UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROBABILIDAD EN EVENTOS BORROSOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER

EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A

GLORIA ISABEL MONROY CAZORLA

MEXICO, D. F. 1981

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

El presente trabajo surgió de los conceptos fundamentales de la Teoría Clásica de Probabilidad (axiomática) y de los relacionados con éstos en la teoría de Probabilidad desde el punto de vista de Subconjuntos Borrosos.

Teniendo como objetivo el mostrar que existe un enfoque diferente de la Teoría de Probabilidad, en el cual los conceptos clásicos son susceptibles a ser generalizados, logrando así una simplificación y un planteamiento de problemas que quizás antes no habrían sido posibles. Y al mismo tiempo crear una motivación para el estudio de esta teoría y/o el surgimiento de otros enfoques, para que así la Probabilidad pueda ser utilizada de manera óptima dependiendo del problema en cuestión y no restringiéndose únicamente al punto de vista clásico.

En el Capítulo I se presenta una recopilación de los conceptos fundamentales de Subconjuntos Borrosos que son necesarios para el tercer capítulo.

En el Capítulo II se hace una revisión de los conceptos fundamentales de la Teoría de Probabilidad Clásica. Para que en base a éstos se pueda hacer una analogía de los dos enfoques.

En el capítulo III se revisa fundamentalmente la obra de Kaufmann, en cuanto a la Teoría de Probabilidad Borrosa se refiere; exponiendo algunos ejemplos y analogías con la Teoría Clásica.

Para finalizar el trabajo se presenta un ejemplo ilustrativo desde el punto de vista Borroso y su relación con la Teoría Clásica así como las conclusiones correspondientes.

C A P I T U L O I
TEORIA DE SUBCONJUNTOS BORROSOS

El significado de la palabra Borroso es que un elemento es miembro de un Subconjunto solo de una manera incierta; a diferencia del concepto tradicional de pertenencia en el cual solo hay dos situaciones aceptables para un solo elemento: ser un elemento de o no ser un elemento de un subconjunto; cualquier lógica formal o Booliana, tiene esta base.

Entre los autores que se han interesado en el concepto de Borrosidad está L.A. Zadeh, quién introdujo la noción de membresía ponderada, es decir, un elemento puede pertenecer más o menos a un subconjunto y de ahí introducir el concepto fundamental de Subconjunto Borroso.

Se utiliza el término de subconjunto borroso y no de conjunto borroso debido a que un conjunto borroso nunca será un conjunto referencial, el cual siempre es un conjunto ordinario, es decir, una colección de conjuntos distintos y bien-especificados.

En este capítulo se enuncian las definiciones y conceptos principales de la Teoría de Subconjuntos Borrosos, y en particular aquellos que se van a utilizar después.

Si el lector desea profundizar o ampliar los conceptos aquí presentados puede consultar en la bibliografía citada.

1.1.- CONCEPTO DE SUBCONJUNTO BORROSO

Sea A un conjunto de E y x un elemento de E el cual puede pertenecer o no a A o solo una porción de él, es decir tiene un nivel de pertenencia:

Si tomamos una función de pertenencia $\mu_A(x)$ la cual toma valores en el intervalo $[0,1]$, 0 si $x \notin A$ y 1 si $x \in A$ si $\mu_A(x)$ está cercana a cero se puede decir que x es un miembro de A en forma pequeña, al contrario si $\mu_A(x)$ está cercana a uno se dirá que x es un miembro de A en forma grande.

Entonces un Subconjunto Borroso $\underset{\sim}{A}$ de E es:

$$\left\{ (x, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)) \right\} \quad , \quad \forall\, x \in E .$$

donde E es un conjunto de parejas ordenadas que puede ser nu_ merable o no y $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ es una función característica de per_ tenencia la cual toma valores en un conjunto ordenado M[1] (con_ junto de pertenencia) e indica el grado o nivel de pertenencia

---

1 donde el orden de M es el orden usual de los reales.

1.2.- OPERACIONES SIMPLES EN SUBCONJUNTOS BORROSOS

Sea E un conjunto y M su conjunto asociado de pertenencia, y sean $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ dos subconjuntos borrosos de E entonces:

i) Contención: $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}$

si: $\forall x \in E \, , \; \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \leq \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$

ii) Igualdad: $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B}$

si: $\forall x \in E \, , \; \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$

iii) Intersección: $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$

se define como: $\forall x \in E \, , \; \mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x) = Min\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\right)$

iv) Unión: $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$

se define como: $\forall x \in E \, , \; \mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) = Max\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\right)$

v) Complementación:

$\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ son complementarios si: $\forall x \in E \, , \; \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$

notación: $\underset{\sim}{B} = \bar{\underset{\sim}{A}}$

vi) Suma Disyuntiva:

se define como: $\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B} = (\underset{\sim}{A} \cap \bar{\underset{\sim}{B}}) \cup (\bar{\underset{\sim}{A}} \cup \underset{\sim}{B})$.

vii) Diferencia:

está definida por la relación: $\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A} \cap \bar{\underset{\sim}{B}}$

1.4.- SUBCONJUNTOS ORDINARIOS DE NIVEL α :

Sea $\alpha \in [0,1]$ se llama subconjunto ordinario de nivel α de un subconjunto borroso $\underset{\sim}{A}$ al conjunto ordinario:

$$A_\alpha = \{ x \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geqslant \alpha \}$$

1.5.- SUMA Y PRODUCTO ALGEBRAICO DE DOS SUBCONJUNTOS BORROSOS

Sea E un conjunto y M su conjunto asociado de pertenencia, y sean $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ subconjuntos borrosos de E entonces el producto algebraico $\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}$ es:

$$\forall x \in E : \quad \mu_{\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) .$$

De la misma forma se define la suma algebraica de estos dos subconjuntos denotada por $\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}$ es:

$$\forall x \in E : \quad \mu_{\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}} = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) .$$

Si $M = \{0, 1\}$ esto es, si estamos en el caso de subconjuntos ordinarios entonces:

$$A \cap B = A \cdot B$$
$$A \cup B = A + B.$$

Propiedades con respecto a la suma y el producto:

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{A}$$
$$\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{A}$$
$$(\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}) \cdot \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cdot (\underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{C})$$
$$(\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}) + \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} + (\underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{C})$$
$$\underset{\sim}{A} \cdot \phi = \phi$$
$$\underset{\sim}{A} + \phi = \underset{\sim}{A}$$
$$\underset{\sim}{A} \cdot E = \underset{\sim}{A}$$
$$\underset{\sim}{A} + E = E$$
$$\overline{(\overline{\underset{\sim}{A}})} = \underset{\sim}{A}$$
$$\overline{\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}} = \overline{\underset{\sim}{A}} + \overline{\underset{\sim}{B}}$$
$$\overline{\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}} = \overline{\underset{\sim}{A}} \cdot \overline{\underset{\sim}{B}}$$

1.6.- GRAFICA BORROSA:

Sean E_1 y E_2 dos conjuntos y x un elemento de E_1 y y un elemento de E_2. Sea el conjunto de pares ordenados (x, y) definidos en el conjunto producto $E_1 \times E_2$ entonces el subconjunto borroso $\underset{\sim}{G}$ talque :

$$\forall (x,y) \in E_1 \times E_2 : \quad \mu_{\underset{\sim}{G}}(x,y) \in M ,$$

donde M es el conjunto de pertenencia de $E_1 \times E_2$ es llamado gráfica borrosa. Esta definición se puede generalizar quedando de la siguiente manera:

Sean $E_1 \times E_2 \times \ldots E_n$ un conjunto producto y $x^{(i)} \in E_i$;

el subconjunto borroso $\underset{\sim}{G}$ tal que:

$\forall \ (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) \in E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \ : \ \mu_{\underset{\sim}{G}}(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) \in M$

donde M es el conjunto de pertenencia de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ se llama Gráfica Borrosa.

1.7.- RELACIONES BORROSAS:

Sea P un conjunto producto de n conjuntos y M su función de relación; una n-ésima relación borrosa es un subconjunto borroso de P que toma sus valores en M.

notación: una relación borrosa en $E_1 \times E_2$ se escribe como:

$$x \in E_1, \ y \in E_2 \ : \ x \underset{\sim}{R} y .$$

$\bigvee_x$ representa el máximo con respecto a x .

$\bigwedge_x$ representa el mínimo con respecto a x .

Proyección de una relación borrosa.

Se define la primera proyección de $\underset{\sim}{R}$ como:

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}^{(1)}(x) = \bigvee_y \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$$

La segunda proyección se define como:

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}^{(2)}(x) = \bigvee_x \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$$

y la proyección global como:

$$h(\underset{\sim}{R}) = \bigvee_{x} \bigvee_{y} \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$$

$$= \bigvee_{y} \bigvee_{x} \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$$

si $h(\underset{\sim}{R}) = 1$,se dice que la relación es normal.

si $h(\underset{\sim}{R}) < 1$,se dice que la relación es subnormal.

Unión de relacíones borrosas

Si $\underset{\sim}{R}_1, \dots, \underset{\sim}{R}_n$ son relaciones borrosas entonces:

$$\mu_{\underset{\sim}{R}_1 \cup \underset{\sim}{R}_2 \cup \dots \cup \underset{\sim}{R}_n}(x,y) = \bigvee_{\underset{\sim}{R}_i} \mu_{\underset{\sim}{R}_i}(x,y).$$

Intersección de relaciones borrosas.

Si $\underset{\sim}{R}_1, \dots, \underset{\sim}{R}_n$ son relaciones borrosas entonces:

$$\mu_{\underset{\sim}{R}_1 \cap \underset{\sim}{R}_2 \cap \dots \cap \underset{\sim}{R}_n}(x,y) = \bigwedge_{\underset{\sim}{R}_i} \mu_{\underset{\sim}{R}_i}(x,y).$$

Suma algebraica de dos relaciones borrosas.

$$\mu_{\underset{\sim}{R} \hat{+} \underset{\sim}{Z}}(x,y) = \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) + \mu_{\underset{\sim}{Z}}(x,y) - \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \cdot \mu_{\underset{\sim}{Z}}(x,y)$$

Producto algebraico de dos relaciones borrosas.

$$\mu_{\underset{\sim}{R}_1 \cdot \underset{\sim}{R}_2}(x,y) = \mu_{\underset{\sim}{R}_1}(x,y) \cdot \mu_{\underset{\sim}{R}_2}(x,y) .$$

Complemento de una relación borrosa.

$$\forall (x,y) \in E_1 \times E_2 : \mu_{\bar{\underset{\sim}{R}}}(x,y) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) .$$

1.8.- COMPOSICIÓN DE DOS RELACIONES BORROSAS.

Composición Max-Min.

Sean $\underset{\sim}{R}_1 \subset X \times Y$ y $\underset{\sim}{R}_2 \subset Y \times Z$,se define la composición max-min de $\underset{\sim}{R}_1$ y $\underset{\sim}{R}_2$ como:

$$\mu_{\underset{\sim}{R}_2 \circ \underset{\sim}{R}_1}(x,z) = \bigvee_y \left[\mu_{\underset{\sim}{R}_1}(x,y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{R}_2}(y,z) \right]$$

donde $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$.

Composición Max-prod.

$$\mu_{\underset{\sim}{R}_2 \cdot \underset{\sim}{R}_1}(x,z) = \bigvee_y \left[\mu_{\underset{\sim}{R}_1}(x,y) \cdot \mu_{\underset{\sim}{R}_2}(y,z) \right]$$

1.9.- SUBCONJUNTOS BORROSOS CONDICIONALES.

Un subconjunto $\underset{\sim}{B}(x) \subset E_2$ es condicionado en E_1, si su función de pertenencia depende de $x \in E_1$, como un parámetro, entonces: la función de membresía condicional será denotada por:

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(y \| x) ,$$

donde $x \in E_1$ y $y \in E_2$.

Si un subconjunto $\underset{\sim}{A} \subset E_1$, induce a un subconjunto borroso $\underset{\sim}{B} \subset E_2$ entonces su función de pertenencia es:

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(y) = \underset{x \in E_1}{Max} \left(Min \left[\mu_{\underset{\sim}{B}}(y \| x) , \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \right] \right)$$

Sea $\underset{\sim}{X} \subset E_1$ y $\underset{\sim}{Y} \subset E_2$; supongamos $\underset{\sim}{R}$ es una relación borrosa entre E_1 y E_2 , si $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{X}$ entonces $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{Y}$ através de la relación $\underset{\sim}{R}$ es decir:

$$\underset{\sim}{A} \underset{\underset{\sim}{R}}{\rightsquigarrow} \underset{\sim}{B} \ ;$$

si $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$ es la función de pertenencia de la relación borrosa $\underset{\sim}{R}$, $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ de $\underset{\sim}{A}$ y $\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$ de $\underset{\sim}{B}$ entonces:

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(y) = \underset{x \in E_1}{Max} \ Min \left[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \right]$$

$$= \bigvee_x \left[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \right]$$

1.10.- PRINCIPALES PROPIEDADES DE LAS RELACIONES BORROSAS.

Sean $E_1 = E_2 = E$ y $M = [0, 1]$.

i) Simetría:

Una relación borrosa binaria simétrica está definida por:

$$\forall (x,y) \in E_1 \times E_2 : \left(\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) = M \right) \Rightarrow \left(\mu_{\underset{\sim}{R}}(y,x) = M \right)$$

ii) Reflexividad.

$$\forall \ (x,y) \in E_1 \times E_2 : \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,x) = 1 \ .$$

iii) Transitividad

Sean x , y , $z \in E$ entonces:

$$\forall \ (x,y), (y,z), (x,z) \in E \times E :$$

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z) \geqslant \underset{y}{Max} \left[Min \left(\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y), \mu_{\underset{\sim}{R}}(y,z) \right) \right].$$

ó $$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z) \geqslant \bigvee_y \left[\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{R}}(y,z) \right].$$

Las propiedades anteriores que definen la transitividad pueden -
ser representadas por:

$$\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R} \subset \underset{\sim}{R}$$

C A P I T U L O II

TEORIA CLASICA DE PROBABILIDAD

La Teoría Clásica de Probabilidad surge de la noción intuitiva de frecuencia, es decir, si un experimento E es realizado N veces "bajo idénticas condiciones" y en $N(A)$ de estas veces se observa que ocurre el evento A entonces $N(A)/N$ tiende en el límite cuando N tiende a infinito a un número p , $0 \leq p \leq 1$ al cual puede llamársele la probabilidad de que el resultado o conjunto de resultados ocurra.

Para la construcción de este modelo se define un espacio muestral Ω finito no vacío en el cual para cada posible resultado del experimento corresponda un elemento $\omega \in \Omega$ Teniendo que para un mismo experimento puedan corresponder diferentes espacios muestrales escogiendose el más adecuado para el experimento. A cada evento A corresponde un conjunto en Ω y se dice que A ocurre si sólo si el resultado $\omega \in A \subset \Omega$.

Esta forma de definir la probabilidad nos lleva a considerarla como una función la cual asigna un número no negativo ($[0, 1]$) a conjuntos A de resultados; con las siguientes propiedades:

$$P(\Omega) = 1$$

$$A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Para todo subconjunto A de Ω puede asignarsele la probabilidad:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i P_i \quad \text{donde} \quad \delta_i = \begin{cases} 1 \text{ si solo si } & \omega_i \in A \\ 0 \text{ otro caso} & \end{cases}$$

y $P_1, P_2, \ldots, P_N$ son las probabilidades asignadas a los conjuntos simples $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_N\}$ en donde $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N \in \Omega$

El desarrollo subsecuente de la Teoría de Probabilidad fué como en cualquier otra rama de las matemáticas, su construcción a partir de axiomas como resultado de una acumulación de hechos y análisis lógicos de los resultados obtenidos con el propósito de revelar la base actual de hechos primarios.

La construcción axiomática de los principios de la Teoría de Probabilidad proceden de las propiedades básicas de la probabilidad clásica y de las definiciones estadísticas,o sea,que la definición axiomática incluye ambas definiciones la clásica y la estadística como casos particulares y cubriendo así las deficiencias de cada una de ellas. De esta forma es posible construir una perfecta estructura lógica de la Teoría Moderna de Probabilidad.

A.N.Kolmogorov propone una estrecha relación entre la Teoría de Probabilidad y la Teoría Moderna Métrica de Funciones y también con la Teoría de Conjuntos.

En los axiomas de Kolmogorov el concepto de evento aleatorio no es primario; sin embargo, en la definición geométrica de probabilidad si es importante; una región G del espacio es examinada (una linea recta,un plano, etc.) en la cual un punto es elegido aleatoriamente; aquí el evento aleatorio cae en una cierta subregión de G . Así todos los eventos aleatorios forman un subconjunto del conjunto de puntos G . Esta idea es el concepto general de evento aleatorio en los axiomas de Kolmogorov.

Kolmogorov parte de un espacio Ω de eventos simples, más tarde fué considerada una familia F de subconjuntos de Ω , los elementos de F son llamados eventos aleatorios.

Los requerimientos para la estructura de F son:

i) F contiene a Ω

ii) Si A y B (subconjuntos de Ω) son elementos de F entonces $A+B$, AB ,incluyendo A^c y B^c también lo son.

iii) Si los subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ del conjunto Ω son elementos de F entonces la suma $A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$ y el producto $A_1 A_2 \ldots A_n \ldots$ también son elementos de F .

El conjunto $\mathcal{F}$ (clase de eventos) así formado es un Campo de-Borel, otro término que se usa para llamarle es " σ -Algebra"

Axioma 1.- A cada evento aleatorio A que está contenido en el campo $\mathcal{F}$ está asociado un número no negativo $P(A)$ llamado probabilidad de A.

Axioma 2.- $P(\Omega) = 1$.

Axioma 3.- Si los eventos $A_1, A_2, \cdots$ son mutuamente ajenos entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Lema 1.-

i) La probabilidad del evento imposible es cero.

ii) para cualquier evento A :

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

iii) $0 \leq P(A) \leq 1$.

iv) Si A está contenido en B entonces:

$$P(A) \leq P(B)$$

v) Sean A y B dos eventos arbitrarios no ajenos entonces:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$\therefore \quad P(A+B) \leq P(A) + P(B).$$

por inducción tenemos:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Propiedades de la Probabilidad.

i) $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$

ii) $P\left(\bigcup_n A_n\right) = 1 - P\left(\bigcap_n A_n^c\right)$

Un espacio de probabilidad se denotará por: (Ω, A, P) donde Ω es un conjunto, un σ -álgebra de subconjuntos A y P es una medida de probabilidad definida en A.

Teorema 1.

i) Sean $A_n, n \geq 1$ eventos. Si $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ y $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ entonces: $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.

ii) Si $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ y $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ entonces: $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$

Definición 1.-

Sean A y B dos eventos tales que $P(A) > 0$ entonces la probabilidad condicional de B dado A, $P(B/A)$ es definida como:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n eventos mutuamente ajenos con unión igual a Ω, sea B un evento tal que $P(B) > 0$ y supongamos que $P(B/A_k)$ y $P(A_k)$ están especificados para $1 \leq k \leq n$ entonces:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)\,P(B/A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\,P(B/A_k)}$$

Definición 2.-

Dos eventos A y B son independientes si solo si:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

Definición 3.-

Una variable aleatoria X discreta, valuada en los reales, en un espacio de probabilidad (Ω, A, P) es una función X - con dominio Ω y rango finito o un subconjunto contable infinito $\{x_1, x_2, \ldots, \}$ de números reales R tales que:

$\{\omega : X(\omega) = x_i\}$ es un evento para toda i.

Definición 4.-

La función f valuada en los reales (definida en R) por - $f(x) = P(X = x)$ se llama función de densidad discreta de - X . Un número x es llamado un posible valor de X si - $f(x) > 0$.

La función de densidad f de una variable aleatoria X discreta tiene las siguientes propiedades:

i) $f(x) \geq 0$, $x \in R$

ii) $\{x : f(x) \neq 0\}$ es finito o un subconjunto infinito - contable de R .

Sean $\{x_1, x_2, \ldots\}$ entonces $\sum_i f(x_i) = 1$

La función de distribución de la variable aleatoria o de la función de densidad f es:

$$F(t) = P[X \leq t] = \sum_{x \leq t} f(x) , \quad -\infty < t < \infty .$$

Definición 5.-

Un vector aleatorio X discreto r-dimensional es una función X de Ω a R^r tomando un finito o infinito números de valores $x_1, x_2, \ldots$ tales que:

$\{\omega, X(\omega) = x_i\}$ es un evento para toda i.

Entonces la función de densidad está definida por:

$$f(x_1, \ldots, x_r) = P[X_1 = x_1, \ldots, X_r = x_r] .$$

La probabilidad de que X esté en el subconjunto A de R^r se puede encontrar de la siguiente forma:

$$P[X \in A] = \sum_{x \in A} f(x) .$$

Sea $X = (X_1, X_2, \ldots, X_r)$ un vector aleatorio r-dimensional con densidad f entonces la función f es llamada densidad conjunta de las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_r$

La función de densidad de la variable aleatoria X_i es entonces la i-ésima densidad marginal de X entonces:

$$P[X=x] = P\left[\bigcup_i \{X=x, Y=y_i\}\right]$$

$$P[Y=y] = P\left[\bigcup_i \{X=x_i, Y=y\}\right].$$

Si se conoce la densidad conjunta de dos variables aleatorias discretas X y Y entonces se puede calcular f_X de X y f_Y de Y.

$$f_X(x) = \sum_y f(x,y),$$

$$f_Y(y) = \sum_x f(x,y).$$

Definición 6.-

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_r$, r-variables discretas con densidades $f_1, f_2, \ldots, f_r$, respectivamente, entonces se dice que estas variables aleatorias son mutuamente independientes si:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_r(x_r)$$

Sea X una variable aleatoria discreta que toma un finito número de valores $x_1, x_2, \ldots, x_r$ entonces el valor esperado de X es:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{r} x_i f(x_i).$$

Definición 7.-

Una variable aleatoria X en un espacio de probabilidad (Ω, A, P) es una función real $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ tal que para $-\infty < x < \infty$ $\{\omega \mid X(\omega) \leq x\}$ es un evento.

Definición 8.-

Una función de densidad para una variable continua es una función no negativa tal que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Nótese que si f es una función de densidad entonces la función F definida por: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$, $-\infty < x < \infty$, es llamada función de distribución continua la cual satisface las siguientes propiedades:

1).- $0 \leq F(x) \leq 1 \quad \forall x$,

2).- $\forall x \leq y$, $F(x) \leq F(y)$

3).- $F(-\infty) = 0$ y $F(+\infty) = 1$

4).- $F(x+) = F(x) \quad \forall x$.

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias y tienen función de densidad conjunta, entonces la función de densidad condicional de $X_{m+1}, \ldots, X_n$ dado $X_1, \ldots, X_m$ es definida por:

$$f_{X_{m+1},\ldots,X_n \mid X_1,\ldots,X_m}(x_{m+1},\ldots,x_n \mid x_1,\ldots,x_m)$$

$$= \frac{f(x_1,\ldots,x_n)}{f_{X_1,\ldots,X_m}(x_1,\ldots,x_m)} .$$

Definición 9.-

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f, entonces la esperanza de X es:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx.$$

C A P I T U L O III
PROBABILIDAD EN EVENTOS BORROSOS

El objetivo de este capítulo es mostrar como la noción de un evento borroso puede tener un significado preciso en el contexto de subconjuntos borrosos. Esto es, consiste en su mayoría de definiciones y en general la teoría presentada tiene naturaleza preliminar. No se intenta formular las definiciones rigurosamente, ni se intenta explorar en detalle cualquiera de las trayectorias a lo largo de las cuales la teoría clásica de probabilidad puede ser generalizada através del uso de conceptos derivados de la noción de un evento borroso.

Se introducirán algunas comparaciones con la teoría clásica de probabilidad. Se darán ejemplos únicamente en aquellos temas que así lo requieran pudiendo el lector recurrir a la bibliografía citada.

La noción de evento y su probabilidad constituyenlos conceptos básicos de la teoría de probabilidad. Como se vió anteriormente un evento es una colección específica de puntos en el espacio muestral, en contraste con la experiencia diaria en la cual uno se encuentra frecuentemente en situaciones en donde "un evento" es un borroso en lugar de una colección específica de puntos. Por ejemplo, los eventos mal definidos: "es un dia templado", " X es aproximadamente igual a cinco", "en veinte lanzamientos de una moneda hay algunas águilas más que soles" son borrosos debido a la impresición de las palabras utilizadas.

Los ejemplos expuestos tienen la intención de mostrar posibles formas de definir algunos de los conceptos elementales de la teoría de probabilidad en un contexto más general en el cual los eventos borrosos son apropiados. Parece que hay muchos conceptos y resultados en la teoría de probabilidad, teoría de la información y campos relacionados que admiten tal generalización.

En este parágrafo se tratará la noción de valuación siendo esta una definición tan general que puede considerarse una medida como un caso particular. Para que una familia de subconjuntos vulgares sea medible debe de constituir lo que se denomina un Cuerpo de Borel donde en particular si se encuentra un subconjunto se debe encontrar su complemento. En contraposición con este concepto en los subconjuntos borrosos la presencia del complemento (pseudo-complemento) no puede ser requerido ya que $\underset{\sim}{A} \cap \bar{\underset{\sim}{A}} \neq \Phi$ y $\bar{\underset{\sim}{A}} \cup \underset{\sim}{A} \neq E$ si $\underset{\sim}{A}$ es estrictamente borroso, por lo cual se considera una noción menos fuerte que la de un Cuerpo de Borel que se denomina "Semi-cuerpo de Borel", estando sujetos así la noción de valuación a este concepto así como una medida a un cuerpo de Borel.

Otra nota importante es: una medida debe ser aditiva mientras que para una valuación solo se considera la monotonía de la inclusión. Entonces podemos llamar a una valuación una - "medida borrrosa"

Se examinará el concepto de valuación de subconjuntos borrosos y el caso particular que constituye la probabilización de los subconjuntos borrosos.

Se propone llamar "Sensación" a un subconjunto borroso valuado, así como es llamado "Evento" a un subconjunto vulgar medido en probabilidad.

Se pueden definir para la valuación nociones condicionales y a posteriori así como se hace para probabilidades - Donde se verá como y bajo que condiciones puede hacerse.

Definición 1.

Sea un conjunto vulgar E considerado como un referencial y - una familia $\mathcal{S}$ de subconjuntos borrosos $\underset{\sim}{A} \subset E$ es decir: $\mathcal{S} \subset L^{E}$, con $L = [0,1]$.

Si las condiciones siguientes se satisfacen $\mathcal{S}$ se llamará un- "Semi-cuerpo de Borel".

1).- $\phi \in \mathcal{S}$ y $E \in \mathcal{S}$.

2).- $(\underset{\sim}{A} \in \mathcal{S}$ y $\underset{\sim}{B} \in \mathcal{S}) \Rightarrow (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} \in \mathcal{S})$.

3).- $(\underset{\sim}{A}_1 , \underset{\sim}{A}_2 , \ldots , \underset{\sim}{A}_i , \ldots \in \mathcal{S}) \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \underset{\sim}{A}_i \in \mathcal{S} \right)$.

La pareja $(E, \mathcal{S})$ será llamada "Espacio semi-boreliano".

Es claro que: un cuerpo de Borel es un semi-cuerpo- de Borel mientras que el recíproco no es cierto.

Aunque no se demostrará, ni se darán preámbulos al- respecto, se puede encontrar que:

1).- Un semi-cuerpo de Borel tiene la configuración de una la tiz distributiva.

2).- Un semi-cuerpo de Borel constituye una topología borrosa.

Definición 2.

Una valuación v es una función de $\mathcal{S}$ en $\mathbb{R}^+$ tal que:

1).- $v(\phi) = 0$ y $v(E) = 1$

2).- Si $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{S}$ y $\underset{\sim}{B} \in \mathcal{S}$ y $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}$

entonces $v(\underset{\sim}{A}) \leq v(B)$.

Esta propiedad es llamada monotonía en la inclusión.

La terna $(E, \mathcal{S}, v)$ se denomina "Espacio semi-boreliano de valuación v ".

Como una primera consecuencia podemos demostrar las siguien_-tes propiedades:

1).- $\forall (\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) \in \mathcal{S}^2 : v(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \geq v(\underset{\sim}{A}) \vee v(\underset{\sim}{B})$

2).- $\forall (\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) \in \mathcal{S}^2 : v(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \leq v(\underset{\sim}{A}) \wedge v(\underset{\sim}{B})$

Demostración

1.- Se sabe que $\underset{\sim}{A} \subset (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})$ y $\underset{\sim}{B} \subset \underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} \Rightarrow$

$$v(\underset{\sim}{A}) \leq v(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \quad y \quad v(\underset{\sim}{B}) \leq v(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})$$

$$\Rightarrow v(\underset{\sim}{A}) \vee v(B) \leq v(A \cup B).$$

2.- Análogamente se tiene que $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} \subset \underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} \subset \underset{\sim}{B}$.

$$\upsilon(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \leq \upsilon(\underset{\sim}{A}) \quad y \quad \upsilon(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \leq \upsilon(\underset{\sim}{B})$$

$$\Rightarrow \upsilon(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \leq \upsilon(\underset{\sim}{A}) \wedge \upsilon(\underset{\sim}{B})$$

Una valuación en $\mathcal{S}$ tal que $\forall (\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) \in \mathcal{S}^2$, $\upsilon(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) = \upsilon(\underset{\sim}{A}) \vee \upsilon(\underset{\sim}{B})$ se dice que es " F - aditiva", (esta propiedad es análoga a la propiedad aditiva de la medida en subconjuntos vulgares).

Todo subconjunto borroso $\underset{\sim}{C} \in E$ tal que $\underset{\sim}{C} \in \mathcal{S}$ es llamado subconjunto borroso $\mathcal{S}$ -valuable.

Se harán las siguientes observaciones:

1).- Una medida en R^+ es una valuación en R^+ y el recíproco - no es cierto, ya que en la noción de medida se pide la pro-- piedad de aditividad:

$$(A \cap B = \phi) \Rightarrow (m(A \cup B) = m(A) + m(B)),$$

donde una función $m(A)$ de conjuntos se llama medida si satisface:

i).- el dominio de $m(A)$ es un algebra τ_A de conjuntos: $m : \tau_A \longrightarrow R^+$

ii).- $m(A)$ es aditiva, esto es, para cualquier descomposición finita $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ de un conjunto $A \in \tilde{\tau}_m$ en conjuntos $A_k \in \tilde{\tau}_m$ se cumple:

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_k)$$

donde un algebra se define como: un sistema de conjuntos - $\tilde{\tau}$ que satisface las siguientes propiedades:

a).- $\phi \in \tilde{\tau}$

b).- $A \in \tilde{\tau}$, $B \in \tilde{\tau} \Rightarrow (A \cap B) \in \tilde{\tau}$

c).- $\forall A \in \tilde{\tau}$, $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$;

donde $A_k \in \tilde{\tau}$ son disjuntos dos a dos y A_i es un conjunto dado tal que $A_i \subset A$

Demostración (una medida es una valuación en R^+).

i).- $\phi = \phi \cup \phi \Rightarrow m(\phi) = m(\phi \cup \phi)$

$$= m(\phi) + m(\phi)$$

$$= 2\, m(\phi)$$

$$\Rightarrow 2\, m(\phi) - m(\phi) = 0$$

$$\therefore m(\phi) = 0 .$$

ii).- Como $\overset{(1)}{m}: \tau \longrightarrow R^+$ y se sabe que $[0,1]$ es isomorfo a R^+ entonces podemos normalizar m de tal forma que $m: \tau \rightarrow [0,1]$ sin perder ninguna propiedad, de esta manera se tiene que $m(\tau) = 1$.

iii).- $A \subset B$; $A \in \tau$, $B \in \tau$

$B = \bigcup_{i=1}^{n} B_k$ disjuntos dos a dos.

con $B_1 = A$ el primer conjunto dado

$$m(B) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k) = m(A) + \sum_{k=2}^{m} m(B_k) \Rightarrow m(B) \geq m(A)$$

2).- En un semi-cuerpo de Borel no interviene la pseudo-complementación, $\forall x \in E : \mu_{\bar{\underset{\sim}{A}}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$, lo que no impide que en ciertos casos se le tome en cuenta

3).- Una ley de probabilidad es una valuación y el recíproco no es cierto. Se demostrara más adelante.

E j e m p l o :

Sea el referencial $E = \{a, b, c, d\}$ y la familia $\mathcal{S} \subset L^E$ la siguiente:

---

1 donde M es una medida finita.

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{b} & \multicolumn{1}{c}{c} & \multicolumn{1}{c}{d} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{b} & \multicolumn{1}{c}{c} & \multicolumn{1}{c}{d} \\ \hline 0.2 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{b} & \multicolumn{1}{c}{c} & \multicolumn{1}{c}{d} \\ \hline 0.4 & 1 & 0.2 & 0.3 \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{b} & \multicolumn{1}{c}{c} & \multicolumn{1}{c}{d} \\ \hline 0.2 & 0.7 & 0.3 & 0.1 \\ \hline \end{array} , \right.$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{b} & \multicolumn{1}{c}{c} & \multicolumn{1}{c}{d} \\ \hline 0.4 & 1 & 0.3 & 0.3 \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{b} & \multicolumn{1}{c}{c} & \multicolumn{1}{c}{d} \\ \hline 0.2 & 0.7 & 1 & 0.1 \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{b} & \multicolumn{1}{c}{c} & \multicolumn{1}{c}{d} \\ \hline 0.6 & 1 & 0.3 & 0.3 \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{b} & \multicolumn{1}{c}{c} & \multicolumn{1}{c}{d} \\ \hline 0.4 & 1 & 1 & 0.3 \\ \hline \end{array} ,$$

$$\left. \begin{array}{|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{b} & \multicolumn{1}{c}{c} & \multicolumn{1}{c}{d} \\ \hline 0.6 & 1 & 1 & 0.3 \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{b} & \multicolumn{1}{c}{c} & \multicolumn{1}{c}{d} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right\} .$$

1) $\phi \in \mathcal{S}$, $E \in \mathcal{S}$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \in \mathcal{S} , \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \in \mathcal{S} .$$

2) $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{S}$, $\underset{\sim}{B} \in \mathcal{S} \Rightarrow \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} \in \mathcal{S}$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0.2 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ \hline \end{array} \cap \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0.4 & 1 & 0.2 & 0.3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0.2 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ \hline \end{array} \in \mathcal{S} .$$

Análogamente con los demás subconjuntos obtenemos.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0.2 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ \hline \end{array} \in \mathcal{S} .$$

3) $\bigcup_{i=1}^{\infty} \underset{\sim}{A}_i \in \mathcal{S}$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \cup \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0.2 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ \hline \end{array} \cup \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0.4 & 1 & 0.2 & 0.3 \\ \hline \end{array} \cup$$

$$\ldots \cup \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \in \mathcal{S} .$$

$\therefore$ es un semicuerpo de Borel.

$$\underset{\sim}{F} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 0.3 & 0.7 & 0.3 \\ \hline\end{array} \subset E .$$

$$\forall\ \underset{\sim}{X} \in \mathcal{P} \ , \forall\, x \in E \ : \quad v(\underset{\sim}{X}) = \bigvee_{x} \left(\mu_{\underset{\sim}{X}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{F}}(x) \right)$$

$$v\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\end{array}\right) = 0$$

$$v\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0.4 & 1 & 0.2 & 0.3 \\ \hline\end{array}\right) = 0.4$$

$$v\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0.4 & 1 & 0.3 & 0.3 \\ \hline\end{array}\right) = 0.4$$

$$v\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0.6 & 1 & 1 & 0.3 \\ \hline\end{array}\right) = 0.7$$

$$v\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0.6 & 1 & 0.3 & 0.3 \\ \hline\end{array}\right) = 0.6$$

$$v\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0.2 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ \hline\end{array}\right) = 0.3$$

$$v\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ \hline\end{array}\right) = 0.3$$

$$v\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0.2 & 0.7 & 1 & 0.1 \\ \hline\end{array}\right) = 0.7$$

$$v\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}\right) = 1$$

$$v\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0.4 & 1 & 1 & 0.3 \\ \hline\end{array}\right) = 0.7$$

PROBABILIDAD DE UN SUBCONJUNTO BORROSO._

Se considerará un tipo particular de valuación en el espacio - semi-boreliano $(E, \mathcal{S})$ que está dada por:

$\underset{\sim}{X} \in \mathcal{S}$, $\forall\ x \in E$:

$$v(\underset{\sim}{X}) = \int_E \mu_{\underset{\sim}{X}}(x)\, dF(x)$$

donde $F(x)$ es una regla de probabilidad de distribución a_ cumulada sobre E tal que:[1]

$$\int_E dF(x) = 1$$

Demostración (v es una valuación).

$$v(\phi) = \int_E (0)\, dF(x) = 0 \quad , \quad v(E) = \int_E 1\, dF(x) = 1$$

Sea $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B} \subset E$.

$$\int_E \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\, dF(x) - \int_E \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\, dF(x) =$$

$$= \int_E (\mu_{\underset{\sim}{B}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x))\, dF(x) \geq 0$$

ya que:

---

1) Es decir que $\forall\ x \in E$, $\mu_{\underset{\sim}{X}}(x)$ es medible por F

$\forall\, x \in E,\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geq 0$ entonces

$$\int_E \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\, dF(x) - \int_E \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\, dF(x) \geq 0$$

$$\int_E \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\, dF(x) \geq \int_E \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\, dF(x)$$

$$\therefore\ v(\underset{\sim}{B}) \geq v(\underset{\sim}{A}).$$

De acuerdo con la Teoría de Probabilidad Clásica la valuación $v(\underset{\sim}{X})$ dada de la forma anterior representa una "Esperanza matemática" la cual satisface los siguientes axiomas:

1).- Sea una familia $\mathscr{A} \subset L^E$, $L = [0,1]$ un semi-cuerpo de Borel.

2).- Para toda $A \in \mathscr{A}$ se definirá una valuación como la anterior.

3).- Donde la valuación satisface que:

$$v(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) + v(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) = v(\underset{\sim}{A}) + v(\underset{\sim}{B}).$$

Si se compararan los axiomas anteriores con los axiomas de Borel-Kolmogorov" de la teoría de probabilidad se tiene - que:

i).- Se puede observar que el axioma 3 es una generalización de la noción de aditividad de la teoría de probabilidad cuando $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \phi$.

ii).- En los axiomas 1, 2, 3 no interviene la complementación ya que no es posible.

iii).- Si se examina la valuación así definida, se tiene que la distribución $F(x)$ está definida en la forma clásica sobre E en donde los subconjuntos vulgares forman un cuerpo de Borel o si se prefiere una latiz de Borel.

---

1).- si $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \phi$ entonces $v(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) = v(\underset{\sim}{A}) + v(\underset{\sim}{B})$ no siendo el recíproco cierto.

Se demostró anteriormente que los axiomas 1 y 2 se satisfacen.

axioma 3.

$$\forall\, x \in E : \mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) ,$$

donde

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) = \vee \left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) , \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \right)$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x) = \wedge \left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) , \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \right)$$

i) Si $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \leq \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$, entonces

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \quad \text{y} \quad \mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$$

$$\therefore \mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

ii) si $\mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \leq \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$, entonces

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \quad \text{y} \quad \mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

$$\therefore \mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

Debido a que la integración es una operación aditiva se tiene:

$$\int_E \mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x)\,dF(x) + \int_E \mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x)\,dF(x) = \int_E \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\,dF(x) + \int_E \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\,dF(x).$$

entonces: $\upsilon(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) + \upsilon(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) = \upsilon(\underset{\sim}{A}) + \upsilon(\underset{\sim}{B})$.

Debido a estas razones se tiene la siguiente definición:

Definición 3

Sea $\underset{\sim}{X} \in \mathscr{S} \subset L^E$, $L = [0,1]$ entonces se define como "probabilidad del evento borroso $\underset{\sim}{X}$ " a la valuación dada como:[1]

$$\upsilon(\underset{\sim}{X}) = pr(\underset{\sim}{X}) = \int_E \mu_{\underset{\sim}{X}}(x)\,dF(x)$$

La cual tiene las siguientes propiedades:

1).- Si se define la pseudo-complementación de un subconjunto borroso como:

$\forall x \in E,\ \bar{\underset{\sim}{A}} \in \mathscr{S} : \quad pr(\bar{\underset{\sim}{A}}) = 1 - pr(\underset{\sim}{A})$

contrariamente a lo expuesto, lo cual no es imposible si $\bar{\underset{\sim}{A}} \in \mathscr{S}$.

2).- $\forall x \in E,\ \forall \underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathscr{S}$

i).- $pr(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) + pr(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) = pr(\underset{\sim}{A}) + pr(\underset{\sim}{B})$

---

1) Nótese que la definición dada está en función de la definición que se dá en la teoría clásica a la probabilidad.

si $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \phi$ (lo cual puede suceder, pero no es de pri_ mordial importancia para los eventos borrosos) entonces:

ii) $pr\,(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) = pr\,(\underset{\sim}{A}) + pr\,(\underset{\sim}{B})$.

es decir que los eventos borrosos son ajenos

La fórmula 2-i) se puede generalizar de la siguiente forma:

N=2

a) $pr\,(\underset{\sim}{A}_1 \cup \underset{\sim}{A}_2) + pr\,(\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2) = pr\,(\underset{\sim}{A}_1) + pr\,(\underset{\sim}{A}_2)$

lo cual se puede escribir como:

$$pr\left(\bigcup_{i=1}^{2} \underset{\sim}{A}_i\right) + pr\left(\bigcap_{i=1}^{2} \underset{\sim}{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{2} pr\,(\underset{\sim}{A}_i) ,$$

por lo que:

$$pr\left(\bigcup_{i=1}^{2} \underset{\sim}{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{2} pr\,(\underset{\sim}{A}_i) - pr\left(\bigcap_{i=1}^{2} \underset{\sim}{A}_i\right)$$

N=3

$$pr\left[(\underset{\sim}{A}_1 \cup \underset{\sim}{A}_2) \cup \underset{\sim}{A}_3\right] + pr\left[(\underset{\sim}{A}_1 \cup \underset{\sim}{A}_2) \cap \underset{\sim}{A}_3\right] = pr\,(\underset{\sim}{A}_1 \cup \underset{\sim}{A}_2) + pr\,(\underset{\sim}{A}_3)$$

Sustituyendo a)

$$pr\left(\bigcup_{i=1}^{3} \underset{\sim}{A}_i\right) = pr\,(\underset{\sim}{A}_1) + pr\,(\underset{\sim}{A}_2) - pr\,(\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2) + pr\,(\underset{\sim}{A}_3) - pr\left[(\underset{\sim}{A}_1 \cup \underset{\sim}{A}_2) \cap \underset{\sim}{A}_3\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{3} pr\,(\underset{\sim}{A}_i) - pr\,(\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2) - pr\,((\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_3) \cup (\underset{\sim}{A}_2 \cap \underset{\sim}{A}_3))$$

Sustituyendo la fórmula 2-i).

$$= \sum_{i=1}^{3} pr\,(\underset{\sim}{A}_i) - pr\,(\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2) - (pr\,(\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_3) + pr\,(\underset{\sim}{A}_2 \cap \underset{\sim}{A}_3)$$
$$- pr\,(\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_3 \cap \underset{\sim}{A}_2 \cap \underset{\sim}{A}_3))$$

$$= \sum_{i=1}^{3} pr\,(\underset{\sim}{A}_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ s=1 \\ i<s}}^{3} pr\,(\underset{\sim}{A}_i \cap \underset{\sim}{A}_s) + pr\,(\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2 \cap \underset{\sim}{A}_3)$$

Para N :

$$pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} pr(A_i) - \sum_{\substack{i=1\\ s=1\\ i<s}}^{n} pr(A_i \cap A_s)$$

$$+ \sum_{\substack{i=1\\ s=1\\ t=1\\ i<s<t}}^{n} pr(A_i \cap A_s \cap A_t) - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n+1} pr(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

Demostración.

Para N+1.

$$pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right) = pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + pr(A_{n+1}) - pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}\right) \text{ por 2 i)}$$

Sustituyendo la fórmula para N

$$= \sum_{i=1}^{n} pr(A_i) - \sum_{\substack{i=1\\ s=1\\ i<s}}^{n} pr(A_i \cap A_s) + \sum_{\substack{i=1\\ s=1\\ t=1\\ i<s<t}}^{n} pr(A_i \cap A_s \cap A_t) - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n+1} pr(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) + pr(A_{n+1}) - pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}\right).$$

$$- pr\left(\bigcup_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{A}_i \cap \underset{\sim}{A}_{n+1})\right) = \sum_{i=1}^{n} pr(\underset{\sim}{A}_i \cap \underset{\sim}{A}_{n+1}) - \sum_{\substack{i=1\\ s=1\\ i<s}}^{n} pr(\underset{\sim}{A}_i \cap \underset{\sim}{A}_{n+1} \cap \underset{\sim}{A}_s)$$

$$+ \sum_{\substack{i=1\\ s=1\\ t=1\\ i<s<t}}^{n} pr(\underset{\sim}{A}_i \cap \underset{\sim}{A}_{n+1} \cap \underset{\sim}{A}_s \cap \underset{\sim}{A}_t) - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n+1}\, pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap \underset{\sim}{A}_{n+1}\right).$$

Sustituyendo lo anterior.

$$pr\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} pr(\underset{\sim}{A}_i) - \sum_{\substack{i=1\\ s=1\\ i<s}}^{n} pr(\underset{\sim}{A}_i \cap \underset{\sim}{A}_s) - \sum_{i=1}^{n} pr(\underset{\sim}{A}_i \cap \underset{\sim}{A}_{n+1})$$

$$+ \sum_{\substack{i=1\\ s=1\\ t=1}}^{n} pr(\underset{\sim}{A}_i \cap \underset{\sim}{A}_s \cap A_t) + \sum_{\substack{i=1\\ s=1\\ i<s}}^{n} pr(\underset{\sim}{A}_i \cap \underset{\sim}{A}_{n+1} \cap \underset{\sim}{A}_s) - \ldots$$

$$\ldots - (-1)^{n+1}\, pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}_i \cap \underset{\sim}{A}_{n+1}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} pr(\underset{\sim}{A}_i) - \sum_{\substack{i=1\\ s=1\\ i<s}}^{n+1} pr(\underset{\sim}{A}_i \cap \underset{\sim}{A}_s) + \sum_{\substack{i=1\\ s=1\\ t=1\\ i<s<t}}^{n} pr(\underset{\sim}{A}_i \cap \underset{\sim}{A}_s \cap \underset{\sim}{A}_t) -$$

$$\ldots + (-1)^{n+2}\, pr\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right).$$

Definición 5.

Para dos eventos borrosos $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{S}$ y $\underset{\sim}{B} \in \mathcal{S}$ se define como probabilidad condicional a:

$$pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{B}) = \frac{pr(\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B})}{pr(\underset{\sim}{B})}$$

donde $pr(\underset{\sim}{B}) > 0$, sin embargo hay que mostrar que la probabilidad condicional es una valuación.

Demostración:

$$pr(\phi \mid \underset{\sim}{B}) = \frac{pr(\phi \cdot \underset{\sim}{B})}{pr(\underset{\sim}{B})}$$

$$pr(\phi \cdot \underset{\sim}{B}) = \int_E \mu_{\phi \cdot \underset{\sim}{B}}(x)\, dF(x)$$

$$\mu_{\phi \cdot \underset{\sim}{B}}(x) = \mu_\phi(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) = 0 \Rightarrow pr(\phi \cdot \underset{\sim}{B}) = 0$$

$$\therefore\ pr(\phi \mid \underset{\sim}{B}) = 0 .$$

$$pr(E \mid \underset{\sim}{B}) = \frac{pr(E \cdot \underset{\sim}{B})}{pr(\underset{\sim}{B})}$$

$$- \quad pr(E \cdot \underset{\sim}{B}) = \int_E \mu_{E \cdot \underset{\sim}{B}}(x)\, dF(x)$$

$$= \int_E \mu_E(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\, dF(x)$$

$$= \int_E \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\, dF(x) = pr(\underset{\sim}{B})$$

$$\therefore \quad pr(E \mid \underset{\sim}{B}) = \frac{pr(\underset{\sim}{B})}{pr(\underset{\sim}{B})} = 1$$

Sean $\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \underset{\sim}{B} \in \mathcal{S}$:

$$\forall\, x \in E: (\underset{\sim}{A}_1 \subset \underset{\sim}{A}_2) \Rightarrow (\underset{\sim}{A}_1 \cdot \underset{\sim}{B} \subset \underset{\sim}{A}_2 \cdot \underset{\sim}{B})$$

$$\Rightarrow \forall\, x \in E: \mu_{\underset{\sim}{A}_1 \cdot \underset{\sim}{B}}(x) \leq \mu_{\underset{\sim}{A}_2 \cdot \underset{\sim}{B}}(x)$$

$$\Rightarrow \int_E \mu_{\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}}(x)\, dF(x) \leq \int_E \mu_{\underset{\sim}{A}_2 \cdot \underset{\sim}{B}}(x)\, dF(x)$$

$$\Rightarrow \quad pr(\underset{\sim}{A}_1 \cdot \underset{\sim}{B}) \leq pr(\underset{\sim}{A}_2 \cdot \underset{\sim}{B})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{pr(\underset{\sim}{A}_1 \cdot B)}{pr(\underset{\sim}{B})} \leq \frac{pr(\underset{\sim}{A}_2 \cdot \underset{\sim}{B})}{pr(\underset{\sim}{B})}$$

$$\therefore \quad pr(\underset{\sim}{A}_1 \mid \underset{\sim}{B}) \leq pr(\underset{\sim}{A}_2 \mid \underset{\sim}{B}).$$

A continuación se demostrará que la probabilidad condicional cumple con las propiedades de una probabilidad.

$$(\underset{\sim}{A}_1 \cup \underset{\sim}{A}_2) \cdot \underset{\sim}{B} = (\underset{\sim}{A}_1 \cdot \underset{\sim}{B}) \cup (\underset{\sim}{A}_2 \cdot \underset{\sim}{B})$$

$$(\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2) \cdot \underset{\sim}{B} = (\underset{\sim}{A}_1 \cdot \underset{\sim}{B}) \cap (\underset{\sim}{A}_2 \cdot \underset{\sim}{B}).$$

entonces:

$$pr\left((\underset{\sim}{A}_1 \cup \underset{\sim}{A}_2) \cdot \underset{\sim}{B}\right) + pr\left((\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2) \cdot \underset{\sim}{B}\right) =$$

$$= pr\left((\underset{\sim}{A}_1 \cdot \underset{\sim}{B}) \cup (\underset{\sim}{A}_2 \cdot \underset{\sim}{B})\right) + pr\left((\underset{\sim}{A}_1 \cdot \underset{\sim}{B}) \cap (\underset{\sim}{A}_2 \cdot \underset{\sim}{B})\right)$$

$$= pr(\underset{\sim}{A}_1 \cdot \underset{\sim}{B}) + pr(\underset{\sim}{A}_2 \cdot \underset{\sim}{B}) - pr\left((\underset{\sim}{A}_1 \cdot \underset{\sim}{B}) \cap (\underset{\sim}{A}_2 \cdot \underset{\sim}{B})\right)$$

$$+ pr\left((\underset{\sim}{A}_1 \cdot \underset{\sim}{B}) \cap (\underset{\sim}{A}_2 \cdot \underset{\sim}{B})\right)$$

$$= pr(\underset{\sim}{A}_1 \cdot \underset{\sim}{B}) + pr(\underset{\sim}{A}_2 \cdot \underset{\sim}{B})$$

$$\frac{pr\left((\underset{\sim}{A}_1 \cup \underset{\sim}{A}_2) \cdot \underset{\sim}{B}\right)}{pr(\underset{\sim}{B})} + \frac{pr\left((\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2) \cdot \underset{\sim}{B}\right)}{pr(\underset{\sim}{B})}$$

$$= \frac{pr(\underset{\sim}{A}_1 \cdot \underset{\sim}{B})}{pr(\underset{\sim}{B})} + \frac{pr(\underset{\sim}{A}_2 \cdot \underset{\sim}{B})}{pr(\underset{\sim}{B})}.$$

$$\therefore\ pr(\underset{\sim}{A}_1 \cup \underset{\sim}{A}_2 | \underset{\sim}{B}) + pr(\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2 | \underset{\sim}{B}) = pr(\underset{\sim}{A}_1 | \underset{\sim}{B}) + pr(\underset{\sim}{A}_2 | \underset{\sim}{B}).$$

Por lo tanto la probabilidad condicional es una probabilidad.

Definición 6.

Sean $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{S}$ y $\underset{\sim}{B} \in \mathcal{S}$, se dice que $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ son independientes si:

$$pr(\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}) = pr(\underset{\sim}{A}) \cdot pr(\underset{\sim}{B}),$$

lo cual es equivalente a:

$$pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{B}) = pr(\underset{\sim}{A})$$

ó

$$pr(\underset{\sim}{B} \mid \underset{\sim}{A}) = pr(\underset{\sim}{B})$$

PROBABILIDAD DE BAYES O PROBABILIDAD A POSTERIORI.

Se tiene que, para eventos vulgares la fórmula de Bayes se representa como:

$$pr(E_i \mid A) = \frac{pr(A \mid E_i) \cdot pr(E_i)}{\sum_{i=1}^{n} pr(A \mid E_i) \cdot pr(E_i)}$$

Para el caso borroso se considera una partición del referencial E tal que $\bigcup_{i=1}^{n} \underset{\sim}{E_i} = E$

Sea $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{S}$, $\underset{\sim}{E_i} \in \mathcal{S}$ donde $\mathcal{S}$ es un semi-cuerpo de Bo rel y supongamos que $pr(\underset{\sim}{A}) > 0$, $pr(\underset{\sim}{E}_i) > 0$;

$$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{E}_i \subset \underset{\sim}{A} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{E}_1) \cup (\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{E}_2) \cup \ldots \cup (\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{E}_n) = \underset{\sim}{A}\cdot(\underset{\sim}{E}_1 \cup \underset{\sim}{E}_2 \cup \ldots \cup \underset{\sim}{E}_n)$$
$$= \underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{A}$$

1) $$pr(\underset{\sim}{A}) = pr(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{E}_1) + pr(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{E}_2) + \ldots + pr(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{E}_n)$$
$$- pr(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{E}_1\cdot\underset{\sim}{E}_2) - pr(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{E}_1\cdot\underset{\sim}{E}_3) - \ldots - pr(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{E}_{n-1}\cdot\underset{\sim}{E}_n)$$
$$+ \ldots + (-1)^{n+1}\, pr(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{E}_1\cdot\underset{\sim}{E}_2\cdot \ldots \cdot\underset{\sim}{E}_n).$$

se tiene que:

$$pr(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{E}_i) = pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_i)\cdot pr(\underset{\sim}{E}_i) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$pr(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{E}_i\cdot\underset{\sim}{E}_j) = pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_i\cdot\underset{\sim}{E}_j)\cdot pr(\underset{\sim}{E}_i\cdot\underset{\sim}{E}_j)$$

$$\vdots$$

$$pr(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{E}_1\cdot\underset{\sim}{E}_2\cdot\ldots\cdot\underset{\sim}{E}_n) = pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_1\cdot\underset{\sim}{E}_2\cdot\ldots\cdot\underset{\sim}{E}_n)\, pr(\underset{\sim}{E}_1\cdot\underset{\sim}{E}_2\cdot\ldots\cdot\underset{\sim}{E}_n)$$

sustituyendo lo anterior en 1 se tendrá

$$pr(\underset{\sim}{A}) = \sum_{i=1}^{n} pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_i)\, pr(\underset{\sim}{E}_i) - \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_i\cdot\underset{\sim}{E}_j)\, pr(\underset{\sim}{E}_i\cdot\underset{\sim}{E}_j)$$
$$+ \sum_{\substack{i,k,j=1\\ i<j<k}}^{n} pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_i\cdot\underset{\sim}{E}_j\cdot\underset{\sim}{E}_k)\, pr(\underset{\sim}{E}_i\cdot\underset{\sim}{E}_j\cdot\underset{\sim}{E}_k) \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+1} pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_1\cdot\underset{\sim}{E}_2\cdot\ldots\cdot\underset{\sim}{E}_n)\, pr(\underset{\sim}{E}_1\cdot\underset{\sim}{E}_2\cdot\ldots\cdot\underset{\sim}{E}_n)$$

$$pr(\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{E}_i) = pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_i) \cdot pr(\underset{\sim}{E}_i)$$

$$pr(\underset{\sim}{E}_i \mid \underset{\sim}{A}) = \frac{pr(\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{E}_i)}{pr(\underset{\sim}{A})}$$

$$pr(\underset{\sim}{E}_i \mid \underset{\sim}{A}) = \frac{pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_i)\, pr(\underset{\sim}{E}_i)}{pr(\underset{\sim}{A})} , \quad pr(\underset{\sim}{A}) > 0$$

lo cual representa la fórmula de Bayes.

E J E M P L O.

Sea $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ y sean los siguientes siete eventos borrosos pertenecientes a un mismo semi-cuerpo de Borel $\mathcal{S} \subset L^E$.

$$\underset{\sim}{E}_1 = \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0.3} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0.2} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array} ,$$

$$\underset{\sim}{E}_2 = \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0.6} & \multicolumn{1}{c|}{0.4} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0.1} & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array} ,$$

$$\underset{\sim}{E}_3 = \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0.5} & \multicolumn{1}{c|}{0.9} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array} ,$$

$$\underset{\sim}{E}_1 \cdot \underset{\sim}{E}_2 = \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0.18} & \multicolumn{1}{c|}{0.40} & \multicolumn{1}{c|}{0.20} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array} ,$$

$$\underset{\sim}{E}_1 \cdot \underset{\sim}{E}_3 = \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0.30} & \multicolumn{1}{c|}{0.50} & \multicolumn{1}{c|}{0.18} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array} ,$$

- $\underset{\sim}{E}_1 \cdot \underset{\sim}{E}_2 \cdot \underset{\sim}{E}_3 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0.18	0.20	0.18	0	0

y supongamos la siguiente regla de probabilidad:

$pr(x_1) = 0.1$, $pr(x_2) = 0.5$, $pr(x_3) = 0.1$, $pr(x_4) = 0.1$, $pr(x_5) = 0.2$.

se obtiene entonces:

$pr(\underset{\sim}{E}_1) = (0.1)(0.3) + (0.5)\cdot(1) + (0.1)\cdot(0.2) + (0.1)\cdot(0) + (0.2)\cdot(1) = 0.75$,

$pr(\underset{\sim}{E}_2) = (0.1)(0.6) + (0.5)(0.4) + (0.1)\cdot(1) + (0.1)\cdot(0.1) + (0.2)\cdot(1) = 0.57$,

$pr(\underset{\sim}{E}_3) = (0.1)(1) + (0.5)\cdot(0.5) + (0.1)\cdot(0.9) + (0.1)\cdot(1) + (0.2)\cdot(0) = 0.54$,

$pr(\underset{\sim}{E}_1 \cdot \underset{\sim}{E}_2) = (0.1)(0.18) + (0.5)\cdot(0.4) + (0.1)\cdot(0.2) + (0.1)\cdot(0) + (0.2)\cdot(1) = 0.438$,

$pr(\underset{\sim}{E}_1 \cdot \underset{\sim}{E}_3) = (0.1)\cdot(0.3) + (0.5)\cdot(0.5) + (0.1)\cdot(0.18) + (0.1)\cdot(0) + (0.2)\cdot(0) = 0.298$,

$pr(\underset{\sim}{E}_2 \cdot \underset{\sim}{E}_3) = (0.1)\cdot(0.6) + (0.5)\cdot(0.2) + (0.1)\cdot(0.9) + (0.1)\cdot(0.1) + (0.2)\cdot(0) = 0.260$,

$pr(\underset{\sim}{E}_1 \cdot \underset{\sim}{E}_2 \cdot \underset{\sim}{E}_3) = (0.1)\cdot(0.18) + (0.5)\cdot(0.2) + (0.1)\cdot(0.18) + (0.1)\cdot(0) + (0.2)\cdot(0) = 0.135$.

Supongamos las siguientes probabilidades condicionales.

$pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_1) = 0.20$, $pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_2) = 0.20$, $pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_3) = 0.50$

$pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_1 \cdot \underset{\sim}{E}_2) = 0.15$, $pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_1 \cdot \underset{\sim}{E}_3) = 0.18$,

$pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_2 \cdot \underset{\sim}{E}_3) = 0.15$, $pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_1 \cdot \underset{\sim}{E}_2 \cdot \underset{\sim}{E}_3) = 0.10$

- Se tiene entonces que:

$$
\begin{aligned}
pr(\underset{\sim}{A}) = {} & pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E_1}) \cdot pr(\underset{\sim}{E_1}) + pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E_2}) \cdot pr(\underset{\sim}{E_2}) \\
& + pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E_3}) \cdot pr(\underset{\sim}{E_3}) - pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E_1} \cdot \underset{\sim}{E_2}) \cdot pr(\underset{\sim}{E_1} \cdot \underset{\sim}{E_2}) \\
& - pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E_1} \cdot \underset{\sim}{E_3}) \cdot pr(\underset{\sim}{E_1} \cdot \underset{\sim}{E_3}) \\
& - pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E_2} \cdot \underset{\sim}{E_3})\, pr(\underset{\sim}{E_2} \cdot \underset{\sim}{E_3}) \\
& + pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E_1} \cdot \underset{\sim}{E_2} \cdot \underset{\sim}{E_3}) \cdot pr(\underset{\sim}{E_1} \cdot \underset{\sim}{E_2} \cdot \underset{\sim}{E_3}) . \\
= {} & (0.20) \cdot (0.75) + (0.20) \cdot (0.57) + (0.50) \cdot (0.54) \\
& - (0.15) \cdot (0.438) - (0.18) \cdot (0.298) - (0.15) \cdot (0.250) \\
& + (0.10) \cdot (0.136) \\
= {} & 0.38926.
\end{aligned}
$$

Y de ahí que:

$$pr(\underset{\sim}{E_1} \mid \underset{\sim}{A}) = \frac{pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E_1}) \cdot pr(\underset{\sim}{E_1})}{pr(\underset{\sim}{A})} = \frac{(0.20) \cdot (0.75)}{0.38926} = 0.38534,$$

$$pr(\underset{\sim}{E_2} \mid \underset{\sim}{A}) = \frac{pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E_2}) \cdot pr(\underset{\sim}{E_2})}{pr(\underset{\sim}{A})} = \frac{(0.20) \cdot (0.57)}{0.38926} = 0.29286,$$

$$pr(\underset{\sim}{E_3} \mid \underset{\sim}{A}) = \frac{pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E_3}) \cdot pr(\underset{\sim}{E_3})}{pr(\underset{\sim}{A})} = \frac{(0.50) \cdot (0.54)}{0.38926} = 0.69362.$$

$$pr(\underset{\sim}{E_1}\cdot\underset{\sim}{E_2}|\underset{\sim}{A}) = \frac{pr(\underset{\sim}{A}|\underset{\sim}{E_1}\cdot\underset{\sim}{E_2})\cdot pr(\underset{\sim}{E_1}\cdot\underset{\sim}{E_2})}{pr(\underset{\sim}{A})} = \frac{(0.15)\cdot(0.438)}{0.38926} = 0.16878,$$

$$pr(\underset{\sim}{E_1}\cdot\underset{\sim}{E_3}|\underset{\sim}{A}) = \frac{pr(\underset{\sim}{A}|\underset{\sim}{E_1}\cdot\underset{\sim}{E_3})\cdot pr(\underset{\sim}{E_1}\cdot\underset{\sim}{E_3})}{pr(\underset{\sim}{A})} = \frac{(0.18)\cdot(0.298)}{0.38926} = 0.13779,$$

$$pr(\underset{\sim}{E_2}\cdot\underset{\sim}{E_3}|\underset{\sim}{A}) = \frac{pr(\underset{\sim}{A}|\underset{\sim}{E_2}\cdot\underset{\sim}{E_3})\cdot pr(\underset{\sim}{E_2}\cdot\underset{\sim}{E_3})}{pr(\underset{\sim}{A})} = \frac{(0.15)(0.260)}{0.38926} = 0.10019;$$

$$pr(\underset{\sim}{E_1}\cdot\underset{\sim}{E_2}\cdot\underset{\sim}{E_3}|\underset{\sim}{A}) = \frac{pr(\underset{\sim}{A}|\underset{\sim}{E_1}\cdot\underset{\sim}{E_2}\cdot\underset{\sim}{E_3})\, pr(\underset{\sim}{E_1}\cdot\underset{\sim}{E_2}\cdot\underset{\sim}{E_3})}{pr(\underset{\sim}{A})} = \frac{(0.10)\cdot(0.136)}{0.38926} = 0.03493.$$

Se verifica entonces que:

$$pr(\underset{\sim}{E_1}|\underset{\sim}{A}) + pr(\underset{\sim}{E_2}|\underset{\sim}{A}) + pr(\underset{\sim}{E_3}|\underset{\sim}{A}) - pr(\underset{\sim}{E_1}\cdot\underset{\sim}{E_2}|\underset{\sim}{A})$$

$$- pr(\underset{\sim}{E_1}\cdot\underset{\sim}{E_3}|\underset{\sim}{A}) - pr(\underset{\sim}{E_2}\cdot\underset{\sim}{E_3}|\underset{\sim}{A}) + pr(\underset{\sim}{E_1}\cdot\underset{\sim}{E_2}\cdot\underset{\sim}{E_3}|\underset{\sim}{A})$$

$$= 0.38534 + 0.29286 + 0.69362 - 0.16878 - 0.13779$$

$$- 0.10019 + 0.03493$$

$$= 1.$$

Definición 7.

Sea un referencial E y un semi-cuerpo de Borel $\mathcal{S} \subset L^E$, $L = [0, 1]$.

Se define una valuación mínima condicional de $\underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{\mathcal{S}}$ dado $\underset{\sim}{B} \in \underset{\sim}{\mathcal{S}}$ como:

$$v(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{B}) = \frac{v(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})}{v(\underset{\sim}{B})}, \quad v(\underset{\sim}{B}) > 0$$

A continuación se demostrará que es una valuación.

$$v(\phi \mid \underset{\sim}{B}) = \frac{v(\phi \cap \underset{\sim}{B})}{v(\underset{\sim}{B})} = \frac{v(\phi)}{v(\underset{\sim}{B})} = 0 \quad \text{Por def. 2}$$

$$v(E \mid \underset{\sim}{B}) = \frac{v(\underset{\sim}{E} \cap \underset{\sim}{B})}{v(\underset{\sim}{B})} = \frac{v(\underset{\sim}{B})}{v(\underset{\sim}{B})} = 1$$

$\forall\ \underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \underset{\sim}{B} \in \mathcal{S}$:

$$\underset{\sim}{A}_1 \subset \underset{\sim}{A}_2 \Rightarrow \left(v(\underset{\sim}{A}_1) < v(\underset{\sim}{A}_2) \right) \quad \text{Por def. 2}$$

$$\underset{\sim}{A}_1 \subset \underset{\sim}{A}_2 \Rightarrow \underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{B} \subset A_2 \cap \underset{\sim}{B}$$

$$\Rightarrow v(\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{B}) < v(\underset{\sim}{A}_2 \cap \underset{\sim}{B})$$

$$\Rightarrow \frac{v(\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{B})}{v(\underset{\sim}{B})} < \frac{v(\underset{\sim}{A}_2 \cap \underset{\sim}{B})}{v(\underset{\sim}{B})} \Rightarrow v(\underset{\sim}{A}_1 \mid \underset{\sim}{B}) < v(\underset{\sim}{A}_2 \mid \underset{\sim}{B})$$

Se propone llamar Sensación a un subconjunto borroso que sea valuable y perteneciente a un semi-cuerpo de Borel, así como, a un subconjunto vulgar probabilístico se le llama evento.

Definición 8.

Dos sensaciones $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{S}$ y $\underset{\sim}{B} \in \mathcal{S}$ se dice que son min-independientes por la valuación v si:

$$v(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) = v(\underset{\sim}{A}) \wedge v(\underset{\sim}{B})$$

por lo cual

$$v(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{B}) = \frac{v(\underset{\sim}{A}) \wedge v(\underset{\sim}{B})}{v(\underset{\sim}{B})}$$

$$= \frac{v(\underset{\sim}{A})}{v(\underset{\sim}{B})} \quad \text{si} \quad v(\underset{\sim}{A}) < v(\underset{\sim}{B})$$

$$= \frac{v(\underset{\sim}{B})}{v(\underset{\sim}{B})} = 1 \quad \text{si} \quad v(\underset{\sim}{B}) < v(\underset{\sim}{A})$$

Teorema 1.

Sea un semi-cuerpo de Borel $\mathcal{S} \subset L^E$, $L = [0,1]$ y $\underset{\sim}{K} \in \mathcal{S}$ tal que el $\underset{x}{Max}\ \mu_{\underset{\sim}{K}}(x) = 1$, dada la valuación: $\forall \underset{\sim}{A} \in \mathcal{S}$

$$v(\underset{\sim}{A}) = \bigvee_{x \in E} \left(\mu_{\underset{\sim}{K}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \right)$$

y una partición del referencial E donde $\hat{\bigcup_{i}} \underset{\sim}{E}_i = E$, entonces

$$v(\underset{\sim}{A}) = \bigvee_{\underset{\sim}{E_i}} v(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{E_i})$$

Demostración:

$$v(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{E_i}) = \bigvee_{x \in E} \left(\mu_{\underset{\sim}{K}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{E_i}}(x) \right)$$

$$= \bigvee_{x \in E} \left(\mu_{\underset{\sim}{K}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{E_i}}(x) \right)$$

$$\bigvee_{\underset{\sim}{E_i}} v(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{E_i}) = \bigvee_{\underset{\sim}{E_i}} \left(\bigvee_{x \in E} \left(\mu_{\underset{\sim}{K}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{E_i}}(x) \right) \right)$$

Por otra parte se puede demostrar que:

$$\bigvee_{\underset{\sim}{E_i}} \left[\bigvee_{x \in E} \left(\mu_{\underset{\sim}{K}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{E_i}}(x) \right) \right] =$$

$$= \bigvee_{x \in E} \left[\bigvee_{\underset{\sim}{E_i}} \left(\mu_{\underset{\sim}{K}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{E_i}}(x) \right) \right]$$

$$= \bigvee_{x \in E} \left[\mu_{\underset{\sim}{K}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \left(\bigvee_{\underset{\sim}{E_i}} \mu_{\underset{\sim}{E_i}}(x) \right) \right]$$

pero $\bigvee_{\underset{\sim}{E}_i} \mu_{\underset{\sim}{E}_i}(x) = 1$ por ser $\underset{\sim}{E}_i$ de la partición,

$$\bigvee_{\underset{\sim}{E}_i} v(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{E}_i) = \bigvee_{x \in E} [\mu_{\underset{\sim}{K}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)] = v(\underset{\sim}{A})$$

$$\therefore \quad v(\underset{\sim}{A}) = \bigvee_{\underset{\sim}{E}_i} v(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{E}_i)$$

Definición 9.

Sea un semi-cuerpo de Borel $\mathcal{S} \subset L^E$, $L = [0,1]$ y una partición borrosa $\bigcup_{i=1}^{n} \underset{\sim}{E}_i = E$, $\underset{\sim}{E}_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ si $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{S}$ y se tiene una valuación del tipo del teorema 1 donde: $v(\underset{\sim}{A}) > 0$, $v(\underset{\sim}{E}_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$v(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_i) = \frac{v(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{E}_i)}{v(\underset{\sim}{E}_i)},$$

$$v(\underset{\sim}{E}_i \mid \underset{\sim}{A}) = \frac{v(\underset{\sim}{E}_i \cap \underset{\sim}{A})}{v(\underset{\sim}{A})}.$$

entonces

$$v(\underset{\sim}{E}_i \mid \underset{\sim}{A}) = \frac{v(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_i)\, v(\underset{\sim}{E}_i)}{v(\underset{\sim}{A})}$$

$$= \frac{v(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_i)\, v(\underset{\sim}{E}_i)}{\bigvee_{\underset{\sim}{E}_i} v(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_i)\, v(\underset{\sim}{E}_i)}.$$

por el teorema 1

lo que se denominará como "Valuación a posteriori del tipo min".

E J E M P L O.

Sea $E = \{a, b, c, d, e\}$ y un semi-cuerpo de Borel $\mathcal{S} = L^E$ -

y se considera la valuación de $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{S}$ a partir de $\underset{\sim}{K} \in \mathcal{S}$:

$$K = \begin{array}{c|c|c|c|c} a & b & c & d & e \\ \hline 0.3 & 0.5 & 1 & 0 & 0.9 \end{array}$$

por

$$v(\underset{\sim}{A}) = \bigvee_{x \in E} \left(\mu_{\underset{\sim}{K}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \right).$$

y la partición borrosa

$$\underset{\sim}{E_1} = \begin{array}{c|c|c|c|c} a & b & c & d & e \\ \hline 0.4 & 0.8 & 0.2 & 1 & 0.6 \end{array}$$

$$\underset{\sim}{E_2} = \begin{array}{c|c|c|c|c} a & b & c & d & e \\ \hline 0.1 & 1 & 0.5 & 0.7 & 1 \end{array}$$

$$\underset{\sim}{E_3} = \begin{array}{c|c|c|c|c} a & b & c & d & e \\ \hline 1 & 0.3 & 1 & 1 & 0.5 \end{array}$$

donde

$$v(\underset{\sim}{E_1}) = 0.6 \;,\quad v(\underset{\sim}{E_2}) = 0.9 \;,\quad v(\underset{\sim}{E_3}) = 1$$

$$v(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E_1}) = 0.8 \;,\quad v(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E_2}) = 0.4 \;,\quad v(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E_3}) = 0.2$$

entonces

$$\upsilon(\underset{\sim}{A}) = (0.8)\cdot(0.6) \vee (0.4)\cdot(0.9) \vee (1)\cdot(0.2)$$
$$= (0.48) \vee (0.36) \vee (0.2)$$
$$= 0.48.$$

$$\upsilon(\underset{\sim}{E}_1 \mid \underset{\sim}{A}) = \frac{\upsilon(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_1)\cdot\upsilon(\underset{\sim}{E}_1)}{\upsilon(\underset{\sim}{A})} = \frac{(0.8)\cdot(0.6)}{0.48} = 1$$

$$\upsilon(\underset{\sim}{E}_2 \mid \underset{\sim}{A}) = \frac{\upsilon(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_2)\cdot\upsilon(\underset{\sim}{E}_2)}{\upsilon(\underset{\sim}{A})} = \frac{(0.4)\cdot(0.9)}{0.48} = 0.75$$

$$\upsilon(\underset{\sim}{E}_3 \mid \underset{\sim}{A}) = \frac{\upsilon(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_3)\cdot\upsilon(\underset{\sim}{E}_3)}{\upsilon(\underset{\sim}{A})} = \frac{(1)(0.2)}{0.48} = 0.415$$

$$\upsilon(\underset{\sim}{E}_1 \mid \underset{\sim}{A}) \vee \upsilon(\underset{\sim}{E}_2 \mid \underset{\sim}{A}) \vee \upsilon(\underset{\sim}{E}_3 \mid \underset{\sim}{A}) = 1$$

Definición 10.

Sea un referencial E y un semi-cuerpo de Borel $\mathcal{S} \subset L^E$, se define una valuación prod-condicional de $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{S}$ dado $\underset{\sim}{B} \in \mathcal{S}$ por la fórmula:

$$\upsilon(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{B}) = \frac{\upsilon(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B})}{\upsilon(\underset{\sim}{B})}, \quad \upsilon(\underset{\sim}{B}) > 0.$$

Definición 11.

Sean dos sensaciones $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{S}$ y $\underset{\sim}{B} \in \mathcal{S}$ se dirá que son prod-independientes por una valuación v si:

$$v(\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}) = v(\underset{\sim}{A}) \cdot v(\underset{\sim}{B})$$

$$v(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{B}) = v(\underset{\sim}{A}).$$

Teorema 2.

Sea un semi-cuerpo de Borel $\mathcal{S} \subset L^E$, $L = [0,1]$ y $\underset{\sim}{K} \in \mathcal{S}$ dado $\forall \underset{\sim}{A} \in \mathcal{S}$, $v(\underset{\sim}{A}) = \bigvee_{x \in E} (\mu_{\underset{\sim}{K}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{A}}(x))$ y $\bigcup_{i=1}^{n} \underset{\sim}{E_i} = E$ una partición borrosa de E, $E_i \in \mathcal{S}$ $i = 1, 2, \ldots, n$

entonces

$$v(\underset{\sim}{A}) = \bigvee_{\underset{\sim}{E_i}} v(\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{E_i})$$

la demostración es análoga a la del teorema 1.

Definición 12.

Sea un semi-cuerpo de Borel $\mathcal{S} \subset L^E$, $L = [0,1]$ y una partición borrosa $\bigcup_{i=1}^{n} \underset{\sim}{E_i} = E$, $\underset{\sim}{E_i} \in \mathcal{S}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ dado $\forall \underset{\sim}{A} \in \mathcal{S}$ la $v(\underset{\sim}{A})$ está dada por el teorema 1. Entonces una valuación posteriori de tipo prod se define como:

$$v(\underset{\sim}{E_i} \mid \underset{\sim}{A}) = \frac{v(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E_i})\ v(\underset{\sim}{E_i})}{\bigvee_{\underset{\sim}{E_i}} (v(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E_i})\ v(\underset{\sim}{E_i}))}.$$

Basándonos en lo anterior podemos definir una probabilidad condicional de eventos borrosos como:

$$pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{B}) = \frac{pr(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})}{pr(\underset{\sim}{B})}, \quad pr(\underset{\sim}{B}) > 0.$$

Para la probabilidad condicional dada por:

$$pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{B}) = \frac{pr(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})}{pr(\underset{\sim}{B})}, \quad pr(\underset{\sim}{B}) > 0.$$

se cumple que:

$$pr(\bar{\underset{\sim}{A}} \mid \underset{\sim}{B}) = 1 - pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{B})$$

$$pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{A}) \leq 1.$$

Demostración.

$$pr(\bar{\underset{\sim}{A}} \mid \underset{\sim}{B}) = \frac{pr(\bar{\underset{\sim}{A}} \cdot \underset{\sim}{B})}{pr(\underset{\sim}{B})}$$

$$pr(\bar{\underset{\sim}{A}} \cdot \underset{\sim}{B}) = \int_E \mu_{\bar{\underset{\sim}{A}} \cdot \underset{\sim}{B}}(x)\, dF(x) = \int_E \mu_{\bar{\underset{\sim}{A}}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\, dF(x)$$

pero $\mu_{\bar{\underset{\sim}{A}}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$; entonces

$$pr(\bar{\underset{\sim}{A}} \cdot \underset{\sim}{B}) = \int_E (1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x))\, \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\, dF(x)$$

$$= \int_E \left(\mu_{\underset{\sim}{B}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \right) dF(x)$$

$$= \int_E \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\, dF(x) - \int_E \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\, dF(x)$$

$$= pr(\underset{\sim}{B}) - pr(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B})$$

$$\Rightarrow pr(\bar{\underset{\sim}{A}} \mid \underset{\sim}{B}) = \frac{pr(\underset{\sim}{B}) - pr(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B})}{pr(\underset{\sim}{B})}$$

$$= 1 - \frac{pr(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B})}{pr(\underset{\sim}{B})} = 1 - pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{B})$$

$$pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{A}) = \frac{pr(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{A})}{P(\underset{\sim}{A})}$$

$$pr(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{A}) = \int_E \mu_{\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{A}}(x)\, dF(x) = \int_E \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\cdot\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\, dF(x)$$

$$\leq \int_E \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\, dF(x) = pr(\underset{\sim}{A}).$$

$$\Rightarrow pr(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{A}) \leq pr(\underset{\sim}{A})$$

$$\therefore \frac{pr(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{A})}{pr(\underset{\sim}{A})} \leq 1 \qquad \therefore pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{A}) \leq 1.$$

Sin embargo para la probabilidad dada por la inter_-

sección se cumple:

$$\text{-}\quad pr(\bar{\underset{\sim}{A}} \mid \underset{\sim}{B}) \neq 1 - pr(\bar{\underset{\sim}{A}} \mid \underset{\sim}{B})$$

$$pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{A}) = 1.$$

Demostración

Sea $\bar{\underset{\sim}{A}} \cap \underset{\sim}{B} \neq \phi$

$$pr(\bar{\underset{\sim}{A}} \mid \underset{\sim}{B}) = \frac{pr(\bar{\underset{\sim}{A}} \cap \underset{\sim}{B})}{pr(\underset{\sim}{B})} = \frac{pr(\bar{\underset{\sim}{A}})}{pr(\underset{\sim}{B})} \quad si \quad \bar{\underset{\sim}{A}} \subset \underset{\sim}{B}$$

$$= \frac{1 - pr(\underset{\sim}{A})}{pr(\underset{\sim}{B})} \neq 1 - pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{B})$$

$$= \frac{pr(\underset{\sim}{B})}{pr(\underset{\sim}{B})} \quad si \quad \underset{\sim}{B} \subset \bar{\underset{\sim}{A}}$$

$$= 1 \neq 1 - pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{B})$$

$$pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{A}) = \frac{pr(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{A})}{pr(\underset{\sim}{A})} = \frac{pr(\underset{\sim}{A})}{pr(\underset{\sim}{A})} = 1.$$

Como resultado de lo anterior podemos definir la probabilidad a posteriori como:

$$pr(\underset{\sim}{E_i} \mid \underset{\sim}{A}) = \frac{pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E_i}) \cdot pr(\underset{\sim}{E_i})}{pr(\underset{\sim}{A})}$$

donde

$$pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_i) = \frac{pr(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{E}_i)}{pr(\underset{\sim}{E}_i)} \quad \text{y}$$

$$pr(\underset{\sim}{A}) = \sum_{i=1}^{n} pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_i) \cdot pr(\underset{\sim}{E}_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_i \cap \underset{\sim}{E}_j) \cdot pr(\underset{\sim}{E}_i \cap \underset{\sim}{E}_j)$$

$$+ \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_i \cap \underset{\sim}{E}_j \cap \underset{\sim}{E}_k) \cdot pr(\underset{\sim}{E}_i \cap \underset{\sim}{E}_j \cap \underset{\sim}{E}_k) - \ldots$$

$$+ (-1)^{n+1} pr(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{E}_1 \cap \underset{\sim}{E}_2 \cap \ldots \cap \underset{\sim}{E}_n) \cdot pr(\underset{\sim}{E}_1 \cap \underset{\sim}{E}_2 \cap \ldots \cap \underset{\sim}{E}_n).$$

TEORIA POSIBILISTICA Y TEORIA PROBABILISTICA:

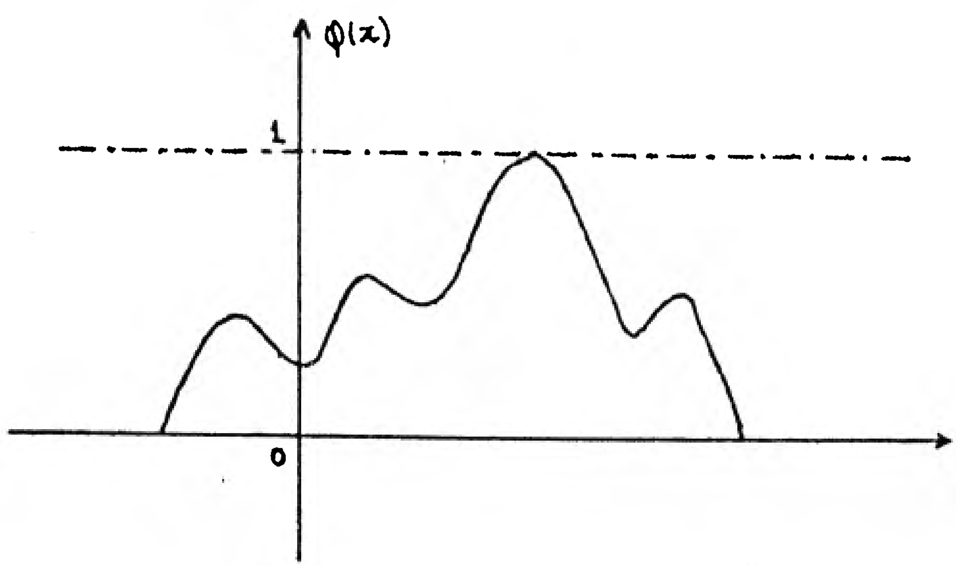
Anteriormente se ha estudiado la teoría de probabilidad y la teoría de subconjuntos borrosos, concluyendo que ciertos conceptos de los subconjuntos borrosos pueden servir en la teoría de probabilidad y recíprocamente. Algunos autores proponen estudiar la teoría de subconjuntos borrosos de tal manera que la divergencia entre las dos teorías sea más clara proponiendo la teoría posibilística en forma paralela a la teoría probabilística.

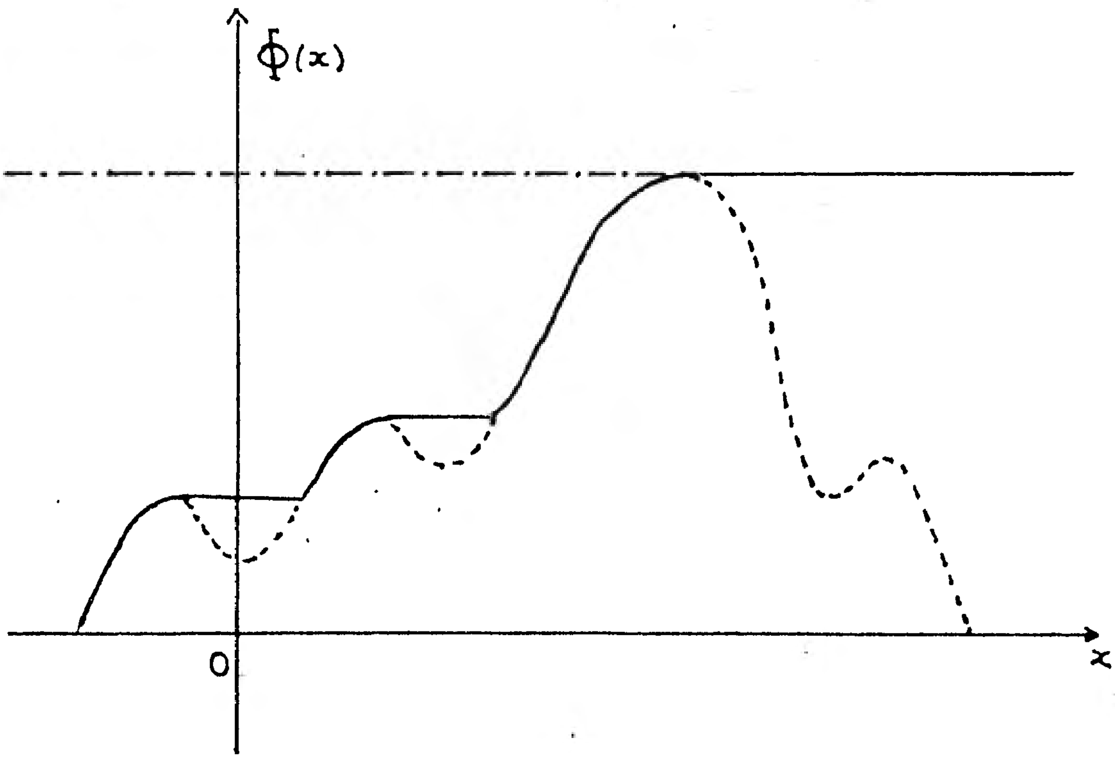
En la teoría de probabilidad se llama variable aleatoria X aquella que toma sus valores x en R^n, $n = 1, 2, \ldots$ tal que a cada valor x se le asigna una función $f(x)$ llamada densidad de probabilidad y la función de distribución $F(x)$.

Definición 13.

Sea E un referencial finito o no finito, se llama X una va riable incierta o contingente si para todo valor x de X sea $X = x$ se le asocia una función $\varphi(x) \in [0,1]$ que se denominará "Densidad de posibilidad de X" en el caso de que $E = R$ o "Posibilidad de X" en el caso de E es un conjunto finito, (una densidad de probabilidad corresponde a una densidad de posibilidad) y una función $\Phi(x) = \bigvee_{u=-\infty}^{x} f(u)$ la cual será llamada función de acumulación que corresponde a la función de distribución en la teoría de probabilidad.

A continuación se presentan las figuras 1 y 2 que corresponden a las funciones de posibilidad para $E = R$ y para $E = N$ respectivamente junto con sus respectivas funciones de acumulación.





Definición 14.

Se define la función acumulativa inversa como:

$$\bar{\Phi}(x) = \bigvee_{\mu = x}^{\infty} f(u)$$

Definición 15.

Una noción similar se denomina contingencia matemática que se define como:

$$\mathscr{C}(\underset{\sim}{A}) = \bigvee_{E} \left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \varphi(x) \right),$$

donde $\varphi(x)$ es la función de posibilidad de la variable incierta $X \in E$ siendo una densidad en el caso continuo y una posibilidad en el caso discreto.

De la misma manera que en la teoría de probabilidad, la función de densidad de todos los eventos posibles es igual a uno, en la teoría de posibilidad la densidad de posibilidad es igual a uno

$$\bigvee_{x} \varphi(x) = 1,$$

así toda función de posibilidad debe ser normal.

A continuación se demostrará que $\mathscr{C}(\underset{\sim}{A})$ es una valuación.

$$\mathscr{C}(\phi) = \bigvee_{E} \left(\mu_{\phi}(x) \wedge \varphi(x) \right) = \bigvee_{E} \left(0 \wedge \varphi(x) \right) = 0$$

$$\mathscr{C}(E) = \bigvee_{E} \left(\mu_{E}(x) \wedge \varphi(x) \right) = \bigvee_{E} \left(\varphi(x) \right) = 1$$

$$\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B} \Rightarrow \forall x \in E : \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \leq \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \Rightarrow$$

$$\forall \varphi(x), \quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \varphi(x) \leq \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \wedge \varphi(x)$$

$$\Rightarrow \bigvee_{E} \left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \varphi(x) \right) \leq \bigvee_{E} \left(\mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \wedge \varphi(x) \right)$$

$$\therefore \quad \mathcal{b}(\underset{\sim}{A}) \leq \mathcal{b}(\underset{\sim}{B})$$

Hay que remarcar que la contingencia matemática de un subconjunto borroso puede ser expresado como la posibilidad del subconjunto borroso y se utilizará el símbolo $poss\,(\underset{\sim}{A})$.

Definición 16.

Si a todo subconjunto borroso $\underset{\sim}{A}$ al cual se le asigna una función $\varphi(x)$ de posibilidad, entonces la posibilidad de $\underset{\sim}{A}$ por la regla $\varphi(x)$ está dada por:

$$poss\,(\underset{\sim}{A}) = \bigvee_{E} \left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \varphi(x) \right)$$

Una regla de probabilidad $f(x)$ puede ser utilizada como una regla de posibilidad normalizando de la siguiente manera:

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\underset{x}{Max}\ f(x)} \qquad \text{si } f(x) \text{ es uniforme.}$$

Si $\forall x : \varphi(x) = 1$ entonces se dirá que es equiprobable, tanto para el caso continuo como discreto.

Existe un cálculo de posibilidades paralelo al cálculo de probabilidades.

1).- $\text{poss}\,(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) = \text{poss}\,(\underset{\sim}{A}) \vee \text{poss}\,(\underset{\sim}{B})$

es decir que la posibilidad de la unión de dos subconjuntos borrosos es F aditiva.

Demostración.

$$\text{poss}\,(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) = \bigvee_x \left(\mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) \wedge \varphi(x) \right)$$

$$= \bigvee_x \left((\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \vee \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)) \wedge \varphi(x) \right)$$

$$= \bigvee_x \left[(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \varphi(x)) \vee (\mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \wedge \varphi(x)) \right]$$

$$= \left[\bigvee_x (\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \varphi(x)) \right] \vee \left[\bigvee_x (\mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \wedge \varphi(x)) \right]$$

$$= \text{poss}\,(\underset{\sim}{A}) \vee \text{poss}\,(\underset{\sim}{B})$$

2).- $\text{poss}\,(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \leq \text{poss}\,(\underset{\sim}{A}) \wedge \text{poss}\,(\underset{\sim}{B})$

Demostración

$$\text{poss}\,(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) = \bigvee_x \left(\mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x) \wedge \varphi(x) \right)$$

$$= \bigvee_x \left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \wedge \varphi(x) \right)$$

$$\leq \bigvee_x \left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \varphi(x) \right) = \text{poss}\,(\underset{\sim}{A})$$

$$\bigvee_x \left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \wedge \varphi(x) \right) \leq \bigvee_x \left(\mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \wedge \varphi(x) \right) = \text{poss}\,(\underset{\sim}{B})$$

$$\therefore\ \text{poss}\,(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \leq \text{poss}\,(\underset{\sim}{A}) \wedge \text{poss}\,(\underset{\sim}{B})$$

Definición 17.

La independencia de dos subconjuntos borrosos $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ se define como:

$$\operatorname{poss}(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) = \operatorname{poss}(\underset{\sim}{A}) \wedge \operatorname{poss}(\underset{\sim}{B})$$

Definición 18.

La posibilidad condicional se define como:

$$\operatorname{poss}(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) = \operatorname{poss}(\underset{\sim}{A} | \underset{\sim}{B}) \wedge \operatorname{poss}(\underset{\sim}{B})$$

Definición 19.

Sea E un conjunto producto tal que $E = E_1 \times \ldots \times E_r$ y $\varphi(x_1, \ldots, x_r) \in [0,1]$, $x_i \in E_i$ una regla de posibilidad tal que $\bigvee_{x_1,\ldots,x_n} \varphi(x_1,\ldots,x_r) = 1$. Sea $\underset{\sim}{C} \subset E_1 \times \ldots \times E_r$ donde $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x_1, \ldots, x_r) \in [0,1]$, $x_i \in E_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$. se llamará contingencia de $\underset{\sim}{C}$ a :

$$\mathcal{C}(\underset{\sim}{C}) = \bigvee_{x_1,\ldots,x_r} \left(\mu_{\underset{\sim}{C}}(x_1, \ldots, x_r) \wedge \varphi(x_1, \ldots, x_r) \right)$$

de donde

$$\operatorname{poss}(\underset{\sim}{C}) = \mathcal{C}(\underset{\sim}{C}).$$

E J E M P L O.

Sean

$E_1 = \{a, b, c, d\}$, $E_2 = \{A, B, C, D, E\}$, $E = E_1 \times E_2$

$\Phi(x, y)$	A	B	C	D	E
a	0.3	0.4	0.5	0.8	0
b	0.6	0.8	0.1	1	0.1
c	0.9	0	0.8	1	0.9
d	0.5	0.5	0.2	0.9	0.8

$\underset{\sim}{C}$	A	B	C	D	E
a	0.6	0.1	0.1	0.2	0.8
b	0.4	0.1	1	0.6	0
c	0.7	0.3	0	0.4	0
d	1	1	0.2	0.7	0.9

$$\text{poss}(\underset{\sim}{C}) = \bigvee_{x,y} \left(\mu_{\underset{\sim}{C}}(x, y) \wedge \Phi(x, y) \right)$$

$$\begin{array}{ccc} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x,y) & & \Phi(x,y) \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.8 & 0 \\ \hline 0.6 & 0.8 & 0.1 & 1 & 0.1 \\ \hline 0.9 & 0 & 0.8 & 1 & 0.9 \\ \hline 0.5 & 0.5 & 0.2 & 0.9 & 0.8 \\ \hline \end{array} & \wedge & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0.6 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.8 \\ \hline 0.4 & 0.1 & 1 & 0.6 & 0 \\ \hline 0.7 & 0.3 & 0 & 0.4 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0.2 & 0.7 & 0.9 \\ \hline \end{array} \; = \end{array}$$

- $\mu_{\underset{\sim}{c}}(x,y) \wedge \phi(x,y)$

0.3	0.1	0.1	0.2	0
0.4	0.1	0.1	0.6	0
0.7	0	0	0.4	0
0.5	0.5	0.2	0.7	0.8

	A	B	C	D	E	
a	0.3	0.1	0.1	0.2	0	0.3
b	0.4	0.1	0.1	0.6	0	0.6
c	0.7	0	0	0.4	0	0.7
d	0.5	0.5	0.2	0.7	0.8	0.8
						0.8

	A	B	C	D	E	
a	0.3	0.1	0.1	0.2	0	
b	0.4	0.1	0.1	0.6	0	
c	0.7	0	0	0.4	0	
d	0.5	0.5	0.2	0.7	0.8	
	0.7	0.5	0.2	0.7	0.8	0.8

$$\text{poss}(\underset{\sim}{c}) = 0.3 \vee 0.6 \vee 0.7 \vee 0.8 = 0.8$$

$$= 0.7 \vee 0.5 \vee 0.2 \vee 0.7 \vee 0.8 = 0.8$$

Definición 20.

1).- Se define como posibilidad marginal a:

$$\varphi(*, x_2, \ldots, x_r) = \bigvee_{x_1} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r)$$

$$\varphi(x_1, *, \ldots, x_r) = \bigvee_{x_2} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, *) = \bigvee_{x_r} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r)$$

2).- Como posibilidad condicional a:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r \mid x_1 = \alpha_1) = \varphi(\alpha_1, x_2, \ldots, x_r)$$

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r \mid x_2 = \alpha_2) = \varphi(x_1, \alpha_2, \ldots, x_r)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r \mid x_r = \alpha_r) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, \alpha_r)$$

donde α_i es un valor dado de x_i .

3).- Como posibilidad condicional relativa

$$\varphi^*(x_1, x_2, \ldots, x_r \mid x_1 = \alpha_1) = \frac{\varphi(\alpha_1, x_2, \ldots, x_r)}{\bigvee_{x_1} \varphi(x_1, \ldots, x_r)}$$

$$\varphi^*(x_1, x_2, \ldots, x_r \mid x_2 = \alpha_2) = \frac{\varphi(x_1, \alpha_2, \ldots, x_r)}{\bigvee_{x_2} \varphi(x_1, \ldots, x_r)}$$

$$\vdots$$

$$\varphi^*(x_1, x_2, \ldots, x_r \mid x_r = \alpha_r) = \frac{\varphi(x_1, x_2, \ldots, \alpha_r)}{\bigvee_{x_r} \varphi(x_1, \ldots, x_r)}$$

Ejemplo:

$\varphi(x,y)$	A	B	C	D	E	
a	0.3	0.4	0.5	0.8	0	0.8
b	0.6	0.8	0.1	1	0.1	1
c	0.9	0	0.8	1	0.9	1
d	0.5	0.5	0.2	0.9	0.8	0.9
	0.9	0.8	0.8	1	0.9	

$\varphi(*,y) =$

A	B	C	D	E
0.9	0.8	0.8	1	0.9

$\varphi(x,*) =$

a	0.8
b	1
c	1
d	0.9

$\varphi(a,y) =$

A	B	C	D	E
0.3	0.4	0.5	0.8	0

$\varphi(b,y) =$

A	B	C	D	E
0.6	0.8	0.1	1	0.1

$\varphi(c,y) =$

A	B	C	D	E
0.9	0	0.8	1	0.9

$\varphi(d,y) =$

0.5	0.5	0.2	0.9	0.8

$\varphi(x,A) =$, $\varphi(x,B) =$, $\varphi(x,C) =$, $\varphi(x,D) =$, $\varphi(x,E) =$

	$\varphi(x,A)$	$\varphi(x,B)$	$\varphi(x,C)$	$\varphi(x,D)$	$\varphi(x,E)$
a	0.3	0.6	0.5	0.8	0
b	0.6	0.8	0.1	1	0.1
c	0.9	0	0.8	1	0.9
d	0.5	0.5	0.2	0.9	0.8

$\varphi^*(a,y) =$

A	B	C	D	E
$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{10}$	0

$\varphi^*(b,y) =$

A	B	C	D	E
$\frac{6}{9}$	1	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{9}$

$\varphi^*(c,y) =$

A	B	C	D	E
1	0	1	1	1

$\varphi^*(d,y) =$

A	B	C	D	E
$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{8}{9}$

$$\varphi^*(x,A) = \begin{array}{c|c|} a & \frac{3}{8} \\ b & \frac{6}{10} \\ c & \frac{9}{10} \\ d & \frac{5}{9} \end{array}, \quad \varphi^*(x,B) = \begin{array}{c|c|} a & \frac{4}{8} \\ b & \frac{8}{10} \\ c & \frac{8}{10} \\ d & \frac{6}{9} \end{array}, \quad \varphi^*(x,C) = \begin{array}{c|c|} a & \frac{5}{8} \\ b & \frac{1}{10} \\ c & \frac{8}{10} \\ d & \frac{2}{9} \end{array}, \quad \varphi^*(x,D) = \begin{array}{c|c|} a & 1 \\ b & 1 \\ c & 1 \\ d & 1 \end{array}, \quad \varphi^*(x,E) = \begin{array}{c|c|} a & 0 \\ b & \frac{1}{10} \\ c & \frac{9}{10} \\ d & \frac{8}{9} \end{array}$$

Definición 21.

Sea $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_r$ y $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r) \in [0,1]$, $x_i \in E_i$ una regla de posibilidad talque:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \varphi_1(x_1) \wedge \varphi_2(x_2) \wedge \ldots \wedge \varphi_r(x_r)$$

entonces las variables x_i, $i = 1, \ldots, r$ son independientes, en donde

$$\forall x_i, \ i = 1, 2, \ldots, r : \quad \bigvee_{x_i} \varphi(x_i) = 1.$$

Definición 22.

Dada una gráfica borrosa $\underset{\sim}{G} \subset E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_r$ y $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ una regla de posibilidad donde $x_i \in E_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$ y $\underset{\sim}{R}$ la relación borrosa correspondiente a $\underset{\sim}{G}$ se define como contin_-gencia matemática marginal para la variable x_i

$$\mathcal{C}(\underset{\sim}{G}, \varphi(*, x_2, \ldots, x_r)) = \bigvee_{x_i \neq x_1} (\underset{\sim}{R}(*, x_2, \ldots, x_r) \wedge \varphi(*, x_2, \ldots, x_r))$$

$$\mathcal{C}(\underset{\sim}{G}, \varphi(x_1, *, \ldots, x_r)) = \bigvee_{x_i \neq x_2} (\underset{\sim}{R}(x_1, *, \ldots, x_r) \wedge \varphi(x_1, *, \ldots, x_r))$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\mathcal{C}(\underset{\sim}{G}, \varphi(x_1, x_2, \ldots, *)) = \bigvee_{x_i \neq x_r} (\underset{\sim}{R}(x_1, x_2, \ldots, *) \wedge \varphi(x_1, x_2, \ldots, *))$$

donde

$$\underset{\sim}{R}(x_1, x_2, \ldots, *, \ldots, x_r) = \bigvee_{x_i} \underset{\sim}{R}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$$

E J E M P L O.

Sea la gráfica $\underset{\sim}{C} \subset E_1 \times E_2$

$\underset{\sim}{C}$	A	B	C	D	E	
a	0.3	1	0.5	0	0.8	1
b	0.2	0.7	0	0.6	0.5	0.7
c	1	0.8	0.2	0.2	0.2	1
d	0	0.3	0.4	0.3	0.1	0.4
	1	1	0.5	0.6	0.8	1

$\varphi(x, y)$	A	B	C	D	E	
a	0.3	0.4	0.5	0.8	0	0.8
b	0.6	0.8	0.1	1	0.1	1
c	0.9	0	0.8	1	0.9	1
d	0.5	0.5	0.2	0.9	0.8	0.9
	0.9	0.8	0.8	1	0.9	1

	A	B	C	D	E
$\underset{\sim}{R}(x, y) =$	1	1	0.5	0.6	0.8

	A	B	C	D	E
$\varphi(*, y) =$	0.9	0.8	0.8	1	0.9

Calculando primero $\underset{\sim}{R}(*, y) \wedge \varphi(*, y)$, tenemos

	A	B	C	D	E
$\underset{\sim}{R}(*, y) \wedge \varphi(*, y) =$	0.9	0.8	0.5	0.6	0.8

de donde:

$$\mathcal{C}(\underset{\sim}{e}, \varphi(*, y)) = \bigvee_y (\underset{\sim}{R}(*, y) \wedge \varphi(*, y))$$

$$= 0.9 \vee 0.8 \vee 0.5 \vee 0.6 \vee 0.8$$

$$= 0.9$$

Se tiene también:

	$\underset{\sim}{R}(x, *) =$	$\varphi(x, *) =$	$\underset{\sim}{R}(x, *) \wedge \varphi(x, *) =$
a	1	0.8	0.8
b	0.7	1	0.7
c	1	1	1
d	0.4	0.9	0.4

$$\therefore \mathcal{C}(\underset{\sim}{e}, \varphi(x, *)) = \bigvee_x (\underset{\sim}{R}(x, *) \wedge \varphi(x, *))$$

$$= 0.8 \vee 0.7 \vee 1 \vee 0.4$$

$$= 1.$$

C O N C L U S I O N E S

Utilizando el concepto de un subconjunto borroso, las nociones de un evento y su probabilidad pueden ser extendidos de una manera natural a eventos borrosos. Es posible que tal extensión pueda eventualmente englobar significativamente el dominio de aplicabilidad de la teoría de probabilidad, especificándose en aquellos campos en los cuales la borrosidad es un fenómeno natural.

Hay que remarcar que el resultado más importante es el que la probabilidad es un caso particular de una valuación, siendo así la teoría borrosa más general que la teoría clásica

En el caso particular donde los subconjuntos borrosos son conjuntos vulgares y el semi-cuerpo de Borel es un cuerpo de Borel, si la valuación es una probabilidad entonces las definiciones (7-10) resultan ser equivalentes. De todas formas la noción de eventos independientes sigue estando relacionada con la relación de sensaciones prod-independientes.

Nótese que la función de pertenencia no es una función de probabilidad sino que representa únicamente la información del problema.

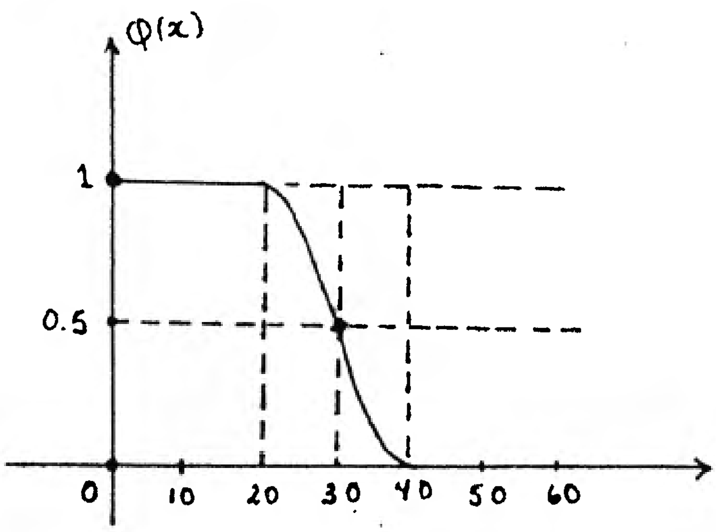
Entre las analogías de estas dos teorias está la de evento borroso y evento vulgar ya que ambas tienen las mismas características cada una dentro de su campo.

También es importante observar que en la definición de probabilidad borrosa la complementación no se encuentra completamente definida, sino que se considera una pseudo-complementación.

E J E M P L O

Considérese la variable " X es joven" y sea una regla de po_ sibilidad de la siguiente manera:

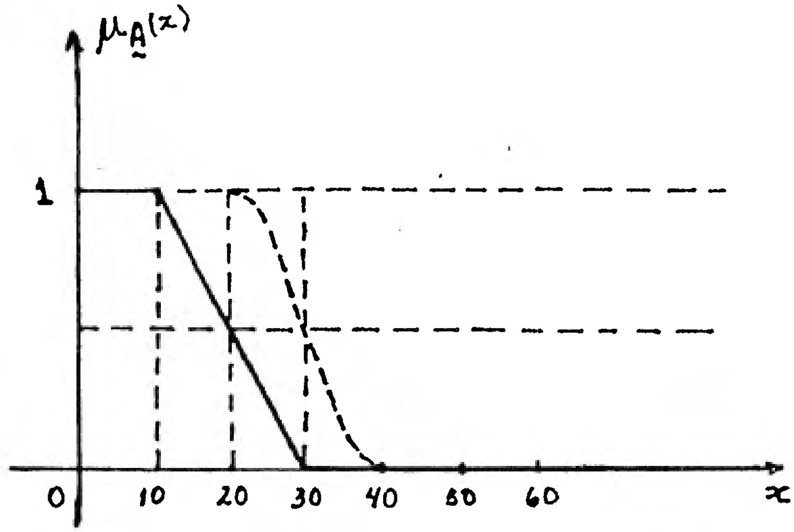
$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 , & x \leq 20 \\ 1 - 2\left(\dfrac{x-20}{20}\right)^2 , & 20 \leq x \leq 30, \\ 2\left(\dfrac{x-40}{20}\right)^2 , & 30 \leq x \leq 40, \\ 0 , & 40 \leq x \end{cases}$$



Considérese ahora el punto de vista de un observador (Juan) dando un subconjunto borroso $\underset{\sim}{A}$ que representa la "Sensación" personal de dicho observador acerca de la juventud.

Sea:

$$
\begin{aligned}
\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) &= 1 , & x \leq 10 , \\
&= \frac{x-30}{20} , & 10 \leq x \leq 30 , \\
&= 0 , & 30 \leq x .
\end{aligned}
$$

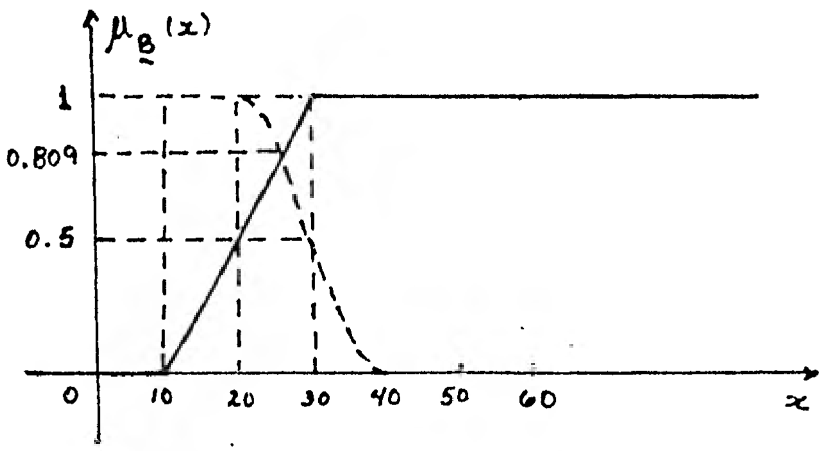


En este caso la contingencia : "Juan es joven" tiene el valor:

$$\mathcal{C}(\underset{\sim}{A}) = \bigvee_{x} \left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \varphi(x) \right) = 1.$$

Otro caso sería el punto de vista de Pedro, para el cual la "Sensación " es diferente y está dada por:

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 10, \\ \dfrac{x-10}{20} & , \quad 10 \leq x \leq 30, \\ 1 & , \quad 30 \leq x \end{cases}$$

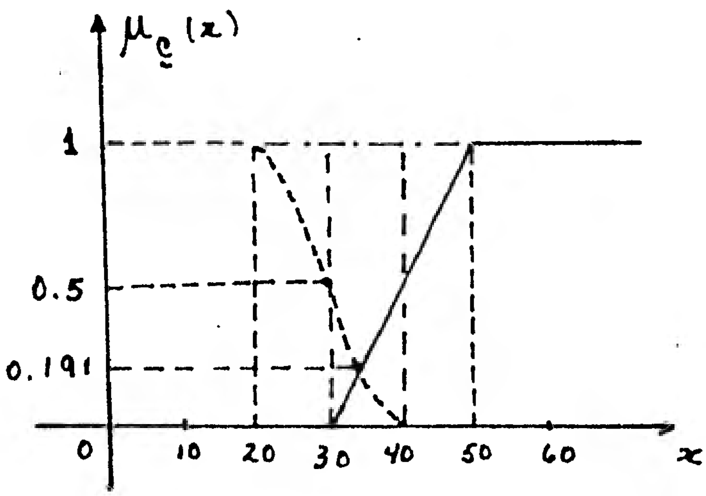


Entonces la contingencia "Pedro es joven" sería:

$$\mathcal{C}(\underset{\sim}{B}) = \bigvee_{x} \left(\mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \wedge \varphi(x) \right) = 0.809$$

Finalmente se considerará el punto de vista de Pablo para el - cual la "Sensación" está dada por:

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 30, \\ \dfrac{x-30}{20}, & 30 \leq x \leq 50, \\ 1, & 50 \leq x. \end{cases}$$



La contingencia "Pablo es joven" sería:

$$\mathscr{C}(\underset{\sim}{e}) = \bigvee_{x} \left(\mu_{\underset{\sim}{e}}(x) \wedge \varphi(x) \right) = 0.190$$

A continuación se examinará la interpretación de la contingencia max-min en el caso de conjuntos vulgares.

Se considerará la misma regla de posibilidad que en el caso borroso.

Sea $A = \{18\}$

entonces $\mathscr{C}(A) = \bigvee (1 \wedge \varphi(18)) = \bigvee (1 \wedge 1) = 1$

Para: $A = \{25\}$

$$\mathscr{C}(A) = \bigvee (1 \wedge \varphi(25)) = \bigvee \left(1 \wedge \tfrac{7}{8}\right) = \tfrac{7}{8}$$

$A = \{30\}$

$$\mathscr{C}(A) = \bigvee (1 \wedge \varphi(30)) = \bigvee (1 \wedge 0.5) = 0.5$$

$$A = \{45\}$$

$$\mathcal{C}(A) = \bigvee (1 \wedge \varphi(45)) = \bigvee (1 \wedge 0) = 0$$

$$A = \{x\}$$

$$\mathcal{C}(A) = \bigvee (1 \wedge \varphi(x)) = \varphi(x) = poss\,(x).$$

Supongamos que se tiene:

$$A = [a, b] \quad , \quad a \leq b \quad , \quad a, b \in R^{+}$$

entonces:

$$\mathcal{C}(A) = \bigvee_{x=a}^{b} (1 \wedge \varphi(x))$$

el valor de la contingencia matemática max-min $\mathcal{C}(A)$ depen_
derá de a y de b.

Por ejemplo, para $a = 25$ y $b = 35$ se tiene que:

$$\mathscr{C}(A) = \bigvee_{x=25}^{35} (1 \wedge \varphi(x))$$

$$= \bigvee_{x=25}^{35} \varphi(x) = \varphi(25) = \frac{1}{8}$$

para: $a = 35$, $b = 45$

$$\mathscr{C}(A) = \bigvee_{x=35}^{45} \varphi(x) = \varphi(35) = \frac{1}{8}$$

para:

para: $a = 45$, $b = 50$

$$\mathscr{C}(A) = \bigvee_{x=45}^{50} \varphi(x) = 0$$

Hay que remarcar que la contingencia de un subconjunto borroso puede ser expresado como la posibilidad de ese subconjunto borroso por lo que podemos expresar $\mathscr{C}(\underset{\sim}{A})$ como $poss(\underset{\sim}{A})$.

Analizando el ejemplo anterior se observa que la contingencia de un conjunto vulgar representa la probabilidad del mismo. Además es importante el notar que l criterio para de_ finir juventud en la teoría borrosa no está restringido como - sucede en la teoría clásica, ya que es natural considerar dife_ rentes grados de juventud, es decir, que a la edad de 20 años se puede decir que la persona es muy joven, a los 28 es joven pero no tan joven como la de 20, y a la de 35 se considera a - la persona todavia joven. Sin embargo en probabilidad clási_ ca una persona de 20 años y una de 35 se consideran igualmente jóvenes.

Se espera que este ejémplo haya sido lo fuficiente_ - mente ilustrativo de las analogías y diferencias entre ambas - teorias, así como, la utilidad que puede representar la teoría borrosa.

B I B L I O G R A F I A

Clark, l.e. Random Variables, Longman
London and N.Y. (1975).

Gnedenko, B.V. The Theory of Probability
Mir Publishers, Moscow.

Hoel, Paul g, Port Sidney C & Stone Charles
Introduction to Probability Theory
Houghton Mifflin Company Boston.

Kaufmann, Arnold Introduction a la Théorie des Sousensembles
Flous a l'usage des ingeniéures.

Kaufmann, Arnold Escritos originales de los complementos a los
primeros IV volúmenes:
Tome I des compléments
Tome V des compleménts
Tome VI des compleménts
Tome VII des compleménts
(aún no publicados).

Neuts, Marcel F. Probability

Allyn and Bacon, Inc. Boston.

Zadeh, L.A. Probability Measure of Fuzzy Events

Journal of Mathematical Analysis and Applications

23, 421-427 (1968).