



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

**La Estructura por Edad y Orden de Nacimiento
de la Fecundidad en México: 1950, 1960 Y 1970**

T E S I S

Que para obtener el título de:

A C T U A R I O

P r e s e n t a ;

Juan Armando Durán Díaz

México, D. F.

1982



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

	PAGS.
PROLOGO	1
INTRODUCCION.	2
I. - TASA DE FECUNDIDAD GENERAL	6
a) Definición	
b) Tasa de Fecundidad por Edad y Orden de Nacimiento	
II. - METODOLOGIA	8
a) Presentación del Modelo de Ajuste (Función de Makeham)	
III. - PRESENTACION DE LA INFORMACION	12
IV. - APLICACION DEL MODELO DE AJUSTE	18
a) Ejemplificación del Modelo	
b) Presentación de los Resultados	
c) Comentarios de los Resultados	
V. - CONCLUSIONES GENERALES	41
ANEXOS	
BIBLIOGRAFIA	

P R O L O G O

El crecimiento de la población en México ha aumentado considerablemente en los últimos años. Este crecimiento es originado principalmente por el incremento en el número de nacimientos y la disminución del número de defunciones ocurridas. De ahí que una tasa bruta de natalidad (TBN) elevada, es una característica demográfica del país.

Cuando los nacimientos están referidos a la procreación humana se habla de la fecundidad. Para el análisis de este fenómeno demográfico, una de las herramientas utilizadas son los modelos matemáticos, que permiten medir y apreciar la evolución de la fecundidad en las mujeres, y de esa forma tener un esquema analítico más amplio. Es conveniente señalar que dicha herramienta matemática, más que como fin para resolver un problema, debe ser un medio que nos permita caracterizar una realidad.

En el presente trabajo se muestra un modelo matemático que permite hacer un análisis de la estructura por edad y orden de nacimiento de la fecundidad en México.

I N T R O D U C C I O N

La Ley de Makeham es una función que ha sido utilizada para realizar ajustes de fenómenos demográficos, entre los que se encuentran ^{1/} : Riesgo de casarse por primera vez, probabilidad de muerte y probabilidad de que una mujer pase a ser estéril.

Debido a los adecuados resultados obtenidos al aplicar la Ley de Makeham, en el presente trabajo se utilizará esta misma función para ajustar la estructura por edad y orden de nacimiento ^{2/} de la fecundidad en México.

Es importante hacer resaltar que este tipo de ajuste permite caracterizar ^{3/} las estructuras, pero no las corrige ni las suaviza. Existen métodos que corrigen estructuras (encontrar el grado de asociación entre lo observado y lo estándar), como por ejemplo el sistema logito de W. Brass; también hay métodos que las suavizan, como lo es el método de la parábola de mínimos cuadrados, que consiste en hacer pasar una parábola de segundo grado cada cinco puntos.

^{1/} Para más detalle puede consultarse: A. Bocaz, "El uso de la Ley de Makeham como función demográfica", Notas de Población, CE-LADE, Año II, Vol. 6, Diciembre 1974.

^{2/} Orden de nacimiento se entiende como el número de hijos nacidos vivos. Así por ejemplo, el primer orden de nacimiento se refiere a un hijo nacido vivo, el segundo orden de nacimiento a dos hijos nacidos vivos, y así sucesivamente.

^{3/} Caracterizar es obtener una función analítica que describa el comportamiento de un fenómeno.

El objetivo del presente trabajo consiste en determinar la validez de aplicar la función de Makeham para caracterizar la estructura de la fecundidad por edad y orden de nacimiento para el caso de México. Inicialmente se construirá la tasa acumulada de fecundidad por grupo de edad y orden de nacimiento, con la información obtenida de los Censos Generales de Población y Vivienda realizados en México en los años 1950, 1960 y 1970; posteriormente se realizará el ajuste de estas tasas utilizando la función de Makeham, para después, mediante el proceso de desagregar (utilizando la misma función) se obtengan las tasas acumuladas de fecundidad por edad, y finalmente desacumulando estas, se obtengan las tasas de fecundidad por edad y orden de nacimiento. El estudio de este tipo de tasas es valioso, ya que permite realizar comparaciones objetivas de los niveles de fecundidad en los años mencionados, y de esa forma tener elementos que indiquen cual ha sido el comportamiento de la fecundidad en las mujeres.

La importancia que se tiene al encontrar un modelo matemático que haga factible el ajuste adecuado de estas estructuras, es que además de poder desagregar los grupos de edad en edades individuales, se pueden pronosticar las tendencias en base al comportamiento de los parámetros de dicho modelo.

INDICE DE CUADROS

1. - TASAS ACUMULADAS DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y PRIMER ORDEN DE NACIMIENTO; 1970.	12
2. - TASAS ACUMULADAS DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y SEGUNDO ORDEN DE NACIMIENTO; 1970.	13
3. - TASAS ACUMULADAS DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y TERCER ORDEN DE NACIMIENTO; 1970.	13
4. - TASAS ACUMULADAS DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y PRIMER ORDEN DE NACIMIENTO; 1950.	14
5. - TASAS ACUMULADAS DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y SEGUNDO ORDEN DE NACIMIENTO; 1950.	14
6. - TASAS ACUMULADAS DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y TERCER ORDEN DE NACIMIENTO; 1950.	15
7. - TASAS ACUMULADAS DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y PRIMER ORDEN DE NACIMIENTO; 1960.	16
8. - TASAS ACUMULADAS DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y SEGUNDO ORDEN DE NACIMIENTO; 1960.	16
9. - TASAS ACUMULADAS DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y TERCER ORDEN DE NACIMIENTO; 1960.	17
10. - APLICACION DEL METODO DE LOS GRUPOS NO SUPERPUESTOS.	18
11. - VALORES OBSERVADOS Y ESTIMADOS DE LA FUNCION $f(x)$ (PRIMER ORDEN DE NACIMIENTO; 1970).	21
12. - TASAS ACUMULADAS DE FECUNDIDAD POR EDAD Y PRIMER ORDEN DE NACIMIENTO; 1970.	23
13. - TASAS DE FECUNDIDAD POR EDAD Y PRIMER ORDEN DE NACIMIENTO; 1970.	25
14. - COMPORTAMIENTO DE LOS PARAMETROS DE LA LEY DE MAKEHAM, SEGUN ORDEN DE NACIMIENTO, PARA LOS AÑOS 1950, 1960 Y 1970.	41
15. - TASA ACUMULADA DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO, PARA LOS AÑOS 1950, 1960 Y 1970.	48
16. - TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO PARA LOS AÑOS 1950, 1960 Y 1970.	49
17. - EVALUACION DEL MODELO DE AJUSTE (FUNCION DE MAKEHAM) PARA LOS AÑOS 1950, 1960 Y 1970 SEGUN ORDEN DE NACIMIENTO.	50

INDICE DE GRAFICAS

1.- TASA ACUMULADA DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (PRIMER ORDEN; 1970).	22
2.- TASA ACUMULADA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (PRIMER ORDEN; 1970).	24
3.- TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (PRIMER ORDEN; 1970).	26
4.- TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (PRIMER ORDEN; 1950, 1960 Y 1970).	32
5.- TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (SEGUNDO ORDEN; 1950, 1960 Y 1970).	33
6.- TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (TERCER ORDEN; 1950, 1960 Y 1970).	34
7.- TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (CUARTO ORDEN; 1950, 1960 Y 1970).	35
8.- TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (PRIMERO, SEGUNDO, TERCERO Y CUARTO ORDEN; 1950).	36
9.- TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (PRIMERO, SEGUNDO, TERCERO Y CUARTO ORDEN; 1960).	37
10.- TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (PRIMERO, SEGUNDO, TERCERO Y CUARTO ORDEN; 1970).	38
11.- TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (PRIMERO, SEGUNDO, TERCERO Y CUARTO ORDEN; 1950).	63
12.- TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (PRIMERO, SEGUNDO, TERCERO Y CUARTO ORDEN; 1960).	64
13.- TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (PRIMERO, SEGUNDO, TERCERO Y CUARTO ORDEN; 1970).	65

I.- TASA DE FECUNDIDAD GENERAL

a) Definición.

Para poder definir que se entiende por Tasa de Fecundidad General, en principio se definirá que es una tasa y posteriormente una Tasa Bruta de Natalidad.

Se entenderá por tasa a la relación que hay entre los eventos ocurridos y el número de años-persona expuestos al riesgo de sufrir el fenómeno. Con el fin de cuantificar las tasas se toma como aproximación del número de años-persona a la población media expuesta al riesgo de sufrir el fenómeno en estudio.

Si por ejemplo se divide el número de nacimientos de un cierto país, durante un periodo dado, por la población media del mismo país en ese periodo, da como resultado el número de nacimientos por habitante en el periodo de referencia. Al cociente anterior es lo que se conoce como Tasa Bruta de Natalidad. Es de mencionarse que esta tasa no toma en cuenta el hecho de que los nacimientos provienen de las mujeres en edad fértil (de 15 a 49 años).

Cuando los nacimientos están referidos a la procreación humana, es decir, mujeres que dan nacimiento a un hijo, entonces se habla de la fecundidad. Por lo tanto la fecundidad es el estudio de los nacimientos desde el punto de vista de la concepción.

Así se tiene que la tasa de fecundidad general es aquella que mide

el número de nacimientos por mujer en edad fértil (de 15 a 49 - - años). Cabe señalar que además de la edad existen otros factores que permiten analizar la fecundidad, entre los que se encuentran: - La Nupcialidad, Prevención de Nacimientos y Orden de Nacimiento. En este trabajo se analizará el comportamiento de la fecundidad según orden de nacimiento.

b) Tasa de Fecundidad por edad y orden de nacimiento.

Se entenderá por Tasa de Fecundidad por edad y orden de nacimiento, aquellas que nos mida el número de hijos ya nacidos vivos (uno, dos ó tres ...) por mujer entre los 15 y 49 años de edad. Debido a que la información no viene desglosada por edad, a continuación se presenta un ejemplo de este tipo de tasa, utilizando el grupo de edad 20 - 24 años; obtenida la información del censo de 1970.

Mujeres de 20 a 24 años con un hijo nacido vivo	Total de mujeres de 20 a 24 años.	Tasa de Fecundidad por grupo de edad y primer orden de nacimiento
(1)	(2)	(1) / (2)
306 792	2 102 041	0.145949579

Por otro lado al sumar sucesivamente la tasa de fecundidad por grupo de edad y orden de nacimiento se obtendrá la tasa acumulada de fecundidad por grupo de edad y orden de nacimiento, a la cual se le aplicará la función de Makeham.

II.- M E T O D O L O G I A

a) Presentación del Modelo de Ajuste.

El modelo que se utilizará para realizar el ajuste de las tasas acumuladas de fecundidad por grupos de edad y orden de nacimiento es la conocida Función de Makeham, ^{4/} que está dada por:

$$f(x) = ka^x b^d x$$

donde:

x = es la variable edad

$f(x)$ = es la fecundidad acumulada hasta la edad x (vía suma de las tasas)

$a, b, d,$ y k = parámetros a determinar (utilizando el método de los grupos no superpuestos que mas adelante se describen)

El modelo se aplicará a grupos de edad, para después, mediante el proceso de desagregar (evaluando la Función de Makeham desde cero a siete de 0.2 en 0.2), se obtengan las tasas acumuladas de fecundidad por edad; y finalmente desacumulado éstas se obtengan las tasas de fecundidad por edad.

^{4/} Ver: Bocaz, Albino, "El uso de la Ley de Makeham como Función Demográfica". Notas de Población, CELADE, Año II, Vol. 6, Diciembre 1974; Pág. 46

Método de los grupos no superpuestos.

Para determinar los valores estimados de los parámetros k , a , b y d , de la Ley de Makeham, se utilizará el método de los grupos no superpuestos ^{5/}, que a continuación se describe:

Para la aplicación de este método se separan los datos en cuatro grupos de observaciones sucesivas ($f(x)$), con la condición de que cada grupo tenga el mismo número de observaciones (m):

Primer grupo

$$x : 0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \quad (m-1)$$

$$f(x) : f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_{m-1}$$

Segundo grupo

$$x : m \quad m+1 \quad m+2 \quad \dots \quad (2m-1)$$

$$f(x) : f_m \quad f_{m+1} \quad f_{m+2} \quad \dots \quad f_{2m-1}$$

Tercer grupo

$$x : 2m \quad 2m+1 \quad 2m+2 \quad \dots \quad (3m-1)$$

$$f(x) : f_{2m} \quad f_{2m+1} \quad f_{2m+2} \quad \dots \quad f_{3m-1}$$

Cuarto grupo

$$x : 3m \quad 3m+1 \quad 3m+2 \quad \dots \quad (4m-1)$$

$$f(x) : f_{3m} \quad f_{3m+1} \quad f_{3m+2} \quad \dots \quad f_{4m-1}$$

^{5/} Ver: Bocaz, Albino, op. cit. Pag. 41

Posteriormente se denotará por S_0 , S_1 , S_2 y S_3 la suma de los logaritmos de $f(x)$ para cada grupo, es decir: ^{6/}

$$S_0 = m \text{Log } k + \frac{m(m-1)}{2} \text{Log } a + \frac{d^m - 1}{d-1} \text{Log } b$$

$$S_1 = m \text{Log } k + (m^2 + \frac{m(m-1)}{2}) \text{Log } a + d^m \frac{d^m - 1}{d-1} \text{Log } b$$

$$S_2 = m \text{Log } k + (2m^2 + \frac{m(m-1)}{2}) \text{Log } a + d^{2m} \frac{d^m - 1}{d-1} \text{Log } b$$

$$S_3 = m \text{Log } k + (3m^2 + \frac{m(m-1)}{2}) \text{Log } a + d^{3m} \frac{d^m - 1}{d-1} \text{Log } b$$

de donde:

$$i) \quad \Delta S_j = S_{j+1} - S_j \quad \text{con } j = \overline{0, 2}$$

$$ii) \quad \Delta^2 S_j = \Delta S_{j+1} - \Delta S_j \quad \text{con } j = 0, 1$$

$$iii) \quad d^2 = \frac{\Delta^2 S_1}{\Delta^2 S_0}$$

como

$$\Delta^2 S_0 = \text{Log } b \frac{(d^2 - 1)^3}{d-1} \Rightarrow \text{Log } b = \Delta^2 S_0 / \frac{(d^2 - 1)^3}{d-1}$$

y

$$\Delta S_0 = m^2 \text{Log } a + \text{Log } b \frac{(d^2 - 1)^2}{d-1} \Rightarrow \text{Log } a = (\Delta S_0 - \text{Log } b \frac{(d^2 - 1)^2}{d-1}) / m^2$$

^{6/} En el anexo 4 se muestra la determinación del sistema de ecuaciones S_0 , S_1 , S_2 , y S_3 .

determinando 'k' por la condición de mínimos cuadrados: 7/

$$P = \sum (f(x) - ka^x b^{d^x})^2$$

de donde:

$$k = \frac{\sum f(x) v_x}{\sum v_x^2}$$

siendo

$$v_x = a^x b^{d^x}$$

7/ En el anexo 4 se encuentra el desarrollo que justifica el valor del parámetro 'k'.

III.- PRESENTACION DE LA INFORMACION

La información que se utiliza para construir la tasa acumulada de fecundidad por grupo de edad y orden de nacimiento, fue tomada de los censos que se realizaron en nuestro país en los años 1950, 1960 y 1970. A continuación se dan los valores de dichas tasas correspondientes al primero, segundo y tercer orden de nacimiento para los años mencionados.

CUADRO 1

TASA ACUMULADA DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y PRIMER ORDEN DE NACIMIENTO

NIVEL	GRUPO DE EDAD	TASA DE FECUNDIDAD	
		NO ACUMULADA	ACUMULADA
0	10 - 14	0.003849228	0.003849228
1	15 - 19	0.080645048	0.084494276
2	20 - 24	0.145949579	0.230443855
3	25 - 29	0.087317893	0.317761748
4	30 - 34	0.056077119	0.373838867
5	35 - 39	0.046867508	0.420706375
6	40 - 44	0.049141409	0.469847784
7	45 - 49	0.054288435	0.524136219

FUENTE: Dirección General de Estadística; IX Censo General de Población 1970. Resumen General - Abreviado. 28 de enero de 1970. Cuadros 2 y 23.

CUADRO 2

TASA ACUMULADA DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y SEGUNDO ORDEN DE NACIMIENTO

NIVEL	GRUPO DE EDAD	TASA DE FECUNDIDAD	
		NO ACUMULADA	ACUMULADA
0	10 - 14	0.0031785460	0.0031785460
1	15 - 19	0.0334406931	0.0366192391
2	20 - 24	0.1528290837	0.1894483228
3	25 - 29	0.1207184078	0.3101667306
4	30 - 34	0.0763265543	0.3864932849
5	35 - 39	0.0580257669	0.4445190518
6	40 - 44	0.0572431646	0.5017622164
7	45 - 49	0.0598043600	0.5615665764

CUADRO 3

TASA ACUMULADA DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y TERCER ORDEN DE NACIMIENTO

NIVEL	GRUPO DE EDAD	TASA DE FECUNDIDAD	
		NO ACUMULADA	ACUMULADA
0	10 - 14	0.0028934381	0.0028934381
1	15 - 19	0.0091891685	0.0120826066
2	20 - 24	0.1138869318	0.1259695384
3	25 - 29	0.1374032347	0.2633727731
4	30 - 34	0.0947152964	0.3580880695
5	35 - 39	0.0695162195	0.4276042890
6	40 - 44	0.0632758406	0.4908801296
7	45 - 49	0.0635898224	0.5544699520

NOTA: La información de los cuadros 2 y 3, se obtuvo del censo de población realizado en nuestro país en 1970 (ver cuadros 2 y 23).

CUADRO 4

TASA ACUMULADA DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y PRIMER ORDEN DE NACIMIENTO

NIVEL	GRUPO DE EDAD	TASA DE FECUNDIDAD	
		NO ACUMULADA	ACUMULADA
0	10 - 14	0.0006787616	0.0006787616
1	15 - 19	0.0863885849	0.0870673465
2	20 - 24	0.1617960846	0.2488634311
3	25 - 29	0.0955310126	0.3443944437
4	30 - 34	0.0709529527	0.4153473964
5	35 - 39	0.0669772020	0.4823245984
6	40 - 44	0.0637768421	0.5461014405
7	45 - 49	0.0652777855	0.6113792260

CUADRO 5

TASA ACUMULADA DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y SEGUNDO ORDEN DE NACIMIENTO

NIVEL	GRUPO DE EDAD	TASA DE FECUNDIDAD	
		NO ACUMULADA	ACUMULADA
0	10 - 14	0.0010760855	0.0010760855
1	15 - 19	0.0333375735	0.0344136590
2	20 - 24	0.1637026700	0.1981163290
3	25 - 29	0.1294619973	0.3275783263
4	30 - 34	0.0908743586	0.4184526849
5	35 - 39	0.0740224898	0.4924751747
6	40 - 44	0.0684356038	0.5609107785
7	45 - 49	0.0689429916	0.6298537701

CUADRO 6

TASA ACUMULADA DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y TERCER ORDEN DE NACIMIENTO

NIVEL	GRUPO DE EDAD	TASA DE FECUNDIDAD	
		NO ACUMULADA	ACUMULADA
0	10 - 14	0.0010462862	0.0010462862
1	15 - 19	0.0089803653	0.0100266515
2	20 - 24	0.1083305613	0.1183572128
3	25 - 29	0.1466702005	0.2650274133
4	30 - 34	0.1053378452	0.3703652585
5	35 - 39	0.0835727687	0.4539380272
6	40 - 44	0.0736967917	0.5276348189
7	45 - 49	0.0706132122	0.5982480311

NOTA: La información de los cuadros 4, 5 y 6 se obtuvo del censo de población realizado en nuestro país en 1950 (ver cuadros 2-B y 34).

CUADRO 7

TASA ACUMULADA DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y PRIMER ORDEN DE NACIMIENTO

NIVEL	GRUPO DE EDAD	TASA DE FECUNDIDAD	
		NO ACUMULADA	ACUMULADA
0	10 - 14	0.0014525713	0.0014525713
1	15 - 19	0.0757339262	0.0771864975
2	20 - 24	0.1358524137	0.2130389112
3	25 - 29	0.0758947944	0.2889337056
4	30 - 34	0.0541547965	0.3430885021
5	35 - 39	0.0504440793	0.3935325814
6	40 - 44	0.0606724433	0.4542050247
7	45 - 49	0.0602992011	0.5145042258

CUADRO 8

TASA ACUMULADA DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y SEGUNDO ORDEN DE NACIMIENTO

NIVEL	GRUPO DE EDAD	TASA DE FECUNDIDAD	
		NO ACUMULADA	ACUMULADA
0	10 - 14	0.0009214529	0.0009214529
1	15 - 19	0.0309090120	0.0318304649
2	20 - 24	0.1533429775	0.1851734424
3	25 - 29	0.1152040180	0.3003774604
4	30 - 34	0.0750529961	0.3754304565
5	35 - 39	0.0617530212	0.4371834777
6	40 - 44	0.0680798292	0.5052633069
7	45 - 49	0.0652259736	0.5704892804

CUADRO 9

TASA ACUMULADA DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y TERCER ORDEN DE NACIMIENTO

NIVEL	GRUPO DE EDAD	TASA DE FECUNDIDAD	
		NO ACUMULADA	ACUMULADA
0	10 - 14	0.0010820126	0.0010820126
1	15 - 19	0.0100560332	0.0111380458
2	20 - 24	0.1138702233	0.1250082691
3	25 - 29	0.1387710634	0.2637793325
4	30 - 34	0.0956835775	0.3594629100
5	35 - 39	0.0741934813	0.4336563913
6	40 - 44	0.0732107066	0.5068670979
7	45 - 49	0.0670955794	0.5739626773

NOTA: La información de los cuadros 7, 8 y 9 se obtuvo del censo de población realizado en nuestro país en 1960 (ver cuadros 8 y 37).

IV. - APLICACION DEL MODELO DE AJUSTE

En base a la metodología que se desarrolló y con la información presentada en el punto anterior, se comenzará a determinar los valores estimados de los parámetros de la Función de Makeham, utilizando el método de los grupos no superpuestos; la aplicación de dicho método se resume en el Cuadro 10.

CUADRO 10

APLICACION DEL METODO DE LOS GRUPOS NO SUPERPUESTOS ^{8/}

GRUPO	x	f(x)	Log f(x)	S ₀
I	0	0.003849228	-2.414626319	-3.487799028
	1	0.084494276	-1.073172709	
GRUPO	x	f(x)	Log f(x)	S ₁
II	2	0.230443855	-0.637434866	-1.135333248
	3	0.317761748	-0.497898382	
GRUPO	x	f(x)	Log f(x)	S ₂
III	4	0.373838867	-0.4273155462	-0.8033364515
	5	0.420706375	-0.3760209053	
GRUPO	x	f(x)	Log f(x)	S ₃
IV	6	0.469847784	-0.3280428208	-0.6085986468
	7	0.524136219	-0.2805558260	

Donde:

^{8/} Para ejemplificar la aplicación del modelo se utilizará únicamente la información correspondiente al primer orden de nacimiento del Censo realizado en 1970.

$$S_0 = -3.487799028 = 2\text{Log } k + \text{Log } a + \frac{d^2 - 1}{d - 1} \text{Log } b$$

$$S_1 = -1.135333248 = 2\text{Log } k + 5\text{Log } a + d^2 \frac{d^2 - 1}{d - 1} \text{Log } b$$

$$S_2 = -0.803336451 = 2\text{Log } k + 9\text{Log } a + d^4 \frac{d^2 - 1}{d - 1} \text{Log } b$$

$$S_3 = -0.608598646 = 2\text{Log } k + 13\text{Log } a + d^6 \frac{d^2 - 1}{d - 1} \text{Log } b$$

ahora se calcularán las primeras diferencias:

$$\text{i) } \Delta S_0 = S_1 - S_0 = 4\text{Log } a + \text{Log } b + \frac{(d^2 - 1)^2}{d - 1} = 2.35246577 \dots (x)$$

$$\text{ii) } \Delta S_1 = S_2 - S_1 = 4\text{Log } a + \text{Log } b + d^2 \frac{(d^2 - 1)^2}{d - 1} = 0.3319967975$$

$$\text{iii) } \Delta S_2 = S_3 - S_1 = 4\text{Log } a + \text{Log } b + d^4 \frac{(d^2 - 1)^2}{d - 1} = 0.1947378042$$

cálculo de las segundas diferencias:

$$\text{i) } \Delta^2 S_0 = \Delta S_1 - \Delta S_0 = \text{Log } b \left(\frac{(d^2 - 1)^3}{d - 1} \right) = -2.020468982 \dots (y)$$

$$\text{ii) } \Delta^2 S_1 = \Delta S_2 - \Delta S_1 = \text{Log } b \left(d^2 \frac{(d^2 - 1)^3}{d - 1} \right) = -0.1372589933$$

se calcula 'd' :

$$\text{sabemos que: } d^2 = \frac{\Delta^2 S_1}{\Delta^2 S_0} ; d^2 = 0.0679342244$$

$$\therefore d = 0.2606419468$$

cálculo de 'b' :

$$\text{sabemos por (y): } \text{Log } b \left(\frac{(d^2 - 1)^2}{d - 1} \right) = -2.020468982$$

$$\text{Lob } b = -1.844876551$$

$$b = 0.01429300$$

cálculo de 'a' :

$$\text{sabemos por (x): } 4\text{Log } a + \text{Log } b \left(\frac{(d^2 - 1)^2}{d - 1} \right) = 2.35246577$$

$$\text{Log } a = 0.046183398$$

$$\therefore a = 1.112201299$$

para determinar 'k' :

$$\text{sabemos que: } k = \frac{\sum f(x) v_x}{\sum v_x} \quad \text{donde } v_x = a^x b^{d^x} \text{ con } x = \overline{0,7}$$

$$k = \frac{3.914593466}{15.74269188} = 0.2486609975$$

ahora se calcularán las tasas ajustadas $\frac{9}{}$, utilizando la función de -
MAKEHAM, dada por:

$$f(x) = 0.2486609975 (1.112201299)^x (0.01429300)^{(0.2606419468)^x}$$

Los valores observados y ajustados se encuentran en el cuadro 11.

9/ En el anexo 2 se encuentra el programa elaborado en la calculadora programable TI-59, para calcular los valores f(x).

CUADRO 11

VALORES OBSERVADOS Y AJUSTADOS DE LA FUNCION $f(x)$ ^{10/}

GRUPO DE EDAD	VALOR OBSERVADO	VALOR AJUSTADO
10 - 14	0.003849228	0.0035541116
15 - 19	0.084494276	0.0913984518
20 - 24	0.230443855	0.2304858169
25 - 29	0.317761748	0.3173156866
30 - 34	0.373838867	0.3731015466
35 - 39	0.420706375	0.4210226884
40 - 44	0.469847784	0.4700344102
45 - 49	0.524136219	0.5232879092

En la gráfica 1, se muestra el comportamiento de las tasas acumuladas observadas y ajustadas por grupo de edad; en ella se observa que el ajuste que se obtuvo es aceptable, por lo que la Función de Makeham describe adecuadamente el comportamiento de la función $f(x)$.

Para poder obtener las tasas acumuladas de fecundidad por edad se desagregaron las tasas acumuladas por grupo de edad, utilizando la función $f(x)$. En el cuadro 12 se puede observar la desagregación que se obtuvo por edad, y en la gráfica 2, el comportamiento de dichas tasas.

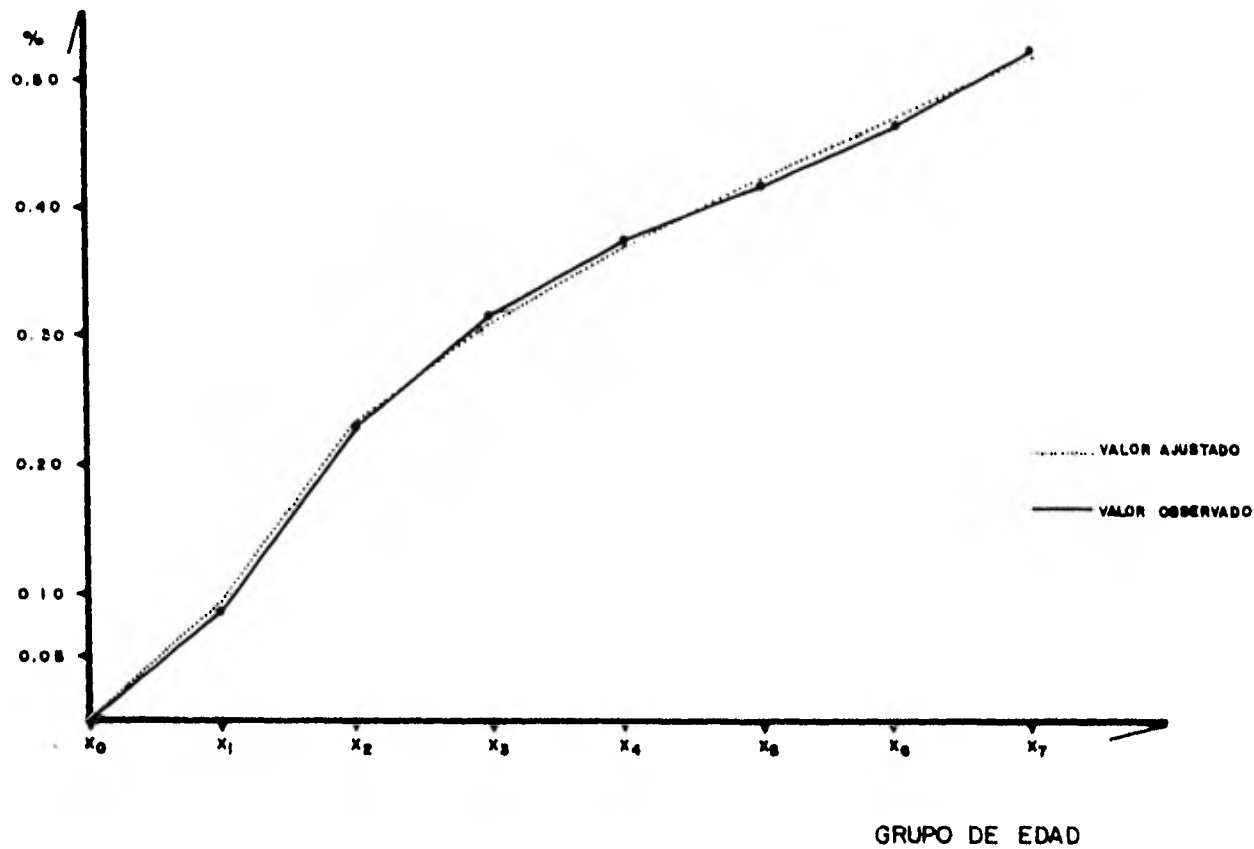
Una vez obtenidas las tasas acumuladas de fecundidad por edad, se calcularán las tasas de fecundidad por edad, mediante el proceso de desacumular. En el cuadro 13 se encuentran los valores de las tasas de fecundidad por edad, y en la gráfica 3, el comportamiento de éstas tasas.

^{10/} En el cuadro 15 del anexo 1, se localizan los valores observados y ajustados de primero, segundo y tercer orden de nacimiento de la función $f(x)$, para los años 1950, 1960 y 1970.

GRAFICA 1

TASA ACUMULADA DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (Primer Orden)

(Censo 1970)



FUENTE : CUADRO 11

CUADRO 12

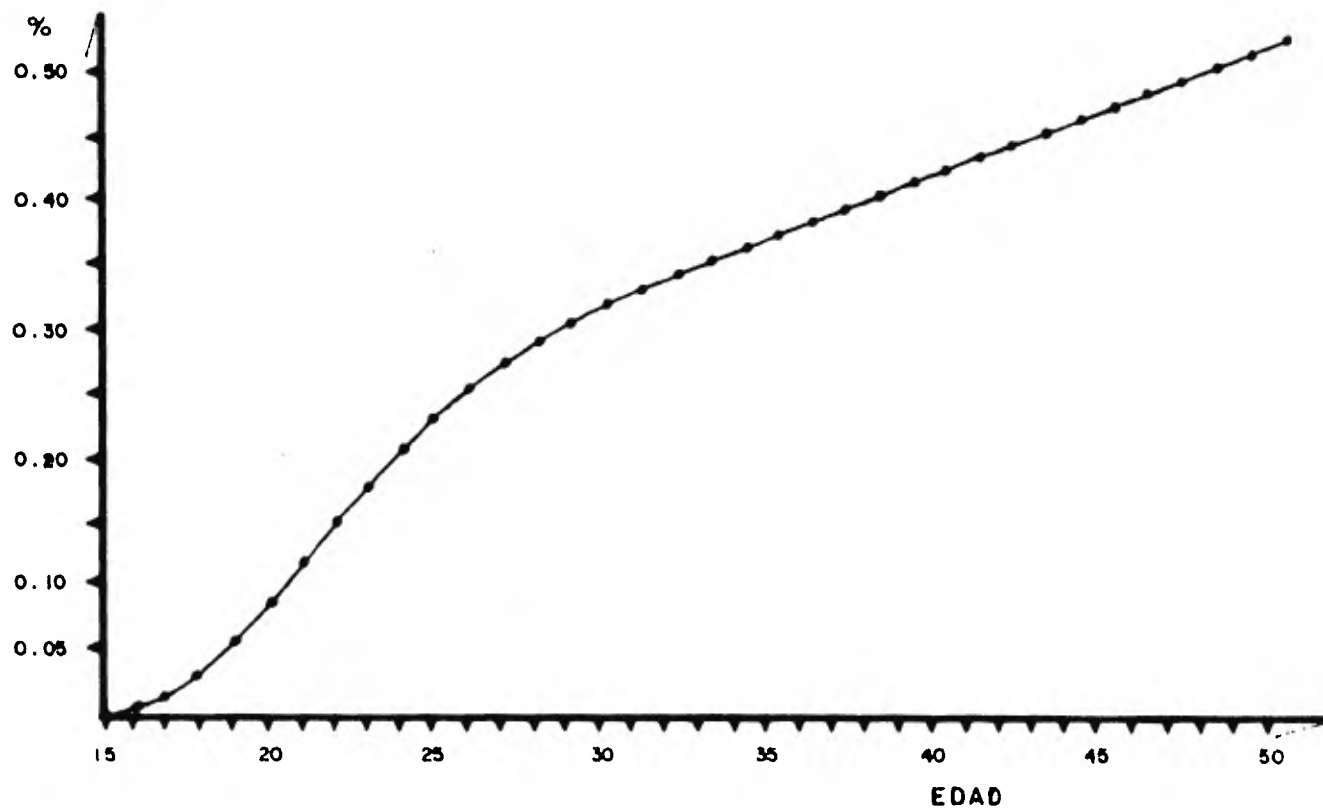
TASAS ACUMULADAS DE FECUNDIDAD POR EDAD Y PRIMER ORDEN DE NACIMIENTO
(Censo 1970)

EDAD	TASA ACUMULADA DE FECUNDIDAD	EDAD	TASA ACUMULADA DE FECUNDIDAD
15	0.0035541116	31	0.3299368590
16	0.0098851602	32	0.3416283297
17	0.0217100585	33	0.3526053798
18	0.0398061202	34	0.3630473642
19	0.0635819761	35	0.3731015466
20	0.0913984518		
21	0.1212157149	36	0.3828876453
22	0.1511623283	37	0.3925023540
23	0.1798443946	38	0.4020234730
24	0.2064127720	39	0.4115135053
25	0.2304858169	40	0.4210226884
26	0.2520190429	41	0.4305914983
27	0.2711777993	42	0.4402526875
28	0.2882369471	43	0.4500329257
29	0.3035118054	44	0.4599541106
30	0.3173156866	45	0.4700344102

EDAD	TASA ACUMULADA DE FECUNDIDAD
46	0.4802890870
47	0.4907311487
48	0.5013718604
49	0.5122211470
50	0.5232879092

TASA ACUMULADA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (Primer Orden)

(Censo 1970)



FUENTE: CUADRO 12

CUADRO 13

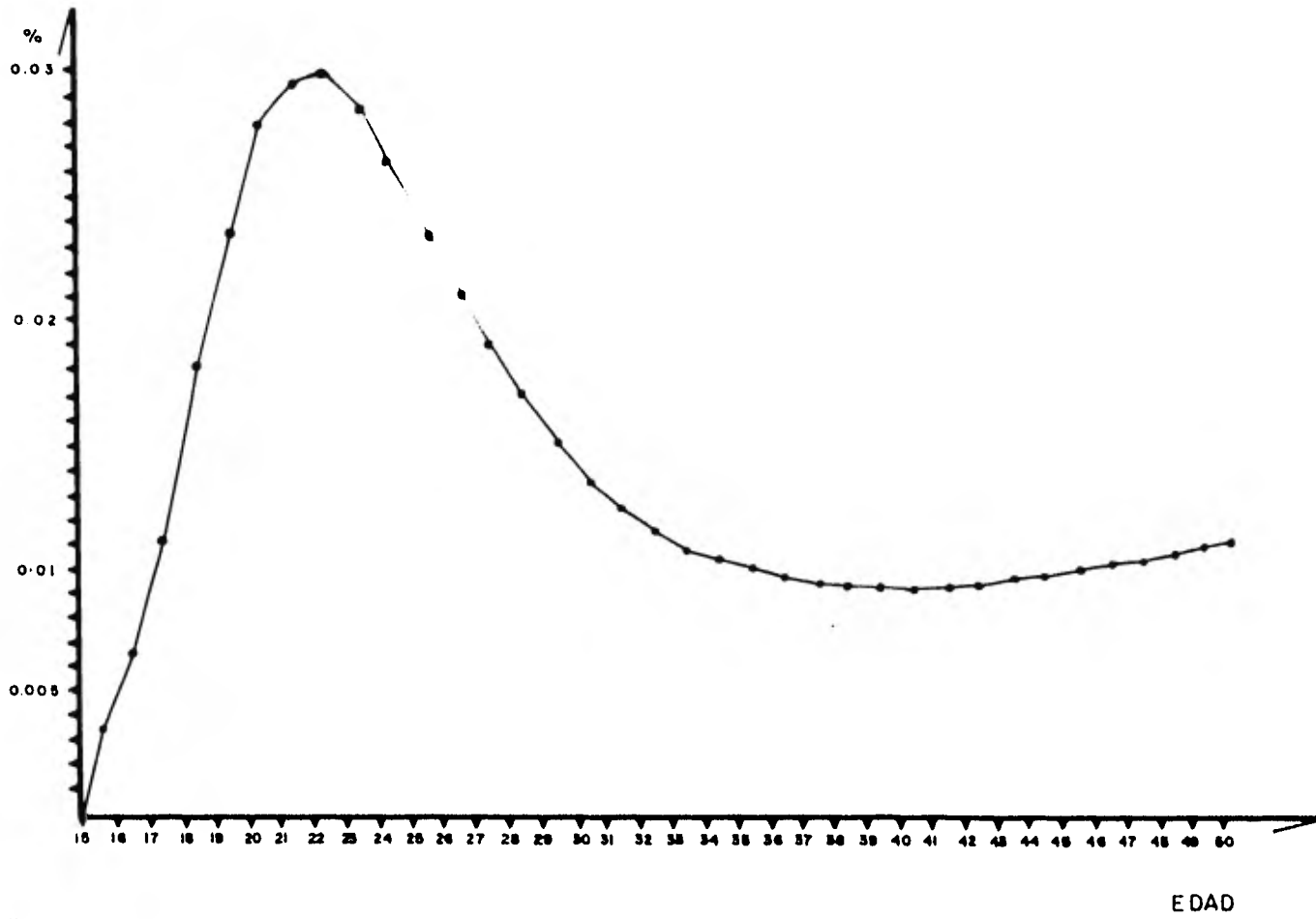
TASAS DE FECUNDIDAD POR EDAD Y PRIMER ORDEN DE
NACIMIENTO ^{9/}
(Censo 1970)

EDAD	TASA DE FECUNDIDAD	EDAD	TASA DE FECUNDIDAD
15	0.0035541116	31	0.0126211724
16	0.0063310486	32	0.0116914707
17	0.0118248983	33	0.0109770501
18	0.0180960615	34	0.0104419844
19	0.0237758561	35	0.0100541824
20	0.0278164757		
21	0.0298172631	36	0.0097860987
22	0.0299466134	37	0.0096147087
23	0.0286820663	38	0.0095211190
24	0.0265683774	39	0.0094900323
25	0.0240730449	40	0.0095091831
26	0.0215332260	41	0.0095688099
27	0.0191587564	42	0.0096611892
28	0.0170591478	43	0.0097802382
29	0.0152748583	44	0.0099211849
30	0.0138038812	45	0.0100802996

EDAD	TASA DE FECUNDIDAD
46	0.0102546768
47	0.0104420617
48	0.0106407117
49	0.0108492866
50	0.0110667622

^{9/} En el cuadro 16 del anexo 1, se encuentra la tasa de fecundidad por edad y de orden de nacimiento primero, segundo, tercero y cuarto, para los años 1950, 1960 y 1970

TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (Primer Orden)
(Censo 1970)



FUENTE : CUADRO 13

En la gráfica 4 se muestra la tasa de fecundidad de primer orden de nacimiento para los años 1950, 1960 y 1970. En ella se observa que en los años 1960 y 1970 la mayor concentración de la tasa de fecundidad se localiza entre los 19 - 24 años de edad, y para 1950 entre los 20 - 25 años. Hablando más específicamente, se puede decir que para los años 1950 y 1970 la mayor tasa de fecundidad de primer orden corresponde a las mujeres de 22 años, y para 1960 a las mujeres de 21 años. Esto indica que en promedio, para 1950 y 1970, el número de nacidos vivos de las mujeres de 22 años fue uno; y para 1960 también es uno pero para las mujeres de 21 años. Asimismo se puede observar que la mayor tasa (0.0357466) se localiza en 1950, y la menor (0.0293731) en 1960 (ver cuadro 16 del anexo 4). Esto nos dice que en 1950 de cada mil mujeres en edad fértil (15 - 49 años) había aproximadamente 36 nacidos vivos de primer orden y 29 en 1960.

Se muestra también en la gráfica 5 la tasa de fecundidad de segundo orden de nacimiento para los años 1950, 1960 y 1970, en la cual se observa que la mayor concentración de la tasa de fecundidad está entre los 22 - 26 años. También en esta misma gráfica se advierte que, para los años mencionados, la mayor tasa de fecundidad corresponde a las mujeres de 24 años. Esto significa que en promedio el número de nacidos vivos de las mujeres de 24 años fue de dos en los años 1950, 1960 y 1970. En la misma gráfica 5 se aprecia como ha ido disminuyendo esta

tasa a medida que el tiempo va avanzando, así se tiene por ejemplo que en 1950 la tasa de fecundidad de segundo orden de nacimiento es de 0.0318685, en 1960 de 0.0289654 y en 1970 de 0.0281227 (ver cuadro 16 del anexo 4); esto es, en 1950, 1960 y 1970 de cada mil mujeres en edad fértil había aproximadamente 32, 29 y 28 nacidos vivos de segundo orden, respectivamente; en otras palabras, en 1950 hubo un mayor número de casos de mujeres con 2 hijos nacidos vivos, en comparación con 1960 y 1970.

En la gráfica 6 se presenta la tasa de fecundidad de tercer orden de nacimiento para los años 1950, 1960 y 1970. En ella se puede ver que en los años 1960 y 1970 la mayor tasa de fecundidad corresponde a las mujeres de 28 años. Esto significa que en promedio el número de nacidos vivos en 1960 y 1970, de las mujeres de 27 años, es tres; y en 1950 para las mujeres de 28 años también es tres. Así también se observa en la gráfica 6 y en el cuadro 16 del anexo 4 que, la mayor tasa de fecundidad (0.0273487) de este orden de nacimiento corresponde a 1950, y la menor (0.0253429) a 1970. Esto significa que en 1950 y 1970 hubo aproximadamente, por cada mil mujeres, 27 y 25 nacidos vivos de tercer orden respectivamente. Es decir, en 1950 hubo un mayor número de casos de mujeres con 3 hijos, en comparación con los años 1960 y 1970.

Ahora en la gráfica 7 se presenta la tasa de fecundidad de cuarto orden

de nacimiento para 1950, 1960 y 1970; En esta gráfica se distingue que para estos años la mayor tasa de fecundidad pertenece a las mujeres de 32, 30 y 31 años respectivamente. Esto nos indica que en promedio el número de hijos nacidos vivos fue de cuatro para las mujeres de 32, 30 y 31 años de edad en los años 1950, 1960 y 1970 respectivamente, Por último, en esta misma gráfica se observa que la mayor tasa (0.0250973) corresponde a 1960, es decir, había en este año un número mayor de casos de mujeres con cuatro hijos con respecto a los años 1950 y 1970.

Por otro lado, al aumentar el orden de nacimiento, la gráfica que representa a la tasa de fecundidad se irá desplazando a la derecha, y entonces la mayor tasa se localizará en edades posteriores del período reproductivo, así por ejemplo en la gráfica 8 se presenta la tasa de fecundidad para 1950 de primero, segundo, tercero y cuarto orden de nacimiento, en donde se observa que la mayor tasa corresponde a las mujeres de 22, 24, 28 y 32 años respectivamente. Esto significa que en promedio en 1950, el número de nacidos vivos de las mujeres de 22, 24, 28 y 32 años fue uno, dos, tres y cuatro respectivamente (ver también el cuadro 16 del anexo 4).

Asimismo, en la gráfica 8 se observa que al aumentar el orden de nacimiento, ocasiona que la menor tasa de fecundidad se localice en las primeras edades del período reproductivo, así por ejemplo, para el cuarto orden de nacimiento la menor tasa corresponderá a las mujeres de 15 a

19 años con cuatro hijos nacidos vivos, Hablando más específicamente se puede decir que en 1950, de cada mil mujeres de 15 años de edad, no había ningún nacimiento de cuarto orden, es decir, de cada mil mujeres de 15 años de edad ninguna tenía cuatro hijos nacidos vivos (ver cuadro 16 del anexo 4).

Así también, en la gráfica 9 se presenta la tasa de fecundidad en 1960 de primero, segundo, tercero y cuarto orden de nacimiento; en ella se aprecia que la mayor tasa se da en las mujeres de 21, 24, 27 y 30 años respectivamente. Esto se puede interpretar que en el año de 1960 las mujeres de 21 años de edad tenían en promedio un hijo nacido vivo, las de 24 años dos, de 27 años tres, y las de 30 años cuatro. Es de mencionarse que la menor tasa de cuarto orden de nacimiento se localiza en las primeras edades del período reproductivo, así se tiene que en 1960 la menor tasa de este orden corresponde a las mujeres de 15 a 19 años. Esto significa que en 1960 fueron pocos los casos de mujeres de 15 a 19 años con cuatro hijos nacidos vivos. Por ejemplo en el cuadro 16 del anexo 4 se puede observar que en 1960 de cada mil mujeres de 15 años, no se registró ningún nacimiento de cuarto orden, esto significa que, de cada mil mujeres de 15 años de edad ninguna tenía cuatro hijos nacidos vivos.

Ahora, en la gráfica 10 se muestra la tasa de fecundidad en 1970 de pri-

mero, segundo, tercero y cuarto orden de nacimiento, en donde se observa que la mayor tasa corresponde a las mujeres de 22, 24, 27 y 31 años respectivamente. Esto significa que en 1970 las mujeres de 22 años tenían en promedio un hijo nacido vivo, las de 24 años dos, de 27 años tres, y las de 31 años cuatro. En esta gráfica 10 se puede observar como la menor tasa de cuarto orden de nacimiento se encuentra en las primeras edades, lo que significa que en 1970 hubo pocos casos de mujeres de 15 a 19 años, con cuatro hijos nacidos vivos. Así se tiene por ejemplo que en 1970 de cada mil mujeres de 15 años, había aproximadamente un nacimiento de cuarto orden; en otras palabras, de cada mil mujeres de 15 años de edad había una mujer con cuatro hijos nacidos vivos (ver cuadro 16 del anexo 4). Es importante hacer resaltar que para diferentes ordenes de nacimiento la mayor tasa de fecundidad correspondió a mujeres de diferente edad, así por ejemplo, en 1970 para el primero, segundo, tercero y cuarto orden de nacimiento la mayor tasa de fecundidad correspondió a las mujeres de 22, 24, 27 y 31 años de edad respectivamente. Este tipo de resultados se puede interpretar de la siguiente manera: en 1970 las mujeres con un hijo nacido vivo "necesitaron", en promedio, dos años para tener su segundo hijo; las mujeres con dos hijos "necesitaron" de tres años para tener su tercer hijo, y las mujeres con tres hijos "necesitaron" cuatro años para tener su cuarto hijo. Una de las posibles causas de estas diferencias para tener un hijo de orden superior, es que en los primeros años de

unión de la pareja existe un gran interés (el cual va disminuyendo a medida que pasan los años) por tener relaciones sexuales continuadas. Por otro lado, en el cuadro 14 se muestra el comportamiento de los parámetros de la función de Makeham según orden de nacimiento y para los años 1950, 1960 y 1970. En él se observa que los parámetros no tienen una tendencia definida por año, lo que dificulta su pronóstico. En cambio, los parámetros por orden de nacimiento, tienen una tendencia definida, lo que permitió pronosticar ^{10/} el cuarto orden de nacimiento para los años 1950, 1960 y 1970.

Al analizar el comportamiento de los parámetros se encuentra que la función $y = Ka b^{dx}$ puede ser creciente o decreciente, dependiendo del valor que tomen los parámetros, así por ejemplo, si 'K', 'b' y 'd' son menores que la unidad y 'a' mayor que la unidad, se obtendrá una curva creciente (en este trabajo resultaron ser de esta forma). Si 'a' y 'b' son menores que la unidad y 'd' adquiere un valor superior a la unidad, se tendrá una curva decreciente (este tipo de resultados se obtiene, por ejemplo, si se aplica la función de Makeham al fenómeno de mortalidad). Cabe mencionar que los valores obtenidos de los parámetros no son los óptimos, debido a que no existe un sistema de cálculo directo.

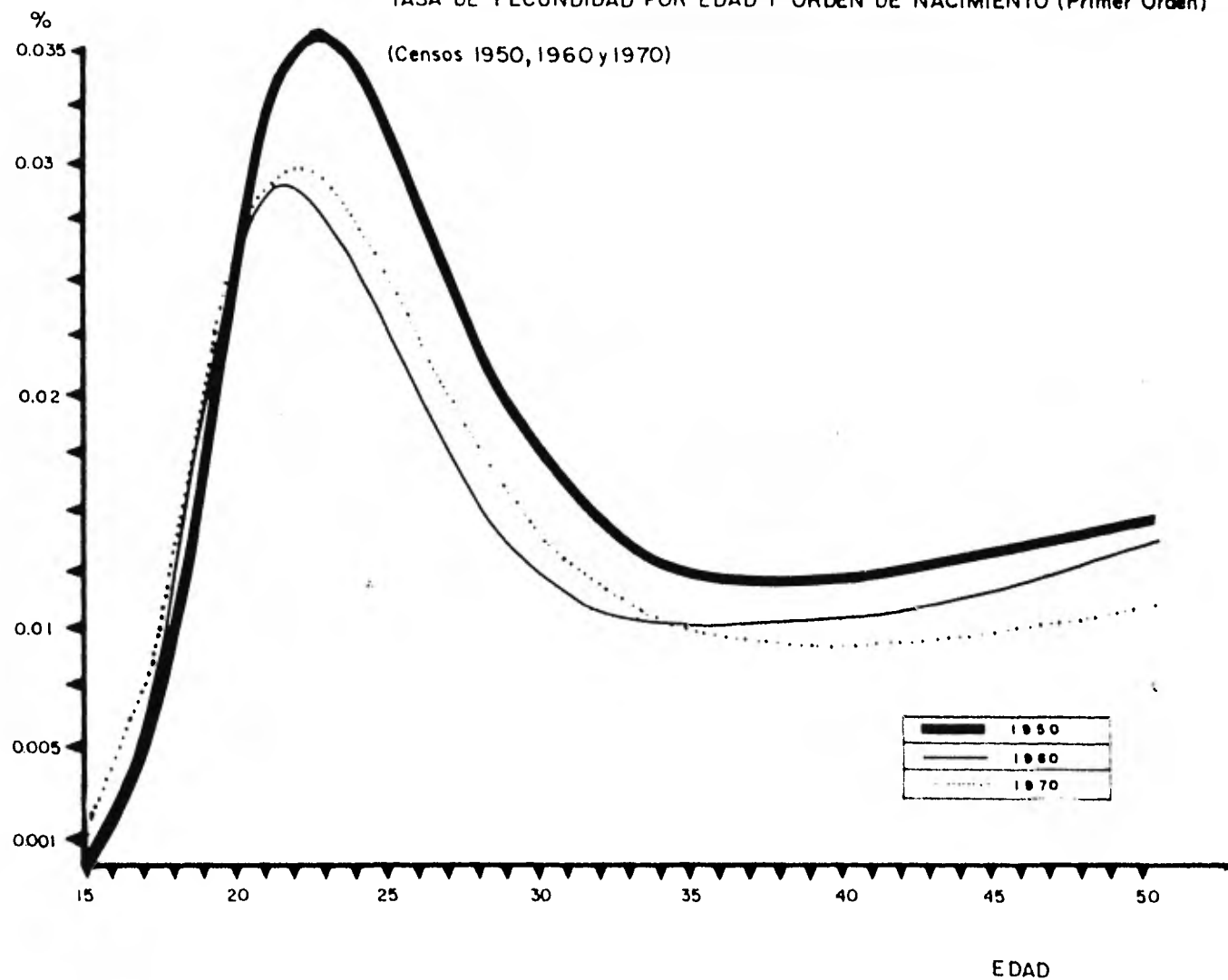
Por último, para evaluar el modelo matemático (función de Makeham) utilizado en este trabajo, se llevo a cabo un análisis por medio de los

^{10/} En el anexo 5 se muestra el modelo matemático utilizado para pronosticar el cuarto orden de nacimiento.

residuales. En el cuadro 17 del anexo 1 se muestra la suma residual de cuadrados y el coeficiente de determinación para los años 1950, 1960 y 1970 según orden de nacimiento, en donde se observa que para el primer orden de nacimiento la menor suma residual de cuadrados (y como consecuencia el mayor coeficiente de determinación) corresponde al año de 1960, y para el segundo y tercer orden de nacimiento a 1950. Esto significa que para el año de 1950 el modelo utilizado se ajusto, en terminos generales, mejor a los datos observados.

TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (Primer Orden)

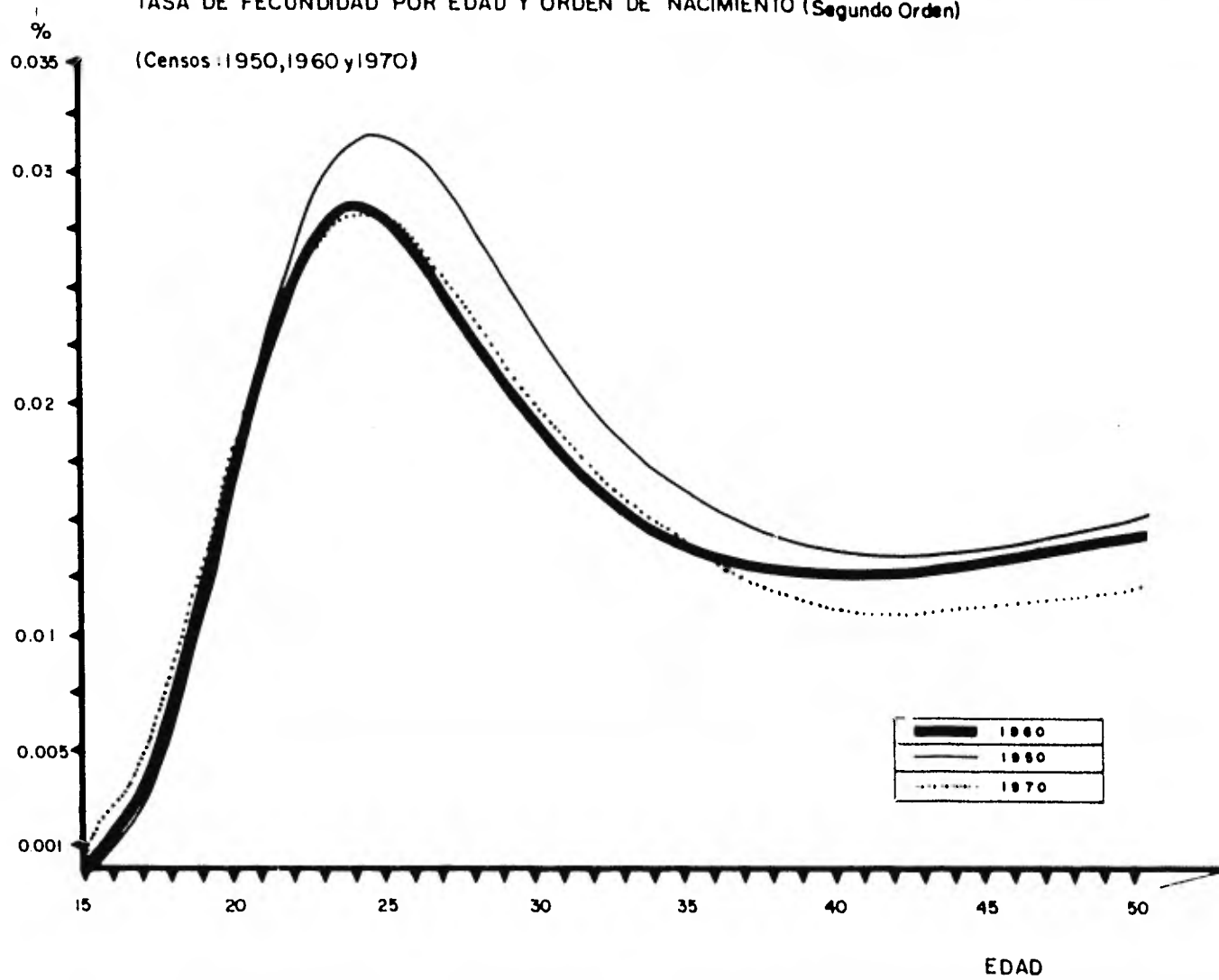
(Censos 1950, 1960 y 1970)



FUENTE: CUADRO 16 DEL ANEXO I

TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (Segundo Orden)

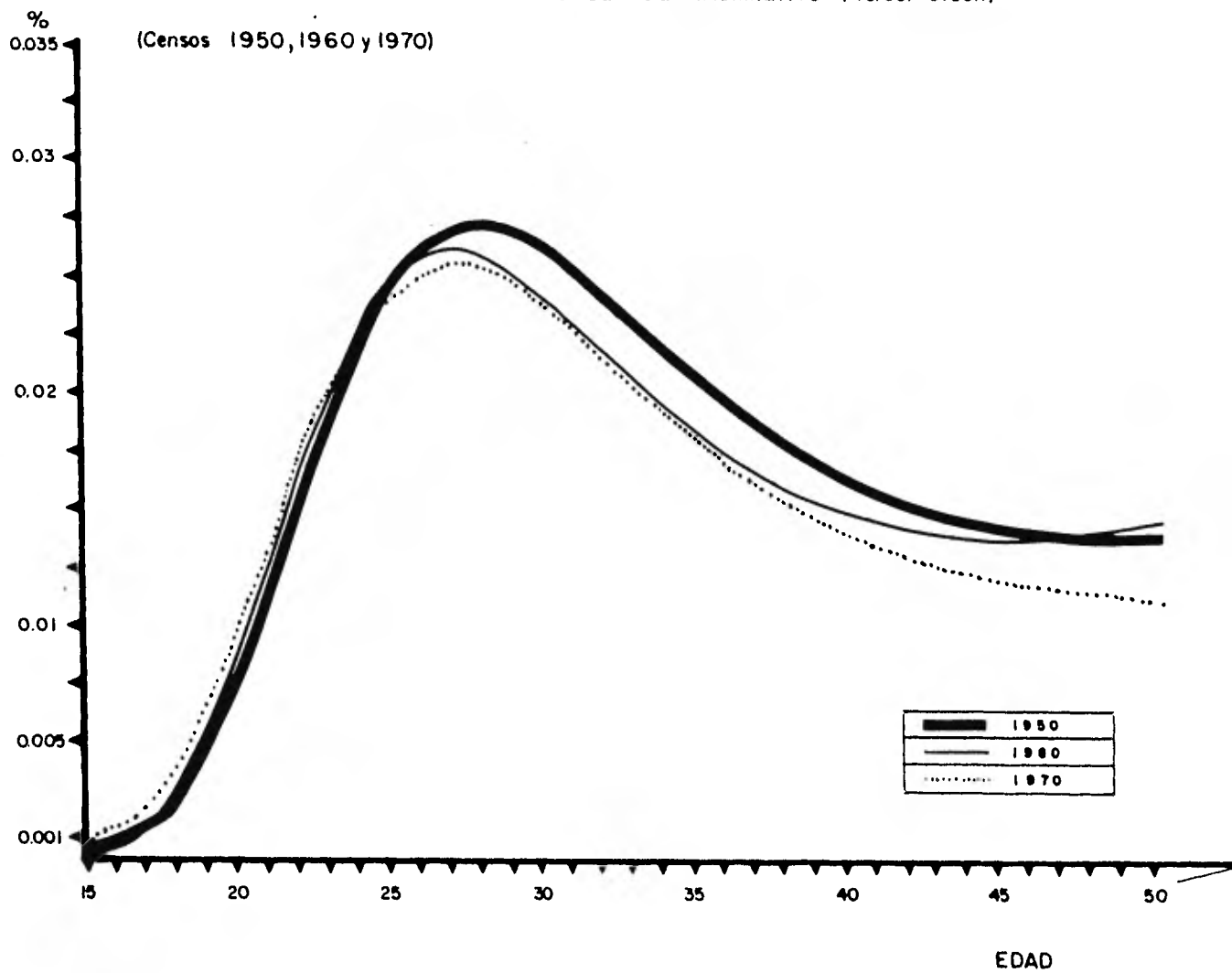
(Censos: 1950, 1960 y 1970)



FUENTE : CUADRO 16 DEL ANEXO 1

TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (Tercer Orden)

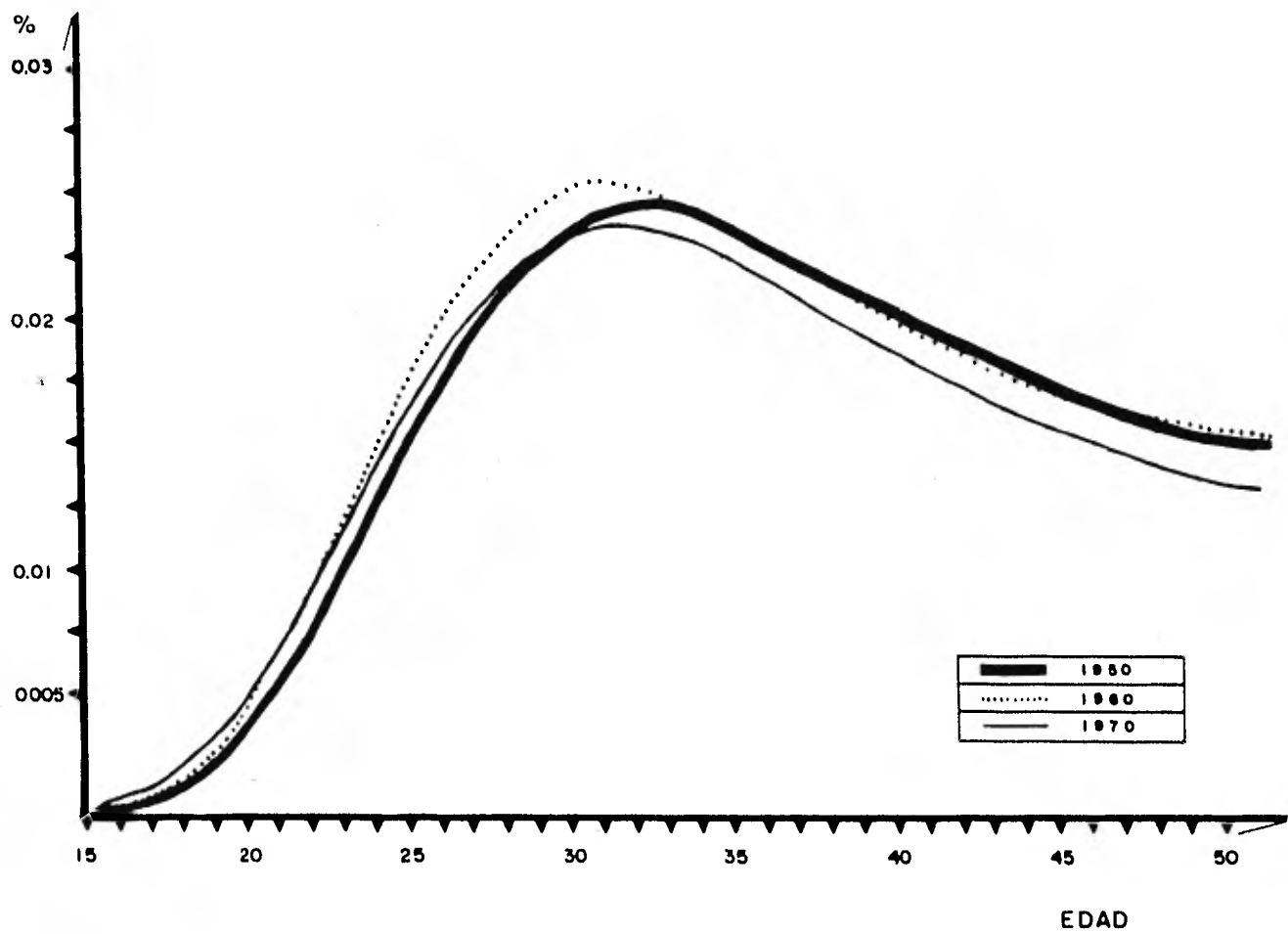
(Censos 1950, 1960 y 1970)



FUENTE: CUADRO 16 DEL ANEXO I

TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (Cuarto Orden)

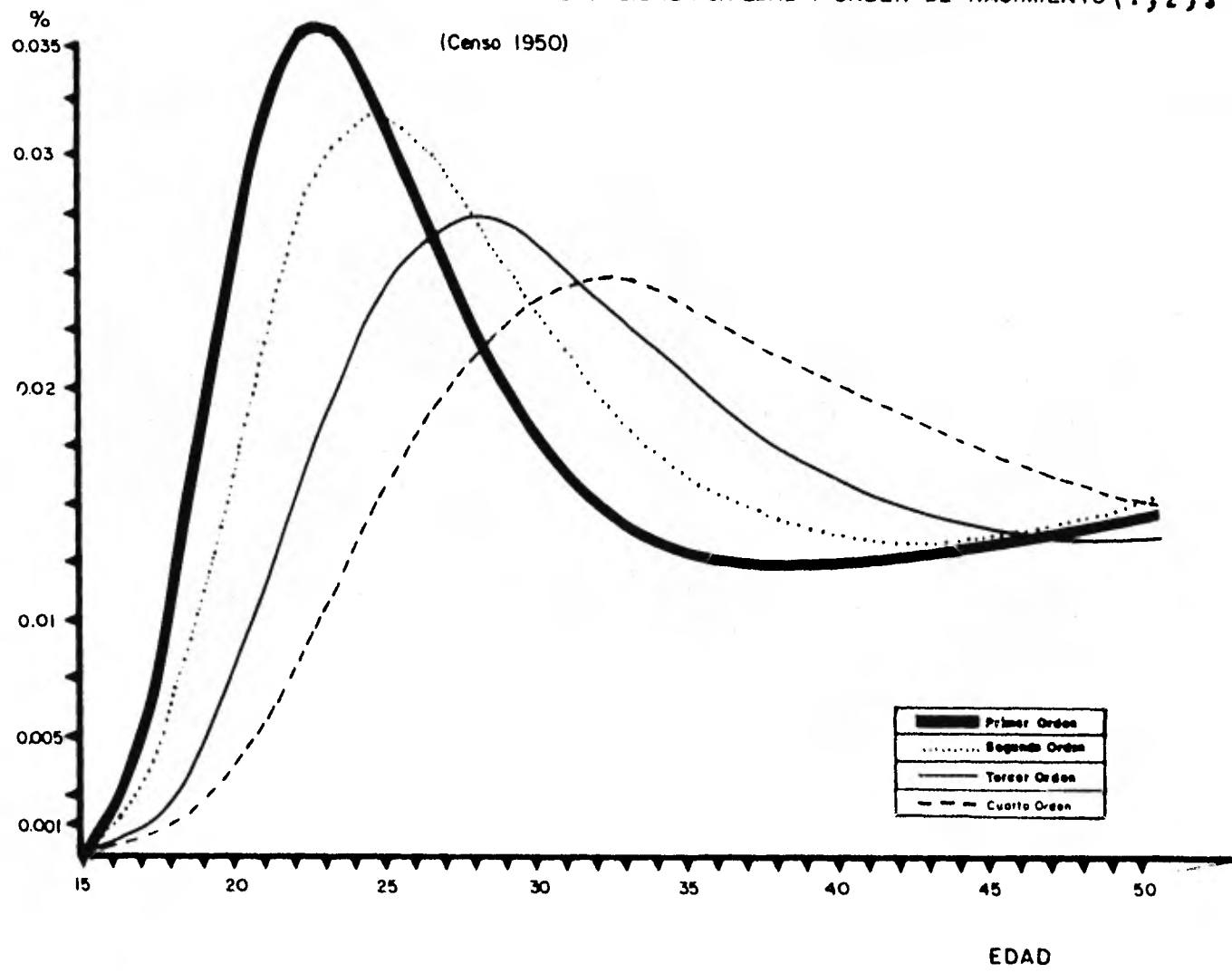
(Censos 1950, 1960 y 1970)



FUENTE: CUADRO 16 DEL ANEXO I

TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (1°, 2°, 3° Y 4°)

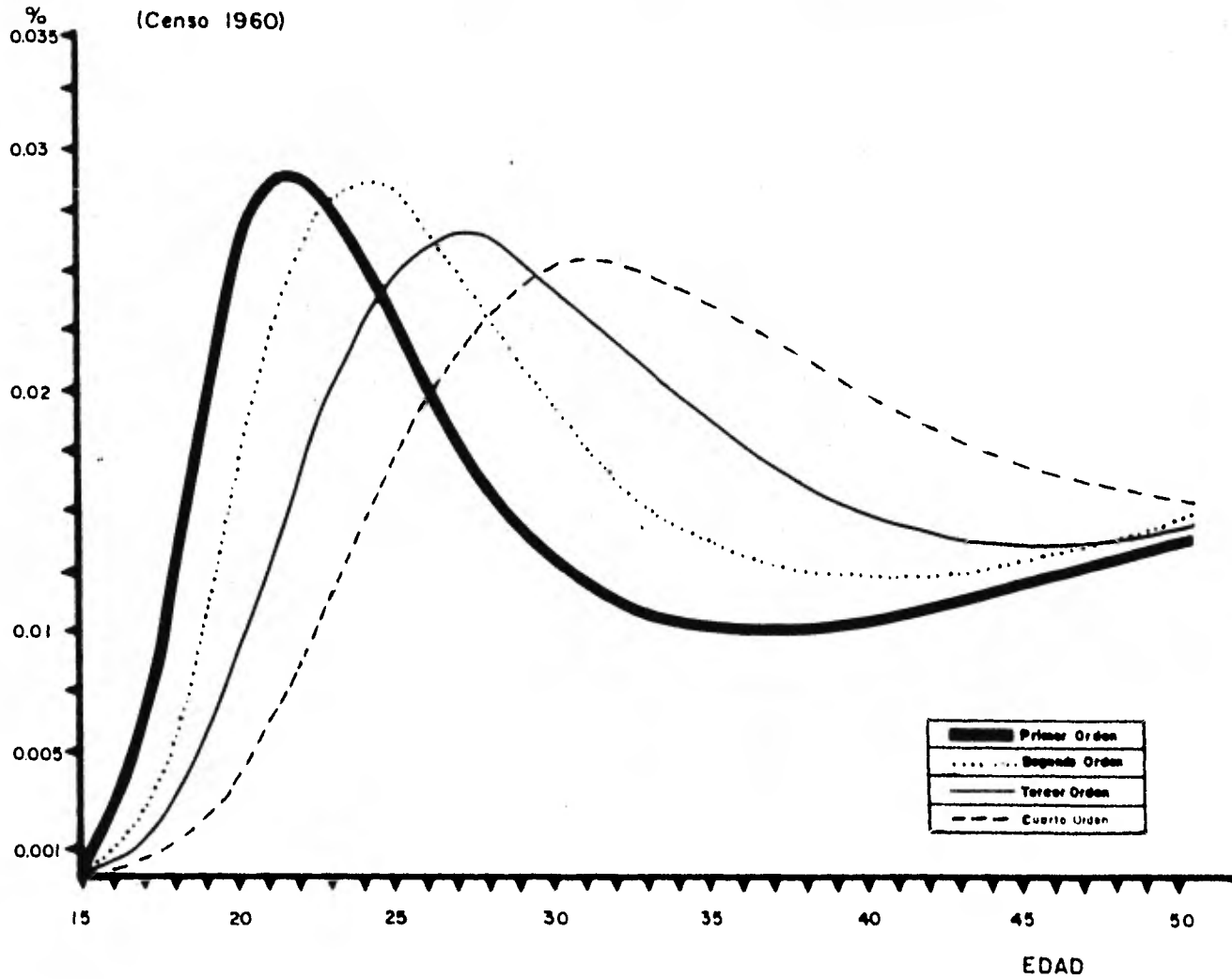
(Censo 1950)



FUENTE: CUADRO 16 DEL ANEXO I

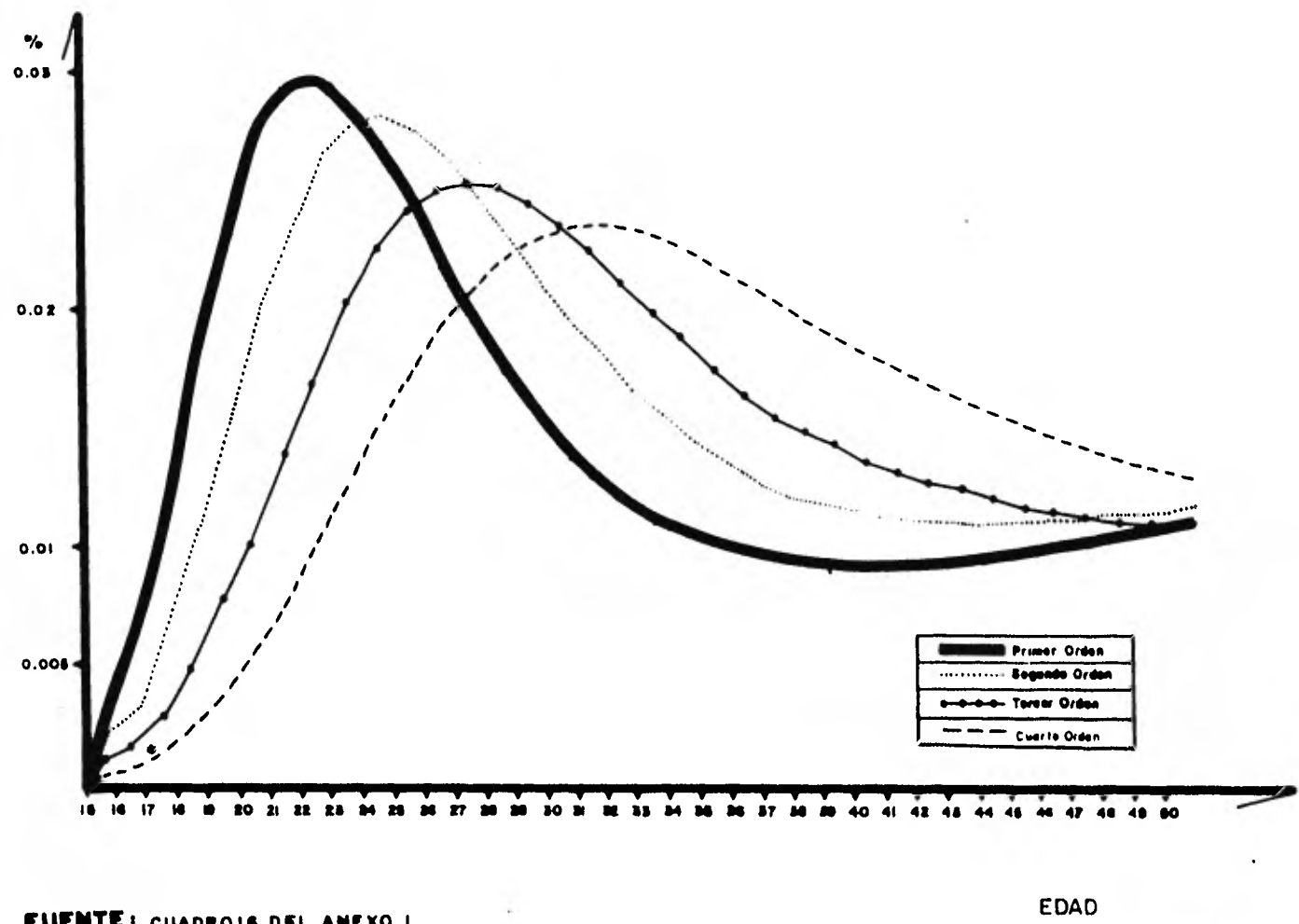
TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (1°, 2°, 3° Y 4°)

(Censo 1960)



FUENTE: CUADRO 16 DEL ANEXO 1

TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO (1°, 2°, 3° Y 4°)
(Censo 1970)



FUENTE: CUADRO 16 DEL ANEXO I

EDAD

CUADRO 14

COMPORTAMIENTO DE LOS PARAMETROS DE LA FUNCION DE MAKEHAM SEGUN ORDEN DE NACIMIENTO PARA LOS AÑOS 1950, 1960 Y 1970

AÑO	PARA - - METROS	ORDEN DE NACIMIENTO			
		PRIMERO	SEGUNDO	TERCERO	CUARTO ^{1/}
1	k	0.2598234	0.2766160	0.2895687	0.3050814
9	a	1.1308870	1.1253431	1.1110938	1.1027654
5	b	0.0029447	0.0027188	0.0015666	0.0012361
0	d	0.2293500	0.3124605	0.4072647	0.4942732
1	k	0.2015401	0.2316584	0.2570241	0.2855582
9	a	1.1439602	1.1382196	1.1232515	1.1145616
6	b	0.0067760	0.0025903	0.0018152	0.0012114
0	d	0.2071052	0.2833060	0.3822485	0.4660298
1	k	0.2486609	0.2685953	0.2942883	0.3161421
9	a	1.1122012	1.1111726	1.0960918	1.0904377
7	b	0.0142930	0.0074768	0.0038728	0.0020192
0	d	0.2606419	0.3350063	0.4232550	0.5022476

^{1/} Cifra Estimada.

V. CONCLUSIONES GENERALES

En el presente trabajo se utilizó la función de Makeham para ajustar la estructura de la fecundidad según orden de nacimiento (primero, segundo y tercer orden). En el cuadro 15 del anexo 4 se muestra que el ajuste realizado permitió caracterizar adecuadamente este tipo de estructura, por lo que la función de Makeham tiene validez para ser aplicada a este fenómeno demográfico.

Una de las ventajas de haber utilizado la función de Makeham para caracterizar la estructura de la fecundidad según orden de nacimiento, es que se pudieron desagregar los grupos quinquenales de edad en edades individuales; esto permitió obtener a partir de la tasa acumulada por grupo de edad, la tasa acumulada por edad, para que posteriormente desacumulando ésta, se obtuviera la tasa de fecundidad por edad.

En las gráficas 4, 5 y 6 se muestra la tasa de fecundidad por edad y de primero, segundo y tercer orden de nacimiento respectivamente, para los años 1950, 1960 y 1970. En ellas se puede observar que la mayor tasa de fecundidad de primero, segundo y tercer orden de nacimiento corresponde a 1950 y la menor a 1970 para el segundo y el tercer orden de nacimiento. Esto significa que en 1950 había un mayor número de casos de mujeres en edad fértil, con uno, dos y tres hijos nacidos vivos.

Cabe señalar que al aumentar el orden de nacimiento, por ejemplo a segundo , tercero y cuarto orden, la gráfica 3 (en ella se muestra la tasa de fecundidad de primer orden de nacimiento; 1970) - se desplaza a la derecha, y entonces la mayor tasa de fecundidad - disminuye a medida que el orden de nacimiento aumenta (ver gráfica 10); así también en las gráficas 8 y 9 se presenta este mismo tipo de estructura para los años 1950 y 1960 respectivamente. Estos resultados obtenidos indican, que sigue habiendo una mayor proporción de hijos nacidos vivos de un cierto orden de nacimiento con respecto al siguiente orden, por ejemplo, sigue habiendo un mayor número de casos de mujeres con dos hijos nacidos vivos que con - tres.

Asimismo, al aumentar el orden de nacimiento, la menor tasa de fecundidad se localiza en las primeras edades del periodo reproductivo, así por ejemplo, para el cuarto orden de nacimiento la menor tasa en 1950 corresponde a las mujeres entre los 15 - 18 años de - edad (ver gráfica 8); esto se debe a que son poco frecuentes los casos de mujeres entre los 15 - 18 años de edad con cuatro hijos - nacidos vivos.

Así también, cuando aumenta el orden de nacimiento la mayor tasa se localiza en edades posteriores del periodo reproductivo, por ejemplo, para el cuarto orden de nacimiento la mayor tasa en el año de 1950, corresponde a las mujeres entre 31 - 35 años de edad -

(ver gráfica 8), es decir, en 1950 fueron demasiados los casos de mujeres entre los 31 - 35 años de edad, con cuatro hijos nacidos vivos.

Por otro lado, si se analiza el comportamiento de los parámetros de la Función de Makeham según orden de nacimiento y año, es posible pronosticar el valor de ellos por año y orden de nacimiento. En el presente trabajo debido a que el comportamiento de los parámetros por año no tienen una tendencia bien definida (desafortunadamente no se pudo obtener una mayor experiencia de otros años, vía Censos y Encuestas, para observar más claramente la tendencia de los parámetros por año), no se pudo pronosticar el comportamiento futuro de la fecundidad por edad y orden de nacimiento. En cambio, los parámetros de la Función de Makeham tuvieron un comportamiento definido por orden de nacimiento, lo que permitió pronosticar el cuarto orden de nacimiento (ver cuadro 14); esto permitió estimar el comportamiento de la fecundidad por edad y cuarto orden de nacimiento para los años 1950, 1960 y 1970.

Vale la pena mencionar, que hubiera sido importante realizar un análisis de la estructura de la fecundidad según orden de nacimiento en relación, por señalar algunas variables, el nivel de escolaridad y lugar de residencia (urbano y rural) de las mujeres. El análisis de esta estructura según nivel de escolaridad y lugar de residencia - -

permitiría conocer el grado en que inciden dichas variables en los niveles de fecundidad por orden de nacimiento; desafortunadamente no se pudo realizar este tipo de análisis, debido principalmente porque no se cuenta con la información necesaria.

En base a las consideraciones anteriores es posible obtener, mediante el modelo presentado en este trabajo, un esquema analítico más detallado que permita medir y apreciar la evolución del fenómeno de fecundidad según orden de nacimiento.

A N E X O S

ANEXO 1

CUADRO 15

TASA ACUMULADA DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO PARA LOS AÑOS 1950, 1960 Y 1970.

AÑO	a ^f 1	VALORES OBSERVADOS Y AJUSTADOS	GRUPO DE EDAD							
			10 - 14	15 - 19	20 - 24	25 - 29	30 - 34	35 - 39	40 - 44	45 - 49
1950	a ^f 1	VALOR OBSERVADO	0.0006707	0.0870673	0.2408634	0.3443944	0.4153473	0.4823245	0.5461014	0.6113792
		VALOR AJUSTADO	0.0007651	0.0772008	0.2445596	0.3502693	0.4181694	0.4788155	0.5430318	0.6145091
1959	a ^f 2	VALOR OBSERVADO	0.0010760	0.0344136	0.1981163	0.3275783	0.4184526	0.4924751	0.5609107	0.6298537
		VALOR AJUSTADO	0.0007520	0.0491482	0.1967714	0.3292042	0.4193357	0.4905246	0.5587208	0.6311405
1960	a ^f 3	VALOR OBSERVADO	0.0010462	0.0100266	0.1183572	0.2650274	0.3703652	0.4539380	0.5276348	0.5982480
		VALOR AJUSTADO	0.0004536	0.0231800	0.1224613	0.2567569	0.3694753	0.4561178	0.5290009	0.5981278
1969	a ^f 1	VALOR OBSERVADO	0.0014525	0.0771864	0.2130389	0.2889337	0.3430885	0.3935325	0.4542050	0.5145042
		VALOR AJUSTADO	0.0013656	0.0819514	0.2128866	0.2886199	0.3419910	0.3940848	0.4514981	0.5166573
1960	a ^f 2	VALOR OBSERVADO	0.0009214	0.0318304	0.1851734	0.3003774	0.3754304	0.4371834	0.5052633	0.5704892
		VALOR AJUSTADO	0.0006007	0.0487823	0.1860760	0.2983384	0.3741874	0.4377818	0.5021890	0.5728643
1970	a ^f 3	VALOR OBSERVADO	0.0010820	0.0111380	0.1250082	0.2637793	0.3594629	0.4336563	0.5068670	0.5739626
		VALOR AJUSTADO	0.0004665	0.0258632	0.1289497	0.2560422	0.3575710	0.4365057	0.5061573	0.5754991
1979	a ^f 1	VALOR OBSERVADO	0.0038492	0.0844942	0.2304438	0.3177617	0.3738388	0.4207063	0.4698477	0.5241362
		VALOR AJUSTADO	0.0035541	0.0913984	0.2304858	0.3173156	0.3731015	0.4210226	0.4700344	0.5232879
1970	a ^f 2	VALOR OBSERVADO	0.0031785	0.0366192	0.1094483	0.3101667	0.3864932	0.4445190	0.5017622	0.5615665
		VALOR AJUSTADO	0.0020082	0.0578846	0.1914392	0.3065493	0.3849845	0.4456914	0.5020906	0.5604829
1980	a ^f 3	VALOR OBSERVADO	0.0028934	0.0120826	0.1259695	0.2633727	0.3580880	0.4276042	0.4908801	0.5544699
		VALOR AJUSTADO	0.0011397	0.0307425	0.1307297	0.2543401	0.3554297	0.4317624	0.4942967	0.5518645

* TASA ACUMULADA DE FECUNDIDAD POR GRUPO DE EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO 1

CUADRO 16

TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO PARA LOS AÑOS 1950, 1960 Y 1970.

EDAD	1950				1960				1970			
	f ¹	f ²	f ³	f ⁴	f ¹	f ²	f ³	f ⁴	f ¹	f ²	f ³	f ⁴
15	0.0007651	0.0007520	0.0004536	0.0003771	0.0013656	0.0006000	0.0004665	0.0003459	0.0035541	0.0020082	0.0011397	0.0006363
16	0.0027026	0.0018725	0.0008664	0.0005502	0.0040414	0.0017233	0.0009742	0.0005691	0.0063310	0.0033582	0.0016516	0.0008048
17	0.0072886	0.0044766	0.0019842	0.0011038	0.0094626	0.0043675	0.0022269	0.0012004	0.0118248	0.0065049	0.0031603	0.0015710
18	0.0143973	0.0086025	0.0038025	0.0019923	0.0164713	0.0086179	0.0042929	0.0022414	0.0180960	0.0106903	0.0053404	0.0025479
19	0.0225058	0.0138940	0.0063979	0.0032804	0.0230597	0.0139842	0.0071881	0.0037685	0.0237758	0.0153921	0.0081268	0.0039844
20	0.0295412	0.0195503	0.0096552	0.0049870	0.0275505	0.0194892	0.0107144	0.0057907	0.0278164	0.0199306	0.0113235	0.0058051
21	0.0340705	0.0246705	0.0133057	0.0070742	0.0293731	0.0214441	0.0145112	0.0082369	0.0298172	0.0237091	0.0146507	0.0079343
22	0.0357466	0.0285777	0.0170003	0.0094499	0.0289061	0.0273233	0.0181657	0.0109667	0.0299466	0.0263654	0.0178134	0.0102619
23	0.0350441	0.0309656	0.0203970	0.0119837	0.0269432	0.0288656	0.0213211	0.0137985	0.0286820	0.0278007	0.0205617	0.0127120
24	0.0327746	0.0318685	0.0232310	0.0145283	0.0242654	0.0289654	0.0237447	0.0165433	0.0265683	0.0281227	0.0227274	0.0150662
25	0.0297226	0.0315405	0.0253470	0.0169425	0.0214473	0.0279951	0.0253434	0.0190355	0.0240730	0.0275564	0.0242337	0.0172059
26	0.0264783	0.0303264	0.0267004	0.0191080	0.0188332	0.0253567	0.0261435	0.0211523	0.0215332	0.0263654	0.0250845	0.0192106
27	0.0234123	0.0285672	0.0273341	0.0209400	0.0165870	0.0243953	0.0262511	0.0228216	0.0191587	0.0247969	0.0253429	0.0207940
28	0.0207165	0.0265482	0.0273487	0.0223904	0.0147556	0.0223667	0.0258124	0.0240200	0.0170591	0.0230544	0.0251067	0.0220251
29	0.0184606	0.0244815	0.0268727	0.0234453	0.0133212	0.0204383	0.0249822	0.0247636	0.0152748	0.0212892	0.0244877	0.0228413
30	0.0166418	0.0225092	0.0260394	0.0241187	0.0122362	0.0187052	0.0239031	0.0250973	0.0138038	0.0196038	0.0235962	0.0233233
31	0.0152202	0.0207155	0.0249720	0.0244447	0.0114438	0.0172110	0.0226943	0.0250826	0.0126211	0.0186058	0.0225314	0.0234879
32	0.0141408	0.0191422	0.0237750	0.0244703	0.0108892	0.0159647	0.0214486	0.0247884	0.0116914	0.0166913	0.0213760	0.0233815
33	0.0133463	0.0178016	0.0225315	0.0242484	0.0105238	0.0149554	0.0202334	0.0242831	0.0109770	0.0155068	0.0201955	0.0230544
34	0.0127841	0.0166878	0.0213039	0.0238328	0.0103072	0.0141612	0.0190940	0.0236299	0.0104419	0.0145042	0.0190197	0.0225566
35	0.0124084	0.0157842	0.0201357	0.0232742	0.0102069	0.0135563	0.0180582	0.0228842	0.0100541	0.0136722	0.0179398	0.0219347
36	0.0121813	0.0150695	0.0190556	0.0226182	0.0101972	0.0131142	0.0171404	0.0220919	0.0097860	0.0129951	0.0169210	0.0212300
37	0.0120716	0.0145206	0.0180799	0.0219042	0.0102581	0.0128101	0.0163455	0.0212899	0.0096147	0.0124558	0.0159951	0.0207470
38	0.0120549	0.0141148	0.0172162	0.0211645	0.0103744	0.0126217	0.0156719	0.0205061	0.0095211	0.0120369	0.0151679	0.0197076
39	0.0121116	0.0138315	0.0164656	0.0204251	0.0105344	0.0125298	0.0151138	0.0197614	0.0094900	0.0117222	0.0144400	0.0189422
40	0.0122266	0.0136522	0.0158250	0.0197062	0.0107293	0.0125183	0.0146630	0.0190699	0.0095091	0.0114967	0.0138086	0.0181926
41	0.0123883	0.0135605	0.0152884	0.0190225	0.0109526	0.0125736	0.0143102	0.0184408	0.0095688	0.0113474	0.0132685	0.0174928
42	0.0125876	0.0135428	0.0148484	0.0183845	0.0111991	0.0126845	0.0140457	0.0178792	0.0096611	0.0112628	0.0128134	0.0166309
43	0.0128175	0.0135875	0.0144966	0.0177990	0.0114654	0.0128418	0.0138601	0.0173872	0.0097802	0.0112330	0.0124361	0.0162700
44	0.0130729	0.0136947	0.0142248	0.0172700	0.0117488	0.0130385	0.0137445	0.0169646	0.0099211	0.0112449	0.0121295	0.0156633
45	0.0133497	0.0138264	0.0140246	0.0167992	0.0120471	0.0132624	0.0136907	0.0166096	0.0100802	0.0113059	0.0118864	0.0151622
46	0.0136449	0.0140060	0.0138885	0.0163867	0.0123591	0.0135269	0.0136914	0.0163193	0.0102546	0.0113957	0.0117002	0.0147165
47	0.0139563	0.0142181	0.0138093	0.0160313	0.0126837	0.0138102	0.0137400	0.0160901	0.0104420	0.0115141	0.0115645	0.0143246
48	0.0142821	0.0144581	0.0137805	0.0157309	0.0130203	0.0141154	0.0138309	0.0159182	0.0106407	0.0116571	0.0114737	0.0139651
49	0.0146212	0.0147226	0.0137964	0.0154830	0.0133683	0.0144401	0.0139590	0.0157994	0.0108492	0.0118213	0.0114226	0.0136946
50	0.0149727	0.0150086	0.0138519	0.0152045	0.0137276	0.0147825	0.0141202	0.0157298	0.0110667	0.0120040	0.0114066	0.0134509

NOTA: f¹, f², f³ y f⁴ DENOTAN, TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y DE ORDEN DE NACIMIENTO, PRIMERO, SEGUNDO, TERCERO Y CUARTO, RESPECTIVAMENTE.

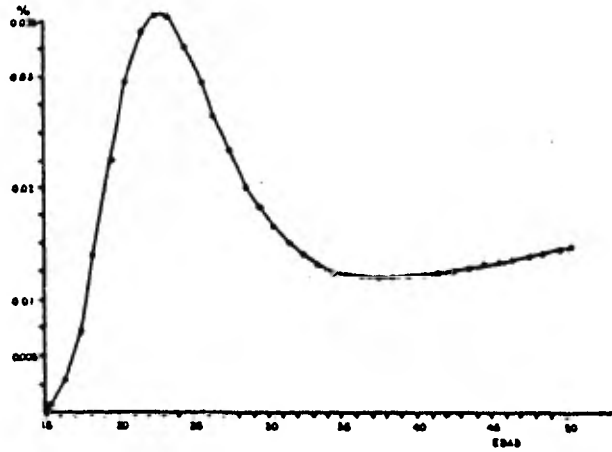
CUADRO 17

EVALUACION DEL MODELO DE AJUSTE (FUNCION DE MAKEHAM)
 PARA LOS AÑOS 1950, 1960 Y 1970 SEGUN ORDEN DE NACIMIENTO

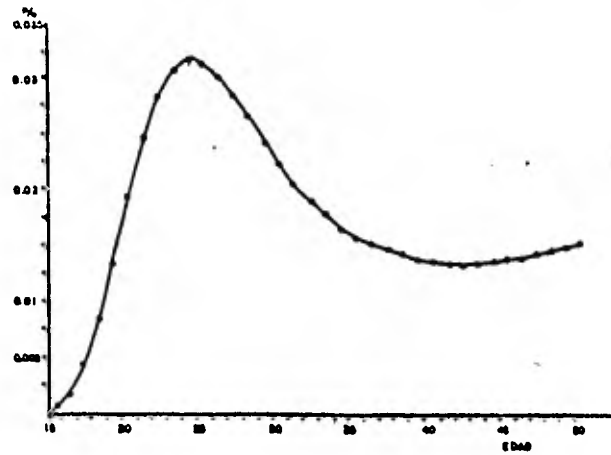
AÑO	ORDEN DE NACIMIENTO	SUMA RESIDUAL DE CUADRADOS	COEFICIENTE DE DETERMINACION
1950	PRIMERO	0.00018989	0.99942
	SEGUNDO	0.00023270	0.99940
	TERCERO	0.00026603	0.99929
1960	PRIMERO	0.00003631	0.99984
	SEGUNDO	0.00030944	0.99902
	TERCERO	0.00031124	0.99909
1970	PRIMERO	0.00004935	0.99979
	SEGUNDO	0.00047557	0.99845
	TERCERO	0.00049819	0.99844

50

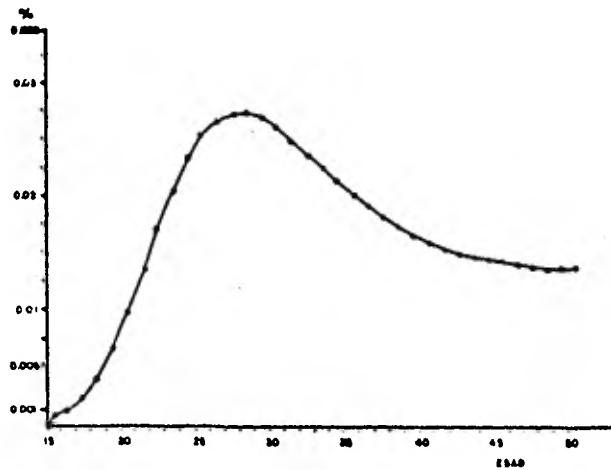
**TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO
(Censo 1950)**



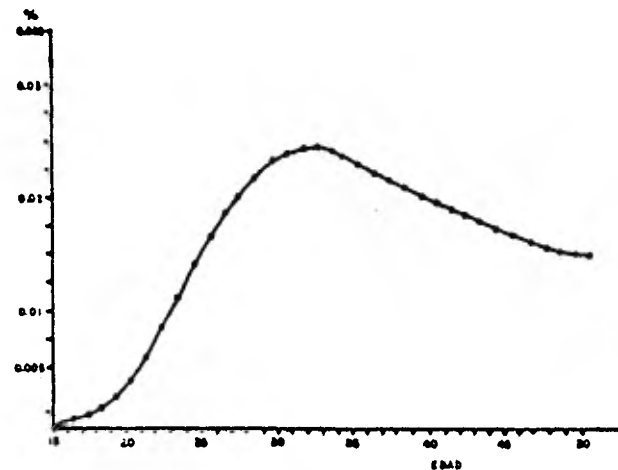
PRIMER ORDEN



SEGUNDO ORDEN

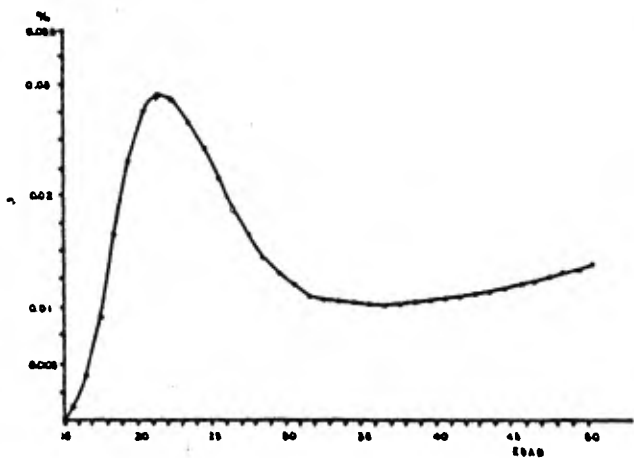


TERCER ORDEN

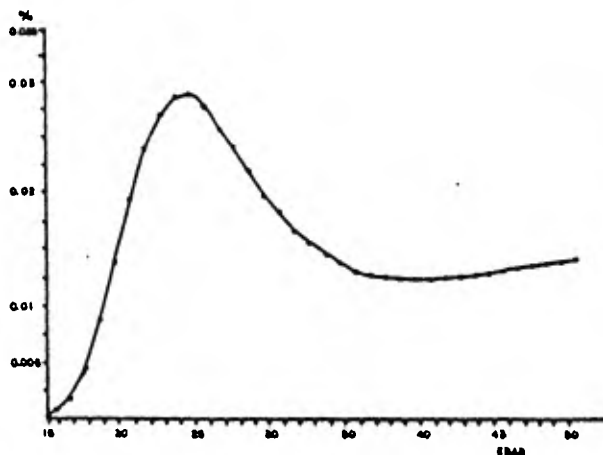


CUARTO ORDEN

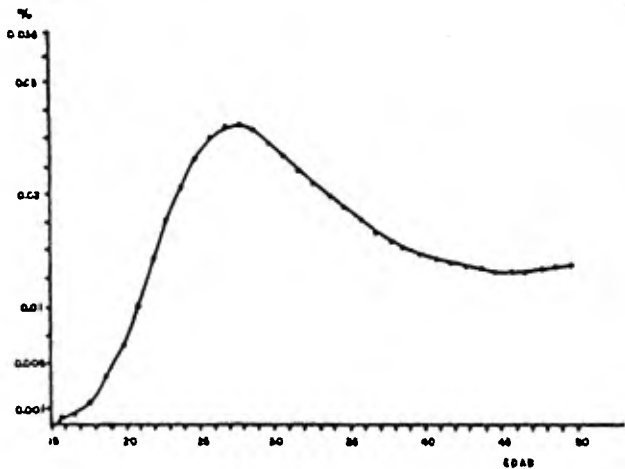
TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO
(Censo 1960)



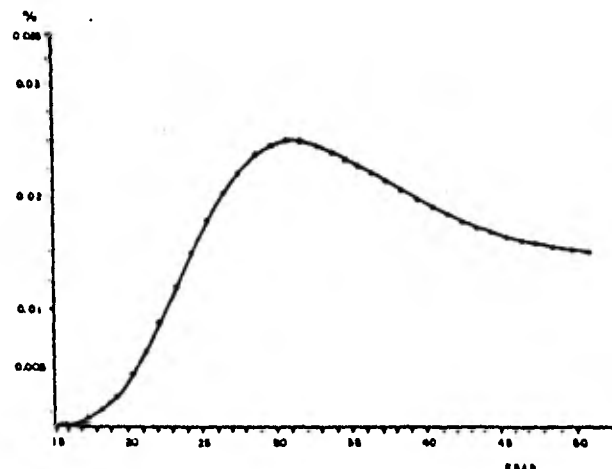
PRIMER ORDEN



SEGUNDO ORDEN

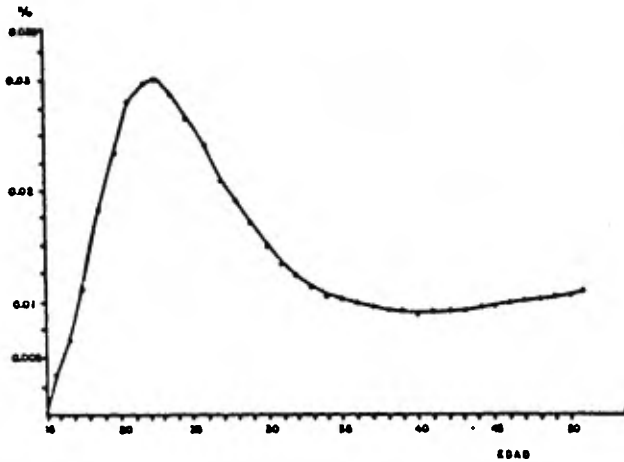


TERCER ORDEN

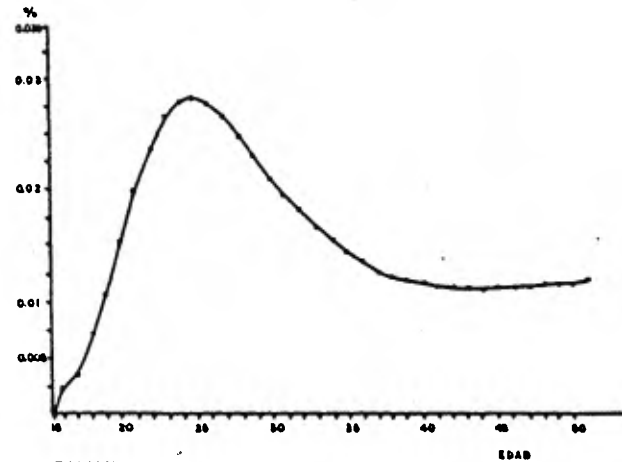


CUARTO ORDEN

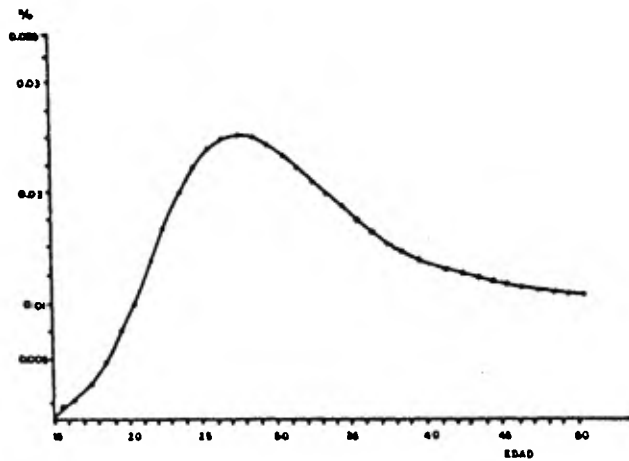
TASA DE FECUNDIDAD POR EDAD Y ORDEN DE NACIMIENTO
(Censo 1970)



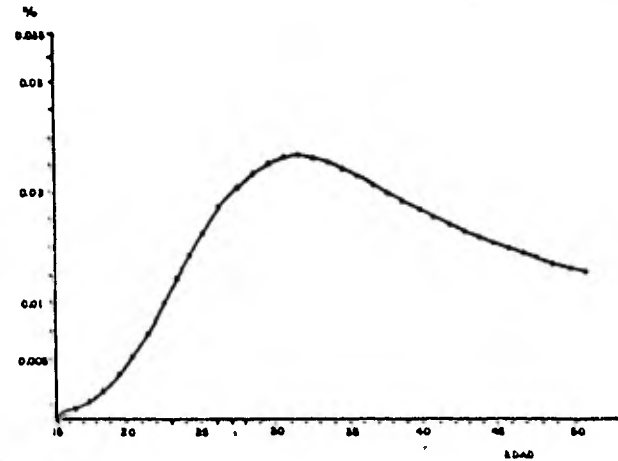
PRIMER ORDEN



SEGUNDO ORDEN



TERCER ORDEN



CUARTO ORDEN

ANEXO 2

PROGRAMA UTILIZADO PARA EL
CALCULO DE LOS VALORES $f(x)$

Para calcular los valores de las tasas acumuladas de fecundidad por -
edad y orden de nacimiento, por medio de la Ley de Makeham, se elab-
oró el siguiente programa en la calculadora programable TI-59:

000	76	LBL	026	95	=
001	11	A	027	42	STD
002	43	RCL	028	30	30
003	01	01	029	43	RCL
004	99	PRT	030	05	05
005	43	RCL	031	65	×
006	02	02	032	43	RCL
007	45	Y%	033	30	30
008	43	RCL	034	65	×
009	01	01	035	43	RCL
010	95	=	036	20	20
011	42	STD	037	95	=
012	10	10	038	99	PRT
013	43	RCL	039	93	.
014	03	03	040	02	2
015	45	Y%	041	44	SUM
016	43	RCL	042	01	01
017	10	10	043	43	RCL
018	95	=	044	00	00
019	42	STD	045	32	X!T
020	20	20	046	43	RCL
021	43	RCL	047	01	01
022	04	04	048	22	INV
023	45	Y%	049	67	EQ
024	43	RCL	050	11	A
025	01	01	051	91	R/S

Donde:

- a) El valor de la variable 'x' se encuentra localizado en la memoria -- 01.
- b) El valor de los parametros de la Ley de Makeham se encuentran almacenados en las siguientes memorias:
 - i) En la memoria 02 el valor de 'd'
 - ii) En la memoria 03 el valor de 'b'
 - iii) En la memoria 04 el valor de 'a'
 - iv) y en la memoria 05 el valor de 'k'
- c) El valor de la expresión ' d^x ' se localiza en la memoria 10
- d) El valor de la expresión ' b^{d^x} ' se localiza en la memoria 20
- e) Y por último, el valor de la expresión ' a^{d^x} ' se localiza en la memoria 30

A continuación se presentará una 'corrida' de dicho programa para los valores de la Ley de Makeham correspondientes al primer orden de nacimiento del censo de 1970.

	0.		3.6
.0035541102		.3526051362	
	0.2		3.8
.0098851573		.3630471054	
	0.4		4.
0.021710053		.3731012727	
	0.6		4.2
.0398061106		.3828873564	
	0.8		4.4
.0635819599		.3925020499	
	1.		4.6
0.091398426		.4020231537	
	1.2		4.8
.1212156765		.4115131705	
	1.4		5.
.1511622747		.4210223378	
	1.6		5.2
0.179844324		.4305911317	
	1.8		5.4
.2064126831		.4402523045	
	2.		5.6
.2304857094		.4500325259	
	2.2		5.8
.2520189167		.4599536936	
	2.4		6.
.2711776547		.4700339755	
	2.6		6.2
.2882367847		.4802886341	
	2.8		6.4
.3035116258		.4907306772	
	3.		6.6
.3173154903		.5013713697	
	3.2		6.8
.3299366465		.5122206364	
	3.4		7.
.3416281015		.5232873782	

A N E X O 3

LA FUNCION DE MAKEHAM

A principios del siglo XVIII se realizaron los primeros estudios de la mortalidad, y se trató de hallar una expresión analítica capaz de representar a la función de sobrevivencia (l_x).

El primer estudio que trascendió relacionado con este tema, fue el hecho por Benjamín Gompertz, que supone que la resistencia que tiene el hombre para evitar la muerte decrece en una tasa proporcional a sí misma, en otras palabras, si se denota por μ_x (conocida como la tasa instantánea de mortalidad) a la susceptibilidad del hombre a la muerte, y su recíproco ($1/\mu_x$) como la resistencia que tiene el hombre a la muerte, se puede por lo tanto, expresar matemáticamente la hipótesis Gompertz de la siguiente forma:

$$d \frac{(1/\mu_x)}{dx} = -h (1/\mu_x)$$

Donde:

h = Tasa proporcional a la que decrece la resistencia que tiene el hombre a la muerte.

$$\text{si } \frac{d(1/\mu_x)}{dx} = -h (1/\mu_x) \Rightarrow \frac{d(1/\mu_x)}{1/\mu_x} = -h dx \quad (1)$$

Por otro lado se sabe que: la derivada de una función por el recíproco de la función es igual a la derivada del logaritmo natural de la función, es decir:

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dx} = \frac{d \ln x}{dx}$$

Aplicando este resultado en (1) se obtiene que:

$$\frac{d \ln (1/\mu_x)}{dx} = -h dx \quad \text{entonces} \quad \int \frac{d \ln (1/\mu_x)}{dx} = \int -h dx$$

$$\ln (1/\mu_x) + c_1 = -hx + c_2 \Rightarrow \ln (1/\mu_x) + (c_1 - c_2) = -hx$$

$$\text{si denotamos } \ln B = c_1 - c_2 \Rightarrow \ln \left(\frac{1}{\mu_x}\right) + \ln B = -hx \Rightarrow \ln \left(\frac{B}{\mu_x}\right) = -hx$$

$$\Rightarrow \exp \ln \left(\frac{B}{\mu_x}\right) = \exp (-hx) \Rightarrow \frac{B}{\mu_x} = e^{-hx} \quad (2)$$

haciendo en (2) $e^h = d$ se tiene que:

$$\mu_x = B d^x \quad (\text{hipótesis de Gompertz}) \quad (3)$$

Por otro lado se tiene que:

$$\mu_x = -d \frac{\ln lx}{dx} \quad (4)$$

Por lo tanto de (3) y (4) se concluye que:

$$B d^x = -d \frac{\ln lx}{dx} \quad (5)$$

Integrando en (5) ambos miembros de la igualdad se obtiene:

$$- \int B d^x dx = \ln lx \quad (6)$$

Pero:

$$\int B d^x dx = \frac{B d^x}{\ln d} + c_1$$

Entonces (6) queda como:

$$- \frac{B d^x}{\ln d} + c_1 = \ln lx \quad (7)$$

Haciendo:

$$\ln b = \frac{-B}{\ln d} \quad \text{y} \quad \ln K = c_1$$

Resulta que (7) queda como:

$$d^x \ln b + \ln K = \ln l_x$$

Aplicando exponencial en ambos miembros de la igualdad se tiene:

$$l_x = K b d^x \quad (\text{Ley de Gompertz}) \quad (8)$$

Al aplicar esta formula de Gompertz, se observa que no ajusta a los valores con la precisión deseada, y es por ello que Makeham introduce a la hipótesis de Gompertz una constante, que representa causas de mortalidad independientes de la edad (como es la muerte por accidente ó enfermedad), es decir:

$$\mu_x = A + B b^x \quad (9)$$

entonces de (4) y (9) se obtiene que:

$$-\frac{d \ln l_x}{dx} = A + B d^x \quad (10)$$

Integrando en (10) resulta:

$$-\ln l_x = \int A + B d^x \Rightarrow \ln l_x = \frac{-B d^x}{\ln d} + c_1 - A_x \quad (11)$$

Haciendo:

$$\ln a = -A, \quad \ln b = \frac{-B}{\ln d}, \quad \ln K = c_1$$

Da como resultado que (11) quede como:

$$\ln l_x = x \ln a + \ln K + d^x \ln b \quad (12)$$

Aplicando exponencial en ambos miembros de la igualdad en (12) se obtiene finalmente:

$$l_x = K a^x b^{d^x} \quad (\text{Función de Makeham})$$

Cabe señalar que la Función de Makeham es una función más general - que las ya conocidas, como lo son:

i) La Ley de Gompertz: $l_x = K b^{d^x}$

ii) y la ley exponencial simple: $l_x = K a^x$

ya que se pueden obtener de la Función de Makeham, haciendo $a = 1$ en el primer caso, y $b = 1$ en el segundo caso.

A N E X O 4

DETERMINACION DEL SISTEMA DE ECUACIONES Y DEL PARAMETRO 'K' DEL METODO DE LOS GRUPOS NO SUPERPUESTOS.

a) OBTENCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES.

La función que se emplea en los ajustes viene dada por:

$$f_x = K a^x b d^x$$

tomando logaritmo decimal en ambos lados se tiene:

$$\text{Log } f_x = \text{Log } K + x \text{ Log } a + d^x \text{ Log } b$$

teniendo valores sucesivos de (x), se obtiene:

$$\text{Log } f_x = \text{Log } K + x \text{ Log } a + d^x \text{ Log } b$$

$$\text{Log } f_{x+1} = \text{Log } K + (x+1) \text{ Log } a + d^{x+1} \text{ Log } b$$

$$\text{Log } f_{x+m-1} = \text{Log } K + (x+m-1) \text{ Log } a + d^{x+m-1} \text{ Log } b$$

$$\text{Log } f_{x+2m-1} = \text{Log } K + (x+2m-1) \text{ Log } a + d^{x+2m-1} \text{ Log } b$$

$$\text{Log } f_{x+3m-1} = \text{Log } K + (x+3m-1) \text{ Log } a + d^{x+3m-1} \text{ Log } b$$

$$\text{Log } f_{x+4m-1} = \text{Log } K + (x+4m-1) \text{ Log } a + d^{x+4m-1} \text{ Log } b$$

donde:

m = número de observaciones en cada grupo.

Para el Primer Grupo se tiene:

$$\begin{aligned}
 \text{So} &= \sum_{u=x}^{x+m-1} \text{Log } f_u = \text{Log } f_x + \text{Log } f_{x+1} + \dots + \text{Log } f_{x+m-1} \\
 &= (\text{Log } K + x \text{Log } a + d^x \text{Log } b) + (\text{Log } K + (x+1) \text{Log } a + d^{x+1} \text{Log } b) \\
 &\quad + \dots (\text{Log } K + (x+m-1) \text{Log } a + d^{x+m-1} \text{Log } b) \\
 &= m \text{Log } K + (x+x+1+\dots+x+m-1) \text{Log } a + (d^x + d^{x+1} + \dots \\
 &\quad d^{x+m-1}) \text{Log } b \tag{1}
 \end{aligned}$$

Por otro lado se sabe que:

$$i) \quad x+x+1+\dots+x+m-1 = \frac{m(2x+m-1)}{2}$$

$$ii) \quad d^x + d^{x+1} + \dots + d^{x+m-1} = \frac{d^x(d^m-1)}{d-1}$$

sustituyendo en (1) se obtiene:

$$\text{So} = m \text{Log } K + \frac{m(2x+m-1)}{2} \text{Log } a + \frac{d^x(d^m-1)}{d-1} \text{Log } b \tag{2}$$

haciendo $x = 0$ en (2) se tiene:

$$\text{So} = m \text{Log } K + \frac{m(m-1)}{2} \text{Log } a + \frac{(d^m-1)}{d-1} \text{Log } b$$

Para el Segundo Grupo se tiene:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \sum_{u=x+m}^{x+2m-1} \text{Log } f_u = \text{Log } f_{x+m} + \text{Log } f_{x+m+1} + \dots + \\
 &\text{Log } f_{x+2m-1} = (\text{Log } K + (x+m) \text{Log } a + d^{x+m} \text{Log } b) + \\
 &(\text{Log } K + (x+m+1) \text{Log } a + d^{x+m+1} \text{Log } b) + \dots + \\
 &(\text{Log } K + (x+2m-1) \text{Log } a + d^{x+2m-1} \text{Log } b) = m \text{Log } K + \\
 &[(x+m) + (x+m+1) + \dots + (x+2m-1)] \text{Log } a + \\
 &(d^{x+m} + d^{x+m+1} + \dots + d^{x+2m-1}) \text{Log } b \tag{3}
 \end{aligned}$$

por otro lado se sabe que:

$$\text{i) } (x+m) + (x+m+1) + \dots + (x+2m-1) = \frac{m(2x+3m-1)}{2}$$

$$\text{ii) } d^{x+m} + d^{x+m+1} + \dots + d^{x+2m-1} = \frac{d^{x+m}(d^m-1)}{d-1}$$

sustituyendo en (3) se obtiene:

$$S_1 = m \text{Log } K + \frac{m(2x+3m-1)}{2} \text{Log } a + d^{x+m} \frac{(d^m-1)}{d-1} \text{Log } b \tag{4}$$

haciendo $x=0$ en (4) se tiene:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= m \text{Log } K + \frac{m(3m-1)}{2} \text{Log } a + d^m \frac{(d^m-1)}{d-1} \text{Log } b \\
 &= m \text{Log } K + \left[m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \right] \text{Log } a + d^m \frac{(d^m-1)}{d-1} \text{Log } b
 \end{aligned}$$

Para el tercer grupo se tiene:

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \sum_{u=x+2m}^{x+3m-1} \text{Log } f_u = \text{Log } f_{x+2m} + \text{Log } f_{x+2m+1} + \dots + \text{Log } f_{x+3m-1} \\
 &= (\text{Log } K + (x+2m) \text{Log } a + d^{x+2m} \text{Log } b) + (\text{Log } K + (x+2m+1) \text{Log } a + d^{x+2m+1} \\
 &\text{Log } b) + \dots + (\text{Log } K + (x+3m-1) \text{Log } a + d^{x+3m-1} \text{Log } b) \\
 &= m \text{Log } K + \left[(x+2m) + (x+2m+1) + \dots + (x+3m-1) \right] \text{Log } a + (d^{x+2m} + d^{x+2m+1} + \dots + d^{x+3m-1}) \text{Log } b
 \end{aligned} \tag{5}$$

Por otro lado se sabe que:

$$\begin{aligned}
 \text{i) } (x+2m) + (x+2m+1) + \dots + (x+3m-1) &= \frac{m(2x+5m-1)}{2} \\
 \text{ii) } d^{x+2m} + d^{x+2m+1} + \dots + d^{x+3m-1} &= d^{x+2m} \frac{(d^m - 1)}{d-1}
 \end{aligned}$$

sustituyendo en (5) se obtiene:

$$S_2 = m \text{Log } K + \frac{m(2x+5m-1)}{2} \text{Log } a + d^{x+2m} \frac{(d^m - 1)}{d-1} \text{Log } b \tag{6}$$

haciendo $x = 0$ en (6) se tiene:

$$\begin{aligned}
 S_2 &= m \text{Log } K + \frac{m(5m-1)}{2} \text{Log } a + d^{2m} \frac{(d^m - 1)}{d-1} \text{Log } b \\
 S_2 &= m \text{Log } K + \left[2m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \right] \text{Log } a + d^{2m} \frac{(d^m - 1)}{d-1} \text{Log } b
 \end{aligned}$$

Para el Cuarto Grupo se tiene:

$$\begin{aligned}
 S_3 &= \sum_{u=x+3m}^{x+4m-1} \text{Log } f_u = \text{Log } f_{x+3m} + \text{Log } f_{x+3m+1} + \dots + \text{Log } f_{x+4m-1} \\
 &= (\text{Log } K + (x+3m) \text{Log } a + d^{x+3m} \text{Log } b) + (\text{Log } K + (x+3m+1) \text{Log } a + d^{x+3m+1} \\
 &\text{Log } b) + \dots + (\text{Log } K + (x+4m-1) \text{Log } a + d^{x+4m-1} \text{Log } b) \\
 &= m \text{Log } K + \left[(x+3m) + (x+3m+1) + \dots + (x+4m-1) \right] \text{Log } a + (d^{x+3m} + d^{x+3m+1} \\
 &+ \dots + d^{x+4m-1}) \text{Log } b
 \end{aligned} \tag{7}$$

Por otro lado se sabe que:

$$\text{i) } (x+3m) + (x+3m+1) + \dots + (x+4m-1) = \frac{m(2x+7m-1)}{2}$$

$$\text{ii) } d^{x+3m} + d^{x+3m+1} + \dots + d^{x+4m-1} = d^{x+3m} \frac{(d^m - 1)}{d - 1}$$

sustituyendo en (7) se obtiene:

$$S_3 = m \text{Log } K + \frac{m(2x+7m-1)}{2} \text{Log } a + d^{x+3m} \frac{(d^m - 1)}{d - 1} \text{Log } b \tag{8}$$

haciendo $x = 0$ en (8) se tiene:

$$S_3 = m \text{Log } K + \frac{m(7m-1)}{2} \text{Log } a + d^{3m} \frac{(d^m - 1)}{d - 1} \text{Log } b$$

$$S_3 = m \text{Log } K + \left[3m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \right] \text{Log } a + d^{3m} \frac{(d^m - 1)}{d - 1} \text{Log } b$$

b) OBTENCION DEL PARAMETRO 'K'

Se sabe que 'K' viene dada por:

$$K = \frac{\sum f(x) V_x}{\sum V_x^2} \text{ donde } V_x = a^x b^{d^x}$$

Justificación:

$$\text{sea } P = \sum (f(x) - \hat{f}(x))^2 = \sum (f(x) - K a^x b^{d^x})^2 = \sum (f(x) - K V_x)^2$$

Se debe encontrar el valor de 'K' tal que esta diferencia sea la mínima posible, para lo cual se utilizará la condición de mínimos cuadrados:

$$\text{si } P = \sum (f(x) - K V_x)^2 = 0 \Rightarrow f(x) - K V_x = 0 \Rightarrow f(x) = K V_x \Rightarrow$$

$$P = \sum (f(x)^2 - 2K f(x) V_x + K^2 V_x^2) = \sum (f(x)^2 - 2f(x) K V_x + K^2 V_x^2) \Rightarrow$$

$$P = \sum (K^2 V_x^2 - f(x)^2) = \sum K^2 V_x^2 - \sum f(x)^2 = 0 \Rightarrow \sum K^2 V_x^2 =$$

$$\sum f(x)^2 \Rightarrow K^2 = \frac{\sum f(x)^2}{\sum V_x^2} \Rightarrow K^2 = \frac{\sum f(x) f(x)}{\sum V_x^2} = \frac{\sum f(x) (K V_x)}{\sum V_x^2}$$

$$\therefore K = \frac{\sum f(x) V_x}{\sum V_x^2}$$

ANEXO 5

MODELO MATEMATICO UTILIZADO PARA EL PRONOSTICO DEL CUARTO ORDEN DE NACIMIENTO

Para pronosticar el valor de los parámetros de la función de Makeham ("k", "a", "b", y "d") correspondientes al cuarto orden de nacimiento se utilizó el modelo lineal simple:

$$y(x) = h + kx$$

donde: h, k son parámetros a determinar.

Los parámetros h, k fueron calculados por el metodo de mínimos cuadrados, y para ello se tomó como variable independiente el orden de nacimiento y como variable dependiente el valor de los parámetros de la función de Makeham. Una vez obtenidos los valores de los parámetros h, k del modelo lineal, se procedió a pronosticar el valor de los parámetros de la función de Makeham para el cuarto orden de nacimiento. A continuación se presenta un ejemplo para obtener el valor del parámetro "a" para el cuarto orden de nacimiento del año de 1950.

VARIABLE INDEPENDIENTE (ORDEN DE NACIMIENTO)	VARIABLE DEPENDIENTE (VALOR DEL PARAMETRO "a")
x	y(x)
1	0.2598234
2	0.2766160
3	0.2895687

La ecuación de regresión resultante es: $y(x) = (0.245590733) + (0.01487265)x$

Por lo tanto para pronosticar el valor del parámetro "a" correspondiente al cuarto orden de nacimiento en 1950, se evalúa la ecuación de regresión para $x = 4$, es decir:

$$y(4) = (0.245590733) + (0.01487265) 4 = 0.305081$$

BIBLIOGRAFIA

1. Bocaz Albino, "El uso de la Ley de Makeham como Función Demográfica", Notas de Población, CELADE, año 11.
2. Dirección General de Estadística, Censos Generales de Población 1950, 1960 y 1970.
3. Mina V. Alejandro, "Ajuste de la Estructura de la Fecundidad por edades, mediante la Función de Gompertz linealizada", avances de investigación, 5-1980, el Colegio de México.
4. Roland Pressat, el análisis demográfico, Fondo de Cultura Económica, 1979.
5. Leguina Joaquín, Fundamentos de Demografía, siglo XXI, 1973.
6. Alba Francisco, La Población de México: Evolución y Dilemas, - Colegio de México, 1979.
7. Mina V. Alejandro, "Descripción del Riesgo de Casarse por primera vez (r_x) por medio de la Ley de Makeham", Avances de Investigación, 4-1980, El Colegio de México.

8. Mina V. Alejandro, "Ajustes de las Poblaciones Ocupadas de las Areas Metropolitanas de las Ciudades de México, Guadalajara, - Monterrey y 42 Municipios de 100,000 y más habitantes, empleando la Función de Makeham", Avances de Investigación, - 5-1980, El Colegio de México.

9. Secretaría de Programación y Presupuesto, la Población de México, su ocupación y sus niveles de bienestar, 1979.

10. Instituto Mexicano del Seguro Social (Jefatura de Servicios de Planificación Familiar), fecundidad y uso de métodos anticonceptivos en México, 1981.