de los 8 años de renta al 5 % convertible mensualmente.

Solución:

$R_m = 12\,500$

$n = 8$

$m = 12$

$i^{(12)} = \frac{0.05}{12} = 0.004167$

$A = ?$

$$A = R_m \ddot{a}_{\overline{m\,n}|\,i'} \,, \quad i' = 0.004167$$

$$A = 12\,500\ \ddot{a}_{\overline{96}|\,0.004167}$$

$$A = 12\,500\,(1 + 0.004167)\ a_{\overline{96}|\,0.004167}$$

$$A = 12\,500\,(1.004167)\,(78.988241)$$

$$A = \$\,991\,467.31$$

6. Una corporación reserva \$ 20 000 al principio de cada año para crear un fondo en caso de futura expansión. Si el fondo gana el 3 %. Determinar el

monto al término de 10 años.

Solución:

Ra = 20 000

i = 0.03

n = 10

S = ?

$$S = Ra \ \ddot{S}_{\overline{n}|i}$$

$$S = 20\,000 \ \ddot{S}_{\overline{10}|0.03}$$

$$S = 20\,000 \left[S_{\overline{11}|0.03} - 1 \right]$$

$$S = 20\,000\,(12.807796 - 1)$$

$$S = \$\ 236\,155.92$$

7. El 1o. de junio de 1979, el Sr. M obtuvo un préstamo de $ 75 000 con intereses del 12 % convertible mensualmente. Piensa liquidar la deuda mediante pagos mensuales de $ 10 000, comenzando el 1o. de junio de 1982.
Determinar el número de pagos completos y el pago adicional necesario que hará un mes después del último pago completo.

Solución:

A = 75 000

R = 10 000

i = 0.01

n = ?

X = ?

Tomando como fecha focal el día de hoy,

$$A = Ra \quad m \,/\, a_{\overline{n}|i}$$

$$A = Ra \quad v_i^n \quad a_{\overline{n}|i}$$

$$75\ 000 = 10\ 000 \quad v_{0.01}^{35} \quad a_{\overline{n}|i}$$

$$75\ 000 = 10\ 000 \quad (0.705914) \quad a_{\overline{n}|0.01}$$

$$75\ 000 = 7\ 059.14 \quad a_{\overline{n}|0.01}$$

$$\frac{75\ 000}{7\ 059.14} = a_{\overline{n}|0.01}$$

$$10.624524 = a_{\overline{n}|0.01}$$

$$n = 11$$

El número de pagos es 11 y sea X el pago adicional irregular. Para encontrar X, tómese el día de hoy como fecha focal.

$$75\ 000 = 10\ 000 \quad v_{0.01}^{35} \quad a_{\overline{11}|0.01} + X\, v_{0.01}^{47}$$

$$75\ 000 = 10\ 000 \quad (0.705914)\ (10.367630) + X\ (0.626463)$$

$$75\ 000 = 7\ 059.14 \quad (10.367630) + X\ (0.626463)$$

$$75\ 000 = 73\ 186.55 + X\ (0.626463)$$

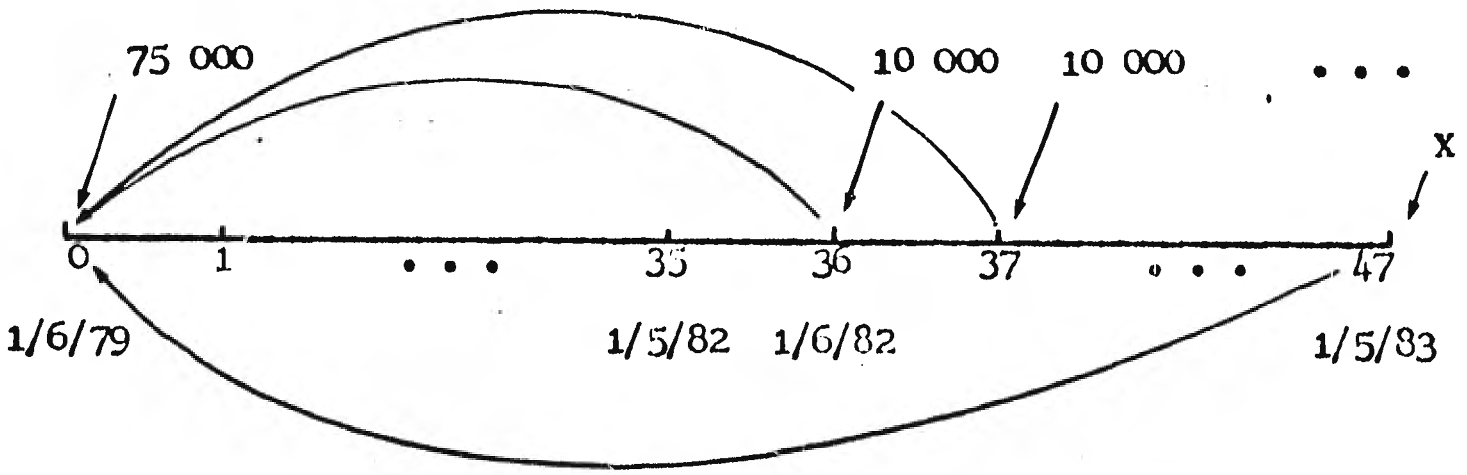
$$75\ 000 - 73\ 186.55 = X\ (0.626463)$$

$$1\ 813.45 = X\ (0.626463)$$

$$X = \frac{1\ 813.45}{0.626463}$$

$$X = \$\ 2\ 896.50$$

Gráficamente se observa:



PROBLEMAS PROPUESTOS (CASOS ESPECIALES DE ANUALIDADES)

1. Demostrar

a) $\quad {}_{m/}a_{\overline{n}|i} = v_i^m \, a_{\overline{n}|i}$

b) $\quad \ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1 + i) \, a_{\overline{n}|i}$

c) $\quad \ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1 + i) \, s_{\overline{n}|i}$

2. Demostrar

a) $\quad a_{\overline{m+n}|i} = a_{\overline{m}|i} + v_i^m \, a_{\overline{n}|i} = v_i^n \, a_{\overline{m}|i} + a_{\overline{n}|i}$

b) $\quad s_{\overline{m+n}|i} = s_{\overline{m}|i} + (1+i)^m \, s_{\overline{n}|i} = (1+i)^n \, s_{\overline{m}|i} + s_{\overline{n}|i}$

3. Demostrar

a) $\quad a_{\overline{m-n}|i} = a_{\overline{m}|i} - v_i^m \, s_{\overline{n}|i} = (1+i)^n \, a_{\overline{m}|i} - s_{\overline{n}|i}$

donde $0 < n < m$

b) $\quad s_{\overline{m-n}|i} = s_{\overline{m}|i} - (1+i)^m \, a_{\overline{n}|i} = v_i^n \, s_{\overline{m}|i} - a_{\overline{n}|i}$

donde $0 < n < m$

4. Demostrar

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

se obtiene la diferencia entre el valor presente de una perpetuidad ordinaria de 1 por período y el valor presente de una perpetuidad ordinaria de 1 por período diferido n periodos.

5. Encontrar los montos de una anualidad creciente y decreciente en forma aritmética pagadera n periodos.

Resp. $$S_1 = P\, a_{\overline{n}|i} + Q \left[\frac{a_{\overline{n}|i} - n}{i}\right]$$

$$S_2 = P\, a_{\overline{n}|i} - Q \left[\frac{a_{\overline{n}|i} - n}{i}\right]$$

6. Valuar: a) $\left[I\, a\right]_{\infty}$ b) $\left[D\, a\right]_{\infty}$

Resp. a) $\dfrac{1 + i}{i^2}$ b) $\dfrac{-1}{i}$

7. Demostrar que en una anualidad creciente en forma aritmética el valor de n es igual a:

$$n = \frac{(1 + i)\left[\log\ (P\, i + Q + X\, i^2) - \log 2\right]}{i \log\ (1 + i)}$$

8. La renta mensual de un edificio es de \$ 3 400 pagaderos durante un año por adelantado. Determinar el valor presente de estos pagos considerando una tasa del 6 % convertible mensualmente.

Resp. R_m = \$ 39 701.88

9. Los días 15 de cada mes, el Sr. M invierte \$ 14 000 en un fondo que paga el 3 % convertible mensualmente. Determinar la cantidad en el fondo justamente antes del 10o. depósito.

Resp. X = \$ 127 585.52

10. Una deuda de \$ 85 000 con intereses al 4 % convertible trimestralmente va a ser liquidada mediante 8 pagos trimestrales iguales, el primero con vencimiento el día de hoy. Determinar el pago trimestral.

Resp. R_t = \$ 10 998.69

11. Dentro de 10 años la compañía XYZ necesitará \$ 120 000 para reemplazar maquinaria desgastada. Determinar el importe del depósito semestral que ten -

drá que hacer desde ahora en un fondo que paga el 3 % convertible semestral - mente durante 10 años para acumular dicha suma.

Resp. R_s = $ 5 112.79

12. Determinar el valor presente de una perpetuidad de $ 7 850 pagaderos al - final de cada año, suponiendo un interés del:

a) 6 % efectivo

b) 6 % convertible semestralmente

c) 6 % convertible trimestralmente

Resp. a) A = $ 130 833.33 b) A = $ 128 899.83 c) A = $ 127 926.12

13. Determinar el pago semestral de una perpetuidad cuyo valor presente es de $ 789 012 suponiendo un interés del 4 % convertible semestralmente.

Resp. R_s = $ 15 780.24

14. ¿ Cuánto debe entregar a su antigua escuela un alumno que desea proporcionarle una beca anual de $ 500 por tiempo indefinido si el dinero puede inver - tirse al 4 % y la primera beca debe concederse:

a) dentro de un año

b) inmediatamente

c) dentro de 5 años

Resp. a) a_{∞} = $ 12 500 b) X = $ 13 000 c) X = $ 10 685.05

15. Un colegio calcula que el nuevo edificio por construir requerirá $ 8 000 de mantenimiento al final de cada año por los próximos 5 años y posteriormen - te $ 1 700 al final de cada año indefinidamente. Determinar el donativo que se hace necesario para asegurar el mantenimiento del edificio suponiendo una tasa del 12 % convertible mensualmente.

Resp. X = $ 40 015.14

16. Un agente de seguros vende un seguro dotal por $ 150 000 a los 10 años con una prima anual de $ 14 000. Determinar el rendimiento que deberá cobrar el -

agente considerando la operación sólo como una inversión.

Resp. i = 1.52 %

17. Cierta empresa espera no tener utilidad ni pérdida en 2 años, a partir del 3er. año esperan obtener una utilidad de $ 2 000 000 anuales e igual suma de ahí en adelante. Determinar la cantidad de dinero que puede valuarse a la empresa en este momento de cumplirse las hipótesis establecidas. La tasa del mercado es del 7 % anual.

Resp. X = $ 24 955 391.00

18. Dentro de cuánto tiempo comenzará a recibir el Sr. M una renta de $ 25 000 anuales por duración de 25 años considerando un interés del 8 % si se depositan en este momento $ 120 000.

Resp. n = 10 años, 4 meses, 18 días

19. Determinar el valor presente de $ 20 000, $ 19 500, $ 19 000, etc. efectivos al final de cada semestre durante 5 años si la tasa es del 8.45 % convertible trimestralmente.

Resp. A = $ 143 428.69

20. Al nacimiento de su hijo, el Sr. M desea depositar en una fiduciaria $ 2 000 el 1er. año, $ 3 000 el 2do. año, $ 4 000 el 3er. año, etc. hasta cumplir 21 años. Determinar la suma de dinero que recibirá el hijo si la tasa de interés a que se invierte esas sumas es del 13 % anual.

Resp. X = $ 734 708.41

21. Unas tribunas de madera con vida probable de 15 años pueden ser construidas con $ 200 000. Suponiendo un interés del 8 %. Determinar:

a) el costo capitalizable de las tribunas

b) la cantidad que sería razonable pagar por unas tribunas de acero con una vida probable de 50 años.

Resp. a) X = $ 292 073.86 b) X = $ 285 846.48

CASOS MAS GENERALES DE ANUALIDADES

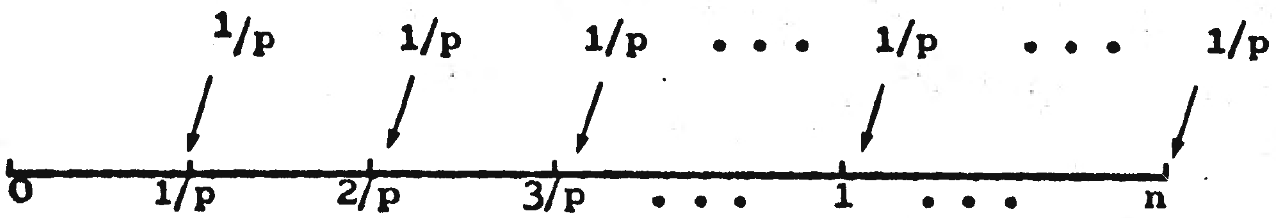
ANUALIDADES PAGADERAS P-VECES AL AÑO

Se analizará primeramente el caso de una anualidad valuada a una tasa de interés efectiva anual y pagos efectuados p-veces al año.

Considérese una renta anual unitaria y el pago efectuado cada p-ésimo de año será de 1/p.

La notación para el valor presente de este tipo de anualidades es $a_{\overline{n}|i}^{(p)}$.

Gráficamente se observa:



Valuando en el origen, se encuentra el valor presente de esta anualidad:

$$a_{\overline{n}|i}^{(p)} = \left\{\frac{1}{p}\right\}\left[V_i^{1/p} + V_i^{2/p} + \dots + V_i^{1-1/p} + V_i + V_i^{1+1/p} + \dots + V_i^{n-1/p} + V_i^{n}\right]$$

Aplicando la fórmula para encontrar la suma de una progresión geométrica en el segundo miembro de la ecuación anterior, se tiene:

$$a_{n\,i}^{(p)} = \left\{\frac{1}{p}\right\}\left[\frac{V_i^{1/p}\left\{1 - V_i^{np/p}\right\}}{1 - V_i^{1/p}}\right]$$

Multiplicando numerador y denominador por $(1 + i)^{1/p}$, se tiene:

$$a_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{1 - v_i^n}{p\left\{(1+i)^{1/p} - 1\right\}}$$

$$a_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{1 - v_i^n}{i^{(p)}}$$

Finalmente multiplicando numerador y denominador por i, se obtiene:

$$a_{\overline{n}|i}^{(p)} = \left\{\frac{i}{i^{(p)}}\right\} a_{\overline{n}|i}$$

Considerando una renta anual Ra, el valor presente de una anualidad pagadera - p-veces al año a una tasa de interés anual i durante n periodos es:

$$A = Ra \left\{\frac{i}{i^{(p)}}\right\} a_{\overline{n}|i}$$

El valor de $\frac{i}{i^{(p)}}$ se encuentra en tablas para distintos valores de i y - de p ó valores independientes para i e $i^{(p)}$.

1 Ejemplo

Determine el valor presente de una anualidad de $ 1 600 anuales pagaderos - mensualmente si el interés es del 9 % anual efectivo y se efectúan pagos du - rante 7 años.

Solución:

Ra = 1 600

$i = 0.09$

$n = 7$

$p = 12$

$A = ?$

$$A = Ra \left\{\frac{i}{i^{(p)}}\right\} a_{\overline{n}|i}$$

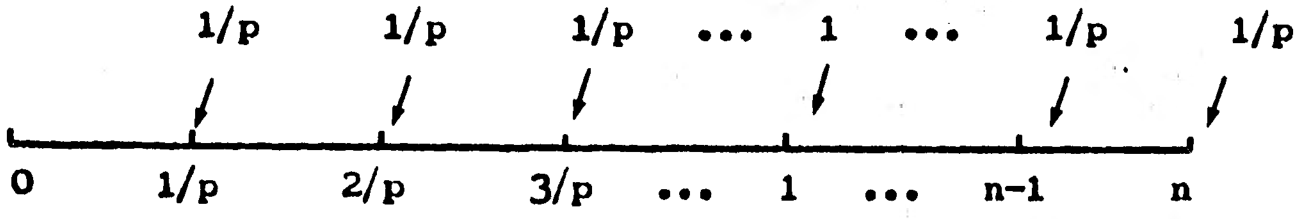
$$A = 1\ 600 \left\{\frac{i}{i^{(12)}}\right\} a_{\overline{7}|0.09}$$

$$A = 1\ 600 \left[\frac{0.09}{0.086487}\right] (5.032952)$$

$$A = \$\ 8\ 379.82$$

La obtención para la expresión del monto de una anualidad pagadera p-veces al año considerando una renta anual unitaria a una tasa de interés anual i durante n periodos es análoga a la del valor presente. La notación para el monto de este tipo de anualidades es $S_{\overline{n}|i}^{(p)}$.

Gráficamente se observa:



Valuando en el período n, se encuentra el monto de esta anualidad:

$$S_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{1}{p} \left\{ (1 + i)^{n - 1/p} + (1 + i)^{n - 2/p} + \ldots \right.$$

$$\cdots + (1+i)^{1+1/p} + (1+i) + (1+i)^{1-1/p} + \cdots$$

$$\cdots + (1+i)^{1/p} + 1 \Big\}$$

Aplicando la fórmula para encontrar la suma de una progresión geométrica en el segundo miembro de la ecuación anterior, se tiene:

$$S_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{1}{p}\left|\frac{(1+i)^{n-1/p}\left\{(1+i)^{-np/p} - 1\right\}}{(1+i)^{-1/p} - 1}\right|$$

$$S_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{1}{p}\left|\frac{(1+i)^{n}(1+i)^{-1/p}\left\{(1+i)^{-np/p} - 1\right\}}{(1+i)^{-1/p} - 1}\right|$$

$$S_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{1}{p}\left|\frac{(1+i)^{n}(1+i)^{-1/p}(1+i)^{-np/p} - (1+i)^{n}(1+i)^{-1/p}}{(1+i)^{-1/p} - 1}\right|$$

Multiplicando numerador y denominador por $(1+i)^{1/p}$, se tiene:

$$S_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{1}{p}\left|\frac{(1+i)^{n}(1+i)^{-np/p} - (1+i)^{n}}{1 - (1+i)^{1/p}}\right|$$

$$S_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{1}{p} \left| \frac{1 - (1 + i)^{n}}{1 - (1 + i)^{1/p}} \right|$$

Multiplicando numerador y denominador por -1, se tiene:

$$S_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{1}{p} \left| \frac{(1 + i)^{n} - 1}{(1 + i)^{1/p} - 1} \right|$$

Multiplicando finalmente numerador y denominador por i, se obtiene:

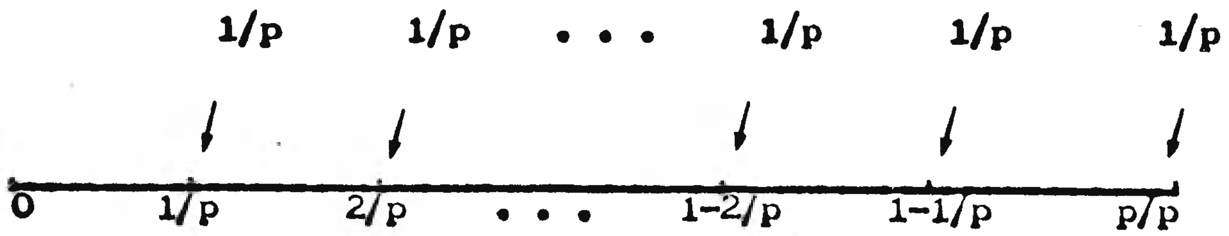
$$S_{\overline{n}|i}^{(p)} = \left| \frac{i}{i^{(p)}} \right| S_{\overline{n}|i}$$

Considerando una renta anual Ra, el monto de una anualidad pagadera p-veces al año a una tasa de interés anual i durante n periodos es:

$$S = Ra \left| \frac{i}{i^{(p)}} \right| S_{\overline{n}|i}$$

Otra forma de considerar este tipo de problemas consiste en obtener el valor equivalente de los pagos unitarios que se efectúan p-veces al año que serán de 1/p cada uno.

Considerando gráficamente, se tiene:



Tomando como punto de valuación el período 1 se tiene:

$$X = \frac{1}{p}\left\{1 + (1+i)^{1/p} + \dots + (1+i)^{1-2/p} + (1+i)^{1-1/p} + (1+i)^{p/p}\right\}$$

Aplicando la fórmula para la suma de una progresión geométrica en el segundo - miembro de la ecuación anterior, se tiene:

$$X = \frac{1}{p}\left\{\frac{1 - (1+i)^{p/p}}{1 - (1+i)^{1/p}}\right\}$$

$$X = \frac{1}{p}\left\{\frac{1 - 1 - i}{1 - (1+i)^{1/p}}\right\}$$

$$X = \frac{1}{p}\left\{\frac{-i}{1 - (1+i)^{1/p}}\right\}$$

$$X = \frac{1}{p}\left\{\frac{i}{(1+i)^{1/p} - 1}\right\}$$

$$X = \frac{i}{i^{(p)}}$$

finalmente:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i} = \left\{\frac{i}{i^{(p)}}\right\} a_{\overline{n}|i}$$

ANUALIDADES PAGADERAS P-VECES AL AÑO VALUADAS CON TASA NOMINAL DE INTERÉS

Se tratarán casos en los cuales se considerará una renta anual unitaria.

a) Si $m = p$ (la convertibilidad de la tasa de interés es igual a la periodicidad de los pagos).

Este caso ya fué analizado anteriormente y se obtuvo la expresión:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{p}\, a_{\overline{mn}|i'} \quad , \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

b) Si $p > m$ (la periodicidad de los pagos es mayor que la convertibilidad de la tasa de interés).

Inicialmente se supondrá que $\frac{p}{m} = k$, donde k es un entero y en consecuencia:

$$p = k\,m$$

Se procederá a encontrar un pago X tal que sea equivalente a los k pagos que se efectúan entre cada intervalo de convertibilidad de la tasa de interés.

A la tasa efectiva pagadera en este período, se denotará por:

$$i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

donde:

$$X = \frac{1}{p}\left\{1 + (1+i')^{1/k} + \dots + (1+i')^{1-1/k} + (1+i')^{k/k}\right\}$$

Sumando la progresión geométrica del segundo miembro de la ecuación anterior, se obtiene:

$$X = \frac{1}{p}\left\{\frac{1 - (1+i')^{k/k}}{1 - (1+i')^{1/k}}\right\}$$

$$X = \frac{1}{p}\left\{\frac{-\,i'}{1-(1+i')^{1/k}}\right\}$$

Multiplicando numerador y denominador por -1, se obtiene:

$$X = \frac{1}{p}\left\{\frac{i'}{(1+i')^{1/k}-1}\right\}$$

Sustituyendo $p = m\,k$

$$X = \frac{1}{m\,k}\left\{\frac{i'}{(1+i')^{1/k}-1}\right\}$$

$$X = \left\{\frac{i'}{i'^{(k)}}\right\}\left\{\frac{1}{m}\right\}$$

Dado que X es el pago que coincide con la convertibilidad de la tasa de inte - rés la situación se presenta como en el caso de $m = p$, por tanto:

$$a_{\overline{n}|i'}^{(p)} = \left\{\frac{1}{m}\right\}\left\{\frac{i'}{i'^{(k)}}\right\} a_{\overline{m\,n}|i'} \quad , \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

y siendo la renta anual Ra, se tiene:

$$A = Ra\left\{\frac{1}{m}\right\}\left\{\frac{i'}{i'^{(k)}}\right\} a_{\overline{m\,n}|i'} \quad , \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

1 Ejemplo

Determinar el valor presente de una anualidad con pagos anuales de \$ 1 200 -

pagaderos trimestralmente durante 6 años si la tasa de interés es del 6 % convertible semestralmente.

Solución:

$Ra = 1\ 200$

$i^{(2)} = 0.06$

$n = 6$

$p = 4$

$m = 2$

$k = \frac{p}{m} = 2$

$A = ?$

$$A = Ra\ a^{(p)}_{\overline{n}|i'}$$

$$A = Ra \left[\frac{1}{m}\right]\left[\frac{i'}{i'^{(k)}}\right] a_{\overline{m\,n}|i'} \quad , \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

$$A = 1\ 200 \left[\frac{1}{2}\right]\left[\frac{i'}{i^{(2)}}\right] a_{\overline{12}|0.03}$$

$$A = 600\ (1.007444)\ (9.954003)$$

$$A = \$\ 6\ 016.86$$

c) Si $m > p$ (la convertibilidad de la tasa de interés es mayor a la periodicidad de los pagos).

Se supondrá análogamente al caso anterior que $\frac{m}{p} = k$, donde k es entero. Se obtendrá también en este caso un pago X equivalente, el cual coincida con la convertibilidad de la tasa de interés.

El pago X cumplirá la siguiente ecuación de valor:

$$x \left\{ (1+i')^{k-1} + (1+i')^{k-2} + \ldots + 1 \right\} = \frac{1}{p}$$

pero la progresión geométrica es $S_{\overline{k}|i'}$, entonces:

$$x \; S_{\overline{k}|i'} = \frac{1}{p}$$

$$x = \left\{ \frac{1}{p} \right\} \frac{1}{S_{\overline{k}|i'}}$$

Este pago coincidirá con la convertibilidad de la tasa de interés y se efectuará m n – veces, por consiguiente:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \left\{ \frac{1}{p} \right\} \left\{ \frac{1}{S_{\overline{k}|i'}} \right\} a_{\overline{m\,n}|i'} \quad , \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

Considerando una renta anual Ra, se tiene:

$$A = Ra \left\{ \frac{1}{p} \right\} \left\{ \frac{1}{S_{\overline{k}|i'}} \right\} a_{\overline{m\,n}|i'} \quad , \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

1 Ejemplo

Determinar el valor presente de una anualidad con pagos de $ 6 300 anuales pagaderos semestralmente durante 6 años si la tasa de interés es del 5 % convertible trimestralmente.

Solución:

$Ra = 6\ 300$

$n = 6$

$i^{(4)} = 0.05$

$p = 2$

$m = 4$

$k = \dfrac{m}{p} = 2$

$A = ?$

$$A = Ra\ a^{(p)}_{\overline{n}|i'} \quad , \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

$$A = Ra \left\{\frac{1}{p}\right\} \left\{\frac{1}{S_{\overline{k}|i'}}\right\} a_{\overline{m\,n}|i'} \quad , \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

$$A = 6\ 300 \left[\frac{1}{2}\right] \left|\frac{1}{S_{\overline{2}|0.0125}}\right| a_{\overline{24}|0.0125}$$

$$A = 3\ 150\ (0.496894)\ (20.624234)$$

$$A = \$\ 32\ 281.38$$

d) Anualidad en la cual no coincide de ninguna forma la frecuencia de los pagos con la convertibilidad de la tasa de interés.

Sabiendo que:.

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i} = \left\{\frac{i}{i^{(p)}}\right\} a_{\overline{n}|i}$$

entonces

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i} = \frac{1 - v_i^n}{p \left\{ (1 + i)^{1/p} - 1 \right\}} \quad \ldots (1)$$

y como

$$(1 + i) = \left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^m$$

Sustituyendo en la ecuación (1), se obtiene:

$$a_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{1 - \left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^{-mn}}{p\left\{\left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m/p} - 1\right\}}$$

Considerando una renta anual Ra, se obtiene:

$$A = Ra \left(\frac{1 - \left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^{-mn}}{p\left\{\left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m/p} - 1\right\}} \right)$$

1 Ejemplo

Encontrar el valor presente de una anualidad con renta anual de $ 8 000 pagaderos trimestralmente durante 6 años si la tasa de interés es del 6 % convertible tres veces al año.

Solución:

$Ra = 8\ 000$

$n = 6$

$i^{(3)} = 0.06$

$p = 4$

$m = 3$

$A = ?$

$$A = Ra\ a_{\overline{n}|i'}^{(p)} \quad , \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

$$A = Ra \left(\frac{1 - \left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^{-mn}}{p\left\{\left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m/p} - 1\right\}} \right)$$

$$A = 8\,000 \; \frac{1 - \left[1 + \frac{0.06}{3}\right]^{-18}}{4\left\{\left[1 + \frac{0.06}{3}\right]^{3/4} - 1\right\}}$$

$$A = 8\,000 \left[\frac{1 - 0.700150}{4\;\{0.014962\}}\right]$$

$$A = 8\,000 \left[\frac{0.299850}{0.059851}\right]$$

$$A = \frac{2\,398.80}{0.059851}$$

$$A = \$\;40\,079.53$$

Las fórmulas para montos pueden ser demostradas en forma análoga y son:

a) (Caso m = p) $\quad S^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \left\{\frac{1}{p}\right\} S_{\overline{m\,n}|i'} \quad , \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$

b) (Caso p > m) $\quad S^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \left\{\frac{1}{m}\right\}\left\{\frac{i'}{i'^{(k)}}\right\} S_{\overline{m\,n}|i'} \quad , \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$

c) (Caso m > p) $\quad S^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \left\{\frac{1}{p}\right\}\left\{\frac{1}{S_{\overline{k}|i'}}\right\} S_{\overline{m\,n}|i'} \quad , \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$

d) Caso en que no coincide en ninguna forma m con p.

$$S^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{\left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m\,n} - 1}{p\left\{\left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m/p} - 1\right\}}$$

Se demostrarán a continuación los cuatro casos anteriores, considerando una renta anual unitaria.

a) Si $m = p$ (la convertibilidad de la tasa de interés es igual a la periodicidad de los pagos).

Este caso ya fué analizado anteriormente y se obtuvo la expresión:

$$S^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \left\{\frac{1}{p}\right\} S_{\overline{m\,n}|i'} \quad , \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

b) Si $p > m$ (la periodicidad de los pagos es mayor que la convertibilidad de la tasa de interés).

Inicialmente se supondrá que $\frac{p}{m} = k$, donde k es un entero y en consecuencia:

$$p = k\,m$$

Se procederá a encontrar un pago X tal que sea equivalente a los k pagos que se efectúan entre cada intervalo de convertibilidad de la tasa de interés.

A la tasa efectiva pagadera en este período, se denotará por:

$$i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

donde:

$$X = \frac{1}{p}\left\{(1+i')^{1-1/k} + (1+i')^{1-2/k} + \dots + 1\right\}$$

Sumando la progresión geométrica del segundo miembro de la ecuación anterior, se obtiene:

$$X = \frac{1}{p}\left[\frac{(1+i')^{1-1/k}\cdot\left\{(1+i')^{-k/k} - 1\right\}}{(1+i')^{-1/k} - 1}\right]$$

$$X = \left\{\frac{1}{p}\right\} \left[\frac{(1 + i')\,(1 + i')^{-1/k}\,(1 + i')^{-k/k} - (1 + i')\,(1 + i')^{-1/k}}{(1 + i')^{-1/k} - 1}\right]$$

$$X = \left\{\frac{1}{p}\right\} \left[\frac{(1 + i')^{-1/k} - (1 + i')\,(1 + i')^{-1/k}}{(1 + i')^{-1/k} - 1}\right]$$

Multiplicando numerador y denominador por $(1 + i)^{1/k}$, se tiene:

$$X = \left\{\frac{1}{p}\right\} \left[\frac{1 - (1 + i')}{1 - (1 + i')^{1/k}}\right]$$

Multiplicando numerador y denominador por $- 1$, se tiene:

$$X = \left\{\frac{1}{p}\right\} \left[\frac{(1 + i') - 1}{(1 + i')^{1/k} - 1}\right]$$

$$X = \left\{\frac{1}{p}\right\} \left[\frac{i'}{(1 + i')^{1/k} - 1}\right]$$

Sustituyendo $p = m\,k$

$$X = \left\{\frac{1}{m\,k}\right\} \left[\frac{i'}{(1 + i')^{1/k} - 1}\right]$$

$$X = \left\{\frac{1}{m}\right\} \left[\frac{i}{i^{(k)}}\right]$$

Dado que X es el pago que coincide con la convertibilidad de la tasa de interés la situación se presenta como en el caso de $m = p$, por tanto:

$$\overline{n}|^{(p)}_{i'} = \left\{\frac{1}{m}\right\} \left[\frac{i'}{i'^{(k)}}\right] S_{\overline{m\,n}|i'} \quad , \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

y siendo la renta anual Ra, se tiene:

$$S = Ra \left\{\frac{1}{m}\right\} \left[\frac{i'}{i'^{(k)}}\right] S_{\overline{m\,n}|i'} \quad , \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

c) Si $m > p$ (la convertibilidad de la tasa de interés es mayor a la pe - riodicidad de los pagos).

Se supondrá análogamente al caso anterior que $\frac{m}{p} = k$, donde k es entero. Se supondrá también en este caso un pago X equivalente, el cual coincida con la convertibilidad de la tasa de interés.

El pago X cumplirá la siguiente ecuación de valor:

$$X \left\{1 + \dots + (1+i)^{k-2} + (1+i)^{k-1}\right\} = \frac{1}{p}$$

pero la progresión geométrica es $S_{\overline{k}|i'}$, entonces:

$$X \; S_{\overline{k}|i'} = \frac{1}{p}$$

$$X = \left\{\frac{1}{p}\right\} \left[\frac{1}{S_{\overline{k}|i'}}\right]$$

Este pago coincidirá con la convertibilidad de la tasa de interés y se efec - tuará m n - veces, por consiguiente:

$$S_{\overline{n}|i'}^{(p)} = \left[\frac{1}{p}\right]\left[\frac{1}{S_{\overline{k}|i'}}\right] S_{\overline{m\,n}|i'} \quad , \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

Considerando una renta anual Ra, se tiene:

$$S = Ra\left\{\frac{1}{p}\right\}\left[\frac{1}{S_{\overline{k}|i'}}\right] \quad S_{\overline{m\,n}|i'} \quad , \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

d) Anualidad en la cual no coincide de ninguna forma la frecuencia de los - pagos con la convertibilidad de la tasa de interés.

Sabiendo que:

$$S_{\overline{n}|i}^{(p)} = \left[\frac{1}{i^{(p)}}\right] S_{\overline{n}|i}$$

entonces:

$$S_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{(1 + i)^{n} - 1}{p\left\{(1 + i)^{1/p} - 1\right\}} \quad \dots \quad (1)$$

y como

$$(1 + i) = \left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m}$$

Sustituyendo en la ecuación (1), se obtiene:

$$S_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{\left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m\,n} - 1}{p\left\{\left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m\,p} - 1\right\}}$$

Considerando una renta anual Ra, se obtiene:

$$S = Ra\left\{\frac{\left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m\,n} - 1}{p\left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m\,p} - 1}\right\}$$

1 Ejemplo

Determinar los montos de las anualidades bajo las siguientes condiciones:

a) 8 % anual efectivo

b) 6 % anual convertible semestralmente

c) 3 % por año convertible cada 3 años

i) $ 1 600 por año pagaderos anualmente por 15 años

ii) $ 6 000 por año pagaderos trimestralmente por 8 años

iii) $ 6 500 por año pagaderos cada 2 años durante 16 años

Soluciones:

ai.

Ra = 1 600

i = 0.08

n = 15

S = ?

$$S = Ra \; s_{\overline{n}|i}$$

$$S = 1\,600 \; s_{\overline{15}|0.08}$$

$$S = 1\,600 \; (27.152113)$$

$$S = \$\,43\,443.38$$

aii.

Ra = 6 000

i = 0.08

n = 8

m = 1

p = 4

$p > m, \quad k = \frac{p}{m} = 4$

$S = ?$

$$S = \left\{\frac{Ra}{m}\right\}\left|\frac{i'}{i'^{(k)}}\right| \; S_{\overline{m\,n}|\,i'} \quad , \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

$$S = \left\{\frac{6\ 000}{1}\right\}\left|\frac{i'}{i'^{(4)}}\right| \; S_{\overline{8}|\,0.08}$$

$$S = 6\ 000\ (1.029521)\ (10.636627)$$

$$S = \$\ 65\ 703.78$$

aiii.

$Ra = 6\ 500$

$i = 0.08$

$n = 16$

$p = \frac{1}{2}$

$m = 1$

$m > p, \quad k = \frac{m}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$S = ?$

$$S = \left\{\frac{Ra}{p}\right\}\left|\frac{S_{\overline{m\,n}|\,i'}}{S_{\overline{k}|\,i'}}\right| \quad , \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

$$S = \left\{\frac{6\ 500}{\frac{1}{2}}\right\}\left|\frac{S_{\overline{16}|\,0.08}}{S_{\overline{2}|\,0.08}}\right|$$

$$S = 13\ 000\ (30.324282)\ (0.480769)$$

$$S = \$\ 189\ 526.67$$

bi.

Ra = 1 600

n = 15

$i^{(2)} = 0.06$

p = 1

m = 2

$m > p, \quad k = \frac{m}{p} = 2$

S = ?

$$S = \left\{\frac{Ra}{p}\right\} \left[\frac{S_{\overline{mn}|i'}}{S_{\overline{k}|i'}}\right], \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

$$S = \left\{\frac{1\,600}{1}\right\} \left[\frac{S_{\overline{30}|0.03}}{S_{\overline{2}|0.03}}\right]$$

$$S = 1\,600\ (47.575414)\ (0.492610)$$

$$S = \$\ 37\,497.80$$

bii.

Ra = 6 000

n = 8

p = 4

m = 2

$i^{(2)} = 0.06$

$p > m, \quad k = \frac{p}{m} = 2$

S = ?

$$S = \left\{\frac{Ra}{m}\right\} \left\{\frac{i'}{i'^{(k)}}\right\} S_{\overline{mn}|i'}, \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

$$S = \left\{\frac{6\,000}{2}\right\} \left\{\frac{i'}{i'^{(2)}}\right\} S_{\overline{16}|0.03}$$

$$S = 3\,000\ (1.007444)\ (20.156881)$$

$$S = \$\ 60\,920.78$$

biii.

$Ra = 6\,500$

$n = 16$

$p = \frac{1}{2}$

$m = 2$

$i^{(2)} = 0.06$

$m > p, \quad k = \frac{m}{p} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$

$S = ?$

$$S = \left\{\frac{Ra}{p}\right\} \left\{\frac{s_{\overline{m\,n}|i'}}{s_{\overline{k}|i'}}\right\} , \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

$$S = \left\{\frac{6\,500}{\frac{1}{2}}\right\} \left\{\frac{s_{\overline{32}|0.03}}{s_{\overline{4}|0.03}}\right\}$$

$$S = 13\,000\ (52.502758)\ (0.239027)$$

$$S = \$\ 163\,144.49$$

ci.

$Ra = 1\,600$

$i^{(\frac{1}{3})} = 0.03$

$n = 15$

$p = 1$

$m = \frac{1}{3}$

$p > m, \quad k = \frac{p}{m} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

$S = ?$

$$S = \left\{\frac{Ra}{m}\right\}\left\{\frac{i'}{i'^{(k)}}\right\} S_{\overline{m\,n}|i'} \quad , \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

$$S = \left\{\frac{1\ 600}{\frac{1}{3}}\right\}\left\{\frac{i'}{i'^{(3)}}\right\} S_{\overline{15}|0.09}$$

$$S = 4\ 800\ (0.915165)\ (29.360915)$$

$$S = \$\ 128\ 976.39$$

cii.

$Ra = 6\ 000$

$i^{(\frac{1}{3})} = 0.03$

$n = 8$

$p = 4$

$m = \frac{1}{3}$

$p > m, \quad k = \frac{p}{m} = \frac{4}{\frac{1}{3}} = 12$

$S = ?$

$$S = \left\{\frac{Ra}{m}\right\}\left\{\frac{i'}{i'^{(k)}}\right\} S_{\overline{m\,n}|i'} \quad , \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

$$S = \left\{\frac{6\ 000}{\frac{1}{3}}\right\}\left\{\frac{i'}{i'^{(12)}}\right\} S_{\overline{\frac{8}{3}}|0.09}$$

$$S = 18\ 000\ (1.040613)\ (2.8706364)$$

$$S = \$\ 53\ 769.99$$

ciii.

Ra = 6 500

$i^{(\frac{1}{3})} = 0.03$

n = 16

$p = \frac{1}{2}$

$m = \frac{1}{3}$

$m > p, \quad k = \frac{m}{p} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ no es entero

S = ?

$$S = Ra \left| \frac{\left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m\,n} - 1}{p\left\{\left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m/p} - 1\right\}} \right|$$

$$S = 6\,500 \left| \frac{\left\{1 + \frac{i^{(\frac{1}{3})}}{\frac{1}{3}}\right\}^{5.33} - 1}{\frac{1}{2}\left\{\left(1 + \frac{i^{(\frac{1}{3})}}{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right\}} \right|$$

$$S = 6\,500 \left(\frac{(1.09)^{5.33} - 1}{\frac{1}{2}\left\{(1.09)^{\frac{2}{3}} - 1\right\}} \right)$$

$$S = 13\,000 \left(\frac{1.583008 - 1}{0.059073} \right)$$

$$S = \$\,128\,300.64$$

PROBLEMAS PROPUESTOS (CASOS MAS GENERALES DE ANUALIDADES)

1. Determine la mejor oferta para cierto deudor: liquidar una deuda de $ 255 000 mediante amortización en 12 abonos anuales con interés del 8 % anual o pagar el 10 % sobre la deuda y acumular un fondo de amortización para pagar el capital por medio de pagos anuales durante 12 años si el fondo de amortización puede ser invertido al 9 %.

Resp. La primera oferta.

2. Un préstamo de $ 2 200 000 se amortiza en un plazo de 18 años mediante pagos cada 3 años, el primero de ellos se efectúa tres años después de recibir el préstamo si el interés es del 14 % convertible cada 2 años. Determinar el importe de dichos pagos.

Resp. R = $ 368 611.52

3. Una persona obtiene un préstamo de $ 42 000 y acuerda en pagarlo con intereses del 2 % convertible cada 4 años en pagos trimestrales de $ 4 000 cada año durante el tiempo necesario, si el primer pago lo hace 4 años después de recibido el dinero:

a) determinar el número de pagos completos

b) determinar el pago incompleto que se hará 4 años después del último pago completo.

Resp. a) n = 23 b) X = $ 3 270.59

4. Una locomotora puede ser adquirida mediante $ 10 500 de contado o mediante una cuota inicial de $ 3 000 seguido de 10 pagos cada 2 años de $ 1 500 cada uno. Encontrar la tasa nominal convertible cada 3 años y la tasa efectiva cargada.

Resp. $i^{(\frac{1}{3})}$ = 19.98 % i = 6.26 %

DEPRECIACIÓN

Depreciación es la pérdida de valor de un activo tangible de fácil localización (edificios, maquinaria, etc.) como consecuencia del uso.

La depreciación no es un método de valuación del activo sino una técnica la cual nos permite prevenir la necesidad de reemplazo de un determinado activo al fin de su vida útil.

Generalmente se traspasa una parte de las utilidades de una empresa a un fondo llamado para depreciación. A los depósitos anuales en el fondo para depreciación se les conoce como cargos de depreciación.

En un momento dado a la diferencia entre el costo original del activo y el importe del fondo para depreciación se le conoce como valor en libros.

El valor en libros de un activo al fin de su vida útil debe ser su valor de salvamento.

Se enunciarán a continuación métodos para depreciar activos.

MÉTODO DE PROMEDIOS O MÉTODO LINEAL

Este método es el más simple para depreciar activos. Consiste en efectuar depósitos anuales iguales en el fondo de depreciación durante toda la vida del activo.

1 Ejemplo

Se estima que una máquina cuyo costo es de $ 3 000 tendrá una vida útil de 6 años y al fin de dicho período un valor de salvamento de $ 300.

a) Encontrar la depreciación promedio anual.

b) Elaborar una tabla de depreciación en donde se muestre el valor en libros cada año.

Solución:

a) Depreciación Total = Costo − Valor de salvamento

$$\text{Dep. Total} = 3\,000 - 300 = 2\,700$$

$$\text{Depreciación Promedio Anual} = \frac{2\,700}{6} = 450$$

b) Puesto que el cargo por depreciación anual es de $ 450, el fondo para depreciación se incrementa en esa cantidad cada año, mientras que el valor en libros decrece anualmente en esa misma cantidad.

TABLA DE DEPRECIACIÓN

TIEMPO (EDAD) AÑOS	CARGO POR DEPRECIACIÓN	IMPORTE DEL FONDO PARA DEPRECIACIÓN	VALOR EN LIBROS AL FINAL DEL AÑO
1	0	0	3 000
2	450	450	2 550
3	450	900	2 100
4	450	1 350	1 650
5	450	1 800	1 200
6	450	2 250	750

Cuando se requiere depreciar maquinaria existe un método igual de simple pero más real que consiste en calcular el cargo anual por depreciación con base en el número de horas que una máquina estuvo en operación; es decir en el número de artículos producidos en el año.

2 Ejemplo

A una máquina cuyo costo fué de $ 3 500 se le ha estimado un valor de salvamento de $ 400 y una vida probable de 65 000 horas de operación.

a) Encontrar el cargo por depreciación por hora de operación.

b) Elaborar una tabla en la que se muestre el valor en libros por cada uno de los cuatro primeros años de vida de la máquina durante los cuales las horas - de operación fueron 4 000, 3 000, 2 500, 4 010.

Solución:

a) Depreciación Total = Costo - Valor de salvamento

Dep. Total = 3 500 - 400 = 3 100

$$\text{Cargo por depreciación por unidad} = \frac{3\ 100}{65\ 000} = \$\ 0.04$$

b) La tabla es la siguiente:

TABLA DE DEPRECIACIÓN

AÑOS	HORAS DE OPERACIÓN	CARGO POR DEPRECIACIÓN	IMPORTE DEL FONDO PARA DEPRECIACIÓN	VALOR EN LIBROS AL FINAL DEL AÑO
0	0	0	0	3 500
1	4 000	160	160	3 340
2	3 000	120	280	3 220
3	2 500	100	380	3 120
4	4 010	160.40	540.40	2 959.60

3 Ejemplo

A una máquina cuyo costo fué de $ 4 500 se ha estimado un valor de salvamento de $ 400 y se calcula que puede producir 130 000 unidades.

a) Encontrar el cargo de depreciación por unidad.

b) Elaborar una tabla en la que se muestre el valor en libros para cada uno - de los primeros 4 años de vida de la máquina durante los cuales las unidades producidas fueron 17 000, 18 000, 20 000, 16 000.

Solución:

a) Depreciación Total = Costo − Valor de salvamento

Dep. Total = 4 500 − 400 = 4 100

Cargo por depreciación por unidad $= \dfrac{4\ 100}{130\ 000} =$ **\$ 0.03**

b) La tabla es la siguiente:

TABLA DE DEPRECIACIÓN

AÑOS	HORAS DE OPERACIÓN	CARGO POR DEPRECIACIÓN	IMPORTE DEL FONDO PARA DEPRECIACIÓN	VALOR EN LIBROS AL FINAL DEL AÑO
0		0	0	4 500
1	17 000	510	510	3 990
2	18 000	540	1 050	3 450
3	20 000	600	1 650	2 850
4	16 000	480	2 130	2 370

Nótese que la depreciación de un activo en su primer año de uso es frecuentemente mayor que la del segundo, y la del segundo es mayor que la del tercero y así sucesivamente.

La tabla de un automóvil muestra esta tendencia.

MÉTODO PORCENTAJE FIJO

El método porcentaje fijo supone que el cargo por depreciación que debe hacerse al final de cada año es un porcentaje fijo del valor contable de un activo al principio del año.

Sea C el costo original de un activo, S el valor de salvamento y n el número de años de vida útil. Sea d el porcentaje fijo anual.

Al final del primer año, el cargo por depreciación es C d, y el valor contable es $C - C\,d = C\,(1 - d)$.

Al final del segundo año, el cargo por depreciación es $C(1-d)d$, y el valor contable es:

$$C(1-d) - C(1-d)d = C(1-d-d+d^2) = C(1-d)^2$$

Los valores contables sucesivos, durante la vida del activo, corresponden a los términos de la progresión geométrica:

$$C(1-d),\ C(1-d)^2,\ C(1-d)^3,\ \ldots\ ,\ \ldots \qquad (1)$$

Por tanto, al final de n años, el valor contable es:

$$C(1-d)^n = S$$

El valor de d (tasa de depreciación) puede ser un valor estimado o puede ser determinado de la relación $C(1-d)^n = S$ en cuyo caso es necesario utilizar logaritmos.

1 Ejemplo

Se estima que una máquina con costo de $ 4 540 tendrá una vida útil de 7 años y un valor de salvamento de $ 295. Determinar la tasa anual de depreciación y construya la tabla de depreciación correspondiente.

Solución:

$C = 4\,540$

$S = 295$

$n = 7$

$d = ?$

$$C(1-d)^n = S$$

$$4\,540(1-d)^7 = 295$$

$$(1-d)^7 = \frac{295}{4\,540}$$

$$(1-d)^7 = 0.064977$$

$$7 \log (1-d) = \log 0.064977$$

$$7 \log (1-d) = \bar{1}.187240$$

$$\log (1-d) = \frac{\bar{1}.187240}{7}$$

$$\log (1-d) = \bar{0}.169605$$

$$(1-d) = \text{antilog } \bar{0}.169605$$

$$(1-d) = 0.676698$$

$$-d = 0.676698 - 1$$

$$-d = -0.323302$$

$$d = 0.323302$$

$$d = 32.33 \%$$

Los valores contables al final de cada año se obtienen de la progresión geométrica (1), es decir:

1er. año:	$4\,540\ (0.676698)$	=	3 072.21
2do. año:	$4\,540\ (0.676698)^2$	=	2 078.96
3er. año:	$4\,540\ (0.676698)^3$	=	1 406.82

y así sucesivamente.

El cargo por depreciación para cualquier año es la diferencia entre el valor contable de ese año y el del año anterior.

El importe del fondo para depreciación al final de cada año es la suma de los cargos por depreciación efectuados ó la diferencia entre el costo original y el valor en libros del año en que se está valuando.

A continuación se presenta la tabla de depreciación.

TABLA DE DEPRECIACIÓN

AÑOS	CARGO POR DEPRECIACION	IMPORTE DEL FONDO PARA DEPRECIACIÓN	VALOR EN LIBROS AL FINAL DEL AÑO
0	4 540.00		
1	3 072.21	1 467.79	1 467.79
2	2 078.96	993.25	2 461.04
3	1 406.82	672.14	3 133.18
4	952.00	454.82	3 588.00
5	644.21	307.79	3 895.79
6	435.93	208.28	4 104.07
7	295.00	140.93	4 245.00

2 Ejemplo

Una máquina costó $ 8 000. La depreciación mensual al final de cualquier mes es calculada en 6 % del valor al comienzo del mes. Determinar el valor que tendrá la máquina al cabo de 36 meses de uso.

Solución:

Al finalizar el primer mes la máquina valdrá:

$$8\ 000\ (1 - 0.06) = 8\ 000\ (0.94) = \$\ 7\ 520$$

Al finalizar el segundo mes la máquina estará valuada en:

$$7\ 520\ (0.94) = \$\ 7\ 068.80$$

y así sucesivamente.

Si se desea encontrar el 36o. término de una progresión geométrica cuyo primer término es 7 520 y cuya razón es 0.94, entonces se tiene:

$$\ell = a\ r^{n-1}$$

$$\ell = 7\ 520\ (0.94)^{35}$$

$$\ell = \$\ 862.36$$

3 Ejemplo

Una máquina nueva cuesta \$ 6 244 y se deprecia hasta \$ 938 en 5 años.

a) Determinar la tasa de depreciación anual por el método de porcentaje fijo.

b) Determinar el valor contable al final del 3er. año.

Solución: a)

$C = 6\ 244$

$S = 938$

$n = 5$

$d = ?$

$$C\,(1 - d)^n = S$$

$$6\ 244\,(1 - d)^5 = 938$$

$$(1 - d)^5 = \frac{938}{6\ 244}$$

$$(1 - d)^5 = 0.150224$$

$$5 \log (1 - d) = \log 0.150224$$

$$5 \log (1 - d) = \bar{0}.823260$$

$$\log (1 - d) = \frac{\bar{0}.823260}{5}$$

$$\log (1 - d) = \bar{0}.164652$$

$$(1 - d) = \text{antilog } \bar{0}.164652$$

$$(1 - d) = 0.684459$$

$$-d = 0.684459 - 1$$

$$-d = -0.315541$$

$$d = 0.315541$$

$$d = 31.55\ \%$$

b) Al final de los 3 años, el valor contable es:

$$C = 6\,244\ (1-d)^3$$

$$\log C = \log 6\,244 + 3 \log (1 - 0.315541)$$

$$\log C = 3.795462 + 3 \log 0.684459$$

$$\log C = 3.795462 + 3\ (\bar{0}.164652)$$

$$\log C = 3.795462 + (\bar{0}.493956)$$

$$\log C = 3.795462 - 0.493956$$

$$\log C = 3.301506$$

$$C = \text{antilog } 3.301506$$

$$C = \$\ 2\,002.19$$

El término valor contable es también denominado valor en libros.

Se han discutido algunos métodos para la depreciación de activos tangibles. En cada uno de los métodos se constituye un fondo de depreciación para tener al final de la vida útil del activo la diferencia entre el costo original y el valor de salvamento en su caso.

Si la vida útil del activo es n años, el objetivo se alcanza por el método lineal efectuando n depósitos iguales anuales en un fondo de depreciación. Existen dos objeciones a este simple procedimiento.

La primera objeción está relacionada con el hecho de que la más cuantiosa depreciación de la mayoría de los activos ocurre durante el primer año de uso y posteriormente la depreciación decrece año tras año, mientras que por el método lineal se supone que es la misma para cada año.

Sin embargo esta objeción fué refutada mediante el método de porcentaje fijo o constante.

La segunda objeción proviene del hecho de que aún cuando el fondo de depreciación es normalmente utilizado como capital de trabajo por la compañía, no se -

acredita interés al fondo en ningún método. Entendiéndose por capital de trabajo el efectivo, las cuentas por cobrar y los inventarios.

Esta objeción se refutará con el método de fondo de amortización que a continuación se expone.

MÉTODO DE FONDO DE AMORTIZACIÓN

Sea C el costo original, S el valor de salvamento y n (años) la vida útil del activo.

Si i es la tasa efectiva ganada por el fondo de depreciación, el depósito anual R en el fondo estará dado por:

$$R \; S_{\overline{n}|i} = C - S$$

ó

$$R = (C - S)\left(\frac{1}{S_{\overline{n}|i}}\right)$$

En esta forma, el incremento anual al fondo será ahora la suma del cargo por depreciación anual R y del interés ganado por el fondo durante el año.

Exceptuando por la columna en la que se obtiene el valor en libros del activo, la tabla es la misma que para un fondo de amortización ordinario.

1 Ejemplo

Se estima que una máquina cuyo costo de nueva es $ 6 000 tendrá después de 7 años de uso un valor de salvamento de $ 600. Si el fondo de depreciación gana el 4 % efectivo, aplíquese el método de fondo de amortización para:

a) Determinar el depósito anual en el fondo.

b) Determinar el monto del fondo al término del 3er. año.

c) Elaborar una tabla de depreciación.

Solución:

a) $C = 6\,000$

$S = 600$

$n = 7$

$i = 0.04$

$R = ?$

$$R = \frac{S - C}{s_{\overline{n}|i}}$$

$$R = \frac{5\,400}{7.898294}$$

$$R = \$\ 683.69$$

b) Inmediatamente después del 3er. depósito el monto en el fondo de deprecia - ción es:

$$683.69\ s_{\overline{3}|0.04} = \$\ 2\,134.21$$

TABLA DE DEPRECIACIÓN

AÑOS	CARGO POR DEPRECIACIÓN	INTERESES SOBRE EL FONDO	INCREMENTO AL FONDO	IMPORTE DEL FONDO	VALOR EN LIBROS
0	0	0	0	0	6 000.00
1	683.69	0	683.69	683.69	5 316.31
2	683.69	27.35	711.04	1 394.73	4 605.27
3	683.69	55.79	739.48	2 134.21	3 865.79
4	683.69	85.37	769.56	2 903.27	3 096.73
5	683.69	116.13	799.82	3 703.09	2 296.91
6	683.69	148.12	831.81	4 534.90	1 465.10
7	683.69	181.40	865.09	5 399.99	600.01

El error de $ 0.01 en el valor en libros final es debido al redondeo de todas las cifras a dos decimales.

Una de las ventajas de utilizar el método de fondo de amortización es debido a que el interés ganado por el fondo de depreciación cada año da como resultado otra característica objetable al método lineal ya que el importe del fondo de depreciación se incrementa en cantidades crecientes cada año.

AGOTAMIENTO

Ciertos recursos productivos naturales como las minas, pozos petroleros, regiones forestales y fuentes de gas natural, proporcionan ingresos durante una temporada, agotándose después.
Este consumo gradual de un recurso que no puede ser reemplazado se denomina agotamiento.
El ingreso procedente de un bien productivo de este tipo no debe únicamente proporcionar un beneficio anual sobre la inversión, sino además se podrá recuperar el costo original de dicho bien mediante un rendimiento en la constitución de un fondo de amortización llamado también fondo de reembolso menos cualquier valor de reventa o valor de salvamento que pueda obtenerse cuando los recursos naturales se hayan agotado.
Este es el único procedimiento que está de acuerdo con el principio del mantenimiento total del capital invertido.

1 Ejemplo

Una empresa compra una mina por $ 200 000. Durante los próximos 15 años se espera un beneficio anual de $ 30 000. Al término de este período, se espera poder vender el terreno en $ 10 000.
Esto significa que el valor de la propiedad es de $ 190 000. En este caso se supondrá que puede recuperarse el capital invertido efectuando depósitos periódicos en el fondo de reembolso que paga el 3 % efectivo. ¿ Qué rendimiento

sobre la inversión puede esperar la empresa?

Solución:

Se debe calcular en primer lugar la cuantía del depósito anual en el proceso de constitución del fondo de reembolso. De donde:

$$R = 190\ 000 \left(\frac{1}{S_{\overline{15}|0.03}} \right)$$

$$R = 190\ 000\ (0.053766)$$

$$R = \$\ 10\ 215.65$$

Esta cantidad debe restarse de los \$ 30 000 con el fin de amortizar el capital invertido.

Por lo tanto el beneficio neto será:

$$30\ 000 - 10\ 215.65 = \$\ 19\ 784.35$$

La tasa de rendimiento sobre la inversión será:

$$i = \frac{19\ 784.35}{200\ 000}$$

$$i = 0.0989$$

$$i = 9.9\ \%$$

Si C es el costo original, S el valor de reventa o valor de salvamento cuando se han agotado los recursos naturales, i la tasa de rendimiento sobre la inversión y r la tasa ganada en la constitución del fondo de reembolso.

De donde el beneficio anual será igual a:

$$\text{Beneficio Anual} = C\,i + (C - S) \left(\frac{1}{S_{\overline{n}|r}} \right)$$

En algunos casos, el inversionista sabe qué tasa de rendimiento desea obtener de su inversión, con lo cual el problema consiste en calcular el precio de compra que proporcione el beneficio deseado.

2 Ejemplo

Se espera que una cierta propiedad minera deje un beneficio anual neto de $ 40 000 durante los próximos 20 años, al término de los cuales se habrá agotado y tendrá un valor de reventa de $ 20 000. Determinar la cantidad que deberá pagar por la mina una empresa que desea obtener un rendimiento del 8 % sobre la inversión y puede constituir un fondo de reembolso al 3 %.

Solución:

$$40\,000 = C\,(0.08) + (C - 20\,000)\left(\frac{1}{S_{\overline{20}|0.03}}\right)$$

$$40\,000 = C\,(0.08) + 0.037215\,C - 744.31$$

$$40\,744.31 = 0.117215\ C$$

$$C = \frac{40\,744.31}{0.117215}$$

$$C = \$\ 347\,603.20$$

PROBLEMAS PROPUESTOS (DEPRECIACIÓN)

1. Encontrar el cargo por depreciación anual por el método lineal y preparar - una tabla que muestre el cambio anual de valor en libros de:

a) Una máquina cuyo costo fué de \$ 2 750 y se depreció en 5 años, alcanzando - el valor de salvamento de \$ 250.

b) Una máquina cuyo costo fué de \$ 85 000 y se depreció en 8 años, alcanzando un valor de salvamento de \$ 8 000.

Resp. a) X = \$ 500, b) X = \$9625

2. Una máquina cuyo costo de \$ 6 000 tiene un promedio de vida estimado en - 30 000 horas de operación y un valor de salvamento de \$ 800.

Las horas de uso durante los próximos 5 años fueron: 1 500, 2 000, 2 500, - 2 800, 2 900. Elaborar una tabla en la que se muestre el valor en libros al - fin de cada año de los 5 años.

Resp. X = \$ 0.02

3. Se estima que una máquina con costo de \$ 4 000 es capaz de producir 132 000 unidades antes de su reemplazo y que después tendrá un valor de salvamento de \$ 500. Las unidades producidas durante cada uno de los 4 primeros años fueron: 14 000, 18 000, 17 500, 16 800.

Elaborar una tabla en la que se muestre el valor en libros al fin de cada uno de los 4 años.

Resp. X = \$ 0.03

4. Un edificio tiene un costo de \$ 4 850 000. Al final de cada año, los propietarios deducen de su valor determinado al principio del año el 10 % por concepto de depreciación. Determinar el valor del edificio al final de 25 años.

Resp. Valor en libros = \$ 348 180.52

5. Un motor con costo inicial de \$ 22 300 se deprecia a la tasa del 8.5 % - anual. Determinar su valor contable al final del 9o. año.

Resp. S = \$ 10 025.24

6. A una locomotora con costo de \$ 35 500 se le ha estimado un valor de salvamento de \$ 2 000 y una vida probable de 25 años. Determinar:

a) la tasa de depreciación anual

b) el valor en libros al final del 18o. año

c) el cargo por depreciación del 22o. año

Resp. a) d = 10.86 %, b) V. en libros = \$ 4 475.24, c) X = \$ 344.40

7. Una cierta máquina cuyo costo es de \$ 85 000, se estima que tendrá una vida útil de 15 años y al término de dicho período un valor de salvamento de \$ 200. Preparar una tabla de depreciación utilizando el método de fondo de amortización con intereses del 6 % y determinar el valor en libros al término del 10o. año.

Resp. Valor en libros = \$ 3 799.86, R = \$ 356.59

8. La compañía Z obtiene un préstamo de \$ 10 000 por 5 años al 6 % convertible semestralmente. Con el objeto de pagar el capital al término de 5 años, se establece en una cuenta de ahorros que paga el 4 % convertible semestralmente un fondo de amortización mediante depósitos semestrales iguales, el primero con vencimiento en 6 meses. Determinar:

a) el costo semestral de la deuda

b) la tasa nominal convertible semestralmente que la compañía Z está pagando para liquidar la deuda.

Resp. a) X = \$ 1 213.27, b) $i^{(2)}$ = 7.36 %

9. El Sr. M paga \$ 25 000 por los derechos sobre la patente de un invento por 10 años. Se puede acumular un fondo de amortización al 3.5 %. ¿ Qué ingreso anual le producirá el 8 % sobre la inversión?

Resp. R = \$ 2 213.10

10. Una empresa constructora precisa de arena y gravilla y está estudiando la adquisición de una propiedad a la venta por \$ 45 000. Se estima que dicha pro-

piedad producirá un beneficio neto anual de $ 7 000 durante 10 años, al término de los cuales su valor de reventa se estima en $ 5 000. Si la empresa puede constituir un fondo de amortización de capital al 3 % efectivo anual. Determinar la tasa de rendimiento que puede esperarse de esta inversión.

Resp. i = 7.8 %

11. Se espera que una empresa produzca un beneficio neto de $ 20 000 al año durante 15 años a cuyo término tendrá muy poco o ningún valor de salvamento. Determinar lo que puede pagar una empresa por esta cantera; se desea obtener una tasa del 8 % sobre el capital invertido y puede constituir un fondo al 2.5 % para amortizar el capital.

Resp. C = $ 147 300.00

12. Se estima que una mina producirá un beneficio anual neto de $ 35 000, durante los próximos 15 años, quedando sin valor al término de dicho período. Si el fondo de reembolso gana el 5.5 % efectivo encontrar el precio de compra que proporcione un rendimiento del 6 %.

Resp. C = $ 334 526.16

13. Resolviendo el ejemplo anterior en la suposición de que al término de 20 años la propiedad puede ser vendida en $ 8 000.

Resp. S = $ 397 269.16

14. Se estima que una mina tendrá un beneficio anual neto de $ 755 000 en los próximos 15 años al término de los cuales podrá venderse en $ 55 000. Determinar el incremento anual que obtendría un comprador sobre su inversión si paga $ 2 780 000 por la mina y el fondo de reembolso se acumula al 8 %.

Resp. i = 23.54 %

BONOS

Cuando una empresa privada o pública necesita crédito durante un período largo de tiempo, puede suceder que la cantidad precisada sea tan elevada que no sea posible obtenerla en un banco único u otro tipo de prestamista.

Para hacer frente a esta situación, una posibilidad es la de emitir obligaciones o de bonos accesibles a individuos, compañías de seguros y otros inversionistas, de tal manera que, el comprador de una obligación o de un bono presta dicho dinero a la entidad que la ha emitido.

En consecuencia las obligaciones o los bonos son títulos de crédito que representan la participación de quienes los poseen en crédito o préstamo colectivo a cargo de la negociación que los emitió.

Las obligaciones o los bonos pueden ser nominativos, al portador o nominativos con cupones al portador; por ley deben ser emitidos en denominaciones de $ 100 ó de sus múltiplos.

Los títulos de obligaciones deben indicar, entre otras cosas, el importe de la emisión, el número y el valor nominal de las obligaciones, el interés pactado, el término señalado para el pago de intereses y del capital, así como también los plazos y las condiciones y forma en que éstas se han de amortizar o de redimir.

Al igual que las acciones, las obligaciones salen al mercado a un valor que puede ser inferior, superior o igual al valor nominal. Esto hace que la tasa nominal de interés se afecte y resulte más o menos atractiva, dependiendo del efecto.

Una obligación se diferencía de una acción en que el obligacionista es un acreedor con derecho a un interés fijado de antemano, mientras el accionista es un socio con derecho a una participación en los beneficios, por lo que el primero no tiene intervención en la administración ni en las juntas generales.

En caso de liquidación de una sociedad, las obligaciones deben ser pagadas íntegramente por la negociación, antes de cualquier reparto del capital entre los socios.

Por lo tanto, la empresa emisora no podrá reducir su capital sino en proporción al reembolso que haya sobre las obligaciones que emitió. Tampoco podrá cambiar su objeto, domicilio y denominación sin el consentimiento de la asamblea general de obligacionistas.

Dentro del mercado de valores, se conocen a las obligaciones como valores de renta fija.

Otro tipo de obligaciones lo constituyen los bonos hipotecarios emitidos por instituciones de crédito que maneja hipotecas, estando cubiertas con activos de la institución emisora. Los bonos hipotecarios también pueden ser nominativos, al portador o nominativos con cupones al portador, emitidos en denominaciones de $ 100 ó de sus múltiplos. Los cupones sirven para el pago de intereses, y en su caso para las amortizaciones parciales.

Características similares poseen las cédulas hipotecarias; se diferencian por ser títulos de crédito emitidos por particulares, con la intervención y garantía de una institución de crédito hipotecaria.

Los bonos financieros, muy usados en México hasta 1976, son títulos de crédito emitidos por instituciones financieras con garantía específica de crédito o de valores. Sus características son similares a las descritas para los bonos hipotecarios.

En realidad se hace referencia breve al tipo de valores como los bonos y las cédulas hipotecarias, los bonos financieros y los certificados de participación, porque debido a las modificaciones en los sistemas de captación de recursos en el sistema bancario mexicano, este tipo de medio de canalización de fondos cada día es más reducido, y algunas de ellas prácticamente han desaparecido en el mercado, no solamente por disposición legal sino también porque la oferta y la demanda de valores resultan poco atractivas como consecuencia del interés nominal que ofrecían, y el cual variaba entre 8 y 10 % anual antes de deducir impuestos.

Sin embargo para fines teóricos se analizarán los bonos que se presentan a continuación.

DEFINICIONES

Un bono es un título de crédito a cargo de la negociación que lo emite o coloca en circulación y se compromete por escrito en reintegrar una suma de dinero llamada valor de redención y de ciertos pagos periódicos denominados pagos de intereses después de la fecha de emisión o compra del bono por un inversionista hasta la fecha de redención.

Un bono consta de los elementos siguientes:

1. Valor nominal: se refiere a la denominación del bono y como se dijo anteriormente en múltiplos de $ 100.

2. Valor de redención: es la suma de dinero que se reintegra en la fecha de redención.

3. Fecha de redención: es la fecha determinada en la cual se pagará el valor de redención.

4. Pago de intereses: son pagos periódicos que se pagan después de su emisión o de su compra hasta la fecha de redención.

5. Tasa de interés: es la tasa de interés que se paga por período estipulada -

en el bono.

En un bono cuando se expresa:

" 5 % pagadero el 1o. de abril y el 1o. de octubre ", se leerá abreviando de la siguiente manera: " 5 %, AO ".

Un bono generalmente se redime en una fecha en la cual son pagaderos los intereses.

Cuando el valor de redención y el valor nominal son idénticos se dice que el bono es redimible a la par. En cualquier otro caso, el valor de redención se expresará como un porcentaje del valor nominal omitiendo las palabras " por ciento ". Es decir, un bono de $ 1 000 redimible o con un valor de redención de $ 1 080, se expresará diciendo: " un bono de $ 1 000 redimible a 108 ".

1 Ejemplo

Un bono de $ 800, 12 %, AJOE (es decir, abril, julio, octubre y enero) redimible el 1o. de enero de 1984 a 104. Encontrar el valor de redención del bono y el valor de los pagos de intereses.

Solución:

a) Valor de redención: el pago 800 (1.04) = $ 832 redimible el 1o. de enero de 1984.

b) Pagos de intereses: pagos trimestrales de 800 (0.03) = $ 24, los días 1o. de abril, 1o. de julio, 1o. de octubre y el 1o. de enero de cada año después de su emisión hasta el 1o. de enero de 1984 inclusive.

PRECIO DEL BONO EN UNA FECHA DE PAGO DE INTERESES

Considerando que un inversionista compra un bono en una fecha de pago de intereses, adquiere por lo tanto el derecho de recibir ciertos pagos futuros. Sin embargo no recibirá el pago de interés vencido en la fecha de la compra.

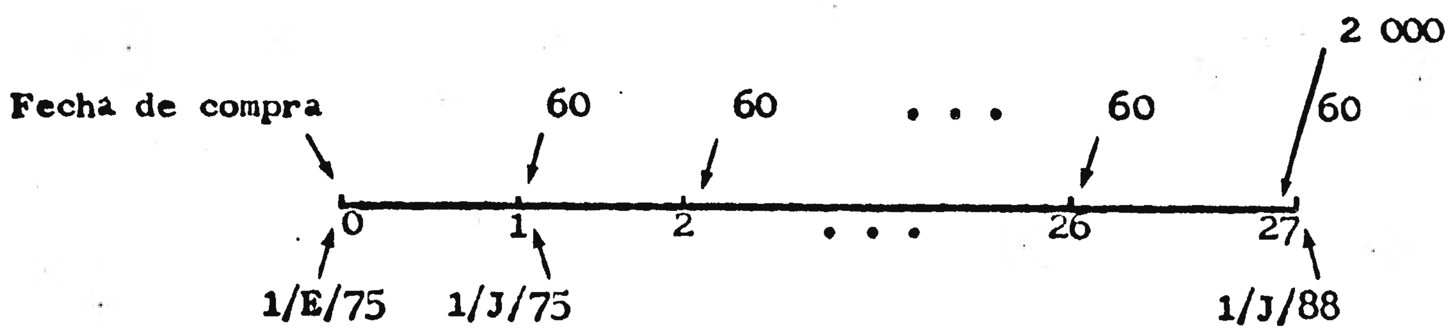
2 Ejemplo

Un inversionista compró el 1o. de enero de 1975 un bono de \$ 2 000, 6 %, EJ, redimible a la par el 1o. de julio de 1988. Encontrar el valor de redención y el importe de los pagos que recibirá hasta la fecha de redención.

Solución:

Recibirá \$ 2 000 el 1o. de julio de 1988 y 27 pagos semestrales de 2 000 (0.03) = \$ 60 cada uno, el primero con vencimiento el 1o. de julio de 1975 y el último el 1o. de julio de 1988.

Visto en una línea de tiempo:



Si un bono redimible a la par es comprado en una fecha de pago de intereses a su valor nominal, el inversionista ganará precisamente la tasa de interés estipulada en el bono.

Si se desea obtener una tasa mayor, debe comprar el bono a un precio más bajo que el valor nominal; si está dispuesto a ganar una tasa menor, estará dispuesto a pagar un precio arriba del valor nominal.

3 Ejemplo

Un bono de \$ 1 200, 8 %, FA, redimible a la par el 1o. de agosto de 1998, es comprado el 1o. de febrero de 1978. Con el propósito de ganar el 6 % convertible semestralmente, encontrar el precio de compra P.

Solución:

El comprador recibirá \$ 1 200 el 1o. de agosto de 1998 y 40 pagos semestrales - de 1 200 (0.04) = \$ 48 cada uno, el primero el 1o. de agosto de 1978.

Tomando como fecha focal el 1o. de febrero de 1978, el precio de compra P será:

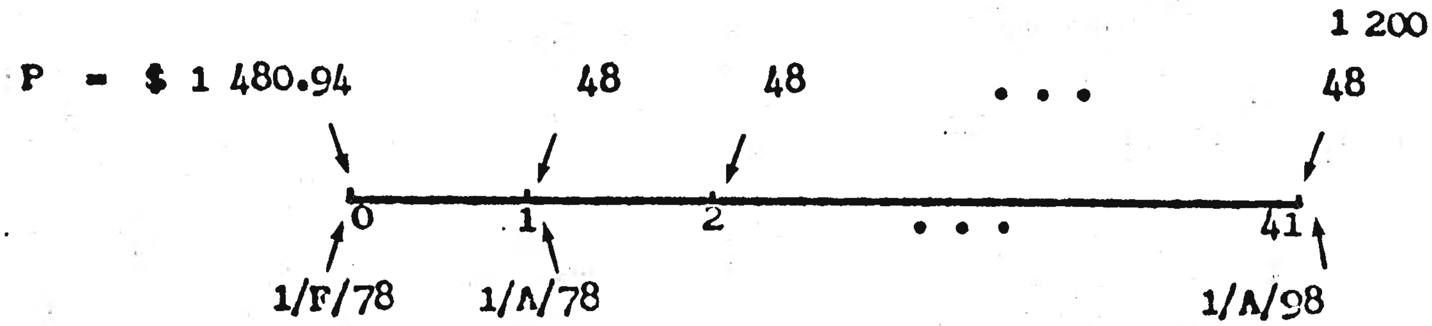
$$P = 1\,200\,(1.03)^{-41} + 48\, a_{\overline{41}|0.03}$$

$$P = 1\,200\,(0.297628) + 48\,(23.412399)$$

$$P = 357.15 + 1\,123.79$$

$$P = \$\,1\,480.94$$

Visto en una línea de tiempo:



PRECIO DE COMPRA

Se utilizará la siguiente notación. Sean:

F = el valor nominal de un bono

V = el valor de redención de un bono

r = la tasa de interés que es pagada por período de interés del bono

n = el número de períodos de interés desde la fecha de compra (suponiendo - que coincide con una fecha de pago de intereses) hasta la fecha de redención.

i = la tasa que gana el inversionista por período. Es la tasa que realmente - produce el bono.

P = precio de compra de un bono

El precio de compra P está dado por:

$$P = V(1+i)^{-n} + F\,r\; a_{\overline{n}|i} \qquad \cdots (1)$$

Dicha fórmula requerirá el uso de dos tablas. Mientras que las siguientes dos fórmulas:

$$P = \frac{F\,r}{i} + \left(V - \frac{F\,r}{i}\right)(1+i)^{-n} \qquad \cdots (2)$$

$$P = V + (F\,r - V\,i)\; a_{\overline{n}|i} \qquad \cdots (3)$$

requerirán únicamente el uso de una sola tabla. Se emplearán en forma opcional.

Se demostrarán a continuación las fórmulas (2) y (3).

Por demostrar:

$$P = \frac{F\,r}{i} + \left(V - \frac{F\,r}{i}\right)(1+i)^{-n}$$

Por hipótesis: $P = V(1+i)^{-n} + F\,r\; a_{\overline{n}|i}$

Desarrolando $a_{\overline{n}|i}$: $P = V(1+i)^{-n} + F\,r\left[\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$

Distribuyendo $\frac{1}{i}$: $P = V(1+i)^{-n} + \dfrac{F\,r}{i} - \dfrac{F\,r}{i}(1+i)^{-n}$

Factorizando en términos de $(1+i)^{-n}$:

$$P = \frac{F\,r}{i} + \left(V - \frac{F\,r}{i}\right)(1+i)^{-n}$$

Por demostrar:

$$P = V + (F\,r - V\,i)\; a_{\overline{n}|i}$$

Por hipótesis: $P = V(1+i)^{-n} + F\,r\; a_{\overline{n}|i}$

Sumando $0 = V - V$: $P = V - V + V(1+i)^{-n} + F\,r\; a_{\overline{n}|i}$

Agrupando:

$$P = V - V\left(1 - (1+i)^{-n}\right) + F\,r\, a_{\overline{n}|i}$$

Multiplicando y dividiendo por i:

$$P = V - V\,i\left(\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}\right) + F\,r\, a_{\overline{n}|i}$$

$$P = V - V\,i\, a_{\overline{n}|i} + F\,r\, a_{\overline{n}|i}$$

Factorizando en términos de $a_{\overline{n}|i}$:

$$P = V + (F\,r - V\,i)\, a_{\overline{n}|i}$$

4 Ejemplo

Un bono de $ 3 000, 4.5 %, EJ, es redimible a 109 el 1o. de enero de 1987. Encontrar el precio de compra el 1o. de enero de 1978 que reditúe el 6 % convertible semestralmente utilizando las fórmulas (2) y (3).

Solución:

$F = 3\,000$

$V = 3\,000\,(1.09) = 3\,270$

$r = \dfrac{0.045}{2} = 0.0225$

$i = \dfrac{0.06}{2} = 0.03$

$n = 18$

$P = ?$

$$P = \frac{F\,r}{i} + \left(V - \frac{F\,r}{i}\right)(1+i)^{-n} \quad \ldots (2)$$

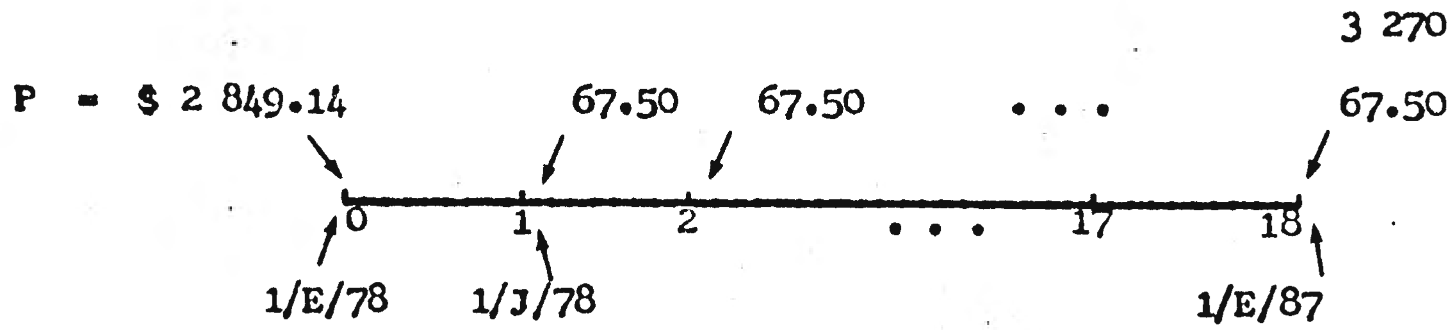
$$P = \frac{3\,000\,(0.0225)}{0.03} + \left[3\,270 - \left[\frac{3\,000\,(0.0225)}{0.03}\right]\right](1 + 0.03)^{-18}$$

$$P = 2\,250 + (3\,270 - 2\,250)\,(0.587395)$$

$$P = 2\,250 + 599.14$$

$$P = \$\,2\,849.14$$

Visto en una línea de tiempo:



Siendo:

$$P = V + (F\,r - V\,i)\, a_{\overline{n}|i} \qquad \ldots \quad (3)$$

$$P = 3\,270 + \left[3\,000\,(0.0225) - 3\,270\,(0.03)\right] a_{\overline{18}|0.03}$$

$$P = 3\,270 + (67.50 - 98.10)\,(13.753512)$$

$$P = 3\,270 + (-\,30.60)\,(13.753512)$$

$$P = 3\,270 - 420.86$$

$$P = \$\,2\,849.14$$

COMPRA A PREMIO O COMPRA A DESCUENTO

Un bono es comprado a premio si su precio de compra P es mayor que su valor de redención V. El premio es $P - V$. Por otra parte, un bono es comprado a descuento si su precio de compra P es menor que su valor de redención V. El descuento es $V - P$.

El bono del ejemplo 3 fué comprado a premio. El premio es igual a:

$P - V = 1\,480.94 - 1\,200 = \$\,280.94$, y en el bono del ejemplo 4 fué comprado a descuento. El descuento es igual a:

$$V - P = 3\ 000 - 2\ 849.14 = \$\ 150.86$$

VALOR EN LIBROS

El valor en libros de un bono en cualquier fecha es la suma invertida en el bono en dicha fecha.

El valor en libros de un bono en la fecha de su compra (suponiendo que coincide con una fecha de pago de intereses) es el precio de compra.

El valor en libros en la fecha de redención es el valor de redención.

El cambio del valor en libros durante la vida del bono se muestra con claridad construyendo una tabla de inversión.

1 Ejemplo

Un bono de \$ 2 000, 8 %, EAJO, redimible a la par el 1o. de enero de 1978 es comprado el 1o. de abril de 1977 y para que reditúe el 12 % convertible trimestralmente encuentre el precio de compra. Construya la tabla de inversión.

Solución:

$$F = V = 2\ 000$$

$$i = \frac{0.12}{4} = 0.03$$

$$r = \frac{0.08}{4} = 0.02$$

$$n = 3$$

$$P = ?$$

$$P = V(1+i)^{-n} + Fr\, a_{\overline{n}|i}$$

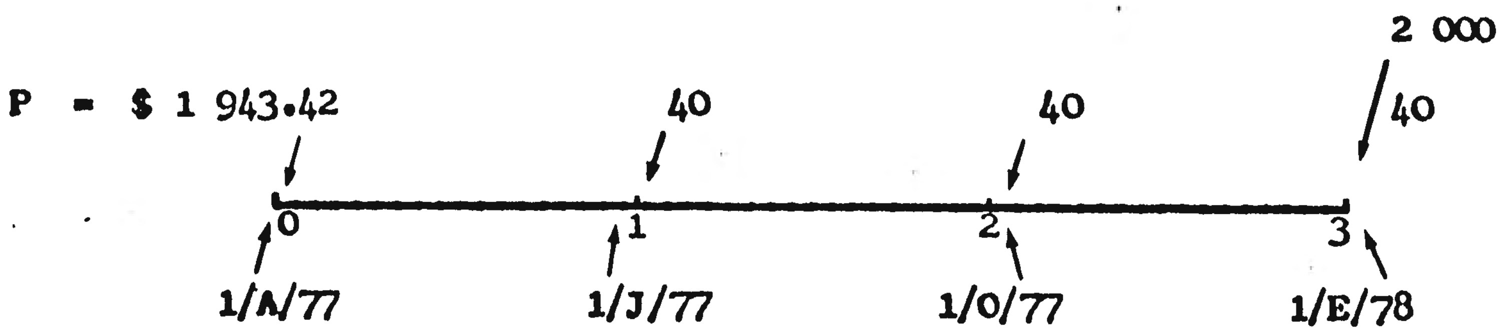
$$P = 2\ 000\,(1.03)^{-3} + 2\ 000\,(0.02)\, a_{\overline{3}|0.03}$$

$$P = 2\,000\,(0.915141) + 40\,(2.828611)$$

$$P = 1\,830.28 + 113.14$$

$$P = \$\,1\,943.42$$

Visto en una línea de tiempo:



Construcción de la Tabla de Inversión:

El 1o. de abril de 1977 el valor en libros del bono es $ 1 943.42 y al término del primer período de intereses, el interés vencido sobre el valor en libros es 1 943.42 (0.03) = $ 58.30, mientras que el pago de intereses del bono es de $ 40. Por lo tanto, 58.30 - 40 = $ 18.30 del interés vencido no se cobra, por lo que puede decirse que el inversionista tiene $ 18.30 más invertidos en el bono que lo que tenía al principio del período. El nuevo valor en libros del bono es 1 943.42 + 18.30 = $ 1 961.72. Al final del segundo período de interés, el interés vencido será 1 961.72 (0.03) = $ 58.85 y siendo el pago de intereses del bono de $ 40, el nuevo valor en libros será 1 961.72 + 18.85 = $ 1 980.57 y así sucesivamente.

TABLA DE INVERSIÓN

PERÍODO	VALOR EN LIBROS AL PRINCIPIO DEL PERÍODO	INTERESES VENCIDOS SOBRE EL VALOR EN LIBROS	PAGO DE INTERESES DEL BONO	CAMBIO DEL VALOR EN LIBROS
1	1 943.42	58.30	40	18.30
2	1 961.72	58.85	40	18.85
3	1 980.57	59.42	40	19.42
4	1 999.99			
TOTALES		176.57	120	56.57

El valor en libros al principio de cualquier período es el precio al cual el bono debe ser comprado para que produzca el rendimiento deseado por el inversionista. Esto se puede calcular en forma independiente como un método de comprobación de la tabla de inversión.

En el ejemplo anterior el bono fué comprado con descuento y generalmente se utiliza el término acumulando el descuento para que el valor en libros se convierta en el valor de redención.

A continuación se analizará un ejemplo en el cual el bono es comprado a premio.

2 Ejemplo

Construir una tabla de inversión para que un bono de $ 2 000, 6 %, MS, redimible a 104 el 1o. de septiembre de 1990, comprado el 1o. de marzo de 1988 para que reditúe el 5 % convertible semestralmente.

Solución:

$V = 2\ 080$

$r = \frac{0.06}{2} = 0.03$

$i = \frac{0.05}{2} = 0.025$

$n = 5$

$P = ?$

$$P = V(1+i)^{-n} + F r\, a_{\overline{n}|i}$$

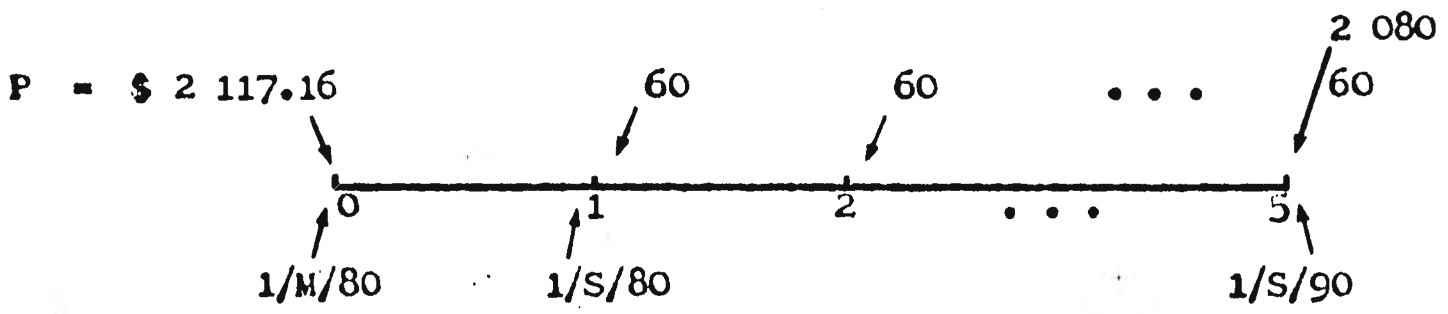
$$P = 2\ 080\,(1.025)^{-5} + 60\, a_{\overline{5}|0.025}$$

$$P = 2\ 080\,(0.883854) + 60\,(4.645828)$$

$$P = 1\ 838.41 + 278.75$$

$$P = \$\ 2\ 117.16$$

Visto en una línea de tiempo:



Construcción de la tabla de inversión.

El valor en libros en la fecha de la compra es $ 2 117.16. Al término del primer período, el interés vencido sobre dicho valor en libros, a la tasa del inversionista será 2 117.16 (0.023) = $ 52.93, mientras que el pago de intereses del bono es de $ 60. La diferencia 60 - 52.93 = $ 7.07 es para amortizar el capital; en consecuencia, al principio del segundo período el valor en libros del bono se reduce a 2 117.16 - 7.07 = $ 2 110.09 y así sucesivamente.

TABLA DE INVERSIÓN

PERÍODO	VALOR EN LIBROS AL PRINCIPIO DEL PERÍODO	INTERÉS VENCIDO SOBRE EL VALOR EN LIBROS	PAGO DE INTERÉS DEL BONO	CAMBIO EN EL VALOR EN LIBROS
1	2 117.16	52.93	60	7.07
2	2 110.09	52.75	60	7.25
3	2 102.84	52.57	60	7.43
4	2 095.41	52.38	60	7.62
5	2 087.80	52.20	60	7.80
6	2 080.00			
TOTALES		262.83	300	37.17

PRECIO DEL BONO COMPRADO ENTRE FECHAS DE PAGO DE INTERESES

Para encontrar el precio de compra de un bono entre dos fechas de pago de -

intereses, que produzca un cierto rendimiento se siguen los siguientes pasos:

1. Se obtiene el precio de compra en la última fecha que se pagó intereses.

2. Se acumula la suma encontrada en (1) a interés simple (aplicando la tasa de interés del comprador) hasta la fecha de la compra.

1 Ejemplo

Un bono de $ 2 000, 5 %, EJ, redimible a 106 el 1o. de enero de 1984, se compra el 15 de noviembre de 1974 esperando un rendimiento del 9 % convertible semestralmente. Encontrar el precio de compra P_o y el valor en libros del bono.

Solución:

$F = 2\,000$

$V = 2\,120$

$r = \dfrac{0.05}{2} = 0.025$

$i = \dfrac{0.09}{2} = 0.045$

$P_o = ?$

La fecha de pago de intereses inmediata anterior a la fecha de compra (15 de noviembre de 1974) es el 1o. de julio de 1974.

Sea P_1 el precio de compra el 1o. de julio de 1974 con un rendimiento del 6 % convertible semestralmente y es:

$$P = V\,(1 + i)^{-n} + F\,r\; a_{\overline{n}|i}$$

$$P_1 = 2\,120\,(1.045)^{-19} + 50\; a_{\overline{19}|0.045}$$

$$P_1 = 2\,120\,(0.433301) + 50\,(12.593293)$$

$$P_1 = 918.59 + 629.66$$

$$P_1 = \$\,1\,548.25$$

Esta cantidad obtenida se acumula del 1o. de julio de 1974 al 15 de noviembre de 1974 (137 días exactamente) al 6 % de interés simple. Por lo tanto, sea P_o el precio de compra en la fecha 15 de noviembre de 1974.

$$P_o = P_1 \left[1 + 0.09\left(\frac{137}{360}\right)\right]$$

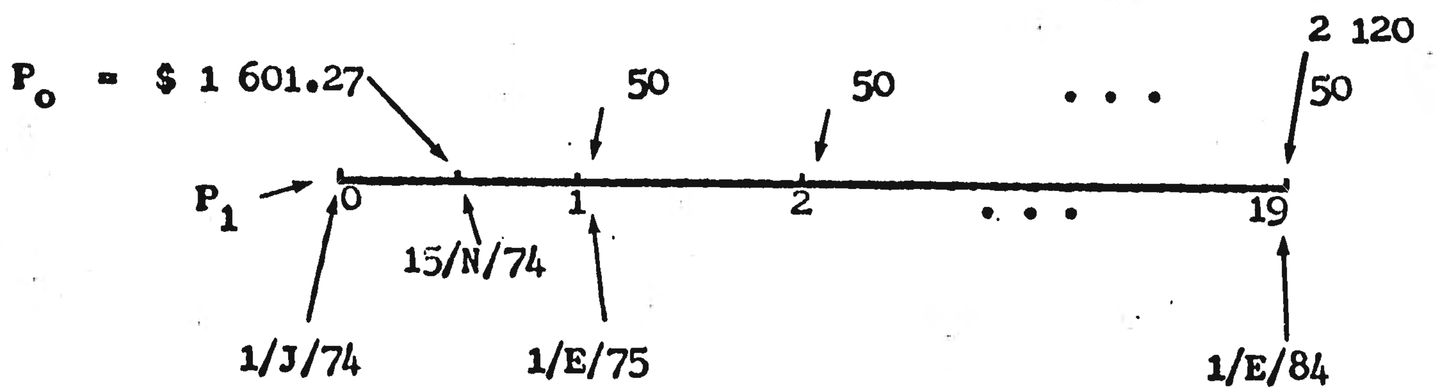
$$P_o = 1\ 548.25 \quad [1 + 0.09\ (0.380555)]$$

$$P_o = 1\ 548.25 \quad (1 + 0.034249)$$

$$P_o = 1\ 548.25 \quad (1.034249)$$

$$P_o = \$\ 1\ 601.27$$

Visto en una línea de tiempo:



El valor en libros del bono el 15 de noviembre de 1974 no es el precio de compra. El vendedor del bono lo ha conservado por 137 días después del último pago de intereses y por tanto, está obligado a participar del siguiente pago de intereses.

Esta parte fraccionada del pago de intereses, $\frac{(50)137}{180} = \$\ 37.05$ es conocido como interés redituable.

El comprador debe considerar que este interés redituable está incluido el precio de compra, por lo que el valor en libros del bono al 15 de noviembre de 1974 será:

Valor en libros = Precio de compra − Interés Redituable

Siendo: L = Valor en libros, P = Precio de compra, e I = Interés redituable, entonces:

$$L = P - I$$

$$L = 1\,601.27 - 37.05$$

$$L = \$\,1\,564.22$$

2º Ejemplo

Un bono de \$ 3 000, 5 %, MN, redimible el 1o. de noviembre de 1998 a la par, - es comprado el 31 de mayo de 1964 para que reditúe el 8 % convertible semes - tralmente. Encontrar el precio de compra P_o y el valor en libros en dicha fecha.

Solución:

$F = V = 3\,000$

$r = \dfrac{0.05}{2} = 0.025$

$i = \dfrac{0.08}{2} = 0.04$

$P_o = ?$

En consecuencia, la fecha de pago de interés inmediata anterior a la fecha de compra (31 de mayo de 1964) es el 1o. de mayo de 1964.

Sea P_1 el precio de compra en dicha fecha, con un rendimiento del 8 % conver - tible semestralmente:

$$P_1 = 3\,000\,(1.04)^{-69} + 3\,000\left(\frac{0.05}{2}\right) a_{\overline{69}|0.04}$$

$$P_1 = 3\,000\,(0.066788) + 75\,(23.330295)$$

$$P_1 = 200.36 + 1\,749.77$$

$$P_1 = \$\,1\,950.13$$

Al 31 de mayo de 1964 (30 días exactamente) el precio de compra es:

$$P_o = 1\,950.13 \left[1 + 0.08 \left(\frac{30}{360} \right) \right]$$

$$P_o = \$\,1\,963.13$$

El interés redituable del 1o. de mayo de 1964 al 31 de mayo de 1964 será:

$75 \left(\frac{30}{180} \right) = 12.50$ y el valor en libros requerido será:

$$L = 1\,963.13 - 12.50$$

$$L = \$\,1\,950.63$$

Solución alterna:

El valor en libros del bono al 1o. de mayo de 1964 que reditúa 8 % converti - ble semestralmente es:

$$3\,000\,(1.04)^{-69} + 75\, a_{\overline{69}|0.04} = \$\,1\,950.13$$

y en la fecha del siguiente pago de intereses el 1o. de noviembre de 1964 es:

$$3\,000\,(1.04)^{-68} + 75\, a_{\overline{68}|0.04} = \$\,1\,953.13$$

Interpolando entre dos cantidades se encuentra el valor en libros al 31 de mayo de 1964:

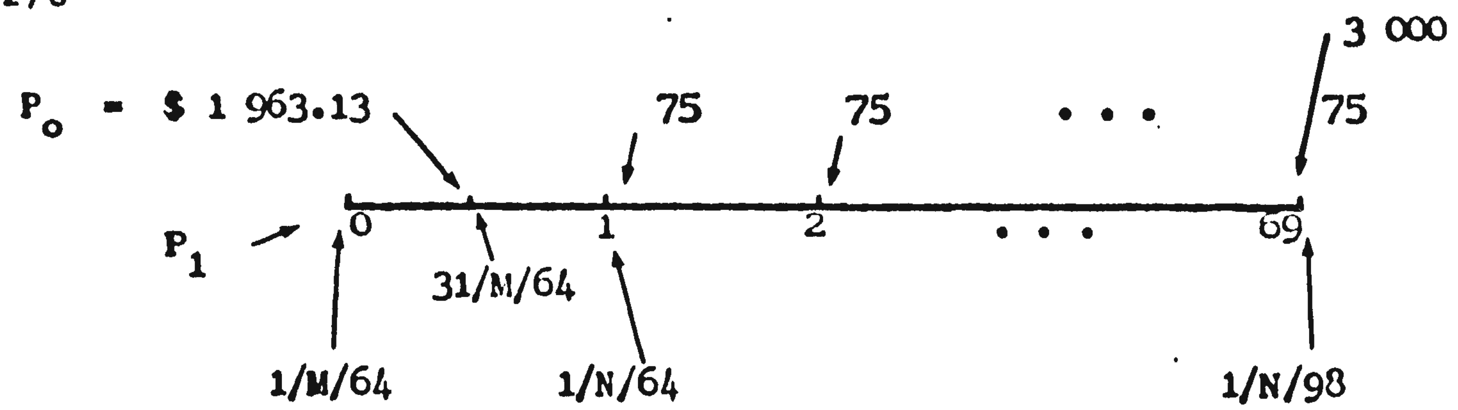
$$1\,950.13 + \left(\frac{75}{180} \right) (1\,953.13 - 1\,950.13) = \$\,1\,951.38$$

El precio de compra será:

$$P = 1\,951.38 + 12.50$$

$$P = \$\,1\,963.88$$

Visto en una línea de tiempo:



3 Ejemplo

Un bono de \$ 1 100, 8 %, JD, redimible a la par el 1o. de diciembre de 1982. Es comprado al 31 de julio de 1978 para que reditúe 6 % convertible semestralmente. Encontrar el precio de compra y el valor en libros en la fecha de la compra. Construir una tabla de inversión. Sea P_o el precio de compra.

Solución:

$F = V = 1\ 100$

$$r = \frac{0.08}{2} = 0.04$$

$$i = \frac{0.06}{2} = 0.03$$

$P_o = ?$

El precio de compra al 1o. de diciembre de 1978 que reditúe el 6 % convertible semestralmente es:

$$P_1 = 1\ 100\ (1.03)^{-9} + 44\ a_{\overline{9}|0.03}$$

$$P_1 = 1\ 100\ (0.766416) + 44\ (\ 7.786108)$$

$$P_1 = 843.05 + 342.58$$

$$P_1 = \$\ 1\ 185.63$$

El precio de compra al 31 de julio de 1978 es:

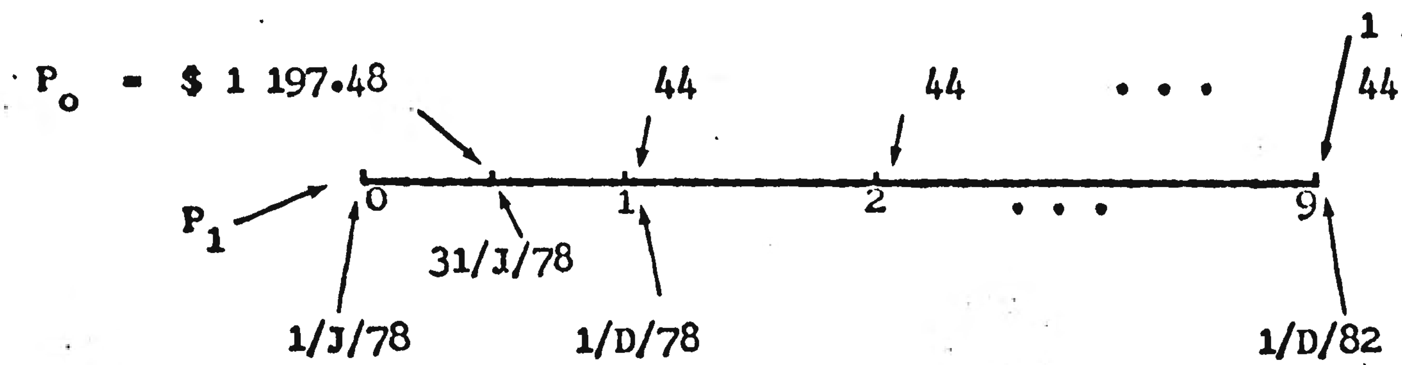
$$P_o = 1\ 185.63 \left[1 + 0.06 \left(\frac{60}{360}\right)\right]$$

$$P_o = \$\ 1\ 197.48$$

Mientras que el valor en libros es:

$$1\ 197.48 - 44 \left(\frac{60}{180}\right) = \$\ 1\ 182.81$$

Visto en una línea de tiempo:



La tabla se construye como en los problemas anteriores exceptuando en el primer renglón donde el valor en libros del día 31 de julio de 1978, o sea el día de la compra y también el interés vencido y el pago de intereses del bono serán multiplicados por 2/3 de período de interés; es decir, durante 120 días - $\frac{120}{180} = \frac{2}{3}$ que son los días de interés que el comprador obtiene del pago de interés anterior. La tabla de inversión quedará de la siguiente manera:

TABLA DE INVERSIÓN

PERÍODO	VALOR EN LIBROS AL PRINCIPIO DEL PERÍODO	INTERÉS VENCIDO SOBRE EL VALOR EN LIBROS	PAGO DE INTERESES DEL BONO	CAMBIO EN EL VALOR EN LIBROS
1	1 182.81	23.42	29.04	5.62
2	1 177.19	35.32	44.00	8.68
3	1 168.51	35.06	44.00	8.94
4	1 159.57	34.79	44.00	9.21
5	1 150.36	34.51	44.00	9.49
6	1 140.87	34.23	44.00	9.77
7	1 131.10	33.93	44.00	10.07
8	1 121.03	33.63	44.00	10.37
9	1 110.66	33.32	44.00	10.68
10	1 099.98			
TOTALES		298.21	381.04	82.83

PRECIO COTIZADO DE UN BONO

Los problemas que se han tratado anteriormente han sido encontrar el precio - que el comprador debe pagar por un bono dado, con el objeto que gane la tasa - de interés deseada.

Sin embargo, este problema es un tanto académico, ya que no hay seguridad que un bono en particular pueda ser comprado al precio requerido.
Por otra parte, el problema más importante es el de determinar la tasa de in - terés que obtendrá el comprador, si compra un bono determinado a un precio - dado y lo conserva hasta su redención.

Los bonos generalmente son ofrecidos al "precio cotizado", expresado como un porcentaje del valor nominal, sin embargo el término por ciento se omite.
Por ejemplo un bono de \$ 1 000 cuyo precio cotizado es de \$ 875 estará cotiza- do a $87\frac{1}{2}$.

El precio cotizado generalmente no es el precio que paga el comprador. El pre- cio cotizado es lo que anteriormente se ha designado como valor en libros.
El precio cotizado será el precio de compra únicamente si se ha cotizado en - una fecha de intereses.

El precio de compra (mas conocido como precio neto) es el precio cotizado mas el interés redituable. Siendo P el precio neto, L el precio cotizado e I el interés redituable, entonces: $P = L + I$

1 Ejemplo

Un bono de \$ 1 000, 4.5 %, FA, se redimirá el 1o. de febrero de 1985. Encon - trar el precio neto al 14 de mayo de 1978 si se ha cotizado a $96\frac{3}{4}$.

Solución:

El precio cotizado es de \$ 967.50 y el pago de intereses es de \$ 22.50 .

Del 1o. de febrero de 1988 al 14 de mayo de 1988 son 102 días exactamente, por lo tanto, el interés redituable es $\frac{102}{180}$ (22.50) = \$ 12.75 .

El precio neto será:

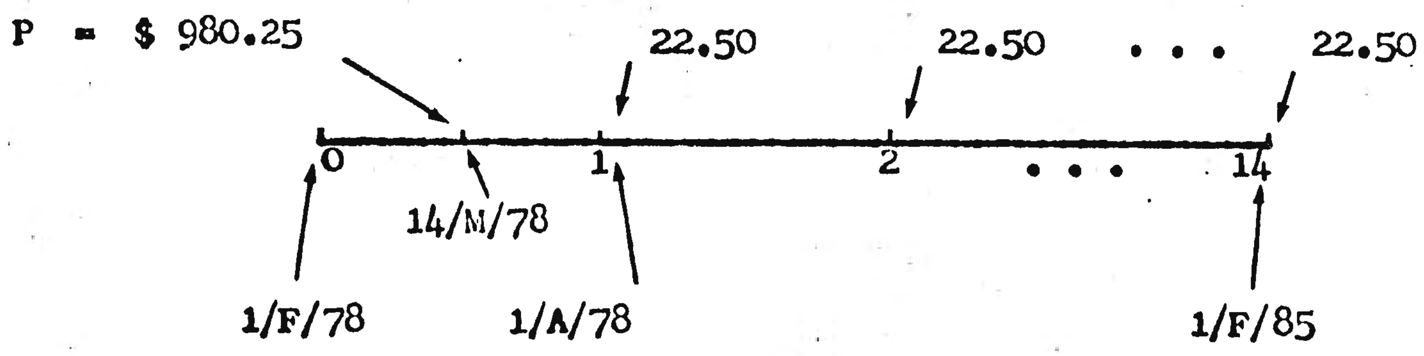
$$P = L + I$$

$$P = 967.50 + 12.75$$

$$P = \$\ 980.25$$

Debido a que el comprador paga el precio cotizado más el interés redituable, - el precio cotizado también se conoce como precio con intereses.

Visto en una línea de tiempo:



TASA DE REDITUABILIDAD

Las instituciones de inversiones utilizan tablas con las cuales puede ser obtenida la tasa de redituabilidad ya sea en forma directa o mediante interpolación.

Dichas tablas son muy voluminosas, con lo cual se darán dos métodos para obtener aproximadamente la tasa de redituabilidad.

1. Método de promedios: la tasa de redituabilidad por período de interés es aproximadamente igual a:

$$\frac{\text{producto promedio por período}}{\text{valor promedio en libros}}$$

1 Ejemplo

Un bono de $ 1 000, 8 %, JE, redimible a 110 el 1o. de enero de 1987, está cotizado en 125 al 1o. de julio de 1980. Encontrar por el método de promedios la tasa de redituabilidad suponiendo que es comprado en la fecha mencionada.

Solución:

En la fecha de compra, el valor en libros del bono es de $ 1 250 y en la fecha de redención será $ 1 100. El valor promedio en libros es:

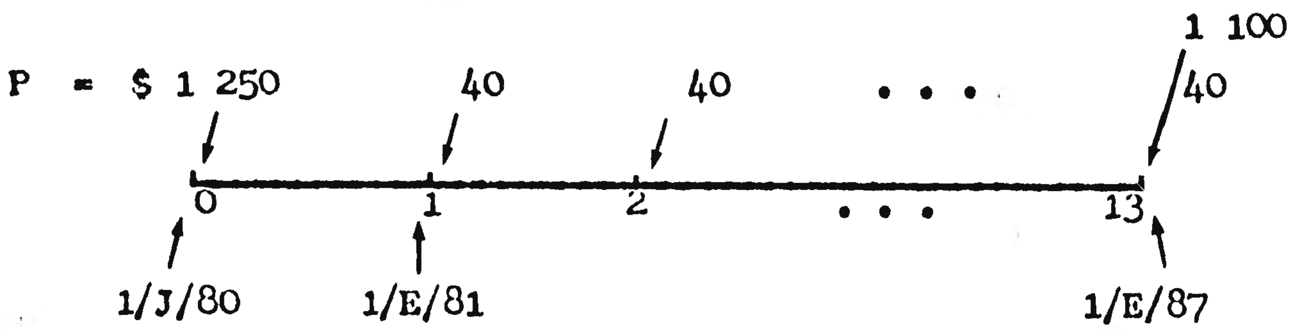
$$\frac{1}{2}\ (1\ 250\ -\ 1\ 100)\ =\ 1\ 175$$

En caso de que se conserve el bono hasta su redención el comprador recibirá 13 pagos de interés de $ 40 cada uno además del valor de redención de $ 1 100, esto es $520 + 1\ 100 = \$\ 1\ 620$.

Puesto que paga $ 1 250 por el bono, el producto total durante los 13 períodos de interés será de $1\ 620 - 1\ 250 = \$\ 370$ y el producto promedio por período es $\frac{370}{13} = \$\ 28.46$.

La tasa por período de interés es $\frac{28.46}{1\ 175} = 0.024221$ aproximadamente, y la tasa de redituabilidad será de 4.84 % convertible semestralmente.

Visto en una línea de tiempo:



2. Método de interpolación: este método requiere el precio de compra del bono sobre la base de dos tasas de interés, en tal forma que un precio sea menor y otro mayor al precio cotizado.

2 Ejemplo

Aproximar mediante el método de interpolación la tasa de redituabilidad del bono del problema anterior.

Solución:

En el problema anterior se obtuvo mediante una simple aproximación la tasa del 4.84 % convertible semestralmente.

Los precios de compra que reditúan el 4 % y el 5 % convertible semestralmente son; al 1o. de julio de 1980:

$$P = 1\,100\,(1.02)^{-13} + 40\, a_{\overline{13}|0.02}$$

$$P = 1\,100\,(0.773032) + 40\,(10.634955)$$

$$P = 850.33 + 425.39$$

$$P = \$\,1\,275.72$$

$$Q = 1\,100\,(1.025)^{-13} + 40\, a_{\overline{13}|0.025}$$

$$Q = 1\,100\,(0.725420) + 40\,(10.983184)$$

$$Q = 797.96 + 439.32$$

$$Q = \$\,1\,237.28$$

Interpolando entre estos dos valores, se tiene $P = \$\,1\,275.72$ es mayor al precio cotizado de \$ 1 250 y $Q = \$\,1\,237.28$ es menor a dicho precio.

Siendo: $i_1 = 0.02$, $i_2 = 0.025$, $A = 1\,250$, $A_1 = 1\,275.72$ y $A_2 = 1\,237.28$,

$$i = i_1 + \frac{A - A_1}{A_2 - A_1}\,(i_2 - i_1)$$

$$i = 0.02 + \left[\frac{1\,250 - 1\,275.72}{1\,237.28 - 1\,275.72}\right](0.025 - 0.02)$$

$$i = 0.02 + \left(\frac{-25.72}{-38.44}\right)(0.005)$$

$$i = 0.02 + 0.0034547$$

$$i = 0.0233$$

$$i = 2.33\ \%$$

La tasa de redituabilidad es de 4.69 % convertible semestralmente. Se podrá obtener mayor precisión utilizando logaritmos en los cálculos.

3 Ejemplo

Un bono de \$ 1 000, 3 %, EJ, redimible a la par el 1o. de julio de 1987, es comprado en \$ 952.50 el 1o. de julio de 1978. Determinar la tasa de redituabilidad convertible semestralmente.

Solución:

Puesto que al 1o. de julio de 1978 el precio de compra que reditúa el 3 % convertible semestralmente es de \$ 1 000, la tasa buscada será mayor. El precio que reditúa el 3.5 % convertible semestralmente es:

$$P = 1\,000\,(1.0175)^{-18} + 15\ a_{\overline{18}|0.0175}$$

$$P = 731.77 + 15\,(15.326862)$$

$$P = 731.77 + 229.90$$

$$P = \$\ 961.67$$

Por lo cual la tasa buscada está entre 3 y 3.5 % convertible semestralmente.

Interpolando se tiene:

Siendo, $i_1 = 0.015$, $i_2 = 0.0175$, $A = 952.50$, $A_1 = 1\,000$, y $A_2 = 961.67$, de donde la tasa buscada es:

$$i = 0.015 + \left(\frac{952.50 - 1\,000}{961.67 - 1\,000}\right)(0.0175 - 0.015)$$

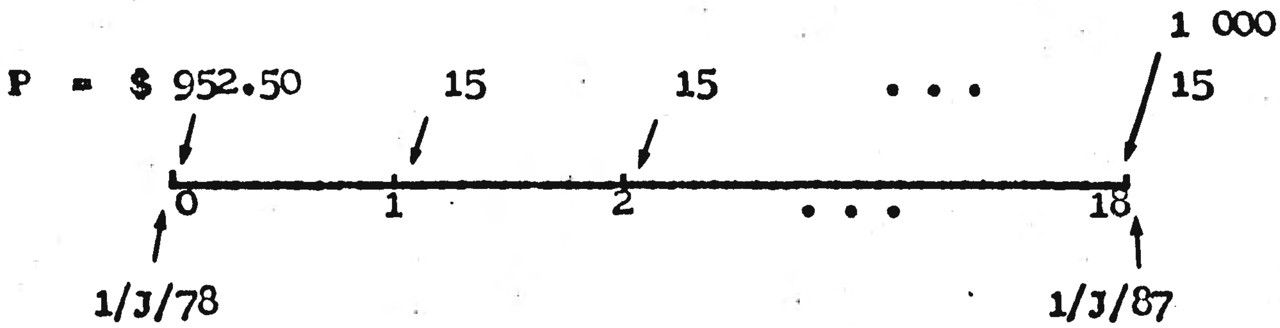
$$i = 0.015 + \left(\frac{-47.50}{-56.33}\right)(0.0025)$$

$$i = 0.015 + 0.002108$$

$$i = 0.017108$$

por tanto, la tasa de redituabilidad es de 3.42 % convertible semestralmente.

Visto en una línea de tiempo:



BONOS CON FECHA OPCIONAL DE REDENCIÓN

Con el objeto de estar en posición ventajosa de cualquier futura baja de la tasa de interés, generalmente las compañías emiten bonos previniendo que puedan ser redimidos antes de la fecha normal de redención. Al calcular el precio que se está dispuesto a pagar por ellos, el inversionista debe suponer la fecha de redención más desfavorable para él.

En consecuencia tendrá la certeza de obtener la redituabilidad deseada y quizá más aún.

1 Ejemplo

Un bono de $ 1 000, 8 %, MS, será redimido a la par el 1o. de septiembre de 1998, sin embargo puede ser redimido a la par el 1o. de septiembre de 1986 ó en cualquier fecha de pago de intereses posterior. Determinar:

a) el precio de compra y el valor en libros al 15 de mayo de 1980 que reditúe por lo menos el 5 % convertible semestralmente,

b) la utilidad del inversionista y

c) la tasa de redituabilidad si el bono es redimido el 1o. de septiembre de 1994.

Solución:

En este caso la tasa estipulada en el bono (8 %) excede la tasa de redituabilidad deseada (5 % convertible semestralmente), por lo que el bono será comprado a premio.

El valor en libros del bono se reduce gradualmente hasta que alcanza el valor nominal en la fecha de redención.

El inversionista debe calcular el precio con la suposición de que el bono será redimido en la fecha más próxima (1o. de septiembre de 1986) ya que de otra forma el valor en libros sería mayor que el valor de redención si el bono se redimiera en dicha fecha.

a) El precio de compra al 1o. de marzo de 1980 que reditúa el 5 % convertible semestralmente, suponiendo la fecha de redención el 1o. de septiembre de 1986 es:

$$P_1 = 1\ 000\ (1.025)^{-13} + 40\ a_{\overline{13}|0.025}$$

$$P_1 = 1\ 000\ (0.725420) + 40\ (10.983184)$$

$$P_1 = 725.42 + 439.32$$

$$P_1 = \$\ 1\ 164.74$$

y el precio de compra el 15 de mayo de 1980 es:

$$P_o = P_1 \left[1 + 0.025 \left(\frac{75}{180} \right) \right]$$

$$P_o = 1\ 164.74\ (1 + 0.010416)$$

$$P_o = \$\ 1\ 176.87$$

El valor en libros al 15 de mayo de 1980 será igual al precio de compra menos - el interés redituable. Por lo tanto:

$$L = 1\ 176.87 - 40\left(\frac{75}{180}\right)$$

$$L = \$\ 1\ 160.20$$

b) El valor en libros al 1o. de septiembre de 1986 debe haber llegado a \$ 1 000 y en cada fecha posterior de pago de intereses, el inversionista recibirá - 40 - 25 = \$ 15 en exceso de la recuperación esperada.

Al 1o. de septiembre de 1994 el monto de dichos excesos serán:

$$S = 15\ s_{\overline{16}|0.025}$$

$$S = \$\ 290.70$$

c) Tomando como fecha de redención el 1o. de septiembre de 1994, el precio de - compra al 1o. de marzo de 1980 del bono que reditúe 6 % convertible semestral - mente es:

$$P_1 = 1\ 000\ (1.03)^{-29} + 40\ a_{\overline{29}|0.03}$$

$$P_1 = 424.34 + 40\ (19.188454)$$

$$P_1 = 424.34 + 767.53$$

$$P_1 = \$\ 1\ 191.87$$

y el precio de compra al 15 de mayo de 1980 es:

$$P_{01} = 1\ 191.87\ \left[1 + 0.03\left(\frac{75}{180}\right)\right]$$

$$P_{01} = 1\ 191.87\ (1.0125)$$

$$P_{01} = \$\ 1\ 206.76$$

y para que reditúe el 5 % convertible semestralmente, el precio de compra P_2 es:

$$P_2 = 1\ 000\ (1.025)^{-29} + 40\ a_{\overline{29}|0.025}$$

$$P_2 = 488.66 + 40\ (20.45354)$$

$$P_2 = 488.66 + 818.14$$

$$P_2 = \$\ 1\ 306.80$$

y el precio de compra al 15 de mayo de 1980 es:

$$P_{02} = 1\ 306.80 \left[1 + 0.025 \left(\frac{75}{180}\right)\right]$$

$$P_{02} = 1\ 306.80\ (1.014166)$$

$$P_{02} = \$\ 1\ 325.31$$

Los valores en libros respectivos serían:

$$Q_1 = 1\ 206.76 - 40 \left(\frac{75}{180}\right) = \$\ 1\ 190.09$$

$$Q_2 = 1\ 325.31 - 40 \left(\frac{75}{180}\right) = \$\ 1\ 308.64$$

De donde la tasa de redituabilidad es, aplicando interpolación, se tiene:

$$i = i_1 + \frac{A - A_1}{A_2 - A_1}\ (i_2 - i_1)$$

Siendo: $i_1 = 0.025$, $i_2 = 0.03$, $A = 1\ 160.20$, $A_1 = 1\ 308.64$ y $A_2 = 1\ 190.09$, de donde:

$$i = 0.025 + \left(\frac{1\ 160.20 - 1\ 308.64}{1\ 190.09 - 1\ 308.64}\right) (0.03 - 0.025)$$

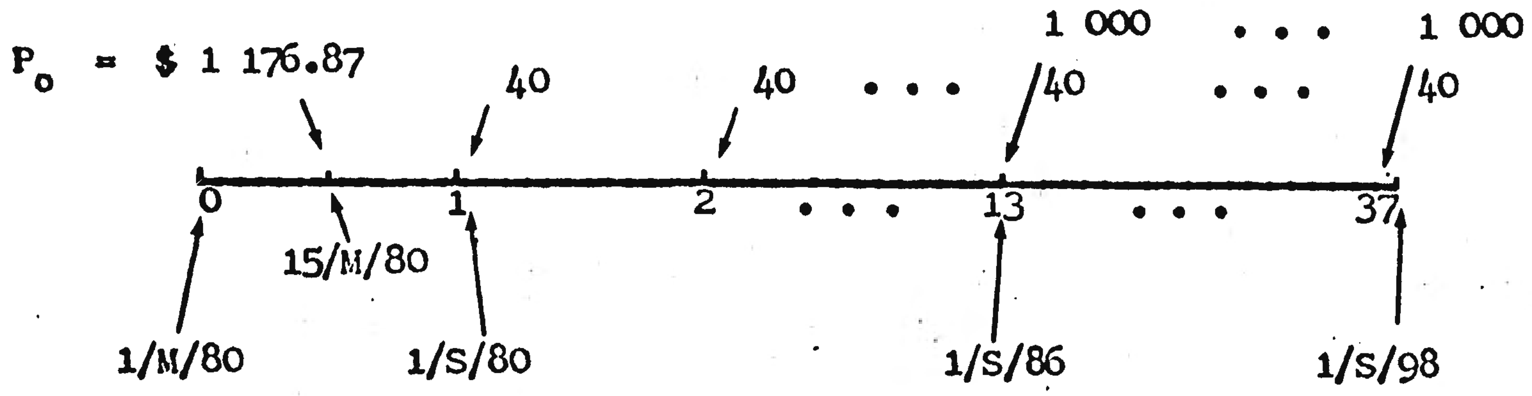
$$i = 0.025 + \left(\frac{-148.44}{-118.55}\right)(0.005)$$

$$i = 0.025 + 0.006260$$

$$i = 0.03126$$

y la tasa de redituabilidad requerida es de 6.25 % convertible semestralmente.

Visto en una línea de tiempo:



2 Ejemplo

Un bono de $ 1 000, 6 %, FA, redimible a la par el 1o. de agosto del año-2010, pero puede ser redimido el 1o. de agosto de 1989 o cualquier fecha posterior de pago de intereses.

a) Encontrar el precio de compra al 1o. de agosto de 1983 que reditúe por lo menos 8 % convertible semestralmente.

b) Encontrar la utilidad del inversionista si el bono es redimido el 1o. de agosto de 1999.

Solución:

Puesto que la tasa de redituabilidad requerida superior a la tasa del bono, el bono debe ser comprado con descuento. En esta forma, el valor en libros aumenta gradualmente hasta que alcanza el valor nominal en la fecha de redención. Por lo tanto, el inversionista debe calcular èl precio en la suposición que el bono será redimido en la última fecha posible.

a) El precio de compra el 1o. de agosto de 1983 con fecha de redención el 1o. de agosto del año 2010 con un rendimiento del 8 % convertible semestralmente - es:

$$P = 1\,000\,(1.04)^{-54} + 30\, a_{\overline{54}|0.04}$$

$$P = \$\ 780.06$$

b) Al 1o. de agosto de 1999, el valor en libros del bono se habrá incrementado hasta el valor en libros en esa fecha sobre el rendimiento del 8 % convertible semestralmente, es decir:

$$Q = 1\,000\,(1.04)^{-22} + 30\, a_{\overline{22}|0.04}$$

$$Q = \$\ 855.48$$

Puesto que el inversionista recibirá $ 1 000 en dicha fecha, su utilidad al 1o. de agosto de 1999 es de:

$$U = 1\,000 - 855.48$$

$$U = \$\ 144.52$$

UN BONO DE ANUALIDAD

Un bono de anualidad de valor nominal F, es un contrato para el pago de una - anualidad cuyo valor presente a la tasa estipulada del bono es F.

1 Ejemplo

Un bono de anualidad a 20 años por $ 50 000 con intereses al 12 % convertible semestralmente, será liquidada en 30 pagos semestrales iguales, el primero con vencimiento en 6 meses. Encontrar el precio de compra al término del 6o. año -

para ganar el 10 % convertible semestralmente.

Solución:

$A = 50\ 000$

$n = 20$

$i^{(2)} = 0.12$

$R_s = ?$

$$R_s = \frac{A}{a_{\overline{n}|i}}$$

$$R_s = \frac{50\ 000}{a_{\overline{40}|0.06}}$$

$$R_s = \frac{50\ 000}{15.046296}$$

$$R_s = \$\ 3\ 323.07$$

El comprador está comprando el derecho de cobrar los restantes 28 pagos (del 6o. al 20o. año hay 14 años), el primero de los cuales vence en 6 meses. Por lo tanto, el precio que redituará el 10 % convertible semestralmente es:

$$P = 3\ 323.07 \quad a_{\overline{28}|0.05}$$

$$P = \$\ 49\ 507.52$$

EMISIÓN SERIADA DE BONOS

Cuando una emisión de bonos va a ser redimida periódicamente en vez de ser redimida en la misma fecha, se dice que los bonos son de emisión seriada. Es posible pensar que los bonos seriados son bonos diferentes con el mismo contrato.

1 Ejemplo

Una emisión seriada de bonos de $ 34 000 con intereses al 12 % convertible semestralmente va a ser redimida mediante pagos de $ 6 000 en 20 años, $ 8 000 en 12 años y $ 20 000 en 15 años. Encontrar el precio de compra de la emisión que reditúe 10 % convertible semestralmente.

Solución:

Los bonos seriados son equivalentes a tres bonos ordinarios, uno con valor nominal de $ 6 000 redimible a la par en 20 años, otro con valor nominal de $ 8 000 redimible a la par en 12 años, y otro con valor nominal de $ 20 000 redimible a la par en 15 años.

El precio de compra requerido es la suma de los precios de los tres bonos que reditúen el 10 % convertible semestralmente, por lo cual:

$$P = 6\,000\,(1.05)^{-40} + 360\, a_{\overline{40}|0.05}$$

$$+\ 8\,000\,(1.05)^{-24} + 480\, a_{\overline{24}|0.05}$$

$$+\ 20\,000\,(1.05)^{-30} + 1\,200\, a_{\overline{30}|0.05}$$

$$P = \$\ 7\,029.54 + 9\,103.87 + 23\,074.48$$

$$P = \$\ 39\,207.89$$

FÓRMULA DE MAKEHAM

De la fórmula $P = V\,(1 + i)^{-n} + F\,r\, a_{\overline{n}|i}$.

Sustituyendo $K = V\,(1 + i)^{-n}$, y $g\,V = F\,r$ se obtiene la fórmula de Makeham:

$$P = K + \frac{g}{i}\,(V - K)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS (BONOS)

1. Encontrar el precio del bono de $ 1 000 redimible a la par en 25 años con pago de intereses del 14 % convertible semestralmente si se desea que reditúe una tasa del 18 % convertible semestralmente.

Resp. P = $ 780.75

2. Encontrar el precio del bono de $ 10 000 redimible a 105 en 10 años con pago de intereses del 12 % convertible trimestralmente si se desea que reditúe una tasa del 16 % convertible trimestralmente.

Resp. P = $ 8 124.86

3. Encontrar el precio del bono de $ 10 500 redimible a 108 en 6 y medio años con pago de intereses del 4 % convertible semestralmente si se desea que reditúe una tasa del 8 % convertible semestralmente.

Resp. P = $ 8 907.48

4. Encontrar el precio de compra de un bono que proporciona dividendos del 12 % anual pagaderos semestralmente. El bono tiene un valor nominal de $ 1 000 y es redimible a la par en 15 años si se desea obtener un rendimiento del 12.5 % anual.

Resp. P = $ 990.97

5. Encontrar el precio del bono de $ 1 000 redimible a la par en 5 años con pago de intereses del 5 % anual si se desea que reditúe el 4 % anual. Construir la tabla de inversión.

Resp. P = $ 1 044.51

6. Encontrar el precio del bono de $ 50 000 redimible a la par en 3 años con pago de intereses del 6 % convertible semestralmente si se desea que reditúe una tasa del 5 % convertible semestralmente. Construir la tabla de inversión correspondiente.

Resp. P = $ 51 377.02

7. Un bono de \$ 10 000, 4 %, JD, es redimible a la par el 1o. de diciembre de 1998. Es comprado el 30 de agosto de 1982. Encontrar el precio de compra y el precio "con intereses" el día de la compra suponiendo un rendimiento del 5 % convertible semestralmente.

Resp. P = \$ 8 996.45 L = \$ 8 896.45

8. Un bono de \$ 1 000, 8 %, MN, es redimible a la par el 1o. de noviembre del año 2010. Es comprado el 31 de julio de 1968. Encontrar el precio de compra y el precio "con intereses" el día de la compra deseando un rendimiento del 9 % convertible semestralmente.

Resp. P = \$ 911.80 L = \$ 891.58

9. Un bono de \$ 10 000, 6 %, EJ, redimible a 107 el 1o. de julio del año 2000 es comprado el 17 de abril de 1967. Encontrar el precio de compra y el precio cotizado el día de la compra si se desea un rendimiento del 4.75 % convertible semestralmente.

Resp. P = \$ 20 841.86 L = \$ 20 666.20

10. Un bono de \$ 10 000, 4 %, EJ, redimible a la par el 1o. de julio de 1989, es comprado en \$ 9 862.50 el 1o. de julio de 1969. Encontrar la tasa de redituabilidad convertible semestralmente.

Resp. $i^{(2)}$ = 4.10 %

11. Un bono de \$ 1 000, 4.5 %, EJ, redimible a la par el 1o. de enero de 1999, está cotizado en \$ 98 al 1o. de julio de 1989. Encontrar la tasa de redituabilidad convertible semestralmente mediante interpolación suponiendo que es comprado en la fecha mencionada.

Resp. $i^{(2)}$ = 4.76 %

12. Un bono de \$ 1 000, redimible a 105 el 1o. de agosto de 1994 con pago de intereses al 5 %, FA, está cotizado en 110 al 1o. de febrero de 1978. Encontrar la tasa de redituabilidad convertible semestralmente mediante interpola-

ción suponiendo que es comprado en la fecha mencionada.

Resp. $i^{(2)} = 4.36\ \%$

13. Un bono de \$ 1 000, 4 %, EJ, es redimible a la par el 1o. de enero de 1998, pero puede ser redimido el 1o. de enero de 1985 ó en cualquier fecha posterior de pago de intereses.

a) Encontrar el precio de compra el 1o. de enero de 1980 que reditúe por lo menos el 5 % convertible semestralmente.

b) Si el bono es redimido el 1o. de julio de 1987, encontrar la utilidad del inversionista y que tasa convertible semestralmente redituará el bono.

Resp. a) P = \$ 882.21 b) U = \$ 80.93, $i^{(2)} = 5.20\ \%$

14. Un bono de \$ 1 000, 7 %, JD, será redimido a la par el 1o. de junio de 1995, pero puede ser redimido el 1o. de junio de 1988 ó en cualquier fecha posterior de pago de intereses.

a) Encontrar el precio de compra al 1o. de junio de 1981 que reditúe por lo menos el 5 % convertible semestralmente.

b) Si el bono es redimido el 1o. de diciembre de 1990. Encontrar la utilidad del inversionista y que tasa convertible semestralmente redituará el bono.

Resp. a) P = \$ 1 116.90 b) U = \$ 239.46, $i^{(2)} = 5.41\ \%$

15. Encontrar el precio de compra de un bono de anualidad de \$ 8 000 a 20 años con intereses al 6 % anual, comprado al término del 9o. año para que reditúe el 5.5 % anual.

Resp. P = \$ 5 644.30

16. Encontrar el precio de compra de un bono de anualidad de \$ 22 000 a 15 años con intereses al 6 % convertible semestralmente comprado al término de 5 años para que reditúe el 7 % convertible semestralmente.

Resp. P = \$ 15 952.28

17. Cierta compañía emite \$ 600 000 en bonos al 8 % convertible semestralmente y acuerda redimirlos mediante pagos de \$ 300 000 al término del 6o. y 11o. años. Encontrar el precio pagado por un banco el día de la emisión que le redituará 17 % convertible semestralmente.

Resp. P = \$ 657 011.77

18. Una emisión de \$ 96 000 en bonos seriados con intereses al 6 % convertible semestralmente con vencimiento de \$ 8 000 cada 6 meses por los próximos 6 años es comprada para que reditúe el 5 % convertible semestralmente.

Encontrar el precio de compra utilizando la fórmula de Makeham.

Resp. P = \$ 98 787.58

PROPORCIONALIDAD

Una proporcionalidad o razón es el cociente entre dos cantidades:

$$a \div b = q$$

donde q es la razón de las cantidades a y b. También puede escribirse de la siguiente forma:

$$a/b = q$$

Nótese que al aumentar a también aumenta q en la misma proporción; es decir:

$$\frac{1\,a}{b} = 1\,q$$

$$\frac{2\,a}{b} = 2\,q$$

$$\vdots$$

$$\frac{n\,a}{b} = n\,q$$

Esto se expresa matemáticamente diciendo que el valor de q es directamente proporcional al valor de a. Por otro lado, al aumentar el valor de b, el valor de q disminuye en la misma proporción; es decir:

$$\frac{a}{1\,b} = \frac{q}{1}$$

$$\frac{a}{2\,b} = \frac{q}{2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{a}{n\,b} = \frac{q}{n}$$

Lo que se expresa diciendo que el valor de q es inversamente proporcional al valor de b.

Generalizando a varios factores, se tiene:

$$q = \frac{a\ b\ c}{d\ e}$$

en donde el valor de q es directamente proporcional a las cantidades a, b y c e inversamente proporcional a las cantidades d y e.

CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD

Sea la igualdad

$$q = \frac{x}{y}\ k$$

Nótese que el valor de q es directamente proporcional al valor de x e inversamente proporcional al valor de y, y además depende del valor de la constante de proporcionalidad k.

Conociendo el valor de q para ciertos valores de x e y queda determinado el valor de k.

1 Ejemplo

Si 36 hombres cortan 50 árboles en 10 días. Determinar el número de hombres que se requieren para cortar 1 200 árboles en 60 días.

Solución:

Nótese que el número de hombres es directamente proporcional a los árboles que se deben cortar e inversamente proporcional al tiempo en que se cortan.

Siendo h el número de hombres, a el número de árboles y t el tiempo, entonces:

$$h = \frac{a}{t}\ k$$

donde:

$$k = \frac{h\ t}{a}$$

Sustituyendo los valores $a = 50$, $h = 36$, $t = 10$ en la ecuación - anterior, se tiene:

$$k = \frac{36\ (10)}{50}$$

$$k = 7.2$$

Ahora para los valores: $a = 1\ 200$, $t = 60$, $k = 7.2$, se tiene:

$$h = \frac{a\ k}{t}$$

$$h = \frac{1\ 200\ (7.2)}{60}$$

$$h = 144$$

Por lo tanto, se necesitarán 144 hombres para realizar el trabajo.

2 Ejemplo

Si 8 hombres pueden quemar una zafra de 12 metros de largo por medio metro de ancho cada semana. Determinar el número de metros que se podrán quemar si el ancho es de 0.7 metros y se cuentan con 35 hombres.

Solución:

Nótese que el número de metros es proporcional al número de hombres e inver - samente proporcional a lo ancho de la tierra.

Sea m el número de metros a quemar de zafra, a el ancho de la tierra y h el - número de hombres necesarios para el trabajo.

Siendo

$$m = \frac{h}{a}\ k\ , \quad \text{donde}$$

$$k = \frac{m\ a}{h}$$

y sustituyendo los valores: $h = 8$, $m = 12$, y $a = 0.5$

$$k = \frac{12\ (0.5)}{8}$$

$$k = 0.75$$

Ahora para los valores: $a = 0.7, \quad h = 35, \quad k = 0.75$

$$m = \frac{h}{a} k$$

$$m = \frac{35\,(0.75)}{0.7}$$

$$m = 37.50$$

Por lo tanto, deben quemarse 37.50 metros de largo si el ancho es de 0.7 metros.

TANTO POR CIENTO

El tanto por ciento o porcentaje es una proporción que se establece tomando en cuenta una relación por cada 100 unidades. Se expresa por el símbolo % .

1 Ejemplo

Si una inversión de \$ 3 000 se obtiene un rendimiento de \$ 500. Determinar el rendimiento o el porcentaje correspondiente por cada \$ 100 de inversión.

Solución:

Se establece la proporción $\frac{3\,000}{500} = \frac{100}{x}$

$$x = \frac{50\,000}{3\,000}$$

$$x = 16.666666$$

$$x = 16.7\,\%$$

La tasa de interés, representada por la letra i, también está dada como un porcentaje. Por lo tanto, $i = 16.7\,\%$ o en forma decimal 0.167 .

PROPORCIONES

Una proporción es la igualdad de dos razones.

Sean las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, entonces por la ley transitiva de los números reales, si $a = b$ y $b = c$, donde a, b, c pertenecen al conjunto de los números reales.

Por lo tanto, si $\frac{a}{b} = q$ y $\frac{c}{d} = q$ entonces:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

se puede escribir también de la siguiente manera:

$$a \div b = c \div d$$

o

$$a : b :: c : d$$

léase "a" es a "b" como "c" es a "d".

A las cantidades a y c se denominan antecedentes y a las cantidades b y d consecuentes.

Al antecedente de la primera razón y al consecuente de la segunda razón se les llama extremos y a las otras dos cantidades medios.

Teorema:

En toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos. Sea la proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

si se multiplican ambos miembros de la ecuación por b d, se obtiene:

$$a\,d = b\,c$$

TEOREMA DEL BINOMIO

Existe una gran aplicación en las Matemáticas Financieras en el uso del Teorema del Binomio para el cálculo del factor de acumulación $(1 + i)^{n}$, para el cálculo del factor de descuento $(1 + i)^{-n}$ y también para el cálculo de los factores $(1 - d)^{t}$ y $(1 - d)^{-t}$, donde i es la tasa efectiva y d es la tasa de descuento y $n = t$ el número de periodos de conversión.

Se analizarán dos casos:

1. Si n es un número entero positivo.
2. Si n es un número fraccionario o negativo.

1. Si n es un número entero positivo el desarrollo de un binomio es:

$$(a + b)^{n} = a^{n} + n\, a^{n-1}\, b + \frac{n\,(n - 1)}{2\,!}\, a^{n-2}\, b^{2} + $$

$$+ \frac{n\,(n - 1)\,(n - 2)}{3\,!}\, a^{n-3}\, b^{3} + \dots + b^{n},$$

1 Ejemplo

Calcular el valor de $(1.06)^{3}$ por el Teorema del Binomio.

Solución:

$$(1 + 0.06)^{3} = 1 + 3\,(0.06) + \frac{3\,(3 - 1)}{2\,!}\,(0.06)^{2} + $$

$$+ \frac{3\,(3 - 1)\,(3 - 2)}{3\,!}\,(0.06)^{3}$$

$$= 1 + 0.18 + 0.0108 + 0.000216$$

$$= 1.191016$$

2 Ejemplo

Calcular el valor $(1 - 0.06)^5$ por el Teorema del Binomio.

Solución:

$$(1 - 0.06)^5 = 1^5 + 5(1^4)(-0.06) + 10(1^3)(-0.06)^2 + $$
$$+ 10(1^2)(-0.06)^3 + 5(1)(-0.06)^4 + (-0.06)^5$$
$$= 1 - 0.30 + 0.036 - 0.00216 + 0.0000648$$
$$- 0.0000007776$$
$$= 0.73390402$$

El término de orden $r + 1$ está dado por la siguiente expresión:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-r+1)}{r!}\ a^{n-(r+1)}\ b^{r-1}$$

donde $r! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdots (r-1) \cdot r$, léase factorial de r, para - $r \geqslant 1$, donde $0! = 1$.

2. Si n es un exponente negativo o fraccionario, el desarrollo del binomio - $x + y$ será válido únicamente si el valor de y está entre x y el de $-x$.

3 Ejemplo

Determinar los 4 primeros términos del desarrollo $(2 + y)^{\frac{1}{2}}$ y diga en que in - tervalo es válido el desarrollo.

Solución:

El desarrollo es válido únicamente si $2 > y > -2$ y es:

$$(2 + y)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right) 2^{-\frac{1}{2}}\ y + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) 2^{-\frac{3}{2}}\ y^2}{2!} +$$

$$+ \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ (2)^{-\frac{5}{2}}\ y^3}{3\,!} + \ldots$$

$$= \sqrt{2} + \frac{y}{2\sqrt{2}} - \frac{y^2}{16\ \sqrt{2}} + \frac{y^3}{64\ \sqrt{2}} - \ldots$$

$$= 2\left\{1 + \frac{y}{4} - \frac{y^2}{32} + \frac{y^3}{128} - \ldots\right\}$$

4 **Ejemplo**

Determinar una aproximación a la raíz de 10.

Solución:

$$\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}} = (9+1)^{\frac{1}{2}} = (3^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (3^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(3^2)^{-\frac{1}{2}}\ (1) + \frac{[\frac{1}{2}][-\frac{1}{2}]\ (3^2)^{-\frac{3}{2}}\ (1)^2}{2}$$

$$+ \frac{[\frac{1}{2}][-\frac{1}{2}][-\frac{3}{2}]\ \ (3^2)^{-\frac{5}{2}}\ \ (1)^3}{6} + \ldots$$

$$= 3 + [\tfrac{1}{2}][\tfrac{1}{3^2}]\ (1) + \frac{[-\frac{1}{4}][\frac{1}{3^2}]^{\frac{3}{2}}\ \ (1)}{2} +$$

$$+ \frac{[\frac{3}{8}]\ [\frac{1}{3^2}]^{\frac{5}{2}}\ \ (1)}{6} + \ldots$$

$$= 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{216} + \frac{1}{3\ 888}$$

$$= 3 + 0.16667 - 0.00463 + 0.00026$$

$$= 3.1623$$

Comparando los cuatro términos del desarrollo anterior, se observa que sus valores decrecen rápidamente. La rapidez de esta disminución se incrementa a medida que se amplía el desarrollo. De hecho, el quinto término es − 0.0000178 y al sumarlo con los otros cuatro términos, se obtiene:

$\sqrt{10} = 3.1622822$ o redondeando a cuatro cifras decimales 3.1623 .

Se concluye por tanto, que este es el valor correcto de $\sqrt{10}$ a cinco cifras. Evidentemente el desarrollo se puede continuar hasta llegar al grado de exactitud que se desee.

5 Ejemplo

Calcular $(1.04)^{-6}$ con cuatro cifras decimales.

Solución:

$$(1.04)^{-6} = (1 + 0.04)^{-6}$$

$$= 1^{-6} + (-6)\,(1)^{-7}\,(0.04) + \frac{(-6)\,(-7)}{2\,!}\,(1)^{-8}\,(0.04)^2$$

$$+ \frac{(-6)\,(-7)\,(-8)}{3\,!}\,(1)^{-9}\,(0.04)^3 +$$

$$+ \frac{(-6)\,(-7)\,(-8)\,(-9)}{4\,!}\,(1)^{-10}\,(0.04)^4$$

$$+ \frac{(-6)\,(-7)\,(-8)\,(-9)\,(-10)}{5\,!}\,(1)^{-11}\,(0.04)^5$$

$$= 1 - 6\,(0.04) + 21\,(0.04)^2 - 56\,(0.04)^3 +$$

$$+ 126\,(0.04)^4 - 252\,(0.04)^5 + \ldots$$

$$= 1 - 6\,(0.04) + 21\,(0.0016) - 56\,(0.000064)$$

$$+ 126\,(0.00000256) - 252\,(0.0000001024) + \ldots$$

$$= 1 - 0.24 + 0.0336 - 0.00358 + 0.00032$$
$$- 0.000030 + \ldots$$
$$= 0.7903$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular el valor de $(1.03)^8$ con seis cifras decimales.

Resp. 1.26677

2. Calcular el valor de $(1.02)^{-\frac{3}{2}}$ con seis cifras decimales.

Resp. 0.970733

3. Aproximar con cinco decimales el valor $(1.0075)^{\frac{1}{6}}$.

Resp. 1.00125

4. Aproximar con cuatro decimales el valor de $(1.02)^{-8}$.

Resp. 0.8535

5. Aproximar con 8 decimales el valor $(1.015)^3$.

Resp. 1.04567838

PROGRESIONES

PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Es una sucesión de términos en donde cada uno de los términos se obtiene sumándole al término anterior una cantidad constante (positiva o negativa) llamada razón.

Dependiendo del signo de la razón se podrá afirmar si una progresión es creciente o decreciente.

1 Ejemplo

El conjunto de números $4, 7, 10, 13, \ldots$

es una progresión aritmética cuya razón es igual a 3.

Si se quiere encontrar a partir del primer término el siguiente, sólo se sumará $4 + 3 = 7$ y así sucesivamente, por lo que esta progresión es una progresión aritmética creciente.

2 Ejemplo

El conjunto de números $3, 2, 1, \ldots$

es una progresión aritmética cuya razón es igual a -1.

Si se quiere encontrar a partir del primer término el siguiente, sólo se sumará $3 + (-1) = 2$ y así sucesivamente, por lo que esta progresión es una progresión aritmética decreciente.

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DEL N-ÉSIMO TÉRMINO DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Genérese una progresión aritmética con 7 términos, siendo a el primer término y, r la razón. La progresión será:

$$a,\ a + r,\ a + 2r,\ a + 3r,\ a + 4r,\ a + 5r,\ a + 6r \qquad \ldots (1)$$

Supóngase que la progresión tiene n términos. Nótese que el n-ésimo término, - o sea el último, sería:

$$\ell = a + (n - 1) r$$

La razón se obtiene restándole a cualquier término el término anterior; es decir, tomando de la progresión (1) dos términos cualesquiera:

$$a + (n - 2) r \qquad y \qquad a + (n - 3) r$$

restando el 2o. término al 1o.; se tiene:

$$a + (n - 2) r - a + (n - 3) r = a + n r - 2 r - a - n r + 3 r$$

$$a + (n - 2) r - a + (n - 3) r = r$$

En consecuencia de la fórmula

$$\ell = a + (n - 1) r$$

se tiene:

$$a = \ell - (n - 1) r, \qquad r = \frac{\ell - a}{n - 1},$$

$$n = \frac{\ell - a}{r} + 1$$

donde a es el primer término de la progresión, r la razón y n el número de - términos que tiene la progresión.

3 Ejemplo

Encontrar el 15o. término de la progresión aritmética 4, 7, 10, . . .

Solución:

Siendo $a = 4$, $n = 15$, se tiene: $r = 7 - 4 = 3$

Por lo tanto,

$$\ell = 4 + (14)(3) = 46$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. El 15o. término de una progresión aritmética es 20 y la razón es $\frac{2}{7}$.
Encontrar el 1o. término.

Resp. $a = 16$

2. Encontrar la razón de la progresión aritmética $3, \ldots, 8$ donde 8 es el 6o. término de la progresión.

Resp. $r = 1$

3. Determinar el número de términos que tiene la progresión aritmética:
$4, 6, \ldots, 30$

Resp. $n = 14$

4. Encontrar el 15o. término de la progresión aritmética $2, 8, 14, 20, \ldots$

Resp. $\ell = 86$

5. Encontrar el 23o. término de la progresión aritmética $9, 4, -1, \ldots$

Resp. $\ell = -101$

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA PARA ENCONTRAR LA SUMA DE LOS N TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

La progresión aritmética puede ser escrita como:

$$a,\ a + r,\ a + 2\,r,\ \ldots\ ,\ a + (n - 3)\,r,\ a + (n - 2)\,r,\ a + (n - 1)\,r$$

o de la siguiente manera:

$$a,\ a + r,\ a + 2\,r,\ \ldots\ ,\ (\ell - 2\,r),\ (\ell - r),\ \ell$$

Sea S la suma de los términos de esta progresión, entonces:

$$S = a + (a + r) + (a + 2\,r) + \ldots + (\ell - 2\,r) + (\ell - r) + \ell$$

6

$$S = \ell + (\ell - r) + (\ell - 2\,r) + \ldots + (a + 2\,r) + (a + r) + a$$

Sumando término a término las dos expresiones anteriores, se obtiene:

$$2\,S = (a + \ell) + (a + \ell) + (a + \ell) + \ldots + (a + \ell) + (a + \ell)$$

$$2\,S = n\,(a + \ell)$$

Por lo tanto:

$$S = \frac{n}{2}\,(a + \ell)$$

1 Ejemplo

Encontrar la suma de 12 términos de la progresión aritmética 7, 13, 19, ...

Solución:

Para encontrar el 12o. término:

$$\ell = a + (n - 1)\,r$$

$$\ell = 7 + (12 - 1)\,6$$

$$\ell = 73$$

De donde: $S = \frac{12}{2}\,(7 + 73) = 480$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Encontrar la suma de los 13 primeros términos de la progresión aritmética

$\frac{5}{6}$, $\frac{1}{12}$, . . .

Resp. $S = \frac{-286}{6}$

2. Encontrar la suma de los 8 primeros términos de la progresión aritmética

15, 19, 23, ...

Resp. S = 232

3. Calcular la suma de la progresión aritmética

1.00, 1.04, 1.08, 1.12, . . . , 2.16

Resp. S = 47.40

4. Encontrar la suma de los 6 primeros términos de la progresión aritmética

4, − 8, 16, . . .

Resp. S = − 84

5. Encontrar la suma de los 15 primeros términos de la progresión aritmética

2, 8, 14, 20, . . .

Resp. S = 660

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Es una sucesión de términos en donde cada uno de los términos se obtiene multiplicándole al término anterior una cantidad constante (positiva o negativa) llamada razón.

Dependiendo del signo de la razón se podrá afirmar si una progresión es creciente o decreciente.

1 Ejemplo

El conjunto de números $3, 6, 12, 24, \ldots$

es una progresión geométrica cuya razón es igual a 2.

Si se quiere encontrar a partir del primer término el siguiente, sólo se multiplicará $3 \times 2 = 6$ y así sucesivamente, por lo que esta progresión es una progresión geométrica creciente.

2 Ejemplo

El conjunto de números $6, -12, 24, -48, \ldots$

es una progresión geométrica cuya razón es igual a -2.

Si se quiere encontrar a partir del primer término el siguiente, sólo se multiplicará $6 \times (-2) = -12$ y así sucesivamente, por lo que esta progresión geométrica es una progresión decreciente.

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DEL N-ÉSIMO TÉRMINO DE LA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Genérese una progresión geométrica con 9 términos, siendo a el primer término y r la razón. La progresión será:

$$a,\ a\,r,\ a\,r^2,\ a\,r^3,\ a\,r^4,\ a\,r^5,\ a\,r^6,\ a\,r^7,\ a\,r^8,\ \ldots \quad (1)$$

Supóngase que la progresión tiene n términos. Es claro que el n-ésimo término, o sea el último, sería:

$$\ell = a\,r^{n-1}$$

La razón se obtiene dividiendo cualquier término de la progresión entre el término anterior; es decir, tomando de la progresión (1) dos términos cualesquiera:

$$a\,r^{n-2} \qquad y \qquad a\,r^{n-3}$$

dividiendo el 2o. término entre el 1o., se tiene:

$$\frac{a\,r^{n-2}}{a\,r^{n-3}} = r^{n-2-n+3} = r$$

En consecuencia de la fórmula:

$$\ell = a\,r^{n-1}$$

se tiene:

$$a = \frac{\ell}{r^{n-1}} \qquad y \qquad r = \sqrt[n-1]{\frac{\ell}{a}}$$

donde a es el primer término de la progresión, r la razón y n el número de términos que tiene la progresión.

1 Ejemplo

Encontrar el 5o. término de la progresión geométrica 2, 6, 18, . . .

Solución:

Siendo $a = 2$, $n = 5$, $r = 3$

$$\ell = a\,r^{n-1}$$

$$\ell = (2)\,(3)^4$$

$$\ell = 162$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Encontrar el 8o. término de la progresión geométrica

6, 4, . . .

Resp. $\ell = \frac{256}{729}$

2. Encontrar el 7o. término de la progresión geométrica

$\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \ldots$

Resp. $\ell = \frac{243}{2048}$

3. El 6o. término de una progresión geométrica es $\frac{1}{16}$ y la razón $\frac{1}{2}$.

Determinar el primer término de dicha progresión.

Resp. a = 2

4. El 1er. término de una progresión geométrica es 3 y el 6o. término es −729. Determinar la razón.

Resp. r = − 3

5. Determinar el 10o. término de la progresión gemétrica

4, 8, 16, 32

Resp. ℓ = 2 048

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA PARA ENCONTRAR LA SUMA DE LOS N TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

La progresión geométrica puede ser escrita como:

$$a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-3}, ar^{n-2}, ar^{n-1}$$

Sea S la suma de los términos de esta progresión, entonces:

$$S = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-3} + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad \ldots(1)$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad anterior por r:

$$rS = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \quad ..(2)$$

Restando (2) de (1), se tiene:

$$S - rS = a + (ar - ar) + (ar^2 - ar^2) + \ldots + (ar^{n-1} - ar^{n-1}) - ar^n$$

es decir:

$$S(1 - r) = a - ar^n$$

$$S = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

ó

$$S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \quad \text{cuando} \quad r < 1$$

y $$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, \quad \text{cuando} \quad r > 1$$

1 Ejemplo

Encontrar la suma de los 6 primeros términos de la progresión geométrica

4, 2, 1, . . .

Solución:

Siendo $r = \frac{1}{2}$, $n = 6$: $S = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1}$

$$S = \frac{4\,((1/2)^6 - 1)}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$S = \frac{4\,(-0.984375)}{-\frac{1}{2}}$$

$$S = 7.875$$

SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA DECRECIENTE INFINITA

Considerando la suma de una progresión geométrica decreciente cuando $r < 1$:

$$S = \frac{a - a\,r^n}{r - 1}$$

donde la razón en dicha progresión es una fracción propia, y si una fracción propia se eleva a una potencia, cuanto mayor sea el exponente, menor es la potencia de la fracción. Por lo tanto, cuanto mayor sea n, menor será r^n y menor será $a\,r^n$. Siendo n suficientemente grande, $a\,r^n$ será tan pequeña como se quiera, es decir, que cuando n aumenta indefinidamente, $a\,r^n$ tiende al límite cero y por tanto S tiende al límite $\frac{a}{1 - r}$.

Esto se expresa brevemente diciendo que cuando n (el número de términos de la progresión) es infinito, el valor de la suma es:

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

1 Ejemplo

Determinar la suma de una progresión infinita $4, 2, 1, \ldots, \ldots$

Solución:

$a = 4$

$r = \frac{1}{2}$

$S = ?$

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

$$S = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S = 8$$

Nótese que 8 es el límite al cual tiende la suma. La suma nunca llega a ser igual a 8, pero cuanto mayor sea el número de términos que se tomen, más se aproximará a 8.

2 Ejemplo

Se deja caer una pelota desde una altura de 135 cm. y rebota (cada vez que golpea el piso), dos terceras partes de la altura de la cual cae.

a) Determinar a que altura se elevará al cabo del 6o. rebote.

b) La distancia recorrida cuando golpea por 8va. vez el piso.

c) La distancia recorrida hasta alcanzar el reposo.

Solución:

El 1o. rebote es de $\frac{2}{3}(135) = 90$ cm.

El 2o. rebote será de $\frac{2}{3}(90) = 60$ cm.

a) El 6o. término de la progresión es; siendo

$a = 90, \quad r = \frac{2}{3} \quad y \quad n = 6$

$$\ell = a\,r^{n-1}$$

$$\ell = 90\ (2/3)^5$$

$$\ell = 11.85 \quad \text{cm.}$$

b) la bola cae 135 cm. rebota y cae desde 90 cm., rebota y cae desde 60 cm. y así sucesivamente. La distancia recorrida será de 135 cm. más dos veces la suma de los 7 primeros términos de la progresión geométrica:

$$90,\ 60,\ 40,\ \ldots$$

Sea d la distancia, por tanto:

$$d = 135 + 2\left(\frac{90 - 90\ (2/3)^7}{1 - \frac{2}{3}}\right)$$

$$d = 135 + 2\ (254.19)$$

$$d = 643.38 \quad \text{cm.}$$

c) La distancia será 135 más dos veces la suma de la progresión geométrica infinita 90, 60, 40, . . . , . . .

$$d = 135 + 2\left(\frac{90}{1 - \frac{2}{3}}\right)$$

$$d = 675 \quad \text{cm.}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Determinar la suma de la progresión infinita

$5, \; -\frac{3}{2}, \; \frac{9}{20}, \; \ldots, \; \ldots$

Resp. $S = 3\frac{11}{13}$

2. Encontrar la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica

$4, 8, 16, 32, \ldots,$

Resp. $S = 4\,092$

3. Determinar la suma de los 12 primeros términos de la progresión geométrica

$4, -8, 16, -32, \ldots$

Resp. $S = -5\,460$

4. Encontrar la suma de la progresión geométrica

$(1.04)^{-1}, \; (1.04)^{-2}, \; \ldots, \; (1.04)^{-12}$

Resp. $S = \dfrac{1 - (1.04)^{-12}}{0.04}$

5. Determinar la suma de los 15 primeros términos de la progresión geométrica

$1, \; 1.08, \; (1.08)^2, \; (1.08)^3, \; \ldots$

Resp. $S = \dfrac{(1.08)^{15} - 1}{0.08}$

LOGARITMOS

Leyes de los Exponentes.

Sean a y b números cualesquiera distintos de cero, siendo m y n enteros positivos cualesquiera. El símbolo a^m significa $a \cdot a \cdots a$ con m factores; el exponente m indica el número de veces que se toma a como factor.

Las Leyes de los Exponentes son:

1. $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

2. a) $$a^m \div a^n = a^{m-n}, \quad \text{si} \quad m > n$$

   b) $$a^m \div a^n = a^{n-m}, \quad \text{si} \quad m < n$$

   c) $$a^m \div a^n = 1, \quad \text{si} \quad m = n$$

   $$(a^0 = 1, \text{ siempre que } a \neq 0)$$

3. $$[a^m]^n = a^{mn}$$

4. $$[a\ b]^m = a^m\ b^m$$

5. $$\left[\frac{a}{b}\right]^m = \frac{a^m}{b^m}$$

6. $$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad \text{y} \quad \frac{1}{a^{-m}} = a^m$$

Propiedades de los Logaritmos.

Puesto que un logarítmo es un exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número, las propiedades de los logaritmos son un reflejo de las propiedades de los exponentes.

1. El logarítmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de sus factores.

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

Demostración:

Si $X = \log_a M$ y $Y = \log_a N$

Por definición $M = a^X$ y $N = a^Y$

Entonces $MN = a^X a^Y = a^{X+Y}$

Por definición $\log_a MN = X + Y$

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

2. El logarítmo de un cociente es igual al logarítmo del dividendo menos el logarítmo del divisor.

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

Demostración:

Si $X = \log_a M$ y $Y = \log_a N$

Por definición $M = a^{X}$ y $N = a^{Y}$

Entonces $\frac{M}{N} = \frac{a^{X}}{a^{Y}} = a^{X-Y}$

Por definición $\log_a \frac{M}{N} = X - Y$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

3. El logarítmo de la k-ésima potencia de un número es igual a k - veces el logarítmo del número.

$$\log_a N^{k} = k \log_a N$$

Demostración:

Si $Y = \log_a N$

Por definición $N = a^{Y}$

Entonces $N^{k} = \left[a^{Y}\right]^{k} = a^{Y k} = a^{k Y}$

Por definición $k \log_a N = k Y$

$$\log_a N^{k} = k \log_a N$$

4. El logarítmo de la raíz de un número es igual a la cantidad sub-radical dividido entre el índice de la raíz.

$$\log_a \sqrt[q]{N} = \frac{\log_a N}{q}$$

Demostración:

Si $\quad Y = \log_a N$

Por definición $\quad N = a^Y$

Entonces $\quad \sqrt[q]{N} = \sqrt[q]{a^Y}$

Por definición $\quad \log_a \sqrt[q]{N} = \frac{1}{q} Y$

$$\log_a \sqrt[q]{N} = \frac{1}{q} \log_a N$$

Logaritmos Comunes.

Puesto que nuestro sistema numérico está construido con base 10 (sistema decimal) el sistema de logaritmos cuya base es 10, se denomina logaritmos comunes.

La expresión $\log_{10} M$, cuando se emplea la base 10, ésta se puede omitir y se podrá escribir $\log M$.

Leyes de los Radicales.

Una expresión como $\sqrt[n]{a}$ se denomina radical, en donde el número n se denomina índice y el número a subradical.

Si el índice $n = 2$, entonces $\sqrt[2]{a}$ se denomina raíz cuadrada de a; generalmente se omite el índice 2 y la expresión se escribe como $\sqrt{a}$.

En general $\sqrt[n]{a}$ representa la n-ésima raíz de un número a.

La raíz n-ésima de un número a es el valor tal que multiplicado por sí mismo n veces da como producto a.

Las Leyes de los Radicales son:

1. $\left[\sqrt[n]{a}\right]^n = a$

2. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\,n]{a}$

4. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

5. $\sqrt[m]{a^n} = a^{n/m}$

Exponentes Irracionales.

Para generalizar el uso de los exponentes, se acepta que las leyes de los exponentes se aplican también a los índices irracionales.

Por ejemplo: $3^{\sqrt{2}}$, si se obtiene el valor de $\sqrt{2}$ por sucesivas aproximaciones, se tienen los valores de: 1.4; 1.41; 1.414; 1.4142 ... etc., de esta manera:

$$3^{\sqrt{2}} \cong 3^{1.4} = 3^{14/10}$$

$$3^{\sqrt{2}} \cong 3^{1.41} = 3^{141/100}$$

$$3^{\sqrt{2}} \cong 3^{1.414} = 3^{1414/1000}$$

etc.

Cada aproximación da un valor más correcto; como $\sqrt{2}$ puede definirse como una secuencia de valores racionales, $3^{\sqrt{2}}$ puede definirse también en términos de limites. En general, puede demostrarse que si X se aproxima a un límite y si a es un número positivo, a^{X} tendrá un límite. En este sentido se define a^{X} como el límite aproximado cuando X es una cantidad irracional.

El logarítmo de un número M es el exponente X, que indica la potencia a la que un número base a debe elevarse para obtener dicho número M.
La base a debe ser positiva y diferente de la unidad (debido a que cualquier potencia de 1 es igual a 1).

Por ejemplo: $2^3 = 8$, aquí la base es 2, el exponente (o logarítmo) es 3 y el logarítmo de ese número es 8.

Dicho en otra forma, 3 es el logarítmo de 8, cuando la base es 2; generalmente - esto se escribe como:

$$\log_2 8 = 3$$

Otra notación general para definir un logarítmo será:

$$\text{Si } a^X = M \text{ y } a > 0, \; a \neq 1 \text{ entonces } X = \log_a M$$

Ejemplos:

Forma Exponencial	Forma Logarítmica
$2^3 = 8$	$\log_2 8 = 3$
$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$
$16^{\frac{1}{2}} = 4$	$\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$
$8^{5/3} = 32$	$\log_8 32 = \frac{5}{3}$
$2^{-3} = \frac{1}{8}$	$\log_2 \frac{1}{8} = -3$
$9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$	$\log_9 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$

Puede construirse una tabla para números cuyos logaritmos sean enteros.

Forma Exponencial	Forma Logarítmica
$10^{3} = 1000$	$\log 1000 = 3$
$10^{2} = 100$	$\log 100 = 2$
$10^{1} = 10$	$\log 10 = 1$
$10^{0} = 1$	$\log 1 = 0$
$10^{-1} = 0.1$	$\log 0.1 = -1$
$10^{-2} = 0.01$	$\log 0.01 = -2$
$10^{-3} = 0.001$	$\log 0.001 = -3$

Si se busca el logarítmo de 125, de la tabla, se infiere que como está comprendido entre 100 y 1000, el logarítmo estará comprendido entre 2 y 3. Dicho logarítmo será 2 + una fracción decimal, en general:

$$\log N = (\text{un entero}) + (\text{una fracción decimal} \geqslant 0, < 1)$$

A la parte entera se le denomina CARACTERÍSTICA y a la fracción decimal MANTISA.

$$\log N = \text{Característica} + \text{Mantisa}$$

Las mantisas son decimales infinitos no repetidos que pueden aproximarse al número de cifras decimales que se deseen, estas aproximaciones se han tabulado para cuatro, cinco, seis o más cifras decimales en las llamadas tablas de logarítmos. Los valores de la mantisa son siempre positivos.

La característica se determina de acuerdo con las reglas siguientes:

1. Si el número N es mayor de 1, la característica es igual al número de dígitos a la izquierda del punto decimal menos 1.

2. Si el número N es menor de 1, la característica es negativa y está dada por el número de posiciones en que se encuentra el primer dígito diferente de cero a la derecha del punto decimal denominado por la letra k. Puesto que la mantisa siempre es positiva, la característica negativa siempre se escribirá como $(10 - k) - 10$.

Ejemplos de características:

Número	Característica
736.2	2
56.98	1
3.425	0
0.9184	9 - 10
0.04321	8 - 10
0.0000338	5 - 10

Uso de las Tablas de Logaritmos.

La Tabla I proporciona la mantisa de un logarítmo, con seis cifras decimales de aproximación y donde el punto decimal antes de cada cantidad ha sido omitido.

Los números 0.04874, 0.4874, 4.874 y 4874000, tienen la misma secuencia de dígitos (haciendo caso omiso de los ceros iniciales o finales).

La mantisa del logarítmo de cada uno de estos números es la misma; la característica es por supuesto diferente.

Ejemplo:

Encontrar log 4874

En base a la regla 1, su característica es:

cuatro dígitos - 1 = 3

Para encontrar la mantisa, se localizan en la columna N los primeros 3 dígitos, 487, sobre la misma línea se localiza la cantidad que está en la columna del 4.

N	...	4
487		687796

Por lo tanto, log 4874 = 3.687796

Además:

log 4874000 = 6.687796

log 4.874 = 0.687796

log 0.4874 = 9.687796 - 10

log 0.04874 = 8.687796 - 10

log 0.0004874 = 6.687796 - 10

Por otra parte:

$$\log 48.74 = 1.687796$$

$$\log 4.874 = 0.687796$$

$$\log 0.04874 = 8.687796 - 10 = \bar{1}.312204$$

$$\log 0.0004874 = 6.687796 - 10 = \bar{3}.312204$$

Nótese que es la misma mantisa de log 48.74 y del log 0.0004874.

1 Ejemplo

Para encontrar log 58164, nótese que no es posible localizar la mantisa de dicho número, por lo que se utilizará el Método de Interpolación.

Primero se encuentra la mantisa del número 58160 que es 764624 y la mantisa del número 58170 que es 764699. La diferencia de los números 58164 y 58160 es 4 y la diferencia entre los números 58170 y 58160 es 10.

Por otro lado, la diferencia de la mantisa 764624 con la mantisa 764699 es 75, por lo tanto, se podrá encontrar la diferencia que existe entre la mantisa 764624 y la mantisa requerida.

Gráficamente se tiene:

Número   Mantisa

$$10\left[\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}58160\\58164\end{array}\right]4\\58170\end{array}\right. \qquad 75\left[\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}764624\\m\end{array}\right]X\\764699\end{array}\right.$$

En esta representación, el número fuera del paréntesis corresponde a la diferencia entre las cantidades indicadas, por lo tanto, aplicando la regla de 3, se tiene:

$$10 \sim 75$$
$$4 \sim X$$

De donde $X = 75\,(4) \div 10 = 30$

$$m = 76464 + X = 76464 + 30 = 764654$$

Recordando que la mantisa es la parte decimal del logarítmo, entonces la mantisa requerida es 0.764654 .

De donde:

$$\log 58164 = 4.764654$$

Para encontrar la mantisa de log 487642 es suficiente encontrar la mantisa del log 48764, para encontrar la mantisa del log 498769, se busca la mantisa del log 49877. Generalizando, para encontrar la mantisa del logarítmo de un número con seis cifras o más dígitos, se redondea dicho número a cinco dígitos.

Tabla de Partes Proporcionales.

El Método de Interpolación descrito anteriormente, consiste en:

a) Encontrar la diferencia, llamada diferencia tabular, entre dos cantidades consecutivas de la Tabla I.
En el ejemplo 1 la diferencia tabular fué de 75.

b) Encontrar un cierto número de décimos de dicha diferencia tabular, en el ejemplo 1 se necesitaban 4/10 de la diferencia tabular.

En la Tabla I el promedio de las diferencias tabulares de las cantidades de - - cualquier renglón está dado en el mismo renglón bajo las letras "DIF". Puesto - que el uso del promedio de las diferencias tabulares en vez de las diferencias tabulares exactas no altera en forma apreciable los cálculos, por lo tanto, se empleará el promedio de las diferencias.

2 Ejemplo

Encontrar la mantisa del log 88967.
Buscando en tablas, bajo el número 6, en el renglón correspondiente a 889, se - localiza 949195 y en la columna DIF la diferencia tabular es 49. Por lo tanto, se necesitan 7/10 de 49.
En la misma página, en la Tabla de Partes Proporcionales se busca el número 49 en DIF y, en el mismo renglón en la columna correspondiente al número 7, se localiza el número 34.3 ; es decir que 7/10 de 49 es 34.3.

Se suma finalmente a la mantisa 949195 la corrección 34.3, y entonces la mantisa requerida será 949229; es decir 0.949229.

En cierto tipo de cálculos es necesario lograr una precisión mayor que la que - se obtiene interpolando en la Tabla I. Para este propósito se incluye la Tabla II, la cual proporciona mantisas con siete cifras decimales, para números desde 10 000 hasta 10 999.

3 Ejemplo

Encontrar la mantisa de log 10923.
De la Tabla II se obtiene sin necesidad de interpolación la mantisa 0.038349. Redondeando a seis decimales, el resultado es similar al que se obtiene haciendo uso de la Tabla I, o sea 0.038342.

Cambio de Logaritmos Decimales a Logaritmos Naturales

Frecuentemente se presenta el problema de convertir un logarítmo de base 10 a logaritmos naturales o Neperianos cuya base está dada en sus cifras por $e = 2.718281$

Sea $\log_e N = x$, donde $e^x = N \quad \ldots \quad (1)$

Tomando logaritmos de base 10 en ambos miembros de la ecuación (1), se tiene:

$$\log_{10} e^x = \log_{10} N$$

ó

$$x \log_{10} e = \log_{10} N$$

Despejando x, se tiene:

$$x = \frac{\log_{10} N}{\log_{10} e}$$

Pero como $x = \log_e N$, y sustituyendo en la ecuación anterior, se tiene:

$$\log_e N = \frac{\log_{10} N}{\log_{10} e}$$

$$\log_e N = \frac{1}{0.434290}$$

$$\log_e N = 2.3026$$

Concluyendo, para determinar el logarítmo natural de un número se busca inicialmente su logarítmo decimal y se multiplica por la constante 2.3026.

ANTILOGARITMOS

Sea $\log N = L$

Siendo N el antilogarítmo de L.

1 Ejemplo

a) Sabiendo que $\log N = 2.591065$, encontrar N.

Como la característica es 2, se sabe que tiene 3 dígitos a la izquierda del punto decimal; la mantisa es 591065. Se empieza a analizar dicha mantisa, y se localiza en la Tabla I en la columna 0 en el renglón correspondiente a 390. Los dígitos de N son 3900, por lo tanto, N es igual a 390.0 .

b) Sabiendo que $\log N = 1.737278$, encontrar N.

En este caso la mantisa 737278 no aparece en la Tabla I, pero se puede encontrar la mantisa 737273 correspondiente al número 5461 y la mantisa 737352 correspondiente al número 5462.

Gráficamente se tiene:

Mantisa	Número
737372	5461
737278	n
737252	5462

$$80 \left[\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 737372 \\ 737278 \end{array} \right] 6 \\ 737252 \end{array} \right. \qquad 1 \left[\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 5461 \\ n \end{array} \right] X \\ 5462 \end{array} \right.$$

$$80 \sim 1$$

$$6 \sim X$$

Donde $X = 0.075$, por lo tanto $n = 5\,461 + 0.075 = 5\,461.075$.

Puesto que la característica es 1, habrá 2 cifras a la izquierda del punto decimal, o sea, que N = 54.61075.

En este caso puede ser de gran ayuda la Tabla de Partes Proporcionales. Utilizándola se procederá como sigue:

1) Se localizan el renglón y la columna de la mantisa más próxima a la dada, obteniéndose 5461.

2) Se determina la diferencia entre la mantisa dada y la mantisa anterior. (En este caso: 737278 - 737272 = 6) y el promedio de la diferencia tabular (que es 80).

   En la Tabla de Partes Proporcionales se localiza 80 en DIF y en el mismo renglón se busca la cantidad más próxima a 6, en este caso se encuentra 7.9 en la columna del 1. Se agrega 1 a la derecha de los números ya encontrados para obtener 54611.

3) Se coloca el punto decimal de acuerdo con la regla establecida para las características, obteniéndose N = 54.611.

c) Dado log N = 2.891012, encontrar N.

La cantidad inmediata anterior a la mantisa 891012 en la Tabla I es 890980 correspondiente al número 7780. La diferencia es 891012 - 890980 = 32 y la diferencia tabular es 56. Se localiza 56 en DIF en la Tabla de Partes Proporcionales, se encuentra que 28.0 en la columna 5 es la cantidad más próxima a 32. En esta forma se obtiene 77805. La característica es 2; por lo tanto, habrá 3 dígitos a la izquierda del punto decimal y en consecuencia N = 778.05 .

d) Dado que log N = 6.034324, encontrar N.

La mantisa más próxima omitiendo el cero después del punto decimal a 34324 en la Tabla I, es 34227 correspondiente al número 1082.

La diferencia es 34324 - 34227 = 97 y la diferencia tabular 400. Se localiza 400 en DIF en la Tabla de Partes Proporcionales, se encuentra 80.0 en la columna 2, como el más próximo a 97.

Los dígitos requeridos para N son 10822. Debe haber 7 dígitos antes del punto decimal. Aumentando a 10822 en dos cifras se tiene que N = 1082200.

e) Dado log N = 8.358730 - 10 = $\bar{1}$.64127, encontrar N.

La menor mantisa más próxima a 358730 es 358696, correspondiente al número 2284. La diferencia es 358730 - 358696 = 34 y la diferencia tabular 190. Localizando 190 en la Tabla de Partes Proporcionales se encuentra 19.0 en la columna del 1 como la cantidad más próxima a 34. Los dígitos de N serán 22841. Debe haber un cero inmediatamente después del punto decimal, por lo tanto, N = 0.022841.

Nota: Se coloca el signo (-) encima de 1, en el ejemplo anterior, para indicar que lo que es negativa es la parte entera (característica) y no la parte decimal (mantisa).

f) Dado log N = 0.029143, encontrar N.

Cuando sea suficiente una precisión de 5 dígitos, se podrá conocer dichos dígitos directamente de la Tabla II.

Se encuentra la mantisa 29143, omitiendo el cero después del punto decimal correspondiente al número 10694, es la mantisa más próxima a 29140.

La característica es 0, por lo tanto habrá 1 dígito a la izquierda del punto decimal y en consecuencia N = 1.0694.

COLOGARITMOS

El cologarítmo de un número se define como el logarítmo del recíproco del número.

$$\text{colog } N = \log \frac{1}{N} = \log 1 - \log N$$

$$\text{colog } N = 0 - \log N$$

$$\text{colog } N = (10.000000 - 10) - \log N$$

1 Ejemplo

Encontrar colog 35.7

$$\text{colog } 35.7 = \log 1 - \log 35.7$$

$$\begin{aligned} \text{colog } 35.7 = \; & 10.000000 - 10 \\ - \; & 1.552668 \\ \hline & 8.447332 - 10 \end{aligned}$$

Los cologarítmos se emplean en los cálculos en donde es deseable sumar todos los logarítmos, en lugar de restar algunos de ellos.

2 Ejemplo

Calcular $\log \dfrac{306}{(98.1)(1.52)}$

$$\log \frac{306}{(98.1)(1.52)} = \log 306 - \log 98.1 - \log 1.52$$

$$\log \frac{306}{(98.1)(1.52)} = \log 306 + \text{colog } 98.1 + \text{colog } 1.52$$

$$\begin{array}{lrcrcl} \log & 306 & = & 2.485721 & & \\ \text{colog} & 98.1 & = & 8.008331 & - & 10 \\ \text{colog} & 1.52 & = & 9.818156 & - & 10 \\ \hline & & & 20.312208 & - & 20 \end{array}$$

En consecuencia

$$\log \frac{306}{(98.1)\ (1.52)} = 0.312208$$

Aplicando antilogarítmo a ambos miembros de la igualdad se tiene:

$$\frac{306}{(98.1)\ (1.52)} = \text{antilog } 0.312208$$

De donde

$$\frac{306}{(98.1)\ (1.52)} = 2.052144$$

Nota: Si para el manejo de logarítmos se emplea una calculadora electrónica,- los logarítmos de base 10 están indicados como log.

Para obtener un cologarítmo de un número N, se encuentra primero su inverso; es decir, 1/N, se busca su logarítmo y a esa cantidad se le suma 10. El resultado- será el cologarítmo, sobreentendiéndose que a ese valor hay que restarle 10.

1 Ejemplo

Calcular colog 37.42

$$\frac{1}{37.42} = 0.026723$$

$$\log 0.026723 = \bar{1}.573103$$

$$\bar{1}.573103 + 10 = 8.426896$$

$$\text{colog } 37.42 = 8.426896 - 10$$

TABLA II MANTISAS CON SIETE DECIMALES

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
1000	000 0000	0434	0869	1303	1737	2171	2605	3039	3473	3907	434
1	4341	4775	5208	5642	6076	6510	6943	7377	7810	8244	434
2	8677	9111	9544	9977	*0411	*0844	*1277	*1710	*2143	*2576	433
3	001 3009	3442	3875	4308	4741	5174	5607	6039	6472	6905	433
4	7337	7770	8202	8635	9067	9499	9932	*0364	*0796	*1228	432
1005	002 1661	2093	2525	2957	3389	3821	4253	4685	5116	5548	432
6	5980	6411	6843	7275	7706	8138	8569	9001	9432	9863	431
7	003 0295	0726	1157	1588	2019	2451	2882	3313	3744	4174	431
8	4605	5036	5467	5898	6328	6759	7190	7620	8051	8481	431
9	8912	9342	9772	*0203	*0633	*1063	*1493	*1924	*2354	*2784	430
1010	004 3214	3644	4074	4504	4933	5363	5793	6223	6652	7082	430
1	7512	7941	8371	8800	9229	9659	*0088	*0517	*0947	*1376	429
2	005 1805	2234	2663	3092	3521	3950	4379	4808	5237	5666	429
3	6094	6523	6952	7380	7809	8238	8666	9094	9523	9951	429
4	006 0380	0808	1236	1664	2092	2521	2949	3377	3805	4233	428
1015	4660	5088	5516	5944	6372	6799	7227	7655	8082	8510	428
6	8937	9365	9792	*0219	*0647	*1074	*1501	*1928	*2355	*2782	427
7	007 3210	3637	4064	4490	4917	5344	5771	6198	6624	7051	427
8	7478	7904	8331	8757	9184	9610	*0037	*0463	*0889	*1316	426
9	008 1742	2168	2594	3020	3446	3872	4298	4724	5150	5576	426
1020	6002	6427	6853	7279	7704	8130	8556	8981	9407	9832	426
1	009 0257	0683	1108	1533	1959	2384	2809	3234	3659	4084	425
2	4509	4934	5359	5784	6208	6633	7058	7483	7907	8332	425
3	8756	9181	9605	*0030	*0454	*0878	*1303	*1727	*2151	*2575	424
4	010 3000	3424	3848	4272	4696	5120	5544	5967	6391	6815	424
1025	7239	7662	8086	8510	8933	9357	9780	*0204	*0627	*1050	424
6	011 1474	1897	2320	2743	3166	3590	4013	4436	4859	5282	423
7	5704	6127	6550	6973	7396	7818	8241	8664	9086	9509	423
8	9931	*0354	*0776	*1198	*1621	*2043	*2465	*2887	*3310	*3732	422
9	012 4154	4576	4998	5420	5842	6264	6685	7107	7529	7951	422
1030	8372	8794	9215	9637	*0059	*0480	*0901	*1323	*1744	*2165	422
1	013 2587	3008	3429	3850	4271	4692	5113	5534	5955	6376	421
2	6797	7218	7639	8059	8480	8901	9321	9742	*0162	*0583	421
3	014 1003	1424	1844	2264	2685	3105	3525	3945	4365	4785	420
4	5205	5625	6045	6465	6885	7305	7725	8144	8564	8984	420
1035	9403	9823	*0243	*0662	*1082	*1501	*1920	*2340	*2759	*3178	420
6	015 3598	4017	4436	4855	5274	5693	6112	6531	6950	7369	419
7	7788	8206	8625	9044	9462	9881	*0300	*0718	*1137	*1555	419
8	016 1974	2392	2810	3229	3647	4065	4483	4901	5319	5737	418
9	6155	6573	6991	7409	7827	8245	8663	9080	9498	9916	418
1040	017 0333	0751	1168	1586	2003	2421	2838	3256	3673	4090	417
1	4507	4924	5342	5759	6176	6593	7010	7427	7844	8260	417
2	8677	9094	9511	9927	*0344	*0761	*1177	*1594	*2010	*2427	417
3	018 2843	3259	3676	4092	4508	4925	5341	5757	6173	6589	416
4	7005	7421	7837	8253	8669	9084	9500	9916	*0332	*0747	416
1045	019 1163	1578	1994	2410	2825	3240	3656	4071	4486	4902	415
6	5317	5732	6147	6562	6977	7392	7807	8222	8637	9052	415
7	9467	9882	*0296	*0711	*1126	*1540	*1955	*2369	*2784	*3198	415
8	020 3613	4027	4442	4856	5270	5684	6099	6513	6927	7341	414
9	7755	8169	8583	8997	9411	9824	*0238	*0652	*1066	*1479	414

N		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
1050	021	1893	2307	2720	3134	3547	3961	4374	4787	5201	5614	413
1		6027	6440	6854	7267	7680	8093	8506	8919	9332	9745	413
2	022	0157	0570	0983	1396	1808	2221	2634	3046	3459	3871	413
3		4284	4696	5109	5521	5933	6345	6758	7170	7582	7994	412
4		8406	8818	9230	9642	*0054	*0466	*0878	*1289	*1701	*2113	412
1055	023	2525	2936	3348	3759	4171	4582	4994	5405	5817	6228	411
6		6639	7050	7462	7873	8284	8695	9106	9517	9928	*0339	411
7	024	0750	1161	1572	1982	2393	2804	3214	3625	4036	4446	411
8		4857	5267	5678	6088	6498	6909	7319	7729	8139	8549	410
9		8960	9370	9780	*0190	*0600	*1010	*1419	*1829	*2239	*2649	410
1060	025	3059	3468	3878	4288	4697	5107	5516	5926	6335	6744	410
1		7154	7563	7972	8382	8791	9200	9609	*0018	*0427	*0836	409
2	026	1245	1654	2063	2472	2881	3289	3698	4107	4515	4924	409
3		5333	5741	6150	6558	6967	7375	7783	8192	8600	9008	408
4		9416	9824	*0233	*0641	*1049	*1457	*1865	*2273	*2680	*3088	408
1065	027	3496	3904	4312	4719	5127	5535	5942	6350	6757	7165	408
6		7572	7979	8387	8794	9201	9609	*0016	*0423	*0830	*1237	407
7	028	1644	2051	2458	2865	3272	3679	4086	4492	4899	5306	407
8		5713	6119	6526	6932	7339	7745	8152	8558	8964	9371	406
9		9777	*0183	*0590	*0996	*1402	*1808	*2214	*2620	*3026	*3432	406
1070	029	3838	4244	4649	5055	5461	5867	6272	6678	7084	7489	406
1		7895	8300	8706	9111	9516	9922	*0327	*0732	*1138	*1543	405
2	030	1948	2353	2758	3163	3568	3973	4378	4783	5188	5592	405
3		5997	6402	6807	7211	7616	8020	8425	8830	9234	9638	405
4	031	0043	0447	0851	1256	1660	2064	2468	2872	3277	3681	404
1075		4085	4489	4893	5296	5700	6104	6508	6912	7315	7719	404
6		8123	8526	8930	9333	9737	*0140	*0544	*0947	*1350	*1754	403
7	032	2157	2560	2963	3367	3770	4173	4576	4979	5382	5785	403
8		6188	6590	6993	7396	7799	8201	8604	9007	9409	9812	403
9	033	0214	0617	1019	1422	1824	2226	2629	3031	3433	3835	402
1080		4238	4640	5042	5444	5846	6248	6650	7052	7453	7855	402
1		8257	8659	9060	9462	9864	*0265	*0667	*1068	*1470	*1871	402
2	034	2273	2674	3075	3477	3878	4279	4680	5081	5482	5884	401
3		6285	6686	7087	7487	7888	8289	8690	9091	9491	9892	401
4	035	0293	0693	1094	1495	1895	2296	2696	3096	3497	3897	400
1085		4297	4698	5098	5498	5898	6298	6698	7098	7498	7898	400
6		8298	8698	9098	9498	9898	*0297	*0697	*1097	*1496	*1896	400
7	036	2295	2695	3094	3494	3893	4293	4692	5091	5491	5890	399
8		6289	6688	7087	7486	7885	8284	8683	9082	9481	9880	399
9	037	0279	0678	1076	1475	1874	2272	2671	3070	3468	3867	399
1090		4265	4663	5062	5460	5858	6257	6655	7053	7451	7849	398
1		8248	8646	9044	9442	9839	*0237	*0635	*1033	*1431	*1829	398
2	038	2226	2624	3022	3419	3817	4214	4612	5009	5407	5804	398
3		6202	6599	6996	7393	7791	8188	8585	8982	9379	9776	397
4	039	0173	0570	0967	1364	1761	2158	2554	2951	3348	3745	397
1095		4141	4538	4934	5331	5727	6124	6520	6917	7313	7709	397
6		8106	8502	8898	9294	9690	*0086	*0482	*0878	*1274	*1670	396
7	040	2066	2462	2858	3254	3650	4045	4441	4837	5232	5628	396
8		6023	6419	6814	7210	7605	8001	8396	8791	9187	9582	395
9		9977	*0372	*0767	*1162	*1557	*1952	*2347	*2742	*3137	*3532	395

SERIES Y DESARROLLO DE FUNCIONES

Una sucesión es un conjunto de términos formados según una ley determinada.

Ejemplos:

$$2, \quad 4, \quad 8, \quad 16, \quad 32, \quad \ldots$$

$$1, \quad Y, \quad Y^2, \quad Y^3, \quad \ldots$$

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots$$

Serie: es la suma indicada de los términos de una sucesión. De las sucesiones anteriores se tienen las series:

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots$$

$$1 + Y + Y^2 + Y^3 + \ldots$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Se dice que una sucesión o serie es finita si el número de términos es limitado. Al mismo tiempo se dice que una sucesión o serie es infinita si el número de términos es ilimitado.

En la sucesión a_1, a_2, $\ldots$, el n-ésimo término es a_n.

Si se considera a n como variable cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos, la sucesión de términos pueden indicarse como $\left\{a_n\right\}$.

1 Ejemplo

$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ representa a la sucesión infinita de términos:

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n}, \quad \ldots$$

2 Ejemplo

$\left\{\frac{X^{n-1}}{n+1}\right\}$ representa a la sucesión infinita de términos:

$$\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{3}\,x\,,\ \frac{1}{4}\,x^2\,,\ \ldots\,,\ \frac{x^{n-1}}{n+1}\,,\ \ldots$$

CONVERGENCIA

Sea $b_1\,,\ b_2\,,\ b_3\,,\ \ldots\,,\ b_n\,,\ \ldots$ una sucesión de términos; entonces:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$$

es una serie infinita.

Se puede formar una nueva sucesión $\{S_n\}$ cuyos elementos sean sumas de un número finito de términos de la serie anterior; es decir:

$$\begin{aligned} S_1 &= b_1 \\ S_2 &= b_1 + b_2 \\ S_3 &= b_1 + b_2 + b_3 \\ &\vdots \\ S_n &= b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n \end{aligned}$$

Se dice que una serie infinita converge o es convergente si y solo si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S, es decir:

$$\lim_{n \to \infty} \{S_n\} = S$$

por lo tanto, se puede afirmar que la serie converge al límite S y a la cantidad S se le denomina suma de la serie o límite de la suma de los n primeros términos. Una serie que no es convergente se le llama divergente.

Una serie diverge porque el $\lim_{n \to \infty} \{S_n\} = \infty$, ó porque conforme n se -

incrementa, $\left\{S_n\right\}$ alternaticamente crece y decrece sin aproximarse a un límite.

3 Ejemplo

La serie geométrica

$$a,\quad a\,r,\quad a\,r^2,\quad a\,r^3,\quad \ldots$$

y en este caso:

$$\left\{S_n\right\} = a + a\,r + a\,r^2 + \ldots + a\,r^{n-1}$$

Aplicando la suma de una progresión geométrica; se tiene:

$$S = \frac{a\,[1 - r^n]}{1 - r}$$

Si r es un número menor que uno, r^n tiende a cero cuando n tiende a infinito, entonces:

$$\left\{S_n\right\} = \frac{a}{1 - r}$$

y la serie es convergente.

Por el contrario, si r es mayor que uno, entonces r^n tiende a infinito cuando n tiende a infinito; entonces:

$$\lim_{n \to \infty} \left\{S_n\right\} = \infty$$

y la serie diverge.

Si $r = -1$, la serie será:

$$a,\ -a,\ a,\ -a,\ a,\ \ldots -, +, \ldots$$

entonces alternativamente $\left\{S_n\right\}$ es a, ó $-a$ y por consiguiente no tiene límite.

Se concluye que una serie geométrica es convergente y tiene por límite $\frac{a}{1 - r}$ cuando $|r| < 1$ y es divergente cuando $|r| \geqslant 1$.

SERIE DE MACLAURIN

Series de Potencias.

Una serie de potencias se define por la expresión:

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$$

donde a_0, a_1, ..., a_n son números reales.

La serie puede converger para todos los valores de X ó solo para valores de X comprendidos entre dos números, como en el ejemplo anterior donde la serie era convergente para valores de X comprendidos en el intervalo (- 1, 1), ó puede converger para un solo valor de X.

En cualquier caso, los valores de X para los cuales la serie converge forman el campo de convergencia.

Una serie de potencias define una función de X para valores comprendidos en su campo de convergencia y se escribe:

$$f(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n \quad \ldots (1)$$

entendiéndose que el valor de f (X) es el límite de la suma de la serie del segundo miembro de la ecuación.

Así como cualquier serie de potencias convergente puede definir una función, recíprocamente puede demostrarse que cualquier función que sea continua y tenga derivadas continuas puede expresarse como una serie de potencias.

Cuando una función está dada en esta forma, es posible expresar los coeficientes de la serie en términos de la función y sus derivadas.

En efecto, sea:

$$f(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \dots + a_n X^n$$

derivando se tiene:

$$f'(X) = a_1 + 2 a_2 X + 3 a_3 X^2 + \dots + n a_n X^{n-1}$$

$$f''(X) = 2 a_2 + (3)(2) a_3 X + (4)(3) a_4 X^2 + \dots + \\ + (n-1)(n) a_n X^{n-2}$$

$$f'''(X) = (3)(2) a_3 + (4)(3)(2) a_4 X + \dots + \\ + (n-1)(n-2)(n) a_n X^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(X) = n(n-1)(n-2) \dots (3)(2) a_n + \dots$$

Si $X = 0$, en cada una de las ecuaciones anteriores, se tiene:

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{1}{2!} f''(0),$$

$$a_3 = \frac{1}{3!} f'''(0), \quad \dots, \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

Sustituyendo en la ecuación (1); se tiene:

$$f(X) = f(0) + f'(0)\,X + \frac{f''(0)}{2\,!}\,X^2 + \frac{f'''(0)}{3\,!}\,X^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}\,X^n + \ldots \qquad \ldots (2)$$

esta serie es llamada serie de Maclaurin.

Existe una condición necesaria para que $f(X)$ sea representada por la ecua - ción (2) es que ésta y todas sus derivadas estén definidas para $X = 0$.

1 Ejemplo

Expresar e^x en serie de potencias.

Recordando:

$$\frac{d}{d\,X}\,e = e^u\,\frac{d\,u}{d\,X}$$

$$\begin{array}{lll} f(X) = e^x & \qquad & f(0) = 1 \\ f'(X) = e^x & & f'(0) = 1 \\ f''(X) = e^x & & f''(0) = 1 \end{array}$$

Dado que $f(X)$ es continua, tiene derivadas continuas, y tanto la función - como sus derivadas están definidas para $X = 0$, entonces e^x puede ser de - sarrollado por medio de la serie de Maclaurin.

$$f(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2\,!} + \frac{X^3}{3\,!} + \ldots + \frac{X^n}{n\,!} + \ldots$$

Si $X = 1$, entonces $f(1) = e$, por lo tanto:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \ldots$$

Recordando que e es la base de los logaritmos Neperianos y su valor aproximado es $e = 2.718281828459\ldots$

2 Ejemplo

Desarrollar en serie de potencias $e^{n x}$

$$
\begin{array}{llllll}
f(X) & = & e^{n x} & f(0) & = & 1 \\
f'(X) & = & n e^{n x} & f'(0) & = & n \\
f''(X) & = & n^2 e^{n x} & f''(0) & = & n^2 \\
f'''(X) & = & n^3 e^{n x} & f'''(0) & = & n^3
\end{array}
$$

Aplicando la serie de Maclaurin:

$$f(X) = 1 + n X + \frac{n^2}{2!} X^2 + \frac{n^3}{3!} X^3 + \ldots + \ldots$$

3 Ejemplo

Desarrollar en serie de potencias a la función $f(X) = e^{-n x}$

$$
\begin{array}{llllll}
f(X) & = & e^{-n x} & f(0) & = & 1 \\
f'(X) & = & -n e^{-n x} & f'(0) & = & -n \\
f''(X) & = & n^2 e^{-n x} & f''(0) & = & n^2 \\
f'''(X) & = & -n^3 e^{-n x} & f'''(0) & = & -n^3
\end{array}
$$

Si se aplica la serie de Maclaurin:

$$f(X) = 1 - n X + \frac{n^2}{2!} X^2 - \frac{n^3}{3!} X^3 + \ldots - \ldots$$

Si $n = 1$ entonces $f(X) = e^{-x}$

$$f(X) = 1 - X + \frac{X^2}{2!} - \frac{X^3}{3!} + \ldots - \ldots$$

4 Ejemplo

Desarrollar la función L n (1 + X); recordando que:

$$\frac{d}{d\,X}\ L\,n\ u = \frac{1}{u}\ \frac{d\,u}{d\,X}$$

$$f\,(X) = L\,n\ (1+X) \qquad f\,(0) = 0$$

$$f'(X) = \frac{1}{1+X} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(X) = -\frac{1}{(1+X)^2} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(X) = \frac{2\,(1+X)}{(1+X)^4} \qquad f'''(0) = 2$$

$$f^{IV}\,(X) = \frac{-6\,(1+X)^2}{(1+X)^6} \qquad f^{IV}\,(0) = -6$$

Nótese que las derivadas sucesivas de la función para $X = 0$, forman una - sucesión alternando en signo, de valores factoriales; es decir:

$$(0\,!),\ -(1\,!),\ (2\,!),\ -(3\,!),\ + \ldots - \ldots$$

y aplicando la serie de Maclaurin; se tiene:

$$L\,n\ (1+X) = X - \frac{1\,!}{2\,!}\,X^2 + \frac{2\,!}{3\,!}\,X^3 - \frac{3\,!}{4\,!}\,X^4 + \ldots -$$

5 Ejemplo

Desarrollar la función $f\,(X) = (a+X)^n$

$$f(X) = (a + X)^{n} \qquad f(0) = a^{n}$$

$$f'(X) = n\,(a + X)^{n-1} \qquad f'(0) = n\,a^{n-1}$$

$$f''(X) = n\,(n - 1)(a + X)^{n-2} \qquad f''(0) = n\,(n - 1)\,a^{n-2}$$

$$f'''(X) = n\,(n - 1)(n - 2)(a + X)^{n-3} \qquad f'''(0) = n\,(n-1)(n-2)\,a^{n-3}$$

Desarrollando por medio de la serie de Maclaurin:

$$(a + X)^{n} = a^{n} + n\,a^{n-1}\,X + \frac{n\,(n - 1)}{2\,!}\,a^{n-2}\,X^{2} + $$

$$+ \frac{n\,(n - 1)\,(n - 2)}{3\,!}\,a^{n-3}\,X^{3} + \ldots$$

esta serie es llamada serie binómica.

Si $a = 1$ entonces:

$$(1 + X)^{n} = 1 + n\,X + \frac{n\,(n - 1)}{2\,!}\,X^{2} + \frac{n\,(n - 1)(n - 2)}{3\,!}\,X^{3} + \ldots$$

6 Ejemplo

Para la función $f(X) = (1 + X)^{-n}$

$$f(X) = (1 + X)^{-n} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(X) = -n\,(1 + X)^{-n-1} \qquad f'(0) = -n$$

$$f''(X) = -n(-n-1)(1 + X)^{-n-2} \qquad f''(0) = n\,(n + 1)$$

$$f'''(X) = -n(-n-1)(-n-2)(1+X)^{-n-3} \qquad f'''(0) = -n(n+1)(n+2)$$

Aplicando la serie de Maclaurin:

$$(1+X)^{-n} = 1 - nX + \frac{n(n+1)}{2!}X^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}X^3 + \dots -$$

Si $n = 1$ entonces:

$$(1+X)^{-1} = 1 - X + X^2 - X^3 + \dots - \dots$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Aplicando la serie de Maclaurin, desarrollar en serie de potencias las funciones:

a) e^{δ} b) $e^{-\delta}$ c) $e^{\frac{1}{2}}$ d) e^{-1} e) $L\,n\,(1 + 0.08)$

2. Demostrar por medio del desarrollo de Maclaurin las siguientes relaciones:

a) $(1-d)^n = 1 - nd + \frac{n(n-1)}{2!}d^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}d^3 + \dots$

b) $(1-d)^{-n} = 1 + nd + \frac{n(n+1)}{2!}d^2 + \frac{(n+1)(n+2)}{3!}d^3 + \dots$

c) $(1+i)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}i + \frac{\frac{1}{m}\left[\frac{1}{m} - 1\right]}{2!}i^2 + \dots$

d) $(1+i)^{-1} = 1 - i + i^2 - i^3 + \dots - \dots$

e) $(1+i)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}i - \frac{1}{8}i^2 + \dots -$

f) $(1-d)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}d - \frac{1}{8}d^2 + \dots, -$

EL NUMERO "e"

Las series de números tales como:

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \ldots \qquad \ldots (1)$$

y

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ \ldots \qquad \ldots (2)$$

en las que cada término es igual al que le precede aumentado en 2 unidades, - como en el caso (1) y en las que cada término es igual al inmediato anterior - multiplicado por 3 unidades, como en el caso (2); reciben el nombre de progresiones.

Progresión Aritmética es una sucesión de términos en donde cada uno de los - términos se obtiene sumándole al término anterior una cantidad constante (po - sitiva o negativa) llamada razón.

Progresión Geométrica es una sucesión de términos en donde cada uno de los - términos se obtiene multiplicándole al término anterior una cantidad constante (positiva o negativa) llamada razón.

Una suma infinita se describe como:

$$V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n + \ldots .$$

en la que los términos forman una sucesión $\left\{V_n\right\}$, que se denomina como serie infinita.

Estableciendo la sucesión de sumas parciales finitas:

$$S_1 = V_1$$

$$S_2 = V_1 + V_2$$

$$S_3 = V_1 + V_2 + V_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$$

Suponiendo que existe el límite U de $\{S_n\}$ cuando n aumenta indefinidamente:

$$\lim_{n \to \infty} \{S_n\} = U \qquad \ldots (3)$$

entonces se define U como el valor de la serie infinita.

Una serie que posee valor según (3), se llama convergente, si no se le puede asignar valor alguno porque no existe límite, se denomina divergente.

Ahora bien, en el desarrollo de las potencias de un binomio (Teorema del Binomio) se tiene una serie importante:

$$(a + b)^n = a^n + n\,a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2\,!} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\,!} a^{n-3} b^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\,!} a^{n-4} b^4 + \ldots \qquad \ldots (4)$$

Siendo $f(X) = (a + b)^n$ y aplicando la serie de Maclaurin, se tiene:

$$f(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2\,!} + \frac{X^3}{3\,!} + \ldots + \frac{X^n}{n\,!} + \ldots$$

Si $f(X) = 1$, entonces:

$$f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \ldots + \frac{1}{n\,!} + \ldots \qquad \ldots (5)$$

La serie (5) es convergente, la suma de los primeros diez términos de la serie dan el valor de 2.718282. A la suma de una serie convergente, se le puede llamar número y a la de ésta en particular (5) se le denomina número "e".

El número "e" es irracional, no siendo raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros contrariamente del irracional $\sqrt{2}$, que sí es raíz de la ecuación algebraica con coeficientes enteros $X^2 - 2 = 0$, donde $X = \sqrt{2}$.

Al número "e" se le llama número trascendente, especie que incluye también al número π.

Por otra parte, siendo la ecuación que define el valor presente de una anualidad.

$$A = P \, \frac{(1 + r/k)^{nk} - 1}{r/k} \qquad \ldots (6)$$

La fórmula:

$$A = P \left[1 + \frac{r}{k} \right]^{nk} \qquad \ldots \quad (7)$$

expresa la ley del interés compuesto, en su forma normal de monto, es una función exponencial de un tipo muy importante en el mundo natural; hay muchas cantidades a nuestro alrededor que crecen continuamente, tal y como crecería una suma de dinero si se le agregara continuamente el interés compuesto.
Suponiendo $P = 1$, $r = 100\,\%$, $n = 1$ y k toma valores sucesivos de 1, 2, 10, 100, 1 000, 10 000, etc., sustituyendo en la fórmula (7) y tabulando se obtiene:

k	1	2	10	100	1 000	10 000
S	2	2.25	2.5936	2.7040	2.7164	2.7181

Esto lleva a la discusión del límite cuando k aumenta indefinidamente. Cuando k aumenta, el binomio $(1 + 1/k)^k$ tiende hacia 1, pero el exponente k crece; la tabla muestra un aumento rápido inicial de S, pero ese crecimiento va disminuyendo, es decir, se busca:

$$\lim_{k \to \infty} \left[1 + \frac{1}{k} \right]^k$$

Suponiendo que k es un entero positivo, por el Teorema del Binomio:

$$\left[1 + \frac{1}{k} \right]^k = 1 + k \left[\frac{1}{k} \right] + \frac{k\,(k-1)}{2\,!} \left[\frac{1}{k} \right]^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{k\,(k-1) \ \ldots \ (k-k+1)}{k\,!} \left[\frac{1}{k} \right]^k$$

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{k}\right)\ldots\ldots \quad (8)$$

esta es una serie convergente análoga a la descrita en (5).

De la misma manera $\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}$ tiene un desarrollo similar a (8), difiriendo sólo en que el denominador de la fracción en cada potencia de (8) sería $k+1$ en lugar de k y puesto que $1-\frac{m}{k} < 1-\frac{m}{k+1}$ para cualquier m positivo, se tiene:

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} < \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}$$

para cualquier entero positivo de k. Entonces $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}$ crece siempre al aumentar k para enteros positivos; además se observa de (8) que puesto que $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}$ para $k > 2$ y puesto que cada paréntesis de (8) es menor que 1,

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} < 2 + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}}\right]$$

$$= 2 + \left[1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+1}\right]$$

siendo la expresión entre corchetes una progresión geométrica,

de donde: $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} < 3$, para todo entero $k > 0$

y el límite se define como

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} = e$$

Con 8 cifras significativas $e = 2.7182818$

Si en (7) se reemplaza $\frac{r}{k}$ por $\frac{1}{t}$ (es decir $k = rt$), donde t aumenta indefinidamente al hacerlo k.

$$S = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{nk} = P\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{nrt} = P\left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{nr}$$

Cuando t se hace indefinidamente grande, la cantidad entre corchetes tiende a " e " y es la única parte de la fórmula que es afectada por el incremento de t, por lo que el límite de la fórmula será:

$$S = P\,e^{nr} \qquad \ldots (9)$$

que indica el monto S obtenido capitalizando P continuamente a r % durante n años.

La expresión (9) se conoce como función exponencial y describe toda ley natural donde el crecimiento o decrecimiento se produce continuamente (dependiendo de que el exponente sea positivo o negativo) y se aplica tanto a las matemáticas financieras como a la biología, la química, la física, etc..

Matemáticamente se puede dar una expresión genérica a (9) haciendo $P = 1$ y $n = x$, quedando la función como:

$$y = e^{rx}$$

y puesto que r es una constante

$$y = e^{x} \qquad \ldots (10)$$

la cual es una función natural muy importante.

Véanse los siguientes ejemplos:

1 Ejemplo

El número N de bacterias de un cultivo crece a una velocidad, por hora, que es siempre un 30 % del número inicial en cualquier instante; si en un momento dado hay 10 000 bacterias. ¿Cuántas bacterias habrán después de 6 horas?

$$N = 10\,000 \; e^{0.30\,n}$$

de donde $n = 6$ horas

$$N = 10\,000 \; e^{0.30 \times 6} = 10\,000 \; e^{1.80}$$

$$N = 60\,496$$

2 Ejemplo

La actividad de una muestra de fósforo radioactivo (32 p) era de 2 400 unidades el día 9 de Enero, si ese material se desintegra a una velocidad por día, que es siempre un 4.95 % (es el valor de la constante de desintegración). ¿Qué actividad tendrá el 19 de Enero de ese mismo año?

$$A = 2\,400 \; e^{-0.0495\,(10)} = 2\,400 \; e^{-0.495}$$

$$A = 1\,462.97$$

3 Ejemplo

El área metropolitana de la ciudad de México tenía aproximadamente 14 000 000 habitantes en 1980, si el crecimiento continuase a un 7 % anual. ¿Qué población se tendrá al cabo de 10 años?

$$H = 14\,000\,000 \; e^{0.07\,(10)} = 14\,000\,000 \; e^{0.70}$$

$$H = 28\,192\,537$$

4 Ejemplo

Una nave espacial que lleva una velocidad de 36 000 Km por segundo enciende sus retrocohetes que producen un decrecimiento de su velocidad del 10 % por segundo. ¿Cuál será su velocidad después de 60 segundos de encender los retrocohetes?

$$36\,000 \text{ Km por hora} = 10 \text{ Km por segundo}$$

$$v = 10\, e^{-0.10\,(60)} = 10\, e^{-0.60}$$

$$v = 5.488 \text{ Km por segundo}$$

$$v = 19\,757 \text{ Km por hora}$$

Si se compara la función $y = e^{x}$ con la definición de logarítmo (del griego lógos (λόγος), razón y arithmós (ἀριθμός), número), siendo su expresión $y = a^{x}$ donde $a \neq 1$, por tanto el logarítmo de "y" en la base "a" es:

$$x = \log_{a} y$$

Por otra parte, en la expresión $y = e^{x}$ donde $e \neq 1$, "e" puede usarse como base de un sistema de logaritmos definidos por:

$$x = \log_{e} y$$

Estos logaritmos se denominan logaritmos naturales y así como con los de base 10 se omite el 10 y se escribe:

$$x = \log_{10} y = \log y$$

en los logaritmos naturales se omite la letra "e" y se escribe:

$$x = \log_{e} y = \ln y$$

Al igual que con los logaritmos de base 10, se han construido tablas de logaritmos naturales que se manejan en forma análoga a los de base 10.

BIBLIOGRAFIA

1. Matemáticas Financieras.
   Helen and Robert Cissel
   Compañía Editorial Continental, S.A. México

2. Matemáticas Financieras.
   Benjamín de la Cueva
   Textos Universitarios. U.N.A.M.

3. Matemáticas Financieras.
   Frank Ayres
   Mac Graw-Hill

4. The Teory of Interest
   Stephen Kelirson
   Edición 1969

5. Matemáticas Financieras por Logaritmos
   Edición 1943

6. Compound Interest and Annuities - Certain
   D.W.A. Donald
   Cambridge at the University Press

7. Cálculo Financiero y Actuaría
   Mc Dowell Vazquez
   Tomo 2 Editorial Selconmex