Universidad Nacional Autónoma de México
FACULTAD DE CIENCIAS

EJERCICIOS DIRIGIDOS PARA ESTADISTICA I

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

ISABEL PATRICIA ANDREA CAFAGGI FELIX

MEXICO, D. F. 1982

I N D I C E

	Pág.
. Introducción	1
. Comentarios sobre reactivos de opción múltiple	4
. Objetivos del curso	7
. Programa	11
. Preguntas teóricas y prácticas en presentación de reactivos de opción múltiple	15
. Respuestas de los reactivos	60
. Relación de los reactivos con los contenidos del programa	92
. Apendíce	95
. Bibliografía	96

INTRODUCCION

Quienes alguna vez hemos sido profesores, sabemos de los múltiples problemas que se tienen al desarrollar un curso con un grupo heterogéneo de alumnos en lo referente a hábitos de estudio, aptitudes y actitudes hacia la materia.

Existen en un grupo, generalmente tres tipos de alumnos:

- Aquellos que son capaces de llevar un curso con éxito, independientemente del tipo de metodología que se use.
- Otros que están destinados desde el principio al fracaso por mínimo que sea el rigor del curso; siendo estos alumnos muchas veces incapaces de estudiar en textos convencionales como el libro de Mood o el de Hogg, en Estadística.
- Un tercer tipo de alumnos lo constituyen aquéllos que se van formando poco a poco, cayendo y levantando, llegando al final del curso habiendo alcanzado medianamente los objetivos del programa.

Para estos dos últimos grupos de alumnos está dirigida principalmente la presente tesis, que pretende ser un material de apoyo con tratamiento diferente a los textos comúnmente usados. La base del material se ha desarrollado a partir de los contenidos del programa de Estadística I en lo referente a Estadística Descriptiva e Inferencia Estadística.

El trabajo esta formado de dos partes, siendo la primera la presentación de teoría y ejercicios en forma de reactivos de de opción múltiple; se han formulado 111 reactivos, distribuidos de la siguiente manera:

Estadística Descriptiva	29 reactivos
Estimación Puntual	24 reactivos
Intervalos de Confianza	16 reactivos
Pruebas de Hipótesis	42 reactivos

Los reactivos de la parte de Estadística Descriptiva han sido diseñados tomando como referencia la teoría expuesta en la Comunicación Interna # 42 - 1978 de la Facultad de Ciencias.

Los reactivos prácticos referentes a Intervalos de Confianza y Pruebas de Hipótesis estan planteados según la secuencia que se siguió al resolver los problemas sugeridos sobre el tema en el libro de Hogg. La idea de los reactivos teóricos son producto de la lectura de los textos que aparecen en la bibliografía.

En la segunda parte del trabajo están las respuestas a los reactivos. La respuesta varía según el tipo de reactivo; por ejemplo: en los reactivos donde el alumno debe leer con cuidado para identificar conceptos o definiciones, aparece por respuesta el inciso correspondiente al valor de verdad de la pregunta, y va acompañado por la cita de donde fué tomada la idea de la pregunta.

En reactivos de mayor grado de dificultad, se encuentra el desarrollo de la resolución del problema y la cita correspondiente, en caso de que el problema haya sido tomado de una -

lista de problemas de un texto.

Otros reactivos son producto de mi experiencia como profesora de Estadística Descriptiva en el CCH Sur y como alumna de la Facultad de Ciencias y del IMASS.

Al final del trabajo aparece un índice en el que se establece la realación entre los contenidos del programa y el (o los) reactivo(s) correspondiente(s).

Finalmente, los alumnos que deban presentarse a extraordinario y que quieran utilizar este material como guía de estudio, les hago notar de que el trabajo efectivamente es una guía y que no agota particularidades teóricas y prácticas de los contenidos del programa, que por su extensión, enfoque de diversos autores y por la dificultad para plantear la pregunta y las opciones no es posible presentar en este trabajo.

COMENTARIOS SOBRE REACTIVOS DE OPCION MULTIPLE

En el Colegio de Ciencias y Humanidades la mayoría de los profesores tenemos cargas académicas grandes, estas son generalmente de 5 a 7 grupos, aunado a la elaboración y aplicación de exámenes extraordinarios tres veces al año. Estos compromisos de evaluación han dado motivo a la necesidad de que muchos de nuestros exámenes parciales, finales y extraordinarios tengan el formato de opción múltiple.

Las materias que se imparten son catorce, el número de reactivos en examen extraordinario varía de 24 a 40. El enorme volúmen en la formulación de estos, ha dado pie a formar un banco de reactivos por materia, siendo éste una importante fuente de información para profesores y alumnos. Una buena experiencia en la formación del banco fué la de habernos dado cuenta que de alguna menera se pueden hacer reactivos casi de cualquier tema.

Por ejemplo en temas difíciles como lo son el concepto de límite de una función y problemas sobre máximos y mínimos hemos podido formar reactivos con buena parte de ingenio, una muestra de ello son:

. Para demostrar que un $\lim_{x \to 0} - 5x + 1 = 1$ dada $\varepsilon = .005$ la δ correspondiente es:

a) - .001

b) .025

c) .001

d) .005

. El número de bacterias de una colonia está dada por la - función B (t) = $t^3 - 9t^2 + 15t$ donde el tiempo va estar dado en días. El mayor número de bacterias se tendrá:

a) al primer día y será de 15 bacterias

b) al primer día y será de 7 bacterias

c) al quinto día y será de 7 bacterias

d) al quinto día y será de 25 bacterias

La formación de este tipo de reactivos influyó en mí de tal manera que pensé en la posibilidad de formar reactivos de - teoría de un nivel superior al de bachillerato, esto es, de nivel licenciatura. Empecé por hacer intentos leyendo sobre los contenidos de un programa de Estadística de la Facultad de Ciencias. Los resultados se encuentran en esta tesis, para cada contenido programático he formulado reactivos teóricos y prácticos, así como también de aquellos conceptos que en mi época de estudiante de Actuaría no me quedaban claros.

Creo que la forma como he presentado este material permitirá ayudar a aquellos alumnos que por la falta de madurez al leer por primera vez los libros que aparecen en la bibliografía del programa, le impide comprender muchos conceptos fundamentales. También podrá ser útil, para aquellos que hayan dejado la carrera y que quieran presentar Estadística I en extraordinario.

Una consideración que quiero hacer al margen, es el hecho de que los libros de la serie Shaums han sido muchas veces criticados por su forma de presentar teoría y ejercicios, sin em bargo, la bondad de estos textos rádica en informar al usuario muchas veces sin dominar el tema. El material de apoyo - que propongo tiene la misma propiedad. Pienso que el formato del trabajo de esta tesis abrirá nuevos caminos en el diseño de textos, además de los convencionales, los programados y de aquéllos que tienen el formato de la serie Shaums.

OBJETIVOS DEL CURSO

En lo referente a la parte de Estadística Descriptiva e Inferencia Estadística, la siguiente lista de objetivos da - una idea de los conocimientos y habilidades que deberán tener los alumnos al terminar el curso de Estadística I.

Objetivos Generales

- El alumno comprenderá la diferencia entre Estadística Descriptiva e Inferencia Estadística.
- El alumno conocerá las principales áreas de la Inferencia Estadística.

Objetivos Intermedios

- El alumno manejará métodos de tratamientos de datos a través de gráficas y valores representativos de poblaciones.
- El alumno manejará la técnica de máxima verosimilitud como herramienta en la estimación de parámetros.
- El alumno manejará el método de los momentos como técnica alternativa en el cálculo de estimación de parámetros.
- El alumno usará el método de estimación por intervalos como otro tipo de mecanismo en la estimación de parámetros.
- El alumno manejará el teorema de Neyman - Pearson como - una de las principales herramientas de pruebas de hipótesis.

. El alumno probará hipótesis usando el criterio del cociente de verosimilitud.

Objetivos Particulares

. El alumno distinguirá en un conjunto de datos, el tipo de variable que se tiene para estudio.

. El alumno diferenciará los diferentes tipos de escala que se usan en estadística descriptiva.

. El alumno contruirá una tabla de frecuencias a partir de un conjunto de datos.

. El alumno calculará diferentes medidas de tendencia central (cuando existan) para diferentes conjuntos de datos.

. El alumno calculará la varianza y la desviación estandard para diferentes conjuntos de datos.

. Usando la definición de suficiencia, el alumno determinará si un estadístico es suficiente.

. Usando el teorema de Neyman - Pearson, el alumno determinará si un estadístico es suficiente.

. Mediante el teorema de factorización, el alumno determinará si un estadístico es suficiente.

. El alumno calculará el error cuadrático medio de un estimador.

. El alumno dará un ejemplo de un estimador cuya varianza sea mínima.

. El alumno usando las definiciones correspondientes, demostrará si un estimador posee propiedades de insesgamiento, consistencia y completez.

. El alumno calculará la cota inferior para la varianza de un estimador insesgado, mediante la desigualdad de Cramér-Rao.

. Usando la definición de suficiencia en términos de la desigualdad de Cramér - Rao, el alumno calculará la eficiencia de un estimador.

. El alumno dará un ejemplo de un estimador que sea completo.

. El alumno encontrará por el método de los momentos estimadores de parámetros de densidades Normales, Poisson, Bernoulli, Binomial.

. El alumno encontrará por máxima verosimilitud, estimadores de parámetros de densidades Normales, Poisson, Binomial, y de otro tipo.

. El alumno encontrará por lo menos para un caso, un estimador máximo verosímil que sea estimador de una función de un estadístico.

. El alumno dará un ejemplo de un intervalo aleatorio.

. El alumno calculará los extremos de un intervalo de confianza para parámetros de distribuciones normales.

. El alumno calculará probabilidades usando tablas T, F ó χ^2.

. El alumno explicará la diferencia entre estimación puntual y estimación por intervalos.

. El alumno dará un ejemplo de una hipótesis estadística.

. El alumno distinguirá entre una hipótesis simple y una compuesta.

. El alumno definirá para un caso, la hipótesis nula y la alternativa.

. El alumno encontrará la región crítica de una prueba.

. El alumno explicará los dos tipos de errores que se pueden cometer en una prueba de hipótesis.

. Usando el torema de Neyman - Pearson, el alumno probará hipótesis del tipo simple vs. simple.

. El alumno encontrará la función potencia de una prueba y construirá la gráfica para distintos valores del parámetro.

. El alumno encontrará pruebas uniformemente más potentes en algunos casos donde la prueba existe.

. El alumno probará hipótesis usando el cociente de verosimilitud en algunos casos de hipótesis simples vs. compuestas.

PROGRAMA

Estadística I

Temario

Parte 1. Conceptos Generales

I. Introducción

I.1 ¿Qué es la Probabilidad?. Interpretaciones

I.2 ¿Qué es la Estadística?

I.3 La Importancia de los Modelos

Examen

II. Estadística Descriptiva

II.1 Datos y Variables

II.2 Escalas

II.3 Registro de Variables. Tablas de Frecuencias

II.4 Histogramas y Polígonos de Frecuencias

II.5 Medidas de Tendencia Central

II.6 Medidas de Dispersión

Examen

Parte 2. Enfoque Clásico

III. Estimación Puntual

III.1 Suficiencia. Función de Verosimilitud

III.2 Invarianza

III.3 Error Cuadrático Medio

III.4 Varianza Mínima

III.5 Insesgamiento. Consistencia

III.6 Cota Inferior de Cramér-Rao. Eficiencia

III.7 Completez

III.8 Método de Momentos

III.9 Método de Máxima Verosimilitud

Examen

IV. Estimación de Intervalos

IV.1 Intervalos Aleatorios

IV.2 Intervalos de Confianza

Examen

V. Pruebas de Hipótesis

V.1 Hipótesis Estadísticas

V.2 Hipótesis Simples y Compuestas

V.3 Hipótesis Nula y Alternativa

V.4 Región Crítica

V.5 Error Tipo I y Tipo II

V.6 Teorema de Neyman-Pearson

V.7 Función Potencia

V.8 Pruebas Uniformemente Más Potentes

V.9 Lema de Neyman-Pearson

V.10 Razón de Verosimilitudes

Examen

Parte 3. El Enfoque Bayesiano

VI. Distribución Apriori

VII. Teorema de Bayes. Distribución Posteriori

VIII. Intervalos de Máxima Densidad

IX. Decisiones

IX.1 Función de Utilidad

IX.2 Estimación Puntual

IX.3 Pruebas de Hipótesis

Bibliografía.

Cap. I.

Savage, L., J. The Foundations of Statistics. Dover, 1976.

Gnedencko, B. V. Theory of Probability Chelsea, 1962.

De Groot, M. Probability and Statistics. Addison-Wesley, 1975.

Cap. II.

Valencia, G., Mendoza, M. y Aranda, F. Introducción a la Inferencia Estadística. Comunicaciones Internas No. 42, Ciencias, UNAM. 1978.

Cap. III, IV y V.

Valencia, G. et. al
op. cit.

Hogg, R. V. and Craig, A. T. Introduction To Mathematical Statistics. 3era. ed. Macmillan 1970.

Lindgren, B. W. Statistical Theory. 3era. ed. Macmillan 1976.

Cap. VI.

Schmitt. S. Measuring Uncertainty an elementary introduction to Bayesian Statistics. Addison-Wesley, 1969.

Winkler, R. Introduction to Bayesian Inference and Decision. Holt, Reinehart and Winston. 1972.

PREGUNTAS TEORICAS Y PRACTICAS EN PRESENTACION DE REACTIVOS DE OPCION MULTIPLE

1. La Estadística es:

   a) Una ciencia
   b) Una metodología que proporciona bases para la investigación
   c) Una metodología para interpretar datos y obtener conclusiones
   d) El desarrollo del método científico

2. La parte de la Estadística que se encarga de la organización y resumen de datos se le conoce como:

   a) Estadística Descriptiva
   b) Inferencia Estadística
   c) Estimación Puntual
   d) Resumen de muestras

3. La parte de la Estadística que tiene por objeto obtener conclusiones para una población a partir del estudio de una muestra es:

   a) La Estadística Deductiva
   b) La Inferencia Estadística
   c) La Estadística Descriptiva
   d) La Estadística Suficiente

4. En el departamento de control de calidad de un laboratorio farmacéutico se cuentan el número de pastillas de una cierta cantidad de frascos de aspirinas. ¿Cuál es la muestra?

   a) Los frascos distribuidos a farmacias
   b) Los frascos en existencia
   c) Los frascos recién llenados
   d) Los frascos revisados

5. La población hipotética en el problema anterior es:

   a) El conjunto de frascos que se continuarán haciendo bajo las mismas condiciones
   b) Los frascos para ser distribuidos a las farmacias
   c) Los frascos vendidos al consumidor
   d) Los frascos en existencia en el almacén del productor

6. Un análisis estadístico se apoya en:

   a) Pruebas de hipótesis
   b) Métodos de descripción y de inferencia
   c) Intervalos de confianza y estimación
   d) Métodos gráficos y parámetros

7. El muestreo aleatorio tiene la propiedad de que al seleccionar los elementos de una muestra estos deben ser:

   a) Homogéneos y dependientes unos con otros
   b) Independientes y homogéneos
   c) Dependientes y seleccionados aleatoriamente
   d) Independientes y tener la misma probabilidad de ser seleccionados

8. Los modelos usados en Estadística son del tipo de los:

a) Analógicos
b) Icónicos
c) Simbólicos
d) Determinísticos

9. Un dato estadístico es:

a) Un número cualquiera
b) Un elemento extraído de una población particular
c) Aquél obtenido de la administración, computación...etc.
d) Un registro que se obtiene del proceso de un fenómeno

10. Los datos de tipo categórico son los que tienen la propiedad de:

a) Ser cuantitativos
b) Resultar de la observación de caractéristicas como: ocupación, sexo, etc.
c) Resultar de la observación de conteos del tipo número de niños por familia o número de errores de un proceso
d) Ser cualitativos

11. Una variable, definida en sentido estadístico es:

a) Un dato que puede ser númerico o categórico
b) Un valor que da información acerca de las propiedades de una población
c) Una característica que varía de un miembro a otro en la población
d) Una variable aleatoria

12. Las variables númericas de tipo discreto son aquéllas que:

a) Tienen por dominio un conjunto a lo más numerable de distintos posibles valores.
b) Tienen por dominio al menos, un intervalo de números reales.
c) Pueden asumir valores que inducen una partición en la población.
d) Son aleatorias a saltos

13. La medida del tiempo que tarda un atleta en recorrer 100 m. es una variable:

a) Categórica y discreta
b) Numérica y contínua
c) Categórica y contínua
d) Numérica y discreta

14. Las escalas en Estadística son:

a) Para localizar datos en el plano
b) Para graficar histogramas
c) Otro tipo de clasificación de variables
d) Cambios que se toman en el eje de las absisas

15. La escala de medición que se utilizaría en la asignación de evaluaciones en un grupo de estadística en la facultad de Ciencias es de tipo:

a) Nominal
b) Ordinal

c) De intervalo

d) De proporciones

16. Las temperaturas tomadas a los pacientes en un hospital están tomadas en escala:

a) Nominal

b) Ordinal

c) De intervalo

d) De proporciones

17. El rango del conjunto de observaciones formado por {9,1,5,6,6,2,6,3,6} es:

a) 9

b) 4

c) 6

d) 8

18. La tabla de frecuencia para los datos anteriores considerando intervalos de clase de tamaño 2 es:

frec: frecuencia simple

F: frecuencia acumulada

a)

Clase	frec.	F
1 - 2	2	2
3 - 4	1	3
5 - 6	5	8
7 - 8	0	8
9 - 10	1	9

b)

Clase	frec.	F
1 - 3	3	3
4 - 6	5	8
7 - 9	1	9

	Clase	frec.	F
c)	0 - 2	2	2
	3 - 5	2	4
	6 - 9	4	8
	9 - 12	1	1

	Clase	frec.	F
d)	1 - 2	2	2
	3 - 4	1	3
	5 - 6	5	8
	7 - 8	0	8
	9	1	9

19. Los límites reales de clase de la opción b de la pregunta 18, suponiendo que la toma de los datos hayan provenido de una población cuya variable a medir sea de tipo contínuo son:

a) .6 - 3.5
3.6 - 6.5
6.6 - 10.5

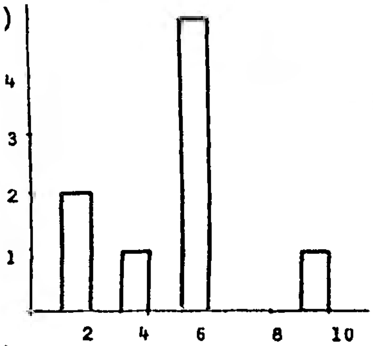
b) .5 - 3.5
3.5 - 6.5
6.5 - 9.5

c) .9 - 3.5
3.59 - 6.5
6.59 - 10.5

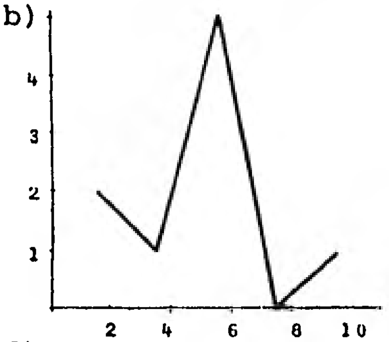
d) .5 - 3.55
3.56 - 6.55
6.56 - 10.5

20. El histograma correspondiente a la tabla de frecuencias del inciso a de la pregunta 18 es:

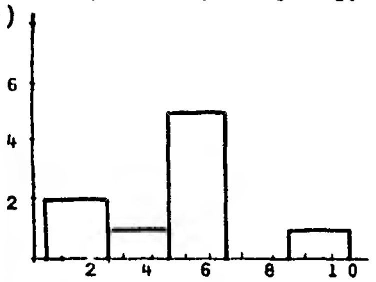
a)



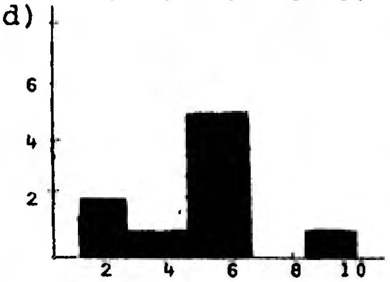
b)



c)



d)



21. En el caso de una variable contínua, el gráfico que presenta la información de manera más adecuada es el:

a) Polígono de frecuencias

b) Histograma

c) Gráfico de barras

d) Gráfico circular

22. La ley que expone"La distribución de frecuencias de la muestra tiende a reconstruir la distribución de frecuencias de la población"está dada en:

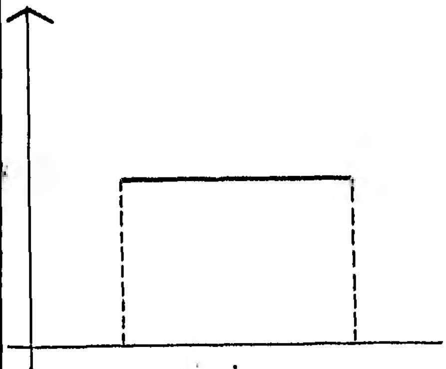
a) El teorema central del límite

b) La ley de los grandes números

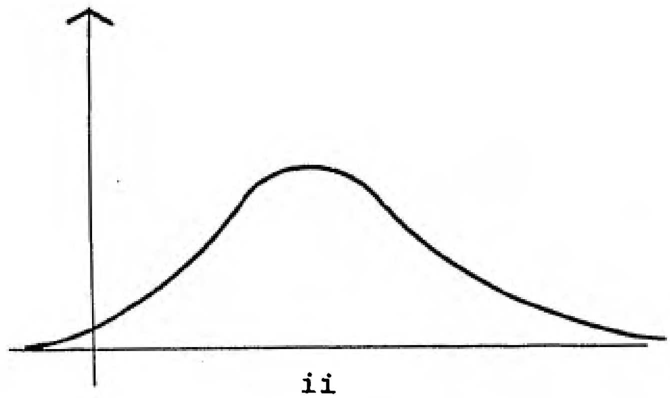
c) La desigualdad de Tchebycheff

d) La probabilidad frecuencial o a posteriori

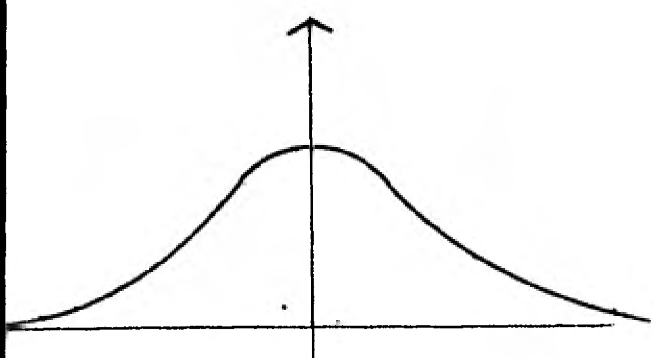
23. De las siguientes figuras indica cuál de las opciones señala la distribución con su verdadero nombre.



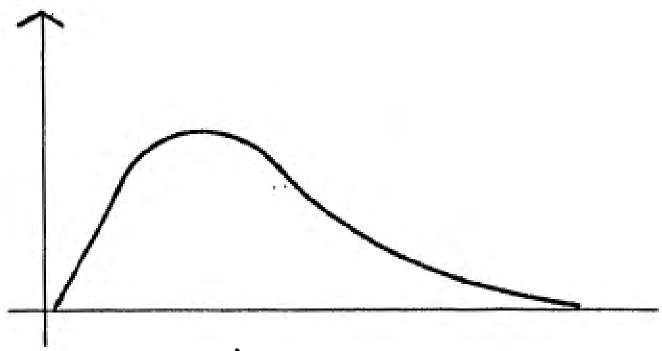
i



ii



iii



iv

a) i Uniforme ii Ji-Cuadrada iii T
iv Normal

b) i Uniforme ii Normal iii T
iv Ji-Cuadrada

c) i Normal ii Uniforme iii Ji-Cuadrada
iv T

d) i Uniforme ii T iii Ji-Cuadrada
iv Normal

24. Los parámetros que pueden proporcionar la descripción de una distribución de frecuencias son:

a) Media, mediana y moda

b) Desviación standard y varianza

c) Media y desviación media

d) Media y varianza

25. Los salarios de cuatro personas son { \$ 5000, \$ 5500, \$ 6700, \$ 9500} la medida más representativa de esta muestra es:

a) La media

b) La mediana

c) La moda

d) La varianza

26. Los datos siguientes corresponden a los pesos en Kg. de 9 maestras del área de matemáticas del C.C.H. Sur {65, 47, 47, 48, 63, 56, 46, 56, 55} Las medidas de centralización asociadas a este conjunto son:

a) Media = 53.67 Kg. Mediana = 55 Kg. Moda = 56 Kg.

b) Media = 55 Kg. Mediana = 53 Kg. Moda = 56 Kg.

c) Media = 53.67 Kg. Mediana = 55 Kg. Moda ={47,56} Kg.

d) Media = 55 Kg. Mediana = 54 Kg. Moda = 47 Kg.

27. Usando la fórmula para calcular la media para datos agrupados en la opción a de la pregunta 18, dicho valor es:

a) 3.89

b) 4.5

c) 4.83

d) 5.5

28. Cuando la forma de la distribución de las observaciones es asimétrica, la medida más representativa de los datos es la:

a) Media
b) Mediana
c) Desviación Media
d) Varianza

29. Por sus propiedades distribucionales y su referencia a una medida de centralidad, de las siguientes expresiones indica cuál es la medida de dispersión más usada.

a) $d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|$

b) $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{n}}$

c) $S' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}$

d) $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$

30. El problema de estimación puntual radica en:

a) Ajustar polinomios a un conjunto de datos.
b) Estimar rangos en los cuales posiblemente están comprendidos valores de parámetros.
c) Estimar por máxima verosimilitud los parámetros de una distribución.
d) Determinar en base a una muestra los posibles valores de los parámetros de una distribución.

31. Sea $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ una muestra aleatoria de una población con densidad $f(x;\mu)$. De las siguientes expresiones indica cuál no puede ser un estimador del parámetro μ.

a) $\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)}{n}$

b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n}$

c) $\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|$

d) $\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}$

32. Sea $\hat{\theta}$ un estadístico, $\hat{\theta}$ será suficiente para $\hat{\theta}$ si:

a) $E(\hat{\theta}) = \theta$

b) Al menos $\hat{\theta}$ contiene a la mayoría de los elementos de la muestra.

c) $\hat{\theta} = \bar{x}$ Para estimar μ en el caso de una variable cuya distribución sea normal.

d) Condensa toda la información de la muestra.

33. Sea X una variable con distribución Poisson $f(x;\lambda)$ y $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ una muestra aleatoria. De las siguientes opciones indica cuál es un estadístico suficiente para λ

a) $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$

b) $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = |x_n - x_1|$

c) $m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

d) $k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2$

34. El resultado más usado por su facilidad para determinar la suficiencia de un estadístico es:

a) La definición de suficiencia

b) El teorema de Fisher-Neyman

c) El teorema de factorización de Neyman

d) La definición de suficiencia en el caso multiparamétrico

35. Usando el teorema de factorización para determinar un estadístico suficiente para el parámetro de una población cuya distribución es $f(x;p) = p^x q^{1-x}$, la distribución conjunta de la muestra $f(\underline{x}_n; p) = p^{\Sigma x_i} q^{n - \Sigma x_i}$ necesita ser expresada como el producto de dos factores, donde uno de ellos no depende de la muestra; en este caso el factor es:

a) 1

b) q

c) $\binom{n}{\Sigma x_i}$

d) q^n

36. En la pregunta anterior el factor $g(t(\underline{x}_n) ; p)$ que depen_ de de la muestra es:

a) $\binom{n}{\Sigma x_i} p^{\Sigma x_i} q^{n - \Sigma x_i}$

b) $p^{\Sigma x_i} q^{- \Sigma x_i}$

c) Σx_i

d) $p^{\Sigma x_i} q^{n - \Sigma x_i}$

37. Indica cuál de las siguientes proposiciones es falsa:

a) Es recomendable usar como estimadores de parámetros a funciones de estadísticos suficientes.

b) Todo estadístico función de un estadístico suficiente será también suficiente.

c) Si la densidad de un estadístico suficientes es completa, entonces sólo existe un estimador insesgado función del estadístico suficiente con varianza mínima.

d) El teorema de factorización también es usado para funciones de densidad de más de un parámetro.

38. ¿Cuál de los siguientes estimadores no es insesgado?

a) $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\Sigma\,(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$ Como estimador de σ^2 en el caso de la distribución normal.

b) $\hat{\mu} = \bar{x}$ Como estimador de μ en el caso de la distribución normal.

c) $\hat{p} = \Sigma\, x_i$ En el caso de la distribución binominal.

d) $\hat{\lambda} = \bar{x}$ En el caso de la distribución Poisson.

39. La desigualdad de Rao-Cramér es útil para:

a) Determinar una cota mínima para la varianza de un estimador insesgado.

b) Establecer una cota mínima para la varianza de cualquier estimador.

c) Establecer un método de comparación entre estimadores insesgados.

d) Determinar la esperanza de una función logarítmica .

40. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria de una distribución Poisson cuya media es $\theta>0$. Si $\bar{x}$ es un estimador de θ. La cota mínima para la varianza de este estimador es:

a) $\frac{\theta}{n}$

b) $\frac{1}{\theta}$

c) $\sigma^2_{\bar{x}}$

d) $\frac{\sigma^2}{n}$

41. Para el parámetro de una distribución, un estimador de tal, insesgado de varianza mínima:

a) Siempre es posible encontrarlo y es el óptimo.

b) No siempre es posible encontrarlo, ni hay un criterio que nos indique si existe o no.

c) Se determina usando la desiguladad de Cramér-Rao.

d) Es más aconsejable que un estimador de error cuadrático medio mínimo.

42. La propiedad de insesgado de varianza mínima de un estimador es óptimo para:

a) Cualquier tamaño de muestra

b) Muestras grandes

c) Cuando el tamaño de muestra tiende a infinito

d) Muestras de datos confiables

43. Un estimador $\hat{\theta}$ insesgado es de mínima varianza si:

a) Tiene menor varianza que cualquier otro estimador insesgado de θ.

b) Si tiene la menor varianza entre un grupo de estimadores de θ.

c) Dados $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_n$ estimadores de θ, la Var $(\hat{\theta}_j) > \text{Var}(\hat{\theta})$ con $j=1,\ldots,n$

d) $\{\theta - E(\hat{\theta})\}^2 = 0$

44. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria de $N(\mu,1)$; $\bar{x}$ es un estadístico suficiente para μ y su función de densidad es completa. El estimador insesgado de varianza mínima de $\mu^2 - 5\mu$ es:

a) $\bar{x}^2 - 5\bar{x}$

b) $\hat{\mu}^2 - 5\hat{\mu}$

c) $\bar{x}^2 - 5\bar{x} - \frac{1}{n}$

d) $(\Sigma x_i)^2 - 5(\Sigma x_i)$

45. Sea $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_n$ una sucesión de estimadores de θ. Esta sucesión es un estimador consistente de $\hat{\theta}$ si:

a) Para valores grandes de n se cumple que $\hat{\theta}_n$ tiende aproximarse a θ.

b) $\hat{\theta}_n = d(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es mejor estimador que $\hat{\theta}_i = d(x_1, x_2, \ldots, x_i)$ $\forall\ i < n$

c) Cada elemento de la sucesión $\{\hat{\theta}_n\}$ lo es.

d) Tiene al menos la consistencia en error cuadrático.

46. En base al teorema: "Cualquier estimador insesgado Y para un parámetro θ es un estimador consistente para θ, si la varianza de Y (σ_Y^2) tiende a cero cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito". Indica, dadas las varianzas de cuatro estimadores insesgados cuál de ellas es la varianza de un estimador no consistente.

a) $\sigma_\alpha^2 = \frac{25}{n}\sigma^2$

b) $\sigma_z^2 = \frac{\sigma^2}{2}$

c) $\sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

d $\sigma_\omega^2 = \frac{\sigma^2}{n^2}$

47. El método de estimación de parámetros que toma como estimador de un parámetro dada una muestra, al valor que maximiza la probabilidad de obtener una muestra como la que se ha obtenido y en la cuál se basa la estimación, es:

a) El método de mínimos cuadrados

b) El método de Bayes

c) El método de los momentos

d) El método de máxima verosimilitud

48. Usando el método de los momentos, el estimador de σ^2 de una v.a. x con distribución $N(x;\mu,\sigma^2)$ es:

a) $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{n}\right)^2$

b) $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{n-1}\right)^2$

c) $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n}{n-1} \bar{x}^2$

d) $\frac{n}{n-1} \bar{x}^2 - n\bar{x}$

49. La función de verosimilitud de n variables aleatorias $x_1, x_2, \ldots, x_n$ definida por $f(x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$ nos da:

a) Una función útil para calcular estimadores.

b) La probabilidad de que las variables aleatorias $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tomen en especial estos valores.

c) Un producto de densidades.

d) Una función del parámetro desconocido θ.

50. El estimador máximo verosímil de un parámetro θ es:

a) El que se obtiene al derivar e igualar a cero el logaritmo de la función de versimilitud.

b) Aquél que es consistente, eficiente, función de un estadístico suficiente e insesgado.

c) El valor de θ en Ω que hace máxima $L(\theta) = f(x_n;\theta)$.

d) El tipo de estimador más usado en estadística aplicada.

51. La propiedad de invarianza de los estimadores máximo verosímiles consiste en que:

a) Cualquier función de θ, $(h(\theta))$, puede ser estimada por $h(\hat{\theta})$ siendo $\hat{\theta}$ el estimador máximo verosímil de θ.

b) Son invariantes bajo traslaciones.

c) Algunas funciones de θ pueden ser estimadas mediante funciones del estimador máximo verosímil de θ.

d) Se maxímiza $L(h(\theta))$.

52. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra de una distribución cuya función de densidad es $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}$ $0<x<1$, $0<\theta<\infty$ el estimador máximo verosímil de θ es:

a) $\bar{x}$

b) El estadístico de primer orden

c) $-n/\log(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)$

d) $\dfrac{-n}{\Sigma \log x_i}$

53. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria de una distribución cuya función de densidad es: $f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}$ $\theta \leq x < \infty$ $-\infty < \theta < \infty$ el estimador máximo verosímil de θ es:

a) $\bar{x}$

b) El estadístico de primer orden

c) El estadístico de mayor orden

d) $\dfrac{1}{\bar{x}}$

54. La estimación de parámetros por intervalos tiene por objeto:

a) Establecer criterios para comparar dos o más estimadores del mismo parámetro.
b) Proponer cierto número de estimadores para un parámetro tales que esten contenidos en un intervalo.
c) Determinar la probabilidad de que un estimador este cerca del verdadero valor del parámetro.
d) Dar una idea de cuál es el valor del parámetro y al mismo tiempo una medida de la exactitud de la estimación del parámetro.

55. De las siguientes proposiciones indica cuál de ellas es verdadera.

a) El parámetro de una distribución es un valor aleatorio dentro de un intervalo de confianza con extremos fijos.
b) Los intervalos de confianza se construyen para tener una idea del valor aproximado de la media muestral.
c) El parámetro de una distribución es un valor fijo que no se conoce, un intervalo de confianza para el parámetro tiene extremos aleatorios.
d) Dependiendo del valor del parámetro será la longitud del intervalo de confianza.

56. Las siguientes proposiciones se refieren a la expresión $P(-2.09<\mu<2.84) = .90$, indica cuál de ellas es falsa:

a) La probabilidad de que μ esté comprendida entre -2.09 y 2.84 es del 90% .

b) La medida de confianza del intervalo es del 90% .

c) Antes de extraer una muestra, la probabilidad de que el intervalo que intentamos construir contenga al verdadero valor de μ es del 90%.

d) Dado el alto nivel de confianza, el valor del parámetro está contenido en el intervalo .

57. Si x es una variable aleatoria con función de densidad $f(x) = e^{-x}$ con dominio $0 < x < \infty$. La probabilidad de que el intervalo aleatorio $(x,3x)$ incluya al punto $x = 3$ deberá ser determinada por medio de la función:

a) e^{-x}

b) $-e^{-x}$

c) $N(3x) - N(x)$

d) $-e^{-x} + C$

58. Para evaluar la probabilidad señalada en el problema anterior transformaremos la $Pr(3\varepsilon(x,3x))$ en:

a) $Pr(x>3$ ó $x<1)$

b) $Pr(x<3<3x)$

c) $Pr(1<x<3)$

d) $Pr(x<3$ ó $x>1)$

59. El valor de la longitud del intervalo aleatorio del problema 57 está dado por la expresión:

a) $2\left(-xe^{-x}-e^{-x}\Big|_0^\infty\right)$

b) $E(2x) = 2E(x)$

c) $2\left(xe^{-x}-e^{-x}\Big|_0^\infty\right)$

d) $E(3x - x)$

60. Sea x una variable aleatoria continua con densidad $N(\mu,\sigma^2)$ y sea $\bar{x} = \Sigma \frac{x_i}{n}$; un intervalo de confianza para μ con σ^2 conocida está dado por $\bar{x} - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}$ este intervalo es aleatorio ya que:

a) $\bar{x}$ es una v. a. por lo que para cada valor de $\bar{x}$ se tendrá un intervalo en general diferente.

b) μ Es una variable aleatoria.

c) Los factores $\frac{-a\sigma}{\sqrt{n}}$ y $\frac{a\sigma}{\sqrt{n}}$ hacen que varíen los extremos del intervalo.

d) Para un nivel de confianza α , a variará según α.

61. La longitud de un intervalo con un nivel de confianza del 99% respecto a uno de 95% es:

a) Mayor que el de 95%

b) Igual que el de 95%

c) Menor que el de 95%

d) Mayor o igual que el de 95%

62. Un intervalo de confianza para μ con un nivel $\alpha = .9$ dada una muestra de tamaño n de una variable que se distribuye $N(\mu, \sigma^2)$ siendo σ^2 desconocida es:

a) $\bar{x} - \frac{\chi^2_{.05}(n-1)S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{\chi^2_{.95}(n-1)S}{\sqrt{n}}$

b) $\bar{x} - \frac{F_{.05}(n-1)S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{F_{.05}(n-1)S}{\sqrt{n}}$

c) $\bar{x} - \frac{T_{.05}(n-1)S}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{x} + \frac{T_{.05}(n-1)S}{\sqrt{n-1}}$

d) $\bar{x} - \frac{N_{.05}S}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{x} + \frac{N_{.05}S}{\sqrt{n-1}}$

63. Un intervalo de confianza con un nivel del 90% para σ^2 cuando μ es desconocida si $x_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ está dado por:

a) $P\left(\frac{nS^2}{\chi^2_{.05}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{\chi^2_{.95}(n-1)}\right) = .90$

b) $P\left(\frac{n\sigma^2}{\chi^2_{.05}(n-1)} < S^2 < \frac{n\sigma^2}{\chi^2_{.95}(n-1)}\right) = .90$

c) $P\left(\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n\chi^2_{.05}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n\chi^2_{.95}(n-1)}\right) = .90$

d) $P\left(\frac{\Sigma(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{.05}(n)} < \sigma^2 < \frac{\Sigma(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{.95}(n)}\right) = .90$

64. Las variables $U = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2}$; $Y = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma^2}$;

$Z = \frac{(\bar{x} - \mu)\ \sqrt{n-1}}{S}$ se distribuyen según:

a) $U \sim \chi^2(n)$; $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$; $Z \sim F(n-1)$

b) $U \sim \chi^2(n-1)$; $Y \sim N(0,1)$; $Z \sim T(n-1)$

c) $U \sim \chi^2(n-1)$; $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$; $Z \sim F(n-1)$

d) $U \sim \chi^2(n)$; $Y \sim N(0,1)$; $Z \sim T(n)$

65. Sea una muestra aleatoria de tamaño 26 de una distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$ siendo $\bar{x} = 4.7$ y $S^2 = 6.25$. Los extremos de un intervalo de confianza para μ con un nivel de 90% son:

a) (3.862 , 5.537)

b) (3.877 , 5.5225)

c) (3.8935 , 5.5065)

d) (3.846 , 5.554)

66. Dada una muestra aleatoria de tamaño 10 de una distribución que es $N(\mu, \sigma^2)$ y cuya varianza muestral es S^2, para calcular la probabilidad de que σ^2 este incluida en el intervalo aleatorio $\left(\frac{S^2}{1.69}, \frac{S^2}{.333}\right)$ si sabemos que $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$; necesitamos transformar el intervalo anterior a:

a) $\frac{1}{1.69} < \frac{\sigma^2}{S^2} < \frac{1}{.333}$

b) $3.3 < \frac{10S^2}{\sigma^2} < 16.9$

c) $\frac{S^2}{1.69} < \sigma^2 < \frac{S^2}{.333}$

d) $\frac{10}{1.69} < \frac{10\sigma^2}{S^2} < \frac{10}{.333}$

67. La probabilidad mencionada en el problema anterior es:

a) .90

b) .925

c) .95

d) .975

68. El valor esperado de la longitud del intervalo aleatorio mencionado en el problema 66 es:

a) $E\left(S^2 \left(\frac{1}{.333} - \frac{1}{1.69} \right) \right)$

b) $2.41\ S^2$

c) $2.41\ \sigma^2$

d) $2.17\ S^2$

69. Si {8.6, 7.9, 8.3, 6.4, 8.4, 9.8, 7.2, 7.8, 7.5} son los valores de una muestra cuya distribución es $N(\mu, \sigma^2)$, los extremos de un intervalo de confianza para σ^2 con un nivel de significancia del 90% son:

a) (.5566 , 3.16)

b) (.4207 , 2.13)

c) (.458 , 2.6)

d) (.5104 , 2.59)

70. Una hipótesis estadística es:

a) Una suposición acerca de la distribución de una o más variables aleatorias.

b) Un planteamiento que se hace en la implementación del método científico.

c) Una aseveración basada en la observación de un fenómeno.

d) El motivo de estudio de la parte de la Estadística llamada Pruebas de Hipótesis.

71. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una v. a. de una población cuya distribución es $N(\mu, \sigma^2)$, se desea probar que $H_0: \mu \neq \mu_0$ contra $H_a: \mu = \mu_0$; el tipo de hipótesis de la hipótesis nula y la alternativa son respectivamente:

a) Simple y Simple

b) Simple y Compuesta

c) Compuesta y Simple

d) Compuesta y Compuesta

Indica con falso (F) o verdadero (V) en cada una de las siguientes proposiciones:

72. La prueba de una hipótesis estadística es un criterio para el rechazo o no rechazo de la hipótesis bajo consideración.

____

73. De acuerdo a una prueba prescrita, la región crítica de una prueba, es el subconjunto del espacio muestral para el cual no se rechaza la hipóteis nula.

____

74. La función Potencia de la prueba de una hipótesis estadística es una función que nos da la probabilidad de rechazar la hipótesis bajo consideración.

____

75. El nivel de significancia de una prueba de hipótesis estadística, es el máximo valor de la función Potencia cuando H_0 es cierta.

____

76. La aceptación de H_0 cuando H_0 es falsa, es el llamado error de tipo I.

____

77. La elección de una región crítica define una prueba.

____

78. Toda prueba, especifica una región crítica.

____

79. Cuando en la prueba estadística de una hipótesis se establece que el nivel de significancia α de la prueba es de .01, esto quiere decir que:

a) La probabilidad de rechazar erróneamente la hipótesis alternativa es de .01 .

b) La probabilidad de no rechazar H_0 cuando H_0 es cierta es de .01 .

c) La probabilidad de no rechazar H_a cuando H_a es cierta es de .01 .

d) La probabilidad de rechazar erróneamente la hipótesis nula es de .01.

80. Si una región crítica esta dada por $C = \{(x_1, x_2) / x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ la prueba determinada siendo x_1 y x_2 los valores observados será:

a) Aceptar H_0 si $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1$

b) Aceptar H_0 si $x_1^2 + x_2^2 > 1$

c) Aceptar H_0 si $x_1^2 + x_2^2 \geqslant 1$

d) Aceptar H_0 si $x_1^2 + x_2^2 = 1$

81. Si tomamos como criterio rechazar una hipótesis, cuando $\bar{x}$ (de la muestra) > que el máximo valor de la media de la distribución cuando H_0 es cierta y deseamos probar que la media de una distribución es $H_0 : \mu \leqslant 7$ vs. $H_a : \mu > 7$ con una muestra de tamaño 5, la región de rechazo para la hipótesis nula será:

a) $C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_5) \ / \ \Sigma x_i < 35\}$

b) $C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_5) \ / \ \bar{x} > 7\}$

c) $C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_5) \ / \ \Sigma x_i \leqslant 35\}$

d) $C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_5) \ / \ \bar{x} \geqslant 7\}$

82. Una de la siguientes proposiciones es falsa, indica cuál es:

a) La reducción del error estandard de la prueba $(\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ puede reducirse incrementando el tamaño de la muestra y manteniendo constantes las condiciones del problema.

b) Dada la probabilidad de cometer un error, se puede determinar el otro despejando de la ecuación $\alpha + \beta = 1$.

c) Un aumento en el tamaño de la muestra, tiende a disminuir la probabilidad de cometer ambos errores.

d) Las reglas que minimizan uno de los errores tienden a incrementar la probabilidad de cometer el otro.

83. Una de las siguientes proposiciones es falsa, indica cuál es:

a) Maximizar la potencia de una prueba, equivale a minimizar la probabilidad de error de tipo II para un α fijo.

b) La potencia de una prueba puede ser incrementada aumentando α o reduciendo el error estandard de la prueba.

c) Una potencia alta en una prueba, implica casi la detección cuando H_a es cierta.

d) Aquélla prueba para la que dado α nos da la probabilidad de error de tipo II más pequeño, es la poderosamente más potente.

84. Se sabe que una variable se $\sim N(\mu, \sigma = 20)$. Se desea probar con una muestra de tamaño 100 las hipótesis $H_0 : \mu = 138$ vs. $H_a : \mu = 142$, si se toma como regla de decisión rechazar H_0 si $\bar{x} = \Sigma \frac{x_i}{n} > 140$ y aceptar H_0 si $\bar{x} \leqslant 140$; la probabilidad de error de tipo I,

α = Pr(error tipo I) = Pr(rechazar H_0 / H_0 es verdadera)

$\alpha = Pr(\bar{x} > 140 / \mu = 138)$ es:

a) .159

b) .067

c) .841

d) .308

85. Un agente de ventas afirma que la probabilidad de que un paciente sane con una droga x es del 90%, otros afirman que solamente es del 70%, si denotamos por $H_0 : p = .9$ vs. $H_a : p = .7$ y adoptamos por regla de decisión rechazar H_0 si el número de pacientes curados de un total de 10 es menor que 8; la probabilidad de error de tipo II $= \beta =$ Pr(aceptar H_0 / H_0 es falsa) es:

a) $1 - \sum_{8}^{10} \frac{10!}{(10 - K)!\ K!} (0.9)^K (0.1)^{10 - K}$

b) $\sum_{8}^{10} \frac{10!}{(10 - K)!\ K!} (0.9)^K (0.1)^{10 - K}$

c) $\sum_{8}^{10} \frac{10!}{(10 - K)!\ K!} (0.7)^K (0.3)^{10 - K}$

d) $1 - \sum_{8}^{10} \frac{10!}{(10 - K)!\ K!} (0.7)^K (0.3)^{10 - K}$

86. El valor del teorema de Neyman-Pearson es el de ser una herramienta para:

a) Obtener la mejor región crítica en una prueba de hipótesis compuesta contra simple.

b) Obtener la mejor región crítica en una prueba de hipótesis compuesta contra compuesta.

c) Obtener la mejor región crítica en una prueba de hipótesis simple contra simple.

d) Obtener la mejor región crítica en una prueba de hipótesis simple contra simple y en algunos casos de simples contra compuestas.

87. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ una muestra aleatoria de una distribución cuya densidad es:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}} \quad \text{con} \quad -\infty < x < \infty$$

se desea probar la hipótes $H_0: \theta = \theta' = 0$ vs. $H_a: \theta = \theta'' = 1$ según el método sistemático generalmente usado en este tipo de prueba; el estadístico usado como base de la - prueba es:

a) $e^{-\sum_{1}^{10} x_i} + 5$

b) $\frac{\sum_{1}^{10} x_i^2}{10}$

c) $\frac{\sum_{1}^{10}(x_i - \bar{x})^2}{10}$

d) $\frac{\sum_{1}^{10} x_i}{10}$

88. Sean $H_0: \theta = \theta' = 0$ vs. $H_1: \theta = \theta'' = -1$ las hipótesis a probar, con una muestra de tamaño 25 de una distribución $N(\theta, 1)$. Para encontrar la región crítica de tamaño $\alpha = .05$, tenemos que buscar C tal que $\alpha = Pr(\bar{x} \leq C / \theta = 0)$. Tal constante puede obtenerse de despejar la ecuación:

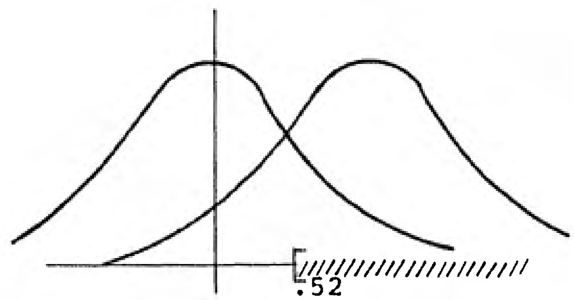
a) $.05 = N(\sqrt{25}\,(C - 0))$

b) $.05 = N\left(\frac{C - 0}{\sqrt{25}}\right)$

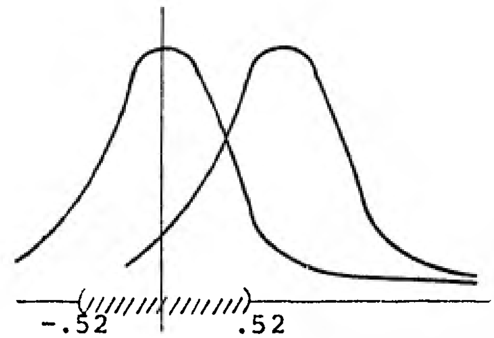
c) $-1.645 = N(5(C - 0))$

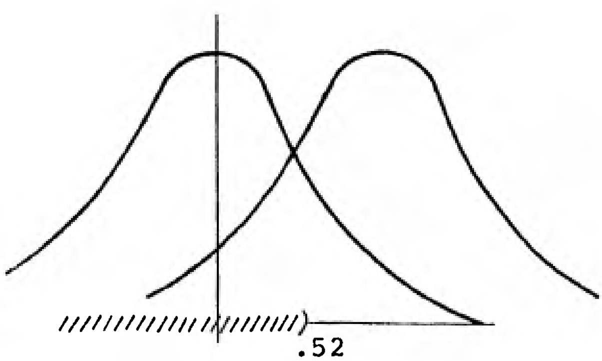
d) $-1.645 = N\left(\frac{C - 0}{5}\right)$

89. La región de aceptación de la hipótesis nula en el problema 87 es:

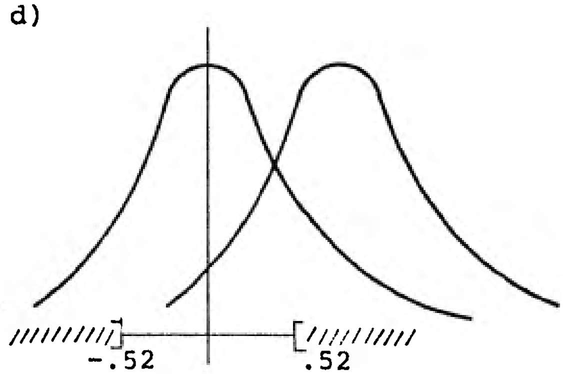


b)





d)



90. Sea $x_1,x_2,\ldots,x_n$ una v. a. con distribución $N(\theta,\ 100)$, si $C = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\ /\ C \leq \bar{x}\}$ es la mejor región crítica para probar $H_0: \theta = 75$ vs. $H_1: \theta = 78$ y se desea encontrar n y C tal que $Pr(\bar{x} \geq C\ ;\ H_0) = .05$ y $Pr(\bar{x} \geq C\ ;\ H_1) = .90$, tales valores serán determinados a partir de uno de los siguientes sistemas:

a) $- 1.282 = \frac{\sqrt{n}}{100} (C - 78)$

$1.645 = \frac{\sqrt{n}}{100} (C - 75)$

b) $- 1.282 = \frac{\sqrt{n}}{10} (C - 78)$

$1.645 = \frac{\sqrt{n}}{10} (C - 75)$

c) $1.282 = \frac{\sqrt{n}}{10} (C - 78)$

$1.645 = \frac{\sqrt{n}}{10} (C - 75)$

d) $1.282 = \frac{\sqrt{n}}{100} (C - 78)$

$1.645 = \frac{\sqrt{n}}{100} (C - 75)$

91. La probabilidad de rechazar H_0 cuando es falsa en el problema número 88 es el valor de la potencia de la prueba cuando·

$\theta = \theta'' = - 1$ esto es

$$Pr = (\bar{x} \geq -.329 \,/\, \theta = -1) = \int_{-\infty}^{-.329} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{25}}} e^{-\frac{(\bar{x} + 1)^2}{2.\frac{1}{\sqrt{25}}}} dx$$

puesto que $\bar{x} \sim N(-1, \frac{1}{25})$, hay que estandarizar la constante $-.329$ para poder evaluar $\int_{-\infty}^{?} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw$ que es equivalente a la integral anterior. Así pues $-.329$ en una $N(-1, \frac{1}{25})$ equivale en una $N(0,1)$ a:

a) .1342

b) -.1342

c) -3.35

d) 3.35

92. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ una muestra aleatoria de tamaño 10 de una distribución normal $n(0, \sigma^2)$. Para encontrar la mejor región crítica de tamaño α al probar $H_0: \sigma^2 = 1$ vs. $H_1: \sigma^2 = 2$, al estadístico base de la prueba es:

a) $\dfrac{\sum_{1}^{10} x_i}{10}$

b) $\dfrac{\sum_{1}^{10} x_i^2}{10}$

c) $\sum_{1}^{10} x_i^2$

d) $\dfrac{\sum_{1}^{10} x_i^2}{\sqrt{2}}$

93. La distribución del estadístico usado para la prueba del problema anterior es una:

a) $\chi^2\,(10)$

b) $N(0, \frac{1}{10})$

c) $T_{(10)}$

d) $\chi^2(9)$

94. Una de las siguientes proposiciones es falsa, indica cuál es:

a) Hay muchos problemas de pruebas de Hipótesis, para los cuales no existe una prueba Uniformemente más potente (UMP).

b) Una región crítica C uniformemente más potente de tamaño α para probar una hipótesis simple H_0 vs. una hipótesis compuesta H_1, es aquélla mejor región crítica de tamaño α para probar H_0 contra cada alternativa simple en H_1.

c) En el caso de que se desee una prueba uniformemente más potente y haya un estadístico suficiente $\underline{Y}$ para el parámetro desconocido, no se necesitan estadísticos que no sean aquellos basados en $\underline{Y}$.

d) El lema de Neyman - Pearson no puede usarse en el caso de pruebas en las que la distribución de la muestra tenga más de un parámetro desconocido.

95. Sea x una variable cuya distribución es $f(x, \theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}$; $x = 0,1$. Se desea encontrar la función potencia $K(\theta)$ para $0 \leqslant \theta \leqslant \theta'$ en la prueba de hipóteis H_0: $\theta = \theta'$ vs. $H_a: \theta < \theta'$ siendo la región de rechazo - - -
$C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) \,/\, \sum_{i=1}^{10} x_i \leqslant 1\}$.
$K(\theta) = Pr(\Sigma x_i \leqslant 1)$ es:

a) $\sum_{K=0}^{1} \binom{10}{K} \theta^K (1-\theta)^{10-K}$

b) $\sum_{K=2}^{10} \binom{10}{K} \theta^K (1-\theta)^{10-K}$

c) $\sum_{K=1}^{10} \binom{10}{K} \theta^K (1-\theta)^{10-K}$

d) $1 - \sum_{K=0}^{1} \binom{10}{K} \theta^K (1-\theta)^{10-K}$

96. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria cuya distribución es $N(0,\theta)$ para probar $H_0: \theta = \theta'$ vs. $H_a: \theta < \theta'$ la región - crítica uniformemente más potente es:

a) $C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \; ; \; \Sigma x_i^2 \geqslant K\}$

b) $C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \; ; \; \bar{x}^2 \geqslant K\}$

c) $C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \; ; \; \bar{x}^2 \leqslant K\}$

d) $C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \; ; \; \Sigma x_i^2 \leqslant K\}$

97. Para encontrar el valor de K en el problema anterior buscaremos en tablas manejando la expresión:

a) $\alpha = Pr(\Sigma x_i^2 \geqslant K) = Pr(\Sigma \frac{x_i^2}{\theta'} \geqslant \frac{K}{\theta'})$

b) $\alpha = Pr(\bar{x}^2 \geqslant K) = Pr(\frac{\bar{x}^2}{\theta'} \geqslant \frac{K}{\theta'})$

c) $\alpha = Pr(\Sigma x_i^2 \leqslant K) = Pr(\Sigma \frac{x_i^2}{\theta'} \leqslant \frac{K}{\theta'})$

d) $\alpha = Pr(\bar{x} \leqslant K) = Pr(\frac{\bar{x}^2}{\theta'} \leqslant \frac{K}{\theta'})$

98. En la prueba de hipótesis $H_0: \theta = \theta'$ vs. $H_a: \theta \neq \theta'$ de una muestra aleatoria cuya distribución es $N(0, \theta)$ encontramos que no existe una región (UMP) debido a que:

a) Existen dos regiones críticas uniformemente más potentes según sea $\theta > \theta'$ ó bien $\theta < \theta'$.

b) No se puede usar el teorema de Neyman - Pearson por las condiciones del problema.

c) θ varía de forma continua en un intervalo.

d) El estadístico obtenido por el teorema para base de la prueba, no tiene una distribución conocida.

99. Se tiene una muestra aleatoria de 25 elementos de una distribución $N(\theta, 100)$. Para encontrar la región uniformemente más potente de tamaño $\alpha = .10$ en la prueba de $H_0: \theta = 75$ vs. $H_a: \theta > 75$ usando el teorema de Neyman - Pearson encontramos que la región crítica es $C = \{(x_1, x_2, \ldots x_{25}) / \Sigma x_i \geq K\}$; mediante un procedimiento llegamos a la regla de decisión rechazar H_0 si $\bar{x} \geq 77.56$. Este valor lo obtenemos de manipular la expresión:

a) $Pr\left(Z \leq \frac{K - 75}{2}\right) = .1$ con $Z \sim N(0,1)$

b) $Pr\left(Z \geq \frac{K - 75}{2}\right) = .1$ siendo $Z \sim N(0,1)$

c) $Pr\left(Z \geq \frac{K - 75}{20}\right) = .1$ siendo $Z \sim N(0,1)$

d) $Pr\left(Z \leq \frac{K - 75}{20}\right) = .1$ con $Z \sim N(0,1)$

100. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria de una distribución $N(\theta, 16)$ para probar H_0: $\theta = 25$ vs. H_1: $\theta < 25$ con un poder tal que $K(25) = .10$ y $K(23) = .9$ podemos encontrar n y una prueba UMP de uno de los siguientes sistemas:

a) $\sqrt{n}\left(\frac{K - 25}{4}\right) = 1.282$

$\sqrt{n}\left(\frac{K - 23}{4}\right) = -1.282$

b) $\sqrt{n}\left(\frac{K - 25}{4}\right) = -1.282$

$\sqrt{n}\left(\frac{K - 23}{4}\right) = 1.282$

c) $\sqrt{n}\left(\frac{K - 25}{4}\right) = .1$

$\sqrt{n}\left(\frac{K - 23}{4}\right) = .9$

d) $\sqrt{n}\left(\frac{K - 25}{4}\right) = .9$

$\sqrt{n}\left(\frac{K - 23}{4}\right) = .1$

101. Cuando en un caso de pruebas de hipótesis simples vs. compuestas no exista una prueba uniformemente más potente, una prueba conveniente que puede ser usada es:

a) La prueba del cociente de verosimilitud

b) La prueba de χ_i cuadrada

c) Pruebas mínimas o Bayesianas

d) Análisis de varianza

102. Con una muestra aleatoria de una población cuya densidad es $N(\mu,\sigma^2)$ donde σ^2 es desconocida ; para probar $H_0: \mu = \mu_0$ vs. $H_a: \mu \neq \mu_0$ por medio del cociente de verosimilitud el valor de $L(\hat{\omega})$ es:

a) $$\left(\frac{1}{2\pi\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n}}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{2\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}}$$

b) $$\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}$$

c) $$\left(\frac{1}{2\pi\frac{\Sigma(x_i-\mu_0)^2}{n}}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{2\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{n}}}$$

d) $$\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

103. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una v.a. con distribución $N(\mu,\sigma^2)$, para probar $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs. $H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2$ con μ desconocida. En el cociente de verosimilitud $\lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}$ la expresión para $L(\hat{\Omega})$ es:

a) $\left(\dfrac{1}{2\Pi\sigma_0{}^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma_0{}^2}}$

b) $\left(\dfrac{1}{2\Pi\sigma^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

c) $\left(\dfrac{1}{2\Pi\sigma_0^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{2\sigma_0^2}}$

d) $\left(\dfrac{1}{2\Pi\dfrac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n}}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{2\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}}$

104. Sea $\underset{\sim}{x}_n$ una muestra aleatoria de una población $N(\mu,\sigma^2)$ donde σ^2 es conocida, considerando las hipótesis $H_0: \mu = \mu_0$ vs. $H_a: \mu \neq \mu_0$ usando el principio del cociente de verosimilitud $\lambda = \dfrac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}$ y tomando logaritmos en ambos lados obtenemos que log λ es:

a) $e^{\frac{-\Sigma(x_i-\mu_0)^2 + \Sigma(x_i-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$

b) $\frac{-n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\mu_0)^2$

c) $\frac{(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sigma^2}$

d) $\alpha = Pr\{\frac{(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sigma^2} > \frac{Kn}{\sigma^2} / H_0\}$ donde K puede ser obtenido de tablas.

105. El estadístico obtenido por medio del cociente de verosimilitud para base de la prueba en el problema anterior tiene por distribución:

a) $\chi^2_{(n)}$

b) $\chi^2_{(1)}$

c) $T_{(n-1)}$

d) $T_{(n)}$

106. La distribución del estadístico obtenido por medio del cociente de verosimilitud como base de la prueba de $H_0:\mu=\mu_0$ vs. $H_a:\mu\neq\mu_0$ con una muestra de una población $N(\mu,\sigma^2)$ siendo σ^2 desconocida es:

a) $\chi^2_{(n)}$

b) $T_{(n)}$

c) $N\ (0,\ 1)$

d) $T_{(n-1)}$

107. La distribución del estadístico obtenido por el cociente de verosimilitud para la prueba de hipótesis del problema 103 es:

a) $\chi^2_{(n)}$

b) $T_{(n)}$

c) $\chi^2_{(n-1)}$

d) $T_{(n-1)}$

108. Sean χ y Y variables aleatorias con distribuciones normales $N(\mu_1, \sigma^2)$ y $N(\mu_2, \sigma^2)$. Para probar la hipótesis $H_0: \mu_1 = \mu_2$ contra cualquier otra alternativa obtenemos por medio del cociente de verosimilitud que el estadís tico base para la prueba es:

$$t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}(\bar{x}-\bar{y})}{\sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2 + \Sigma(y_i-\bar{y})^2}{n+m-2}}}$$

que se distribuye como $T(n+m-2)$.

Sea $\bar{x}=75.2$, $m=n=8$, $\bar{y}=78.6$, $\Sigma(x_i-\bar{x})^2=71.2$, $\Sigma(y_i-\bar{y})=54.8$ a un nivel de .05 y sabiendo que $\alpha=Pr(|T| \geq C / H_0)$:

a) $T_{.975}(14) = 2.145 < 2.26 = |t(\underline{x})|$ por lo que rechazamos la hipótesis $H_0: \mu_1 = \mu_2$ a un nivel de .05.

b) $T_{.975}(14) = 2.145 > -2.26$ por lo que aceptamos $H_0: \mu_1 = \mu_2$ a un nivel del .05.

c) $T_{.95}(14) = 1.765 < 2.26 = t(\underline{x})$ por lo que rechazamos $H_0: \mu_1 = \mu_2$ a un nivel de .05

d) $T_{.95}(14) = 1.765 > -2.26$ por lo que aceptamos $H_0: \mu_1 = \mu_2$ a un nivel de .05.

109. En la columna de la izquierda aparecen hipótesis que pueden ser probadas, a su derecha aparecen la distribución de los estadísticos que tabulados permiten encontrar el valor de la constante que define la región crítica para un nivel de significancia.

1. Sea x_n una muestra aleatoria de una población $N(\mu, \sigma^2)$; σ^2 conocida. La distribución del estadístico apropiado para la prueba $H_0: \mu \leq \mu_0$ vs. $H_a: \mu \geq \mu_0$ es: ( )

2. Sea una muestra aleatoria de una población $N(\mu, \sigma^2)$; ambos parámetros desconocidos. La distribución del estadístico apropiado para la prueba de $H_0: \mu \leq \mu_0$ vs. $H_a: \mu \geq \mu_0$ es: ( )

a) $\chi^2_{(n-1)}$

b) $T_{(n-1)}$

c) $N(0,1)$

3. Sea x_n una muestra aleatoria de una población $N(\mu\ ,\sigma^2)$; ambos parámetros desconocidos. La distribución del estadístico apropiado para la prueba $H_0: \sigma^2 < \sigma_0^2$ vs. $H_a: \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$ es: ( )

110. Sea λ el estadístico base de una prueba de hipótesis obtenido por medio del cociente $\lambda = \dfrac{L\ (\hat{\omega})}{L\ (\hat{\Omega})}$; indica cuál de las siguientes proposiciones es falsa.

a) Para conocer la región crítica de la prueba es necesario conocer la distribución de λ cuando H_0 es verdadera.

b) Si no se conoce la distribución de λ , pero si la de una función de ella $U(\lambda\ )$, la prueba puede basarse en ésta.

c) Si H_0 es compuesta la distribución de λ puede ser diferente para distintos puntos parámetricos en W.

d) λ como criterio de prueba sólo puede ser usada para densidades normales.

111. Con el mismo enunciado del problema anterior indica cuál de las siguientes proposiciones es falsa:

a) Cuando $\lambda \to 1$ tenemos una evidencia para el rechazo de H_0.

b) Para muestra grandes, si la distribución de λ no es conocida, puede usarse el siguiente resultado $-2 \log \lambda \sim \chi^2$.

c) En general no es posible encontrar una región crítica que maximize el poder para todas las alternativas de la hipótesis nula en caso de que ésta sea una hipótesis compuesta.

d) Para $-2 \log \lambda \sim \chi^2$ los grados de libertad están dados por el número de parámetros determinados por H_0.

RESPUESTAS DE LOS REACTIVOS

1. c Comunicación Interna # 42 pág. 1
2. a Comunicación Interna # 42 pág. 2
3. b Comunicación Interna # 42 pág. 3
4. d
5. a Comunicación Interna # 42 pág. 3
6. b Comunicación Interna # 42 pág. 4
7. d Comunicación Interna # 42 pág. 4 - 6
8. c Comunicación Interna # 42 pág. 8 - 9
9. d Comunicación Interna # 42 pág. 19
10. b Comunciación Interna # 42 pág. 19
11. c Comunicación Interna # 42 pág. 19
12. a Comunicación Interna # 42 pág. 20
13. b
14. c Comunicación Interna # 42 pág. 21
15. b Ver tabla del apéndice de esta tesis
16. c Ver tabla del apéndice de esta tesis
17. d $x_{(n)} - x_{(1)} = 9 - 1 = 8$
18. a Comunicación Interna # 42 pág. 29
19. b Definición: Los límites reales de clase se obtienen sumando al límite superior de un intervalo de clase el límite inferior del intervalo de clase contiguo superior y dividiendo por dos. (Estadística de - - Spiegel).
20. c La opción a es un gráfico de barras, la b un polígono de frecuencia, la d no contempla los límites reales de clase.

21. a Comunicación Interna # 42 pág. 41

22. b Comunicación Interna # 42 pág. 32

23. b Comunicación Interna # 42 pág. 35 - 38

24. d Comunicación Interna # 42 pág. 57

25. b La media en este caso no es más representativa puesto que el último dato tiende a subir el promedio del 75% del conjunto total, no hay valor modal y la varianza es una medida de dispersión.

26. c $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{9} = 53.67$

Mediana = 55 (punto medio de los datos ordenados)

Moda = {47,56} (valor que se presenta con mayor frecuencia)

27. c $\bar{x} = \frac{\sum_{1}^{5} f_i x_i}{n} = 4.83$ donde: f_i es la frecuencia del intervalo i.

x_i es la marca de clase del intervalo i.

n es el número total de datos.

28. b Comunicación Interna # 42 pág. 53

29. c Comunicación Interna # 42 pág. 57

notese que b y d contienen al parámetro "μ "

30. d Comunicación Interna # 42 pág. 59

31. a El estadístico de la opción a involucra al parámetro que se va a estimar.

32. d Mood pág. 193 - 194

33. c $M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ condensa toda la información de la muestra

34. c Mood pág. 194 - 195

35. a Haciendo $\hat{p} = \Sigma x_i$ y utilizando el teorema 8.1 de la pág. 194 del Mood podemos hacer que $K(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1$.

36. d En consecuencia del resultado de la respuesta anterior $G(T(\underline{x}_n))$ será $p^{\Sigma x_i} q^{n-\Sigma x_i}$.

37. b Mood pág. 195. El teorema 8.2 nos hace ver que es condición necesaria que la función del estadístico suficiente admita una función inversa uniforme para que se extienda la propiedad de suficiencia.

38. c Sabemos por definición que para que un estimador sea insesgado se debe cumplir que $E(\hat{p}) = p$.

Al calcular la esperanza del estimador de la opción c tenemos que:

$E(\hat{p}) = E(\overset{n}{\Sigma} x_i) = E(x_1+x_2+\ldots+x_n) = E(x_1)+E(x_2)+\ldots+$
$E(x_n) = np$

$E(\hat{p}) \neq p \Rightarrow \hat{p}$ no es un estimador insesgado.

39. b Comunicación Interna # 42 pág. 65

40. a

$$\mathrm{Var}(\bar{x}) \geqslant \frac{1}{nE\left\{\frac{\alpha \ln f(x;\theta)}{\alpha\theta}\right\}^2}$$

$$f(x,\theta) = \frac{e^{-\theta}\,\theta^x}{x!}$$

$$\ln f(x;\theta) = -\theta + x\ln\theta - \ln x!$$

$$\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta} = -1 + \frac{x}{\theta}$$

$$E\left\{\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right\}^2 = E\left(\frac{x}{\theta} - 1\right)^2 = E\left(\frac{x-\theta}{\theta}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\theta^2}\, E(x-\theta)^2 = \frac{\sigma^2}{\theta^2} = \frac{\theta}{\theta^2} = \frac{1}{\theta}$$

$$\therefore\ Var(\bar{x}) \geqslant \frac{1}{n\frac{1}{\theta}} = \frac{\theta}{n}$$

41. b Mood pág. 202

42. a Mood pág. 202

43. a Mood pág. 202. En la definición 8.8 se da la propiedad que debe tener un estimador para que sea insesgado de varianza mínima.

44. c Usando el resultado del teorema 8.6 pág. 205 del Mood demostraremos que:

$$E\left(\bar{X}^2 - 5\bar{x} - \frac{1}{n}\right) = \mu^2 - 5\mu$$

$$E\left(\bar{x}^2 - 5\bar{x} - \frac{1}{n}\right) = E(\bar{x}^2) - 5E(\bar{x}) - E\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= E\frac{(\Sigma x_i)^2}{n^2} - 5\mu - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2} E\left(\Sigma x_i^2 + 2\binom{n}{2} \underset{i<j}{x_i x_j}\right) - 5\mu - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2}\, \Sigma\left(E(x_i^2)\right) + \frac{n(n-1)}{n^2} E(x_i x_j) - 5\mu - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2}\, n(1+\mu^2) + \frac{n-1}{n}\mu^2 - 5\mu - \frac{1}{n}$$

$$= \mu^2 - 5\mu$$

45. a Mood. pág. 200. La discusión está dada en el comentario de la definición 8.6 de la pág. 199. Nótese que la opción d está redactada como si la propiedad de

consistencia en error cuadrático fuera menos fuerte que la de consistencia simple. La explicación de la contención de una en otra está dada en la pág. 199.

46. b $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sigma_z^2}{2} = \frac{\sigma_z^2}{2}$; sin embargo $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_\alpha^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_x^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_\omega^2 = 0$

47. d Comunicación Técnica # 42 pág. 96

48. a Sabemos que $\mu'_1 = \mu$; $\mu'_2 = \sigma^2 + \mu^2$

los momentos muestrales son:

$$m'_1 = \frac{\Sigma x_i}{n} \ ; \ m_2 = \frac{1}{n} \Sigma x_i^2$$

igualando momento poblacionales y muestrales

$$\hat{\mu} = \bar{x}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\mu}_2 - \mu^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

siendo los mismos estimadores que los encontrados por el método de máxima verosimilitud.

49. b Cada $f(x_1,\theta)$, $f(x_2,\theta)$, ... , $f(x_n,\theta)$ nos da la probabilidad de obtener dicho valor muestral en cada extracción. La densidad conjunta $\prod^{n} f(x_i;\theta)$ dará la probabilidad de obtener una muestra en especial con los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Como no se conoce θ, para estimar su valor, el método de máxima verosimilitud trata de encontrar un θ en Ω ($\hat{\theta}$) que haga máxima la función de verosimilitud. Es decir encontrar un $\hat{\theta}$ que maximice la probabilidad de que al extraer una muestra de tamaño n, los valores obtenidos sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En general $\hat{\theta}$ es una función de la mues

tra y se le llama estimador máximo verosímil.

50. c El razonamiento está explicado en la respuesta anterior. Sin embargo algunas aclaraciones de las opciones son por ejemplo en a), el hecho de que el máximo de la función de verosimilitud no sea el mismo que el del logaritmo, o bien simplemente que el método de derivar e igualar a cero no funcione como en el caso de la densidad $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}$. En b) nótese que no necesariamente los estimadores máximo verosímiles son insesgados, un ejemplo sería $\hat{\sigma}_2 = \frac{1}{n} (x_i - \bar{x})^2$ que no lo es. En cuanto a d) no se puede hacer una afirmación así de fuerte.

51. c La condición necesaria para estimar una función de θ ($h(\theta)$) mediante $\hat{\theta}$, es que ésta admita una función inversa uniforme, Ver Mood pág. 213.

52 d Sea $f(x;\theta) = \theta X^{\theta-1}$;

$$L(x_n;\theta) = \theta x_1^{\theta-1} \theta x_2^{\theta-1} \cdots \theta x_n^{\theta-1}$$

$$= \theta^n \Pi x_i^{\theta-1}$$

$$\text{Log } L(x_n;\theta) = n \log \theta + (\theta - 1) \Sigma \log x_i$$

$$\frac{\partial \log L(x_n;\theta)}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} + \Sigma \log x_i = 0$$

$$-\frac{n}{\theta} = \Sigma \log x_i$$

$$\hat{\theta} = -\frac{n}{\Sigma \log x_i}$$

53. b La función de verosimilitud será:

$L(\theta;\ x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{-\Sigma x_i + n\theta}$, en este caso la técnica de maximizar el log $L(\theta; x_1, x_1, \ldots, x_n)$ mediante diferenciación nos conduce a la contradicción $n = 0$, así pues la condición $\theta \leqslant x \leqslant 0$ da la solución ya que en especial $\theta \leqslant$ que cada x_i y en particular $\theta \leqslant \min(x_i)$, por lo que el estimador máximo verosímil es: $\min(x_i)$ llamado estadístico de primer orden.

54. d Comunicación Interna # 42 pág. 102

55. c En estadística clásica, el concepto que se maneja es el de que el parámetro de una distribución es un valor fijo no conocido, un intervalo de confianza con un nivel de confianza nos da una idea del valor aproximado de tal parámetro. En estadística Bayesiana se consiera que el parámetro de una distribución es una variable aleatoria.

56. d Aún para un nivel más alto de confianza, existe probabilidad aunque sea pequeña de que el intervalo no contenga al parámetro.

57. d $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + c$

58. c $3 \in (X, 3X) \Rightarrow x < 3 < 3X$

$\Rightarrow X < 3$ y $3 < 3X$ de aquí que $1 < X$ por lo que $1 < X < 3$

59. a $E(X, 3X) = E(3X - X) = E(2X) = 2E(X)$

$$= 2 \int_0^\infty x e^{-x} dx$$

$$= 2 \left(-xe^{-x} - e^{-x} \Big|_0^\infty \right) = 2$$

60. a c d μ Bajo la interpretación frecuentista de la probabilidad es un número fijo, no así $\bar{x}$ cuyo valor depende de la muestra observada.

61. a Obviamente entre más se aproxima α a uno la longitud del intervalo será mayor, puesto que queremos un mayor margen de seguridad de que el parámetro esté en el intervalo.

62. c Sabemos que $\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)/\sigma^2 \sim N(0,1)$ y que $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ se define la variable T en términos de dos variables como éstas, es decir:

$$T = \frac{\sqrt{n}\ (\bar{x} - \mu)/\sigma}{\sqrt{nS^2/\ \sigma^2(n-1)}} = \frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} \sim T(n-1)$$

Para dado un entero n y una probabilidad α podemos encontrar $a < b$ tal que

$$Pr\left(a < \frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} < b\right) = \alpha \text{ de donde}$$

$$Pr\left(\bar{x} - \frac{bS}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{x} + \frac{bS}{\sqrt{n-1}}\right) = \alpha$$

con $a = -b$; $b > 0$; b se obtiene de tablas en $T(n-1)_{.05}$

63. a Se sabe que $nS^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$ para $n \geqslant 2$; podemos encontrar en tablas $Pr\left(a < \frac{nS^2}{\sigma^2} < b\right) = .9$ usando la distribución $\chi^2(n-1)$ para $\alpha = .9$, tenemos

$$Pr\left(\frac{nS^2}{\sigma^2} < a\right) = .05 \text{ y } Pr\left(\frac{nS^2}{\sigma^2} > b\right) = .05$$

de donde $Pr(a < \frac{nS^2}{\sigma^2} < b) = .9$

Se traduce en $Pr(\frac{a}{nS^2} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{b}{nS^2}) = .9$

por lo que $Pr(\frac{nS^2}{b} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{a}) = .9$

haciendo $b = \chi^2_{.05}(n-1)$ y $a = \chi^2_{.95}(n-1)$

y sustituyendo llegamos a

$$Pr\left(\frac{nS^2}{\chi^2_{.05}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{\chi^2_{.95}(n-1)}\right) = .90$$

64. b La distribución de algunas funciones de variables aleatorias son de gran importancia en la construcción de intervalos de confianza como se ha visto en los reactivos anteriores, de aquí que:

$U = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} = \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ Hogg 165

$Y = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma^2} \sqrt{n} \sim N(0,1)$ Hogg 182

$Z = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n-1}}{S} \sim T(n-1)$ Mood 267 - 268

los n-1 grados de libertad son debidos a la pérdida de un grado al calcular $\bar{x}$.

65. d Según el resultado del reactivo 62, los extremos del intervalo estarán dados por:

$$\left(\bar{x} - \frac{T_{.05}(n-1)\quad S}{\sqrt{n-1}} \quad , \quad \bar{x} + \frac{T_{.05}(n-1)\quad S}{\sqrt{n-1}} \right)$$

$\bar{x} = 4.7$

$n = 26$

$n-1 = 25$

$S = 6.25$

$S = 2.5$

$$\bar{x} - \frac{T_{.05}(n-1)}{\sqrt{n-1}} S = 4.7 - \frac{1,708(2.5)}{25} = 4.7 - .854 = 3.846$$

$$\bar{x} + \frac{T_{.05}(n-1)\; S}{\sqrt{n-1}} = 4.7 + \frac{1.708(2.5)}{25} = 4.7 + .854 = 5.554$$

$T_{.05}(25) = Pr(\; T \leqslant 1.708) = .95 = a$

$Pr(\; T \leqslant -1.708) = 1 - a = 1 - .95 = .05$

66. b Que $\sigma^2 \varepsilon \left(\frac{S^2}{1.69} , \frac{S^2}{.333} \right) \Rightarrow \frac{S^2}{1.69} < \sigma^2 < \frac{S^2}{.333}$

pero como sabemos que $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

entonces $\frac{S^2}{10(1.69)} < \frac{\sigma^2}{10} < \frac{S^2}{10(.333)}$

$$\Rightarrow \frac{S^2}{16.9} < \frac{\sigma^2}{10} < \frac{S^2}{3.3}$$

$$\frac{1}{16.9} < \frac{\sigma^2}{10S^2} < \frac{1}{3.3}$$

por lo que $16.9\,S^2 > \frac{10S^2}{\sigma^2}$; $\frac{10S^2}{\sigma^2} > 3.3$

$$\therefore\; 3.3 < \frac{10S^2}{\sigma^2} < 16.9$$

67. a $n = 10 \quad \frac{10S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(9)$

sea $x = \frac{10S^2}{\sigma^2}$ $\quad P(3.3 < x < 16.9) = Pr(x' < 16.9) - Pr(x' < 3.3)$

$= .95 - .05 = .90$

Puesto que la función χ^2 está definida para $0 < x' < x$ se hace la resta correspondiente al cálculo de - - $Pr(3.3 < x < 16.9)$

68. d La longitud del intervalo $\left(\frac{S^2}{1.69} , \frac{S^2}{.333} \right)$ es:

$S^2 \left(\frac{1}{.333} - \frac{1}{1.69} \right) = S^2(.411)$

Por otro lado $E\left(\frac{10S^2}{\sigma^2}\right) = 9$; $E(S^2) = \frac{9}{10}\sigma^2$

Entonces $E(.411S^2) = .411E(S^2) = .411\left(\frac{9}{10}S^2\right) = 2.17S^2$

69. c Para la muestra dada, obtenemos que $\bar{x} = 7.99$ y

$S^2 = \frac{\Sigma(x_i - 7.99)^2}{n} = \frac{1}{n}\Sigma x_i^2 - 7.99^2 = .7988 \doteq .79$

$nS^2 = 9(.79) = 7.11; \; n - 1 = 8$

y dado que los límites según la respuesta del reactivo 63 son: $\left(\frac{nS^2}{\chi^2_{.05}(n-1)} , \frac{nS^2}{\chi^2_{.95}(n-1)} \right)$ al sustituir nos queda

$\frac{7.11}{\chi^2_{.05}(8)} < \sigma^2 < \frac{7.11}{\chi^2_{.95}(8)}$ por lo que $Pr\left(\frac{7.11}{15.5} < \sigma^2 < \frac{7.11}{2.77}\right) = .90$

y $Pr(.458 < \sigma^2 < 2.6) = .90$

70. a Definición en Hogg pág. 268

71. c Ver definiciones en Hogg pág. 268

72. V Definición en Hogg pág. 269

73. F La región crítica de una prueba es precisamente el conjunto de valores de rechazo de la hipótesis nula.

74. V La función potencia denotada por ejemplo por $K(\theta)$ cuando θ es el parámetro de la distribución asociada a la población estadística, nos da la potencia de la prueba para cada valor del posible recorrido de θ. Dicha potencia es la probabilidad de rechazar la hipótesis bajo consideración suponiendo que el valor de θ, en H_0 sea el verdadero valor del parámetro.

75. V Si el nivel de significancia de una prueba es del .01, esto quiere decir que la probabilidad de rechazar H_0 siendo ésta cierta es del .01%.

76. F En comunicación técnica # 42 aparece la siguiente tabla definiendo los errores de tipo I y II.

Realidad / Decision (Aceptar)	Ho Cierta	Ha Cierta
Ho	Acierto	Error Tipo II
Ha	Error Tipo I	Acierto

Así pues el error de tipo I consiste en aceptar H_a siendo que la cierta es H_0.

77. V Para ilustrar esto veamos un ejemplo.

Si definimos por región crítica $C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) / x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 > 30\}$ la prueba especificada sera aceptar H_0 en caso de que para los valores observados tengamos que $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq 30$, en caso contrario ($x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n > 30$) rechazaremos H_0.

78. V La idea de esta proposición consiste en el hecho de - que al querer probar una hipótesis estadística lo lleva a uno a desarrollar un experimento en el que en base a los valores muestrales y después de un análisis, se rechazará o aceptará tal hipótesis con un porcentaje de error. Para probar que $\theta \geq 25$ de una distribución $N(\theta, 49)$ la prueba que puede ser tomar una muestra de tamaño n y calcular $\bar{x}$ específica la región crítica:

$$C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) / \bar{x} < 25\}$$

79. d En la respuesta del reactivo 75 se aclara con un ejemplo el concepto de nivel de significancia y con esto justifica la presente respuesta.

80. b El criterio de la prueba será aceptar H_0 si $x_1^2 + x_2^2 > 1$. puesto que la zona de rechazo es:

$$C = \{(x_1, x_2) / x_1^2 + x_2^2 > 1\}$$

81. b Si de la muestra extraída $(x_1, x_2, \ldots, x_5)$ calculamos su media $\frac{\Sigma x_i}{5} = \bar{x}$ y checamos con las hipótesis, según el criterio adoptado:

para $\bar{x} > 7$ rechazaremos H_0 y si $\bar{x} \leq 7$ aceptaremos H_0 así el rechazo de la hipóteis nula será:

$C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_5) \;/\; \bar{x} > 7\}$

82. b Sabemos que α = Pr(rechazar H_0/ H_0 es cierta) y

β = Pr(rechazar H_0/ H_a es cierta)

definidos así estos errores vemos que ambas expresiones son funciones de probabilidad y que lo deseable sería minimizar ambos errores, así pues es una incongruencia que $\alpha + \beta$ sea igual a uno puesto que la reducción de uno equivaldría a aumentar el otro. El procedimiento que generalmente se sigue en una prueba es fijar α (llamado nivel de significancia de la prueba) y buscar minimizar β calculando la potencia de la prueba para todas las alternativas y como

$$\beta = 1 - \underbrace{\left\{ \Pr(x_1, x_2, \ldots, x_n \;/\; H_a \text{ es cierta}) \right\}}_{\text{función potencia de la prueba}}$$

Al encontrar la máxima potencia de la prueba para un θ, estaríamos minimizando β. Una prueba con estas características se dirá que es uniformemente más potente.

Un ejemplo que ilustra que se pueden fijar α y β, para con estos encontrar n y c, está dado en el problema 90 aquí α es tomada como .05 y β como .1

83. c Que la potencia de una prueba sea alta, implica que la probabilidad de rechazar H_0 siendo cierta tiende a cero o sea, reduce la probabilidad de error de tipo I, así pues lo que se detecta en la prueba, aunque sea a costa de incrementar el valor de la muestra - es que H_0 sea cierta y no H_a.

84. a

$\alpha = Pr(\bar{x} > 140 \ / \ \mu = 138)$

Se sabe que la variable se distribuye normalmente y que el estadístico usado para la prueba es $\bar{x}$ que - tiene por distribución una $N(\mu, \frac{20}{\sqrt{n}}) = N(\mu, \frac{20}{\sqrt{100}}) =$

$N(\mu, 2)$ por lo que

$$\alpha = P(EI) = Pr(\bar{x} > 140 \ / \ \mu = 138)$$

$$= Pr\left(\frac{\bar{x} - 138}{2} > \frac{140 - 138}{2}\right)$$

$$= Pr(\ Z > 1\ )$$

$$= 1 - Pr(\ Z \leqslant 1\ ) \qquad Z = \frac{\bar{x} - 138}{2} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$= 1 - .841$$

$$= .159$$

85. c $P(EII) = \beta = Pr(\text{aceptar } H_0 \ / \ H_0 \text{ es falsa})$

$$= Pr(\ \#\text{ pacientes curados} \geqslant 8 \ / \ P = 0.7)$$

$$= \sum_{8}^{10} \frac{10!}{(10 - K)!K!} (0.7)^{K} (0.3)^{10-K} = .3828$$

Nota: que H_0 sea falsa implica H_a verdadera, por lo que $P = 0.7$

86. c d En algunos casos de simples contra compuestas y compuestas contra compuestas un método alternativo es el criterio del cociente de verosimilitud.

87. d Usando el Teorema de Neyman Pearson, tenemos que:

$$\frac{L(x_1, x_2, \ldots, x_{10}; \theta')}{L(x_1, x_2, \ldots, x_{10}; \theta'')} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\right)^n e^{-\frac{\sum_1^{10} x_i^2}{2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\right)^n e^{-\frac{\sum_1^{10}(x_i - 1)^2}{2}}}$$

$$= e^{-\sum_1^{10} x_i + \frac{10}{2}}$$

si K >0 $\quad -\sum_1^{10} x_i + 5 \leq \ln K$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\sum_1^{10} x_i}{10} \geqslant \frac{5 - \ln K}{10} = C$$

La conveniencia de usar el estadístico $\bar{x}$ radica en el hecho de que su distribución se conoce al suponer cierta H_0, siendo esta $N(0, \frac{1}{10})$ ya que $\sigma^2 = 1$.

88. a Sustituyendo en $\alpha = \Pr(\bar{x} \leqslant C \,/\, \theta = 0)$ nos queda

$$.05 = \Pr\left(\frac{\bar{x} - \theta}{\sigma / \sqrt{n}} \leqslant \frac{C - \theta}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$$

$$.05 = \Pr\left(Z \leqslant \frac{C - 0}{1/\sqrt{25}}\right)$$

$.05 = Pr(Z \leqslant \sqrt{25}\ (\ C - 0\ ))$

pero $Z = \dfrac{\bar{x} - \theta}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$ por lo que

$.05 = N(\ \sqrt{25}\ \ (\ C - 0\ )\ )$

89. c $\alpha = Pr(\bar{x} > C\ / \mu = 0)$

para $\alpha = .05$ $\qquad .05 = 1 - N(\ \dfrac{C - 0}{1\ / \sqrt{10}}\ )$

$$.95 = N(\sqrt{10}\ C)$$

$$N^{-1}(.95) = N^{-1}N(\ \sqrt{10}C)$$

$$1.645 = \sqrt{10}C$$

$$\frac{1.645}{\sqrt{10}} = C$$

$$.52 = C$$

Así el creterio para la aceptación de la hipótesis nula es que $\bar{x} < .52$ puesto que la zona de rechazo es establecida para cuando $\bar{x} \geqslant .52$

90. b De $Pr(\bar{x} \geqslant C;\ H_0) = .05$ tenemos que

$.05 = 1 - Pr(\ \bar{x} \leqslant C)$

$.05 = 1 - Pr(\dfrac{\bar{x} - \theta}{\sigma\ / \sqrt{n}} \leqslant \dfrac{C - \theta}{\sigma\ / \sqrt{n}})$

$.05 = 1 - Pr(Z \leqslant \dfrac{C - 75}{10\ / \sqrt{n}}\ )$

$.95 = Pr(Z < \dfrac{\sqrt{n}}{10}(C - 75)\ )$

$.95 = N(\ \dfrac{\sqrt{n}}{10}\ (C - 75)\ )$

$$N^{-1}(.95) = N^{-1}N\left(\frac{\sqrt{n}}{10}(C - 75)\right)$$

$$1.645 = \frac{\sqrt{n}}{10}(C - 75) \qquad \ldots (1)$$

Por otro lado $Pr(\bar{x} \geq C;\ H_a) = .9$ de donde

$$.9 = Pr(\bar{x} > C;\ H_a) = 1 - Pr(\bar{x} \leq C / H_a)$$

$$.1 = N\left(\frac{\sqrt{n}}{10}(C - 78)\right)$$

$$N^{-1}(.1) = N^{-1}N\left(\frac{\sqrt{n}}{10}(C - 78)\right)$$

$$-1.282 = \frac{\sqrt{n}}{10}(C - 78) \quad \ldots (2)$$

resolviendo para (1) y (2) se encuentran n y c para las condiciones del problema.

91 d De la respuesta al ejercicio 88, podemos obtener $C = -.329$ mediante el despeje de:

$$.05 = N(\sqrt{25}(C - 0))$$

$$.05 = N(5C)$$

$$N^{-1}(.05) = N^{-1}N(5C)$$

$$-1.645 = 5C$$

$$\frac{-1.645}{5} = C$$

$$-.329 = C$$

Para estandarizar $-.329$ tenemos que

$$\frac{C - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{-.329 - (-1)}{1 / \sqrt{25}} = \frac{-.329 + 1}{1 / \sqrt{25}} = 5(.671) = 3.355$$

92. c Usando el Teorema de Neyman Pearson,

$$\frac{L(\theta')}{L(\theta'')} = \frac{(1/\sqrt{2\pi})^{10} e^{-\sum_1^{10} \frac{x_i^2}{2}}}{(1/\sqrt{2\pi})^{10} (1/\sqrt{2})^{10} e^{-\sum_1^{10} \frac{x_i^2}{4}}}$$

ya que $\sigma^2 = 2$ para H_a entonces $\sigma = \sqrt{2}$.

$$\frac{L(\theta')}{L(\theta'')} = \frac{e^{-\sum_1^{10} \frac{x_i^2}{2}}}{1/2^5 e^{-\sum_1^{10} \frac{x_i^2}{4}}}$$.

$$= 2^5 e^{-\sum_1^{10} \frac{x_i^2}{2} + \sum_1^{10} \frac{x_i^2}{4}} < K$$

de donde $$-\frac{\sum_1^{10} x_i^2}{2} + \frac{\sum_1^{10} x_i^2}{4} < K'$$

$$-\frac{1}{4} \sum_1^{10} x_i^2 < K'$$

por lo que $$\sum_1^{10} x_i^2 > K_1'$$

y si $\sum_1^{10} x_i^2 > K_1'$ entonces rechazaremos H_0: $\sigma^2 = 1$ a un nivel de significancia α.

93. a Tenemos que encontrar una función del estadístico $\sum_1^{10} x_i^2$ cuya distribución sea conocida, para que - posteriormente podamos encontrar K, ésta puede ser

$\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$ y puesto que $\mu = 0$, tendremos que

$$\frac{\sum x_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n) \quad \text{para } n = 10 \text{ tenemos que:}$$

$$\frac{\sum x_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(10)$$

94. d La prueba del Teorema de Neyman - Pearson aparece en la pág. 274 del Hogg, en dicha demostración no aparece la restricción de un solo parámetro, así pues la distribución puede depender de cualquier número finito de parámetros y lo que sí es esencial es que tanto H_0 como H_a sean hipótesis simples.

95. a $K(\theta) = Pr(x_1, x_2, \ldots x_{10} \in C / H_0)$

$$= Pr\left(\sum_1^{10} x_i \leqslant 1 / \theta = \theta' \right)$$

$$= \sum_0^1 \binom{10}{K} \theta^K (1 - \theta)^{10-K}$$

Que la suma sea desde $K = 0$ a $K = 1$ es debido a que $\Sigma x_i \leqslant 1$ y como toda x_i sólo puede tomar como valor 0 ó 1 entonces todas las x_{is} son cero con probabilidad $(1 - \theta)^{10}$ o bien, alguna es 1 con probabilidad $\binom{10}{1} \theta (1 - \theta)^9$.

96. d Usando el teorema de Neyman - Pearson tenemos que:

$$\frac{L(x_1, x_2, \ldots, x_n / \theta = \theta')}{L(x_1, x_2, \ldots, x_n / \theta < \theta')} = \frac{(1 / 2\pi\theta')^{n/2} e^{-\frac{\Sigma x_i^2}{2\theta'}}}{(1 / 2\pi\theta'')^{n/2} e^{-\frac{\Sigma x_i^2}{2\theta''}}} \; ; \; \theta'' < \theta'$$

$$= (\theta'' / \theta')^{n/2} e^{-\frac{\Sigma x_i^2}{2}\left(\frac{1}{\theta'} - \frac{1}{\theta''}\right)}$$

de donde $e^{-\frac{\Sigma x_i^2}{2}\left(\frac{1}{\theta'} - \frac{1}{\theta''}\right)} \leqslant K$

$$-\frac{\Sigma x_i^2}{2}\left(\frac{1}{\theta'} - \frac{1}{\theta''}\right) \leqslant K'$$

$$-\Sigma x_i^2 \left(\frac{1}{\theta'} - \frac{1}{\theta''}\right) \leqslant K''$$

$$\left(-\frac{1}{\theta'} + \frac{1}{\theta''}\right) \Sigma x_i^2 \leq K'''$$

por lo que $$\Sigma x_i^2 \leq K$$

$\therefore$ La mejor región crítica es:

$$C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;/\; \Sigma x_i^2 \leq K\}$$

97. c Siendo α el nivel de significancia de la prueba, esto es, queriendo que la probabilidad de rechazar H_0 sea α tenemos que

$$\alpha = Pr(\Sigma x_i^2 \leq K \;/\; \theta = \theta')$$

$$= Pr\left(\Sigma \frac{x_i^2}{\theta'} \leq \frac{K}{\theta'}\right)$$

$$= Pr\left(Z \leq \frac{K}{\theta'}\right) \quad \text{donde } Z = \Sigma \frac{x_i^2}{\theta'} \sim \chi^2(n)$$

ilustraremos para $n = 15, \alpha = .05, \theta' = 3$, y $\theta'' < 3$

$$.05 = Pr\left(Z \leq \frac{K}{3}\right) \qquad 7.26 = \frac{K}{3}$$

$$P^{-1}_{(.05)} = P^{-1}P\left(Z \leq \frac{K}{3}\right)$$

$$3(7.26) = K$$

$$21.78 = K$$

Así se rechazaría H_0: $\theta' = 3$ en caso de que $\sum_1^{15} x_i^2 \leq 21.78$

98. a Al usar el teorema de Neyman - Pearson llegamos a que para $\theta'' \neq \theta'$

$$\frac{L(\theta')}{L(\theta'')} = \left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^{n/2} e^{-\left(\frac{\theta'' - \theta'}{2\,\theta'\,\theta''}\right) \Sigma x_i^2} \leq K$$

según el problema 96.

a) para $\theta'' < \theta'$ tenemos que la región crítica sería

$C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,/\, \Sigma x_i^2 \leq K\}$

b) para $\theta'' > \theta'$ de la pág. 282 del Hogg la región crítica es:

$C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,/\, \Sigma x_i^2 \geq K\}$

De esto concluimos que no hay una mejor región crítica para probar H_0 vs. H_a puesto que hay una región crítica para $\theta' < \theta''$ y otra para $\theta' > \theta''$

99. b En principio queremos que:

$Pr(\bar{x} \geq K) = .1$

estandarizando tenemos que:

$$Pr\left(\frac{\bar{x} - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{K - 75}{10/\sqrt{25}}\right) = .1$$

$$Pr\left(Z \geq \frac{K - 75}{2}\right) = .1 \quad \text{donde } Z = \frac{\bar{x} - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Para llegar a que $\bar{x} \geq 77.56$ para rechazar H_0.

$$1 - Pr\left(Z \leq \frac{K - 75}{2}\right) = .1$$

$$1 - .1 = Pr\left(Z \leq \frac{K - 75}{2}\right)$$

$$.9 = Pr\left(Z \leq \frac{K - 75}{2}\right)$$

$$P^{-1}(.9) = \frac{K - 75}{2}$$

$$1.282 = \frac{K - 75}{2}$$

$K = 77.564$

100. b Mediante el teorema de Neyman - Pearson llegamos a que la mejor región crítica de la prueba es:

$C = \{ (x_1, x_2, \ldots x_n) \ / \ \bar{x} \leq K \}$

queremos por otro lado que $Pr(\bar{x} \varepsilon \ C \ / \theta = 25) = .1$

por lo que al estandarizar llegamos a

$$Pr\left(\frac{\bar{x} - \theta}{\sigma / \sqrt{n}} \leq \frac{K - 25}{4 / \sqrt{n}} \right) = .1 \qquad \ldots(1)$$

y dado que $K(23) = .9$, planteamos

$Pr(x \ \varepsilon \ C \ / \ \theta = 23) = .9$

$$Pr\left(\frac{\bar{x} - \theta}{\sigma / \sqrt{n}} < \frac{K - 23}{4 / \sqrt{n}} \right) = .9 \qquad \ldots(2)$$

de (1) tenemos que $P^{-1}P\left(Z < \frac{K - 25}{4 / \sqrt{n}}\right) = P^{-1}(.1)$

de (2) tenemos que $P^{-1}P\left(Z < \frac{K - 23}{4 / \sqrt{n}}\right) = P^{-1}(.1)$

de tablas obtenemos

$$\sqrt{n} \ \left(\frac{K - 25}{4}\right) = -1.282$$

$$\sqrt{n} \ \left(\frac{K - 23}{4}\right) = 1.282$$

que corresponde a la opción b

Al resolver el sistema llegamos a que $n = 26.29$, por lo que el tamaño de muestra puede ser de 26 a 27 -

elementos. Para determinar la prueba si tomamos $n = 27$ tenemos que:

$$Pr(Z < \frac{K - 25)}{4 / \sqrt{27}} = .1$$

$$Pr(Z < 5.19 \ (\frac{K - 25)}{4} \ ) = .1$$

$$P^{-1}P(Z < \frac{5.19K - 129.75)}{4} = P^{-1} \ (.1)$$

$$\frac{5.19K - 129.75}{4} = -1.282$$

$$5.19K = -5.1282 + 129.75$$

$$K = 24.01$$

$\therefore$ Una prueba uniformemente más potente será rechazar H_0 si $\bar{x} \leq 24$.

101. a

Aunque la prueba del cociente de verosimilitud no es necesariamente una prueba uniformemente más potente tiene algunas veces propiedades óptimas para valores grandes de n. Para muestras con pocos elementos también existe trabajo al respecto.

El espíritu del método está basado en el principio de máxima verosimilitud, que escoge entre todas - las posibles poblaciones teóricas, aquélla que maximice la probabilidad de haber obtenido una muestra como la que se ha extraido de la población real en estudio. En el caso de la prueba de la hipótesis - H_o vs. H_a si:

$L(\underline{x}_n / H_0) > L(\underline{x}_n / H_a)$ se aceptará H_0 ,

$L(\underline{x}_n / H_0) < L(\underline{x}_n / H_a)$ se aceptará H_a

$L(\underline{x}_n / H_0) = L(\underline{x}_n / H_a)$ la muestra no da información y se tendrá que esperar a tener nuevas evidencias.

102. c

Sea $W = \{ (\mu, \sigma^2) / \mu = \mu_0 \quad 0 < \sigma^2 < \infty \}$ el espacio restringido de parámetros bajo la hipótesis alternativa. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ los elementos de la muestra

$$L(\hat{\omega}) = L(\mu_0, \sigma^2, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_1^n (x_i - \mu_0)^2}{2\sigma^2}}$$

pero maximizaremos $L(\omega)$ denotado por $L(\hat{\omega})$ mediante la sustitución de $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_1^n (x_i - \mu_0)^2}{n}$

$$\text{así} \quad L(\hat{\omega}) = \left(\frac{1}{2\pi \frac{\sum_1^n (x_i - \mu_0)^2}{n}}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_1^n (x_i - \mu_0)^2}{2\sum_1^n (x_i - \mu_0)^2 / n}}$$

103. d Sea $\Omega = \{ (\mu, \sigma^2) / -\infty < \mu < \infty ; 0 < \sigma^2 < \infty \}$ el espacio paramétrico.

$$L(\Omega) = L(\mu, \sigma^2; x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} e^{\frac{-\Sigma(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Para encontrar $L(\hat{\Omega})$ sabemos que los estimadores máximo versímiles de μ y σ^2 son respectivamente:

$$\hat{\mu} = \Sigma \frac{x_i}{n} \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

por lo que:

$$L(\hat{\Omega}) = \left(\frac{1}{2\pi \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}}\right)^{n/2} e^{\frac{-\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{2\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}}}$$

104. b En este caso tendremos que

$$\omega = \{(\mu, \sigma^2) \;/\; \mu = \mu_0, 0 < \sigma^2\}$$

$$\Omega = \{(\mu, \sigma^2) \;/ -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0\}$$

$$L(\omega) = L(\mu_0, \sigma^2;\; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} e^{\frac{-\Sigma(x_i - \mu_0)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(\hat{\omega}) = (1/2\pi\sigma^2)^{n/2} e^{\frac{-\Sigma(x_i - \mu_0)^2}{2\sigma^2}}$$

puesto que σ^2 es conocida

$$L(\Omega) = L(\mu, \sigma^2, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} e^{\frac{-\Sigma(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(\hat{\Omega}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} e^{\frac{-\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

puesto que el estimador máximo verosímil de μ es $\bar{x}$

$$\lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} = e^{\frac{-\Sigma(x_i - \mu_\mu)^2}{2\sigma^2} + \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

$$= e^{\frac{\Sigma x_i \mu_0}{\sigma^2} - \frac{\Sigma \mu_0^2}{2\sigma^2} - \frac{\Sigma x_i \bar{x}}{\sigma^2} + \frac{\Sigma \bar{x}^2}{2\sigma^2}}$$

$$= e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x} - \mu_0)^2}$$

tomando logaritmos

$$\log \lambda = -\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x} - \mu_0)^2$$

105. b Del ejercicio anterior tenemos que la región crítica será:

$$C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;/\; \frac{-n}{2\sigma^2}(\bar{x} - \mu_0)^2 < K\}$$

de donde $\quad n(\bar{x} - \mu_0)^2 > K'$

$$<=> (\bar{x} - \mu_0)^2 > K''$$

$$C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;/\; (\bar{x} - \mu_0)^2 > K''\}$$

Para encontrar el valor de K'' de acuerdo a un nivel α de significancia dado, necesitamos la distribución del estadístico $(\bar{x} - \mu_0)^2$.

$$\alpha = \Pr(\bar{x} - \mu_0)^2 > C / H_0)$$

$$= \Pr\left(\frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2} > \frac{C}{\sigma^2}\right)$$

Pero $\frac{(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$

106. d Usando el criterio del cociente de verosimilitud llegamos a que

$$\lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} = \frac{\left(\dfrac{1}{2\pi \dfrac{\Sigma(x_i-\mu_0)^2}{n}}\right)^{n/2}}{\left(\dfrac{1}{2\pi \dfrac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n}}\right)^{n/2}} \cdot \frac{e^{\dfrac{-\Sigma(x_i-\mu_0)^2}{2\dfrac{\Sigma(x_i-\mu_0)^2}{n}}}}{e^{\dfrac{-\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{2\dfrac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n}}}}$$

$$\lambda = \left(\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{\Sigma(x_i-\mu_0)^2}\right)^{n/2}$$

de donde la región crítica es:

$$C = \left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \;/\; \left(\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{\Sigma(x_i-\mu_0)^2}\right)^{n/2} < K\right\}$$

Para determinar K dado un α, encontraremos la distribución del estadístico que servirá como base de la prueba.

$$\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{\Sigma(x_i-\mu_0)^2} = \frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu_0)^2} = \frac{1}{1+\dfrac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}} < K$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\bar{x}-\mu_0)^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})} > K_2 \quad \text{pero} \quad \alpha = \Pr\left\{\frac{(\bar{x}-\mu_0)^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2} > K_2/H_0\right\}$$

$$\alpha = \Pr\left(\frac{(\bar{x}-\mu_0)}{\sqrt{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} > \frac{\sqrt{K_2}\,\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}\right)$$

$$\alpha = \Pr\ Z > \frac{K_2\ \sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$$

Como $Z \sim T(n-1)$ de tablas se encuentra el valor de K

La prueba será calcular

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{(\bar{x} - \mu)\ \sqrt{n}}{\dfrac{\sqrt{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}}{\sqrt{n-1}}}$$

y rechazar H_0 si:

$$|\ T(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ | \geqslant K$$

107. c

$$\Omega = \{ (\mu, \sigma^2) ; -\infty < \mu < \infty,\ \sigma_0^2 < \sigma^2 < \infty \}$$

$$\omega = \{ (\mu, \sigma^2) ; -\infty < \mu < \infty,\ \sigma^2 = \sigma_0^2 \}$$

Por el problema 103 sabemos que

$$L(\hat{\Omega}) = \left(\frac{1}{2\pi \dfrac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n}} \right)^{n/2} e^{- \dfrac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{2 \Sigma (x_i - \bar{x})^2 / n}}$$

$$L(\hat{\omega}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2} \right)^{n/2} e^{- \dfrac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{2\sigma_0^2}}$$

$$\lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} = \frac{\left(\dfrac{1}{\sigma_0^2} \right)^{n/2}}{\left(\dfrac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n} \right)^{n/2}}\ e^{- \dfrac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{2\sigma_0^2} + \dfrac{n}{2}}$$

$$\lambda = \left(\frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n\sigma_0^2} \right)^{n/2} e^{-\frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{2\sigma_0^2} + \frac{n}{2}}$$

$$\lambda = \left(\frac{U}{n} \right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2} (U - n)}$$

haciendo $U = \dfrac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2}$

$\lambda = f(U)$

de donde se puede efectuar la prueba usando como criterio a U, que tiene una distribución $\chi^2 (n - 1)$.

108. a

$$T = \frac{\sqrt{\frac{64}{16}} \; (75.2 - 78.6)}{\sqrt{\frac{71.2 + 54.8}{14}}} = \frac{-6.8}{3} = -2.26$$

$|T| = 2.26$ $\qquad$ $.05 = Pr\,(|T| \geq C; H_0)$

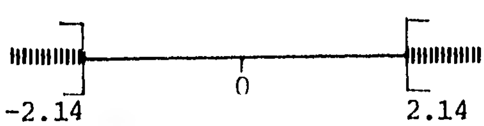
$\qquad\qquad\qquad\quad$ $.95 = Pr\,(|T| < C; H_0)$

buscando en tablas $T_{0.975}(14) = 2.145$

de donde $T_{.975}(14) < |T|$ i. e $2.14 < 2.26$,

para $\alpha = .05$ $C = 2.14$ la siguiente gráfica muestra

la región de rechazo



$\therefore$ la hipótesis $H_0: \mu_1 = \mu_2$ es rechazada

109. $\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$

1. El análisis del primer tipo de prueba se encuentra desarrollado en la pág. 151 inciso 3 de la Comunicación Interna # 42 y está basado en el concepto de pruebas de hipótesis sobre regiones similares.

2. El desarrollo está contemplado en la pág. 153 - 4 de la Comunicación Interna # 42.

3. El anális está en la pág. 155-5 de Comunicación - Interna # 42.

110. d

a) Mood - pág. 347

b) Mood - pág. 347

c) El resultado del teorema 12.6 del Mood - pág. 346

La opción d, es la falsa puesto que en ningún momento el criterio del cociente de verosimilitud se restringe a un tipo de densidades.

111. a

La opción a es falsa puesto que el hecho de que $\lambda \to 1$ implica que el estimador de máxima verosimilitud - coincide o se halla próximo a ω, la muestra se considerará consistente con H_0 y λ diferirá poco de 1.

En cuanto a las opciones b y d son resultados del teorema 12-7 del capítulo 12 del Mood.

La opción c esta dentro del marco teórico del capí tulo 10 del Hogg.

RELACION DE LOS REACTIVOS CON LOS CONTENIDOS DEL PROGRAMA

Estadística I

Temario

Parte 1. Conceptos generales

I. Introducción

I.1 ¿Qué es la Probabilidad? Interpretaciones.

I.2 ¿Qué es la Estadística? 1, 2, 3.

I.3 La Importancia de los Módelos.

Exámen

II. Estadística Descriptiva. 2.

II.1 Datos y Variables. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.

II.2 Escalas. 14, 15, 16.

II.3 Registro de Variables. Tablas de Frecuencias.

II.4 Histogramas y Polígonos de Frecuencias. 17, 18, 19, 20, 21, 22.

II.5 Medidas de Tendencia Central. 24, 25, 26, 27, 28.

II.6 Medidas de Dispersión. 29.

Exámen

Parte 2. Enfoque Clásico

III. Estimación Puntual.

III.1 Suficiencia. Función de Verosimilitud. 32, 33, 34, 35, 36.

III.2 Invarianza. 51.

III.3 Error Cuadrático Medio

III.4 Varianza Mínima. 41, 42, 43, 44.

III.5 Insesgamiento. Consistencia. 38, 45, 46

III.6 Cota Inferior de Cramér-Rao. Eficiencia 39, 40.

III.7 Completez. 37.

III.8 Método de Momentos. 48.

III.9 Método de Máxima Verosimilitud. 47, 50, 52, 53.

Examen

IV. Estimación por Intervalos.

IV.1 Intervalos Aleatorios. 57, 58, 59, 60, 68.

IV.2 Intervalos de Confianza. 61, 62, 63, 65, 66, 67, 69.

Examen

V. Pruebas de Hipótesis.

V.1 Hipótesis Estadísticas. 70, 72.

V.2 Hipótesis Simples y Compuestas. 71.

V.3 Hipótesis Nula y Alternativa. 79, 91.

V.4 Región Crítica. 73, 77, 78, 80, 81, 88, 89, 90, 109.

V.5 Error Tipo I y Tipo II. 76, 84, 85.

V.6 Teorema de Neyman-Pearson. 86, 87, 92, 93.

V.7 Función Potencia. 74, 75, 95.

V.8 Pruebas Uniformemente más Potentes. 96, 97, 98, 99, 100, 101.

V.9 Lema de Neyman-Pearson.

V.10 Razón de Verosimilitudes, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108.

Examen.

Parte 3. El Enfoque Bayesiano.

VI. Distribución Apriori.

VII. Teorema de Bayes. Distribución Posteriori.

VIII. Intervalos de Máxima Densidad.

IX. Decisiones

El reactivo 23 es de información necesaria en Estadística.
Los reactivos 30, 31, 37, 49, son sobre conceptos referentes a teoría de Estimación Puntual.
Los reactivos 54, 55, 56, 64 son material teórico de estimación por intervalos.
Los reactivos 82,83, 94, 110, 111 son referentes a conceptos generales sobre Pruebas de Hipótesis.

APENDICE.

Fuente: Consideraciones relativas a la postulación y contrastación de hipótesis Científicas por Ignacio Méndez

Medición. Caracterización o tipificación de las modalidades de una característica o propiedad de un fenómeno.

De acuerdo a la forma de caracterización se tienen las siguientes escalas de Medición (según Stevens. Science 1944).

			E J E M P L O S	
Escala	Operaciones Básicas empíricas	Cambios Permisibles	Propiedad Medida	Valores de la variable
NOMINAL	Determinación de igualdad o pertenencia a una categoría	Cambios en los nombres de las categorías	S E X O Estado de Salud	Masculino y femenino Sano y Enfermo
ORDINAL	Determinación del grado de intensidad de la característica sin especificar posición exacta	Cambios que mantengan las relaciones de orden	Calificaciones Lugares en Competencia Sentimiento presente a una propuesta de ley o un cambio social	NA, S, B, MB 1o., 2o., 3o. Muy en contra en contra neutral a favor muy a favor
INTERVALO	Determinación de la igualdad de intervalos o diferencias	Se puede cambiar la unidad de medida y el origen	Temperatura	Números enteros y fraccionarios (irracionales)
RELACION O RAZON	Determinación de igualdad de relaciones o proporciones	Se puede cambiar la unidad de medida pero no el origen	Concentración de sustancias en tejidos animales o vegetales	Números enteros racionales
ABSOLUTA	Determinación del número de elementos. Conteo de unidades	No se puede cambiar la unidad de medida ni el origen	Número de eritrocitos por m^3. Número de hijos por familia. Número de flagelas de una bacteria.	Números enteros

VARIABLES	CATEGORICAS →	NUMERICAS	
ESCALA	NOMINAL ORDINAL	ABSOLUTA,	INTERVALO RELACION
SEGUN VALORES	DISCRETAS →		CONTINUAS

BIBLIOGRAFIA

- Hogg, R. V. and Craig, A. T. Introduction to Mathematical Statistics 3era. ed Macmillan, 1970.

- Mood and Graybill. Introducción a la Teoría de la Estadística, 1970. Ed. Mc Graw Hill

- Valencia, G., Mendoza, M. y Aranda, F. Introducción a la Inferencia Estadística. Comunicaciones Internas No. 42, Ciencias, UNAM, 1978.

- Winlkler, L. R. And Hays, L. W.

  Statistics Probability, Inference, and Decision, 1975.

- Lindgren, B. W. Statistical Theory 3era. ed Mcmillan, 1976.