

28 Zujera

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS



---

ESTIMACIONES DE LOS NIVELES Y  
TENDENCIAS DE LA NUPCIALIDAD EN  
MEXICO

**TRABAJO DE INVESTIGACION**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O  
P R E S E N T A

**ELIA DEL CARMEN MERCADO ESTRADA**

**1 9 8 1**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

	pág.
Introducción	
Capítulo I	
MODELO DE A.J. COALE	
Introducción	1
Presentación y Desarrollo	4
Capítulo II	
TABLAS DE NUPCIALIDAD	
Tablas de eventualidad. Definición	32
Tablas de generaciones y tablas de momento $t$	32
Tablas de mortalidad	32
Funciones de la tabla de mortalidad	34
Tablas abreviadas de mortalidad	39
Tablas de nupcialidad	39
Capítulo III	
LA FUNCION RIESGO DE CASARSE	
Presentación	46
Elaboración del trabajo	51
Capítulo IV	
ANALISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES	
Desglose y exhibición	56
Principales ventajas de la aplicación del Modelo de Coale	58
Análisis del Modelo de Coale	59
Postrer Exhibición	62
i) Análisis del riesgo de casarse	66
ii) Análisis de los dos métodos empleados	68

	pág.
Apéndice I	
Ley de Gompertz y Makeham	73
Apéndice II	
1.- Método de los Grupos No Superpuestos	80
2.- Método de Levenberg-Marguardt-Morrison	84
Relación de Tablas, Cuadros y Gráficas.	88

## PRIMACIO

El uso del Modelo de Nupcialidad de A.J. Coale en el estudio de la nupcialidad de México captada en la Encuesta Mexicana de Fecundidad realizada en 1976 para los años de 1927-1955 es el objetivo primordial de la tesis profesional que presentará la suscrita.

### Puntos Básicos de la Tesis:

- 1.- Estandarización y corrección de datos anuales y agregados mediante el estándar de nupcialidad de Coale encontrándose tres parámetros importantes:
  - a) La edad de entrada significativa al matrimonio de cada año o grupo de años.
  - b) La velocidad o ritmo con que la población femenina de la información ya estandarizada y corregida según el tiempo en estudio (1927-1955) contrasta nupcias con respecto al estándar.
  - c) El promedio de vida en estado célibe, es decir, la edad media al matrimonio.
- 2.- El análisis del comportamiento de estos parámetros y en base a ellos construir tablas de nupcialidad, siendo éstas un instrumento muy útil demográficamente hablando, pues mediante ellas se puede estudiar la tendencia de la nupcialidad en nuestro país.
- 3.- Mostrar el empleo del modelo para proyectar el fenómeno nupcialidad.
- 4.- La caracterización de la función demográfica riesgo de casarse mediante la función de Makeham, como alternativa para caracterizar la tendencia de la nupcialidad.

## INTRODUCCION

En estudios demográficos o bien poblacionales como en otros campos de la ciencia, siempre se han tratado de encontrar fórmulas matemáticas que representen el comportamiento de los fenómenos en estudio; así Makeham y Gompertz, entre otros, dieron a conocer lo que ellos esperaban - fueran leyes universales de mortalidad dando lugar a sus leyes de mortalidad respectivas (1). Entre algunos fenómenos poblacionales que podemos considerar se encuentran: la mortalidad, la nupcialidad, la natalidad, la fecundidad y los fenómenos migratorios.

Para poder llevar a cabo un estudio poblacional determinando una ley o modelo universal que rija dichos fenómenos en estudio, debido a que en un nivel mundial la población se comporta de distintas maneras por la influencia de variados factores, se observan ciertos problemas tales como: las costumbres, el medio geográfico, el nivel de vida, el sistema político seguido en cada país, la religión, por mencionar algunos, siendo a veces imposible el formular modelos del comportamiento de la población a nivel mundial.

Así, por ejemplo, la mortalidad es un fenómeno al que obviamente está expuesta cualquier persona de cualquier edad y de cualquier lugar pero, la rapidez, las edades en las que se registra una mayor mortalidad con mayor frecuencia, el tiempo promedio de vida, son distintos en cada país. Se tiene así que en países desarrollados, las personas viven en promedio más años que aquellas que viven en países subdesarrollados, donde el avance tecnológico y el nivel de vida son muy bajos; y, sin embargo es posible el hablar de leyes de mortalidad como ya se hizo al principio bajo las consideraciones pertinentes (2).

Otro problema importante para el análisis de cualquier fenómeno es el que presenta la captación de información. Esta generalmente se obtiene a través de entrevistas, encuestas, censos, etc., ocurriendo a veces

---

(1) Apéndice I, "Ley de Makeham y Gompertz".

(2) *ibid.*

que las personas encargadas de recopilar dicha información no cuenten con la preparación adecuada o bien, las personas entrevistadas no expresen los datos cuestionados correctamente dándose así un subregistro en dicha información. En este problema se consideran nuevamente los factores ya mencionados tales como el desarrollo tecnológico del país en —  
cuestión.

CAPITULO I  
MODELO DE A.J. COALE

Introducción

La nupcialidad es un fenómeno quizá menos estudiado que la mortalidad pero no menos importante debido a la repercusión que tiene en otros fenómenos como la fecundidad y la natalidad. La existencia de patrones o modelos de estructura por edad de matrimonios comunes fué descubierta como un derivado de la investigación del decaimiento histórico de la fertilidad marital en Europa, que estaba siendo dirigida en la Oficina de Investigaciones Poblacionales de la U. de Princeton N.J. por el mismo Coale en el año de 1972. En el transcurso de esta investigación se necesitó estimar la distribución de las mujeres por edad y estado civil cuando la información no existía o estaba insuficientemente detallada. Por lo que se examinaron los patrones de edad de la distribución del estado civil de mujeres en poblaciones diferentes con la esperanza de encontrar regularidades que pudieran ser útiles en preparar estimaciones(3).

Después de varios años de observaciones de este fenómeno en distintos países, analizando las siguientes poblaciones: Los Países Bajos — (1859), Alemania (1910), U.S.A.(1930), Hungría (1960) y Taiwán (promedio de 1915,1920,1935); se pudo observar que poblaciones no Europeas, con costumbres matrimoniales muy diferentes y las Europeas, de finales del S XIX y principios del S.XX, tenían un patrón por edades de proporciones de primeras nupcias comunes. Se pudieron observar también características interesantes en las poblaciones en estudio, tales como las siguientes: el patrón de nupcialidad Europeo ocurre a una edad tardía en relación con la mayoría de la experiencia humana, y sigue un patrón en el cual las proporciones de permanecer en estado célibe son altas; en U.S.A. se vió que las proporciones de primeras nupcias por edades había cambia

---

(3) A.J. Coale, July 1971. "Age Patterns of Marriage". Population Studies, Vol.XXV No. 2, págs. 193-214.



do muy poco desde 1890; en Hungría se pudo detectar que la población venía siguiendo un patrón de entrada a edad temprana al matrimonio desde finales del S.XIX ( sin embargo no fué una muestra del todo correcta - pues hubo disturbancias en la nupcialidad durante la 2a. Guerra Mundial y en los últimos 1950's) y en Taiwán se observó que posee una extraordinaria precisión en la recopilación de datos en sus censos y se observó que su población tiene una muy temprana edad de entrada al matrimonio. Aún siendo países con marcadas diferencias de costumbres, nivel de vida, raza, sistema político, etc., A.J. Coale en colaboración con otros investigadores, descubrieron que el comportamiento del fenómeno nupcialidad a una edad  $x$ , era esencialmente el mismo y sólo difería por tres parámetros. Cuando la existencia de un patrón común de frecuencias de primeros matrimonios fué divisado, parecía ventajoso, por varios propósitos, el construir una curva que representara lo mejor posible el patrón común, es decir, dar una forma estándar que pudiera servir como una base de diferentes clases de estimación y cálculos de cómputo. El estándar que se creó fué basado sobre las frecuencias de primeras nupcias registradas en Suecia entre 1965-1969.(4).

Es conveniente señalar que un estándar se define como una tabla que muestra el comportamiento esperado de una población expuesta al riesgo de sufrir el fenómeno o evento en estudio, y cabe también decir que el estándar de nupcialidad aportación de A.J. Coale es único en todo el mundo.

Entre algunas de las implicaciones y usos prácticos del descubrimiento de que las frecuencias de primeras nupcias siguen un patrón similar bajo circunstancias bastante diferentes y que son señaladas por Coale son las siguientes:

- 1) La reconstrucción de poblaciones de mujeres por edad y estado civil.
- 2) Estimación de matrimonios futuros para cohortes cuyos primeros matrimonios han apenas comenzado.

---

(4) A.J.Coale. op. cit. págs. 195,199.

En cuanto a la experiencia de primeros matrimonios de una cohorte se ha indicado que puede ser expresada mediante tres parámetros, siendo éstos:

- $a_0$  .- El origen de la curva, la primera edad significativa de entrada al matrimonio. Esta edad varía debido principalmente a las costumbres religiosas, al grado de desarrollo que tenga el país en estudio o a las leyes a las que se encuentran subordinadas las personas. Así por ejemplo, se observó que para Taiwán en una cohorte de edad 15 en el año 1915,  $a_0 = 13.2$  años y para Suiza (1901-1910) en una cohorte de la misma edad,  $a_0 = 16.5$  años.
- C .- La proporción de mujeres alguna vez casadas cuando los primeros matrimonios hayan efectivamente terminado, i.e., es la intensidad del fenómeno la cual nos indica la proporción de mujeres que se unen, cuyo complemento son aquellas que por costumbre, tradición o restricciones para casarse permanecen en estado célibe durante toda su vida.
- K .- La escala de tiempo ( corta o larga ) de acuerdo a la cual la nupcialidad ocurre. La escala de tiempo puede ser expresada como la escala de tiempo de la curva estándar multiplicada por K. Es en sí la velocidad o ritmo con que se unen las mujeres de una cohorte y tiene los siguientes comportamientos:

$K=1$  El ritmo se considera el mismo tanto en el estándar como en la población observada.

$K>1$  La población en estudio se casa de una manera más lenta que la indicada en el estándar.

$K<1$  La población se casa de una manera más rápida que la indicada en el estándar.

Ahora bien, los primeros matrimonios por experimentarse pueden ser estimados al determinar los tres parámetros ya mencionados sobre la base de la experiencia marital de la cohorte hasta ese punto. La evolución de parámetros de cohorte a cohorte provee una forma racional de registrar ( y extrapolar ) las tendencias de nupcialidad.

### Presentación

En este trabajo lo que se empleó fué el método de regresión lineal para construir tablas de nupcialidad por generación (5). Se usó el estándar de A.J.Coale para obtener una adecuada corrección a los posibles sesgos que tuviera la información con la que se trabajó. Es importante el recalcar que se debe de hacer una evaluación de la información obtenida antes de emplear para su corrección el modelo de A.J.Coale, pues de no hacerse así se podría caer en un incorrecto empleo del modelo.

Se determinan los parámetros  $a_0$ , C y K para hacer uso del estándar para cada uno de los años (1927-1955), tomando la información de la Encuesta Mexicana de Fecundidad llevada a cabo en 1976, que puede observarse en las Tablas 1-4. Esta información fué obtenida en base a encuestas cuyas preguntas principales fueron : ¿ Cuándo se casó? y ¿ a qué edad?, sobre la población femenina de la República Mexicana. La información se tiene por edad individual, de las proporciones de primeros matrimonios y proporción de solteras acumulados a dichas edades. Se toma para cada cohorte tres valores hipotéticos del parámetro C: 1.00, 0.95 y 0.90. Con éstas proporciones y utilizando la Tabla 5, se buscaron las edades a las que corresponden los valores de las proporciones. En la Tabla 5 es en dónde se encuentra el estándar con el que se va a trabajar, teniendo una cohorte de 1000 mujeres. Se emplean esos valores hipotéticos del parámetro C pues se tiene que al considerar una cohorte que proviene de un país latinoamericano generalmente la proporción de 1000 mu-

---

(5) Alejandro Mina V. s.f. "Aplicación del modelo estándar de nupcialidad de A.J.Coale, para la construcción de tablas de nupcialidad de momento y por generación". s.l.

jerés a las que alcanza el fenómeno nupcialidad es entre el 90% y el 100%.

Para fines de exposición en el transcurso de este trabajo se empleará para ejemplificar todos y cada uno de los capítulos posteriores, empezando con el Modelo de Coale, la información del año de 1940, encontrándose éste a la mitad del período bajo estudio pudiéndose observar en el Cuadro I que se da en la página siguiente.

Es conveniente así mismo señalar que todo el procedimiento explicado a continuación fué llevado a cabo en cada uno de los años ya mencionados (1927-1955) en los que fué realizada esta investigación.

NOTACION:

$x$  - edad

$g(x)$  - primeros matrimonios ocurridos a edad  $x$  cumplida, es decir los primeros matrimonios ocurridos entre las edades  $x$  y  $x+1$ .

$G(x)$  - primeros matrimonios ocurridos hasta la edad  $x$  exacta.

El primer paso a seguir es estandarizar la información a que la cohorte sea equivalente a tener siempre un ródix de 1000 mujeres, calculándose la función acumulada  $G(x)$  e inmediatamente después se saca un factor  $r$  por medio del cuál se llegue al resultado que se desea, es decir, que la función  $G(x)$  al final del cálculo necesario para la última edad  $x$  en la que se registraron matrimonios sea igual al ródix de 1000 mujeres. Se controla uno de los tres parámetros y como se mencionó con anterioridad al que se fija es al parámetro  $C$ . Lo que procede es multiplicar a la población  $G(x)$  por el factor  $r$  y enseguida por el factor  $C$ , obteniéndose así tres series de  $G(x)$ 's de las que se obtienen tres series de la función  $g(x)$ , una para cada intensidad ya fijada. Estos cálculos pueden ser apreciados en los Cuadros II y III respectivamente.

CUADRO I

Distribución de las mujeres alguna vez unidas nacidas en 1940 según su edad a la primera unión (EMF).

$x$	$e(\tilde{x})$
9	-
10	-
11	3
12	7
13	1
14	13
15	26
16	21
17	19
18	20
19	18
20	11
21	18
22	11
23	12
24	6
25	6
26	7
27	3
28	1
29	3
30	1
31	3
32	3
33	1
34	1
35	-
36	1

CUADRO II

Función Acumulada  $G(x)$  para 1940.

$x$	$G(x)$
9	-
10	-
11	3
12	10
13	11
14	24
15	50
16	71
17	90
18	110
19	128
20	139
21	157
22	168
23	180
24	186
25	192
26	199
27	202
28	203
29	206
30	207
31	210
32	213
33	214
34	215
35	215
36	216

CUADRO III

Funciones  $G(x)$  y  $g(x)$  para cada  $C$  incluido ya el factor  $r$ .

$x$	$G(x)(r)(1)$	$g(x)$	$G(x)(r)(.95)$	$g(x)$	$G(x)(r)(.9)$	$g(x)$
9	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-
11	13.88888	13.88888	13.19444	13.19444	12.5	12.5
12	46.29129	32.4074	43.98248	30.78703	41.66666	29.166666
13	50.92592	4.62962	48.37962	4.39814	45.83333	4.166666
14	111.11111	60.18518	105.55555	57.17592	100	54.166666
15	231.48148	120.3703	219.90741	114.35185	208.33333	108.333333
16	328.70370	97.2222	312.26852	92.36111	295.83333	87.5
17	416.66666	87.9629	395.83333	83.56481	375	79.166666
18	509.25925	92.5925	483.79629	87.96296	458.33333	83.333333
19	592.59259	83.3333	562.96296	79.16666	533.33333	75
20	643.51852	50.9259	611.34259	48.37962	579.16666	45.833333
21	726.85185	83.3333	690.50925	79.16666	654.16666	75
22	777.77777	50.9259	738.88888	48.37963	700	45.833333
23	833.33333	55.5555	791.66666	52.77777	750	50
24	861.11111	27.7777	818.05555	26.38888	775	25
25	888.88888	27.7777	844.44444	26.38888	800	25
26	921.29629	32.4074	875.23148	30.78703	829.16666	29.166666
27	935.18518	13.8888	888.42593	13.19444	841.66666	12.5
28	939.81481	4.6296	892.82407	4.39414	845.83333	4.166666
29	953.70370	13.8888	906.01852	13.19444	858.33333	12.5
30	958.33333	4.6296	910.41666	4.39414	862.5	4.166666
31	972.22222	13.8888	923.61111	13.19444	875	12.5
32	986.11111	13.8888	936.80555	13.19444	887.5	12.5
33	990.74074	4.6296	941.20370	4.39414	891.66666	4.166666
34	995.37037	4.6296	945.60185	4.39414	895.83333	4.166666
35	995.37037	4.6296	945.60185	4.39414	895.83333	4.166666
36	1000	4.6296	950	4.39414	900	4.166666

Nota: para efectos numéricos se tomaron ocho decimales, para efectos de presentación se muestran los cuatro o cinco primeros decimales.

En este caso se tomó  $r = 1000/216 = 4.62962963$

Se grafican estas seis series,  $x$  - edad vs.  $g(x)$ 's y  $x$  - edad vs.  $G(x)$ 's, y al observar las tres primeras se aprecia la necesidad de un ajuste. (ver gráficas 1-6). Es importante el efectuar este análisis, pues de no hacerse así puede uno estar aplicando el modelo de Coale a una información adecuada al no evaluarla correctamente y hacer un mal uso de este modelo. Es necesario subrayar que en un país como México, en vías de desarrollo, aún no se cuenta con la capacidad deseable para una recolección de información cuyo sesgo de error sea mínimo, por lo que se puede palpar una eminente necesidad del uso de modelos como el que es expuesto aquí.

Se busca entonces una relación entre los matrimonios observados y los del estándar, y como en el estándar se trabaja con la función acumulada (matrimonios hasta esa edad), se interpola para encontrar en la tabla del modelo (Tabla 5), la edad teórica  $x_g$  a la que le corresponden las series  $G(x)$ 's que se obtuvieron, llegándose así a la serie  $(x_g)$  para cada hipótesis de la intensidad. Es en esta parte donde uno se da cuenta que lo que se está manejando atrás de la relación de los matrimonios observados y los del estándar es el encontrar una corrección de la estructura por edad de la nupcialidad pues se observa una relación H neal entre las edades observadas correspondientes a las series  $G(x)$ 's, y las edades estandarizadas que fueron obtenidas vía la aplicación del estándar  $(x_g)$ . Esta es la ventaja más importante del uso del modelo de Coale. Después de esta observación se lleva a cabo un ajuste por medio de una recta de regresión para cada hipótesis encontrándose así los valores de las series  $(\hat{x}_g)$  ya ajustadas. De estas rectas de regresión que reflejan en sí la relación lineal que se ha hablado, se escoge aquella que se comporte con mayor exactitud con respecto a los datos. Es decir, estadísticamente se usaría el criterio de tomar aquella recta cuyo



coeficiente de correlación fuera más cercano a uno, pues denotaría un comportamiento de los datos bastante similar al de la recta en cuestión, hallándose de esta manera una relación matemática entre los datos observados y los datos estándar con un error mínimo.

De la recta ajustada se tomará la pendiente ( $m$ ) que viene siendo igual al inverso del ritmo en que contrae matrimonio la población en estudio, es decir:  $m = 1/K$ . También se calcula  $x_0 = a_0$ , que viene a ser igual a la ordenada al origen de la recta ajustada multiplicada por el ritmo con que contrae nupcias la población, tomándose el inverso aditivo de ésta multiplicación para que sea válida la igualdad, es decir:

$x_0 = -dK$ , donde  $d$  es la ordenada al origen de la recta que se está empleando. De ahí se puede calcular tanto la serie  $G(x)$  como la  $g(\hat{x})$ , pues al tener el mejor ajuste se vé bajo que hipótesis de  $C$  se trabajó y se calculan las edades estándar ajustadas, es decir,

$\hat{x}_g = x(1/K) + d$ ; y de ahí las series mencionadas y el verdadero valor del parámetro  $C$ . Para éste cálculo se toma el último valor de la edad  $x$  en la tabla original de datos. Se calcula también la esperanza de vida cónyuge :

$$\bar{m} = \frac{\sum_{x=\alpha}^{\beta} (x+0.5)(g(\hat{x}))}{g(\hat{x})}$$

dónde  $\alpha$  = edad de entrada al matrimonio.

$\beta$  = edad de salida.

Los cómputos señalados anteriormente para el año de 1940 se encuentran recopilados en los cuadros subsecuentes.

GUADRO IV

Edades teóricas  $x$  vs. edades estándar  $x_g$  encontradas mediante la interpolación de las series  $G(x)$ 's con respecto a las edades  $x$  para encontrar las edades  $x_g$  para cada hipótesis de  $C$ .

$x$	$x_{s1+}$	$x_{s2+}$	$x_{s3+}$
9	-	-	-
10	-	-	-
11	1.93888	1.89327	1.84436
12	3.29473	3.22459	3.15227
13	3.42708	3.35503	3.28070
14	4.73826	4.63682	4.53257
15	6.55163	6.39505	6.23623
16	7.81810	7.60743	7.39591
17	8.94716	8.67752	8.41011
18	10.19646	9.84168	9.49657
19	11.45077	10.98465	10.54215
20	12.32143	11.76038	11.23622
21	14.00832	13.22421	12.51654
22	15.28377	14.28907	13.42084
23	17.02439	15.67694	14.55901
24	18.11772	16.49591	15.20767
25	19.43433	17.43917	15.92432
26	21.43869	18.75337	16.87567
27	22.55886	19.40984	17.33269
28	22.89291	19.64558	17.49279
29	24.54259	20.41053	17.99930
30	25.18284	20.68888	18.17759
31	27.58044	21.61069	18.74245
32	31.00972	22.70514	19.36166
33	32.70467	23.12437	19.58262
34	35.20026	23.57977	19.81149
35	35.20026	23.57977	19.81149
36	40	24.07976	20.04971

'' para efectos numéricos se tomaron ocho decimales, para efectos de presentación se muestran los cinco primeros decimales.

1+ se emplea la hipótesis de  $C=1.00$  para el cálculo de ésta  $x_g$ .

2+ se emplea la hipótesis de  $C=0.95$  para el cálculo de ésta  $x_g$ .

3+ se emplea la hipótesis de  $C=0.90$  para el cálculo de ésta  $x_g$ .

CUADRO V

Ordenada al origen, pendiente y coeficiente de correlación calculados según la serie (x<sub>si</sub>).

	x <sub>s1+</sub>	x <sub>s2+</sub>	x <sub>s3+</sub>
d	-15.479255	-7.182602	-4.647201
m	1.432610	.932630	.759117
r+	.992928	.988709	.974429

+ El coeficiente de correlación se calcula de la siguiente manera:

$$r = \frac{\sum_{j=1}^n (x_{sj} - \bar{x}_s)(x_j - \bar{x})}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{sj} - \bar{x}_s)^2 (x_j - \bar{x})^2}}$$

dónde j=1...n, con n el número de observaciones según el año en estudio.

Al analizar los datos del cuadro número V, se ve que el coeficiente de correlación más cercano a uno es el que corresponde a la serie x<sub>s1j</sub>, es decir a las observaciones que se trabajaron bajo la hipótesis de que el parámetro C era igual a uno. Se tienen los parámetros x<sub>o</sub> y K en el siguiente cuadro.

CUADRO VI

Valores de los parámetros x<sub>o</sub> y K para el año de 1940.

x <sub>o</sub>	K
10.80493	.6980265

En el cuadro a continuación se podrán observar las edades estándar ajustadas, la función acumulada  $G(\hat{x}_{slj})$  y la función  $g(\hat{x}_{slj})$ . Cabe decir en este momento que la función  $g(\hat{x}_{slj})$  se obtiene de la siguiente forma al desacumular la función  $G(\hat{x}_{slj})$  :

$$g(\hat{x}_{slj}) = G((x+1)_{slj}) - G(\hat{x}_{slj})$$

y que a partir de los datos así obtenidos es como se calcula la edad media al matrimonio y las tablas de nupcialidad correspondientes.

CUADRO VII

Edades estándar ajustadas  $\hat{x}_{slj}$  y sus correspondientes funciones  $G(\hat{x}_{slj})$  y  $g(\hat{x}_{slj})$  .'

x	$\hat{x}_{slj}$	$G(\hat{x}_{slj})$	$g(\hat{x}_{slj})$
11	.279459	.2830276	.2830276
12	1.712070	10.700534	10.417506
13	3.144680	41.427341	30.726907
14	4.577291	102.360971	60.933529
15	6.009901	185.114099	82.753128
16	7.442512	299.448932	114.334833
17	8.875122	411.119453	111.670521
18	10.30773	517.099756	105.980302
19	11.74034	610.150429	93.050673
20	13.17295	687.993917	77.843487
21	14.60556	751.881457	63.887539
22	16.03817	803.726859	51.845403
23	17.47078	845.763335	41.536475
24	18.90339	878.369609	33.106274
25	20.33600	904.800499	26.430889
26	21.76862	925.675152	20.874653
27	23.20123	941.972147	16.296994
28	24.63384	954.393780	12.421633
29	26.06645	963.998687	9.604906
30	27.49905	971.815291	7.816604
31	28.93166	978.406175	6.590884
32	30.36428	983.984977	5.578801
33	31.79689	988.441291	4.456313
34	33.22950	991.911195	3.470659
35	34.66211	994.550377	2.647427
36	36.09472	996.543137	1.983700

Se traza la gráfica 7 en la que se puede apreciar la relación lineal entre las edades observadas  $x$  y las edades estándar  $\hat{x}_g$ , así como la recta de ajuste que fué calculada.

Es conveniente aclarar que la serie  $\hat{x}_{sij}$ , y en general las series de edades ajustadas  $\hat{x}_{sij} = x(1/K) + d$  se calculan después del valor de  $x_0$ , es decir :

$$\hat{x}_{sij} = ([x_0] + 1)(1/K) + d \quad \dots(6)$$

Los valores de  $G(\hat{x}_{sij})$  se obtuvieron de interpolar las edades estándar ajustadas correspondientes entre los valores de edades estándar más cercanas a ellas.

Del cuadro VII se toman los valores de  $g(\hat{x}_{s1j})$  a edades  $\hat{x}_{s1j}$  observadas trasladándose las edades  $\hat{x}_{s11} = x_1$ , y así sucesivamente. Para calcular la edad media al matrimonio como se había mencionado queda :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{11.5(g(\hat{x}_{s11})) + \dots + 36.5(g(\hat{x}_{s136}))}{g(\hat{x}_{s11}) + \dots + g(\hat{x}_{s136})} \\ &= \frac{11.5(\hat{g}(11)) + \dots + 36.5(\hat{g}(36))}{\hat{g}(11) + \dots + \hat{g}(36)} \\ &= \frac{19628.92536}{996.543137} = 19.6970152 \end{aligned}$$

Un supuesto muy importante con el que se manejaron los datos es el de considerar a la población cerrada, sin tomar en cuenta la gran migración que existe en la República Mexicana, puesto que se maneja la encuesta con una óptica retrospectiva construyendo así cohortes ficticias que han superado tanto el fenómeno mortalidad como el de migración en el momento que entran a formar parte de la información. Se dice pues que se está empleando una hipótesis de continuidad. Se tiene entonces que la mi

<sup>1</sup> nota pág. anterior. se consideran a un únicamente 5 ó 6 decimales.

6) Los [ ] denotan la función máxima entero menor o igual que.

gración principalmente debida a causas culturales y económicas en la que la mujer en muchos casos es la que tiene que migrar de estado a estado - del país aún a lugares muy lejanos de su lugar de origen e inclusive al extranjero no es tomada en cuenta. La información es captada vía las mu jeres como se había mencionado debido a que se capta mejor la información pues en hombres ( sobre todo en países latinoamericanos) es difícil que declaren correctamente su estado civil. Se considera que el evento matrimonio sucede cuando la mujer se encuentra expuesta por primera vez al -- riesgo de concebir, la unión puede ser legal, esporádica o de convivencia.

TABLA 1  
 DISTRIBUCION DE LAS MUJERES ALGUNA VEZ UNIDAS SEGUN AÑO DE NACIMIENTO Y EDAD A PRIMERA UNION +  
 (continúa)

EDAD A LA PRIMERA UNION	AÑO DE NACIMIENTO										TOTAL	
	1920	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928	1929		
09	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-	-	2	1	1	-	4
11	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	1
12	-	-	-	-	-	-	1	-	3	-	-	4
13	-	-	-	-	-	-	1	4	5	11	-	21
14	-	-	-	-	-	-	-	6	11	6	-	23
15	-	-	-	-	-	-	3	4	15	8	-	30
16	-	-	-	-	-	-	1	11	15	14	-	41
17	-	-	-	-	-	-	2	12	10	11	-	35
18	-	-	-	-	-	-	-	7	9	12	-	28
19	-	-	-	-	-	-	-	8	9	9	-	26
20	-	-	-	-	-	-	1	9	18	8	-	36
21	-	-	-	-	-	-	-	7	8	6	-	21
22	-	-	-	-	-	-	1	6	12	11	-	30
23	-	-	-	-	-	-	-	6	8	4	-	18
24	-	-	-	-	-	-	-	3	4	3	-	10
25	-	-	-	-	-	-	-	1	5	3	-	9
26	-	-	-	-	-	-	1	-	1	3	-	5
27	-	-	-	-	-	-	-	2	2	4	-	8
28	-	-	-	-	-	-	-	3	2	1	-	6
29	-	-	-	-	-	-	-	1	1	3	-	5
30	-	-	-	-	-	-	-	1	1	1	-	3
31	-	-	-	-	-	-	-	-	2	-	-	2
32	-	-	-	-	-	-	-	1	2	-	-	3
33	-	-	-	-	-	-	-	1	-	1	-	2
34	-	-	-	-	-	-	-	-	2	1	-	3

TABLA 1.

DISTRIBUCION DE LAS MUJERES ALGUNA VEZ UNIDAS SEGUN AÑO DE NACIMIENTO Y EDAD A PRIMERA UNION \*

(continuación)

AÑO DE NACIMIENTO

EDAD A LA PRIMERA UNION	AÑO DE NACIMIENTO										TOTAL
	1920	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928	1929	
35	-	-	-	-	-	-	-	1	1	-	2
36	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2
37	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	1
38	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	1
39	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
40	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
41	-	-	-	-	-	-	1	1	-	-	2
42	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
43	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1
44	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
45	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
46	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
47	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
48	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
49	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
<b>TOTAL</b>	-	-	-	-	-	-	13	98	148	124	383



TABLA 2

DISTRIBUCION DE LAS MUJERES ALGUNA VEZ UNIDAS SEGUN AÑO DE NACIMIENTO Y EDAD A PRIMERA UNION  
(continúa)

AÑO DE NACIMIENTO

EDAD A LA PRIMERA UNION	AÑO DE NACIMIENTO										TOTAL
	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937	1938	1939	
09	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	1
10	-	-	1	-	-	1	-	-	1	-	3
11	1	2	-	2	1	2	2	3	3	1	17
12	1	2	3	4	-	3	9	3	2	1	28
13	6	5	3	6	-	4	7	10	8	3	52
14	12	11	4	5	10	7	16	11	14	14	104
15	12	10	10	18	11	15	25	20	19	12	155
16	18	22	11	15	18	12	17	16	30	11	170
17	13	10	16	20	25	13	17	23	20	20	177
18	14	12	21	11	14	18	16	24	22	15	167
19	11	14	13	10	15	19	22	19	11	16	150
20	16	11	9	11	5	17	12	15	18	19	133
21	12	13	8	9	6	5	7	5	17	14	96
22	5	7	9	9	6	5	13	11	8	3	76
23	8	6	4	5	6	7	8	3	4	8	59
24	3	2	3	8	4	3	4	6	5	6	44
25	1	7	6	6	5	4	10	5	5	4	53
26	2	1	-	5	4	5	4	4	6	4	35
27	1	3	1	4	2	1	1	2	2	1	18
28	4	6	4	1	1	1	1	2	3	1	24
29	3	1	1	1	2	1	-	1	3	1	14
30	2	-	1	1	-	1	3	1	1	4	14
31	-	1	-	3	1	1	-	2	-	2	10
32	1	-	1	2	1	1	-	1	2	1	10

TABLA 2.

DISTRIBUCION DE LAS MUJERES ALGUNA VEZ UNIDAS SEGUN AÑO DE NACIMIENTO Y EDAD A PRIMERA UNION  
(continuación)

EDAD A LA PRIMERA UNION	AÑO DE NACIMIENTO										TOTAL
	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937	1938	1939	
33	1	-	-	-	3	-	1	1	2	2	10
34	1	-	-	-	-	-	-	2	-	1	4
35	-	-	-	2	-	-	1	-	1	1	5
36	-	-	-	1	-	-	1	-	1	-	3
37	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	2
38	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	1
39	-	1	1	-	1	1	-	-	-	-	4
40	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
41	1	-	-	1	-	-	-	-	-	-	2
42	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
43	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
44	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
45	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
46	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
47	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
48	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
49	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
TOTAL	149	147	136	161	141	147	197	190	208	165	1641

TABLA 3

DISTRIBUCION DE LAS MUJERES ALGUNA VEZ UNIDAS SEGUN AÑO DE NACIMIENTO Y EDAD A LA PRIMERA UNION +  
(continúa)

EDAD A LA PRIMERA UNION	AÑO DE NACIMIENTO										TOTAL
	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947	1948	1949	
09	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	-	1	1	2	-	1	1	-	-	1	7
11	3	-	1	1	-	-	4	-	-	1	10
12	7	4	7	2	1	2	3	4	4	4	38
13	1	11	8	4	7	9	9	7	15	7	78
14	13	14	16	9	13	8	20	15	18	11	137
15	26	14	16	20	17	21	19	12	22	12	179
16	21	25	20	19	26	23	25	24	20	22	225
17	19	13	27	20	22	22	31	21	27	17	219
18	20	24	12	21	11	21	27	26	29	18	209
19	18	18	29	20	16	20	24	24	35	22	226
20	11	8	12	19	17	14	13	22	19	22	157
21	18	21	15	15	11	11	13	16	13	21	154
22	11	8	13	15	17	7	17	16	9	18	131
23	12	7	8	6	13	10	10	6	12	12	96
24	6	9	4	7	12	4	4	5	9	11	71
25	6	8	7	6	9	5	10	4	10	8	73
26	7	5	5	6	3	1	3	2	3	6	41
27	3	4	2	4	6	6	5	1	2	2	35
28	1	2	3	2	-	2	4	4	2	-	20
29	3	1	1	3	2	3	3	-	-	-	16
30	1	2	3	3	1	4	1	-	-	-	15
31	3	-	1	1	-	-	-	-	-	-	5
32	3	1	1	1	1	-	-	-	-	-	7

TABLA 3.

DISTRIBUCION DE LAS MUJERES ALGUNA VEZ UNIDAS SEGUN AÑO DE NACIMIENTO Y EDAD A PRIMERA UNION +

(continuación)

AÑO DE NACIMIENTO

TOTAL

EDAD A LA PRIMERA UNION	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947	1948	1949	TOTAL
33	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	2
34	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	3
35	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
36	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1
37	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
38	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
39	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
40	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
41	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
42	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
43	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
44	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
45	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
46	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
47	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
48	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
49	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
TOTAL	216	203	212	206	205	194	246	209	249	215	2155

TABLA 4

DISTRIBUCION DE LAS MUJERES ALGUNA VEZ UNIDAS SEGUN AÑO DE NACIMIENTO Y EDAD A PRIMERA UNION +  
(continúa)

EDAD A LA PRIMERA UNION	AÑO DE NACIMIENTO										TOTAL
	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	
09	-	2	-	-	-	-	1	-	-	-	3
10	1	3	-	2	1	1	-	1	-	-	9
11	-	4	1	-	-	1	2	-	-	3	11
12	2	2	2	2	2	2	4	4	-	-	26
13	9	9	5	7	7	9	9	11	5	9	80
14	16	19	8	13	19	17	18	12	17	15	154
15	25	13	20	27	26	21	26	32	19	19	228
16	19	35	25	20	30	35	32	22	23	28	269
17	27	24	34	25	26	38	43	31	34	9	291
18	42	19	24	39	37	29	25	27	9	-	251
19	39	21	47	29	31	36	29	8	-	-	240
20	20	22	16	30	31	25	8	-	-	-	152
21	27	23	15	20	17	3	-	-	-	-	105
22	23	14	14	18	10	-	-	-	-	-	79
23	11	14	19	6	-	-	-	-	-	-	50
24	12	9	1	-	-	-	-	-	-	-	22
25	7	6	-	-	-	-	-	-	-	-	13
26	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3
27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
28	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
29	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
31	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

TABLA 4.

DISTRIBUCION DE LAS MUJERES ALGUNA VEZ UNIDAS SEGUN AÑO DE NACIMIENTO Y EDAD A LA PRIMERA UNION  
(continuación)

EDAD A LA PRIMERA UNION	AÑO DE NACIMIENTO										TOTAL
	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	
33	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
34	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
35	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
36	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
37	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
38	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
39	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
40	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
41	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
42	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
43	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
44	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
45	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
46	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
47	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
48	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
49	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
TOTAL	283	239	231	238	237	217	197	148	112	84	1986

TABLA 5

MODELO ESTANDAR DE LAS PROPORCIONES DE MUJERES NO SOLTERAS A LA EDAD  $x$  POR INTERVALOS DE 0.1 AÑOS  
 (Valores de  $Q(x)$  por mil mujeres)

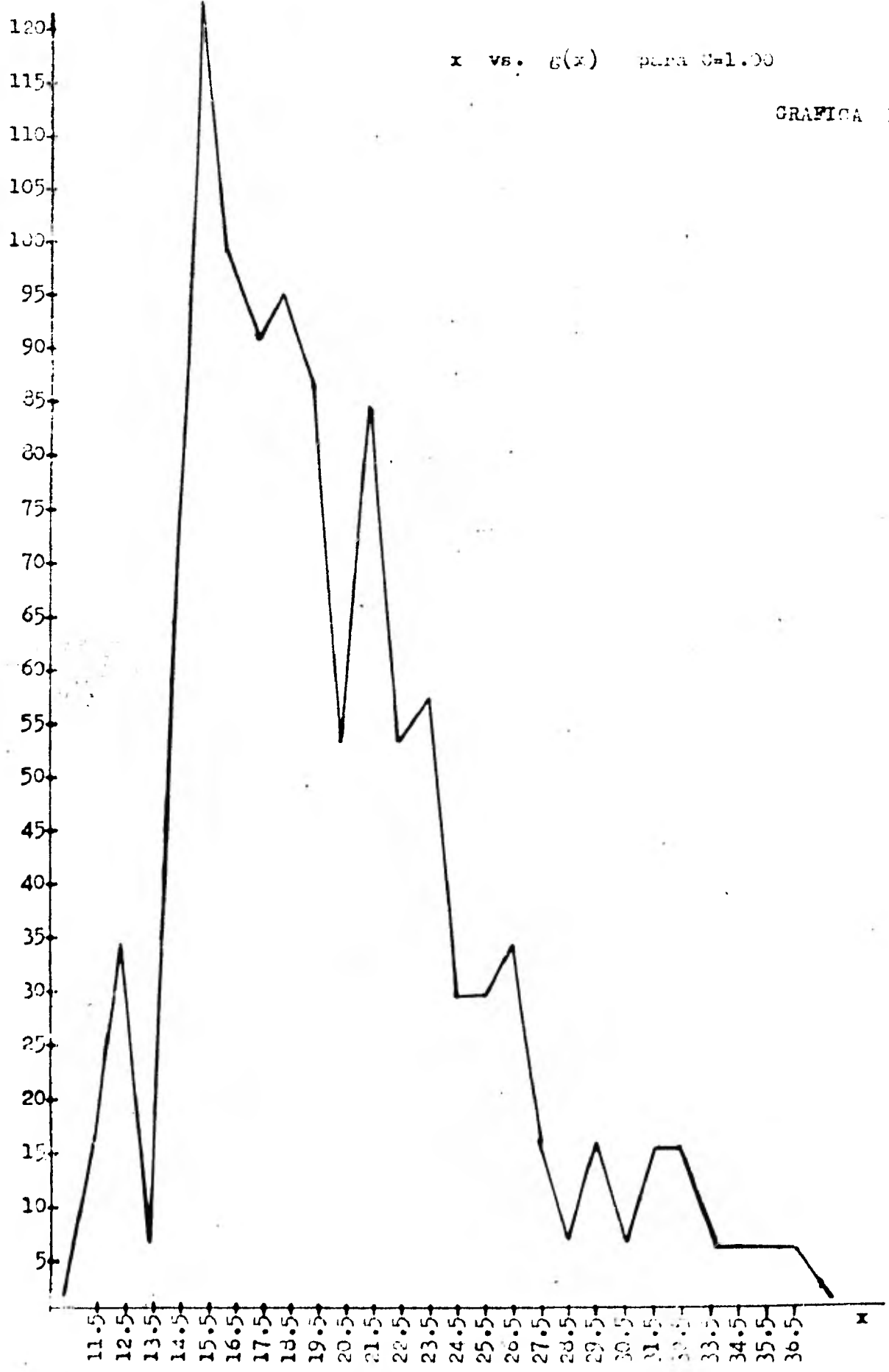
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.0	0.0	0.04	0.14	0.32	0.50	0.90	1.30	1.77	2.31	2.93
1.0	3.62	4.39	5.23	6.15	7.14	8.20	9.32	10.54	11.87	13.29
2.0	14.83	16.48	18.24	20.12	22.13	24.27	26.54	28.95	31.50	34.19
3.0	37.03	40.02	43.17	46.47	49.94	53.58	57.38	61.33	65.42	69.57
4.0	74.07	78.61	83.31	88.15	93.14	98.28	103.56	108.98	114.55	120.25
5.0	126.09	132.07	138.18	144.42	150.80	157.31	163.93	170.67	177.50	184.42
6.0	191.43	198.83	205.71	212.95	220.27	227.64	235.08	242.57	250.11	257.70
7.0	265.32	272.99	280.68	288.40	296.15	303.91	311.69	319.48	327.29	335.10
8.0	342.93	350.75	358.58	366.40	374.21	382.02	389.81	397.58	405.32	413.04
9.0	420.73	428.39	436.01	443.58	451.11	458.59	466.02	473.41	480.74	488.02
10.0	495.24	502.41	509.51	516.56	523.54	530.45	537.29	544.07	550.77	557.41
11.0	563.97	570.46	576.87	583.21	589.40	595.63	601.73	607.75	613.70	619.57
12.0	625.37	631.10	636.75	642.34	647.84	653.28	658.64	663.93	669.14	674.29
13.0	679.37	684.39	689.33	694.20	699.01	703.76	708.43	713.04	717.59	722.07
14.0	726.49	730.84	735.13	739.35	743.51	747.61	751.64	755.64	759.57	763.44
15.0	767.25	771.01	774.72	778.37	781.97	785.52	789.02	792.46	795.86	799.20
16.0	802.49	805.73	808.91	812.05	815.14	818.18	821.17	824.11	827.01	829.86
17.0	832.66	835.42	838.14	840.81	843.43	846.02	848.56	851.07	853.53	855.96
18.0	858.35	860.70	863.02	865.30	867.55	869.77	871.95	874.10	876.22	878.30
19.0	880.35	882.37	884.36	886.31	888.24	890.13	891.99	893.82	895.63	897.40
20.0	899.15	900.86	902.55	904.21	905.85	907.43	909.03	910.59	912.12	913.62
21.0	915.10	916.55	917.98	919.39	920.77	922.13	923.47	924.79	926.08	927.35
22.0	928.60	929.82	931.03	932.22	933.38	934.52	935.65	936.75	937.83	938.89
23.0	939.94	940.96	941.96	942.95	943.91	944.86	945.79	946.70	947.59	948.47
24.0	949.33	950.17	951.00	951.81	952.60	953.38	954.14	954.89	955.63	956.35
25.0	957.07	957.77	958.45	959.11	959.80	960.46	961.11	961.74	962.37	962.99
26.0	962.60	964.20	964.79	965.38	965.96	966.52	967.09	967.64	968.18	968.72
27.0	969.24	969.78	970.30	970.81	971.32	971.82	972.31	972.80	973.28	973.76
28.0	974.23	974.70	975.16	975.62	976.07	976.52	976.97	977.41	977.84	978.27
29.0	978.70	979.12	979.53	979.94	980.35	980.75	981.15	981.54	981.92	982.30
30.0	982.67	983.04	983.40	983.76	984.11	984.45	984.79	985.12	985.45	985.77
31.0	986.08	986.40	986.70	987.00	987.30	987.60	987.88	988.17	988.45	988.72
32.0	989.99	989.25	989.51	989.76	990.01	990.26	990.50	990.73	990.95	991.19
33.0	991.41	991.63	991.85	992.06	992.27	992.47	992.67	992.87	993.06	993.25
34.0	993.44	993.62	993.79	993.97	994.14	994.30	994.46	994.62	994.78	994.93
35.0	995.08	995.22	995.37	995.51	995.65	995.78	995.91	996.04	996.17	996.30
36.0	996.42	996.55	996.66	996.78	996.90	997.02	997.13	997.24	997.35	997.46
37.0	997.56	997.67	997.77	997.87	997.98	998.06	998.15	998.25	998.35	998.42
38.0	998.51	998.60	998.68	998.76	998.84	998.91	998.99	999.06	999.13	999.20
39.0	999.27	999.33	999.39	999.45	999.51	999.57	999.62	999.67	999.72	999.77

Fuente: Coale, A.J. op.cit., tabla 3. pág. 201.

$E(x)$

$x$  vs.  $g(x)$  para  $C=1.00$

GRAFICA 1

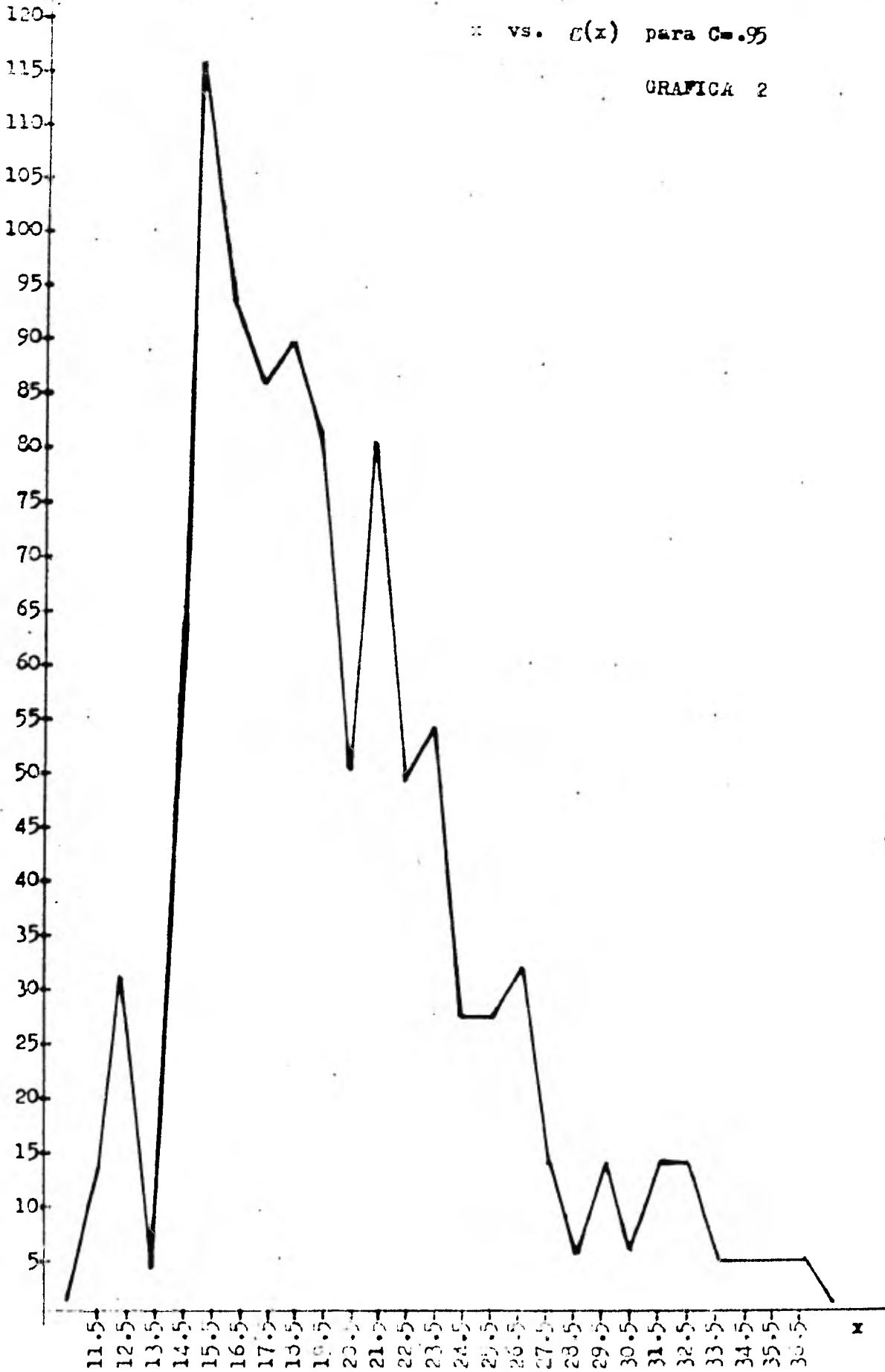


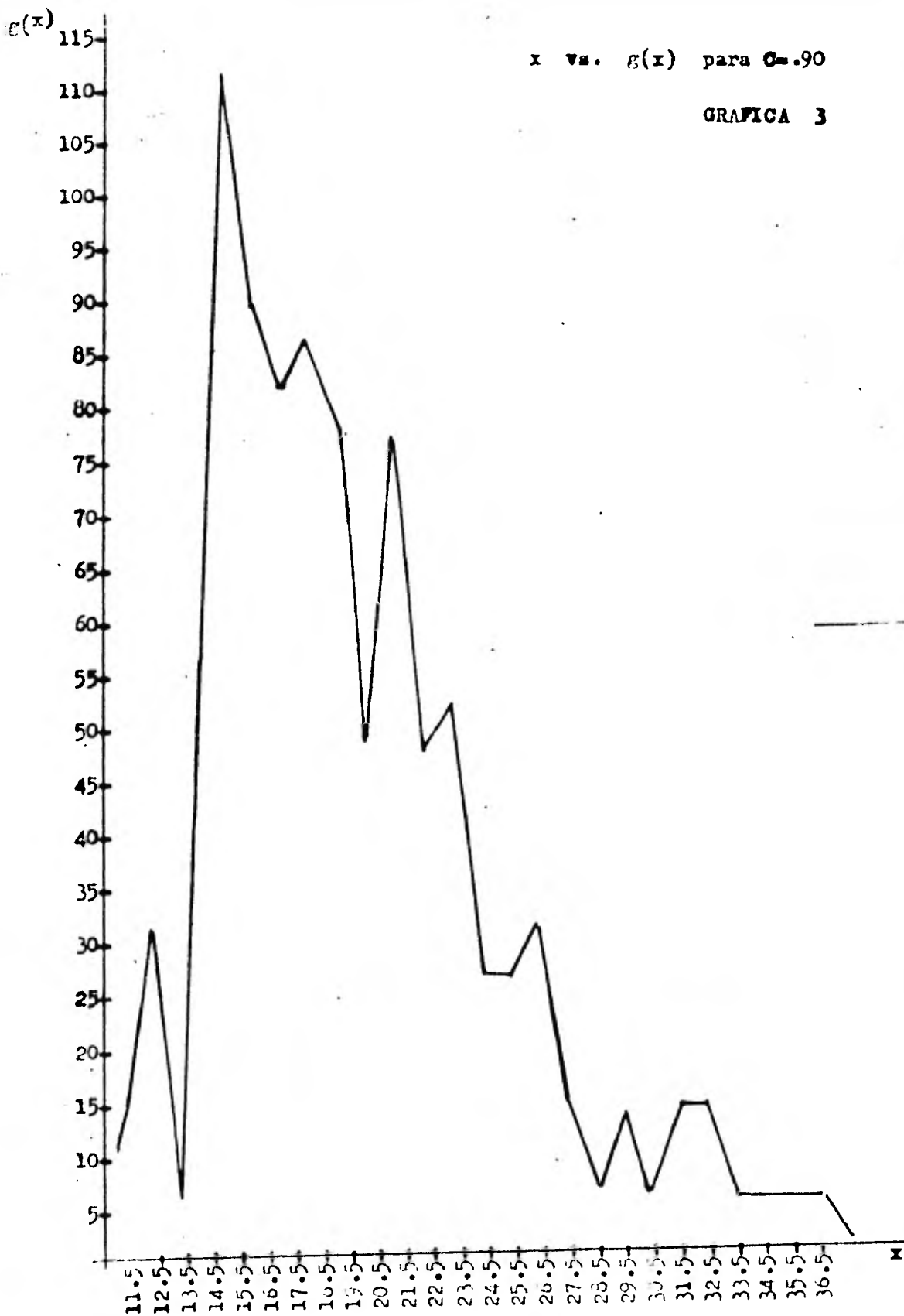


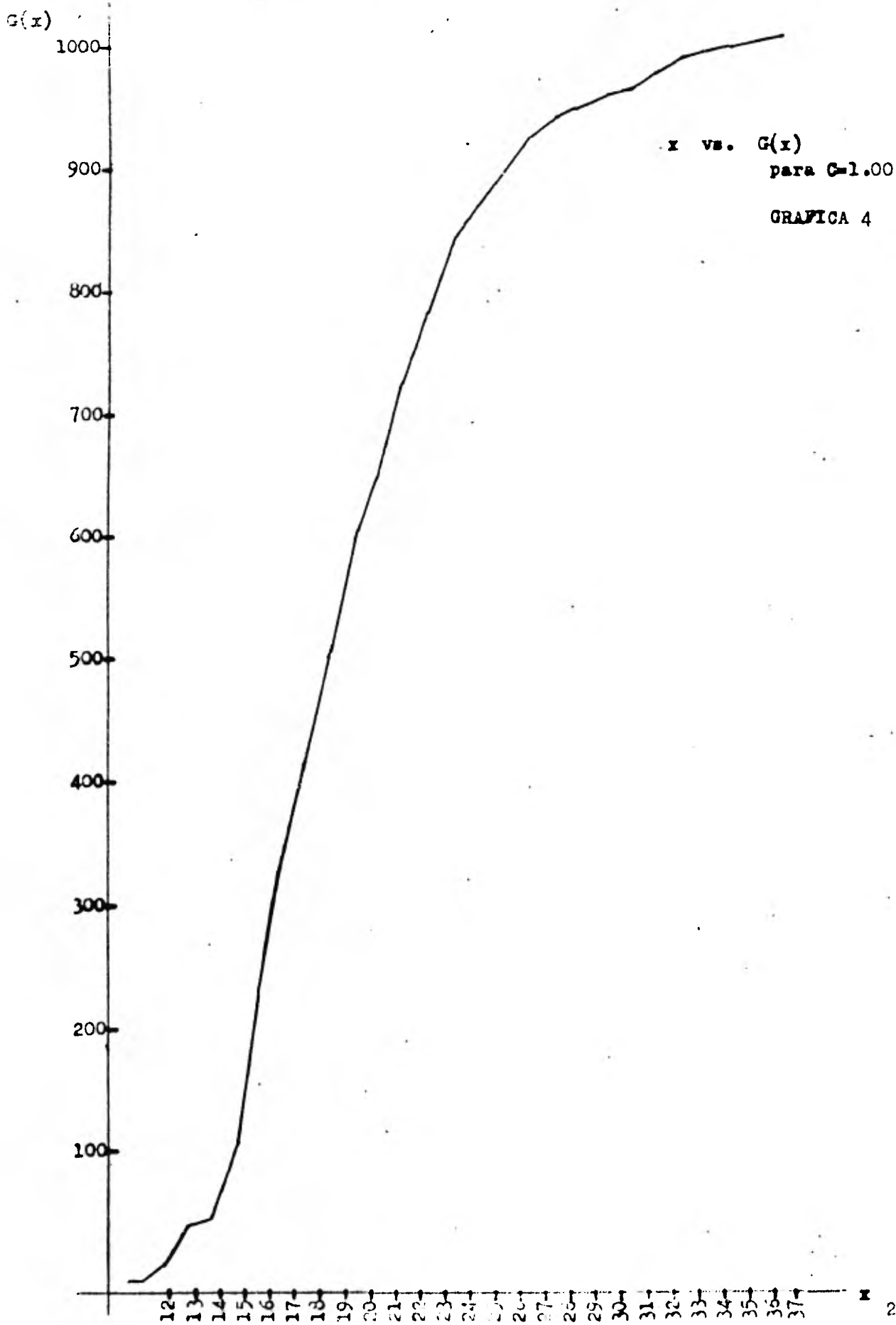
$c(x)$

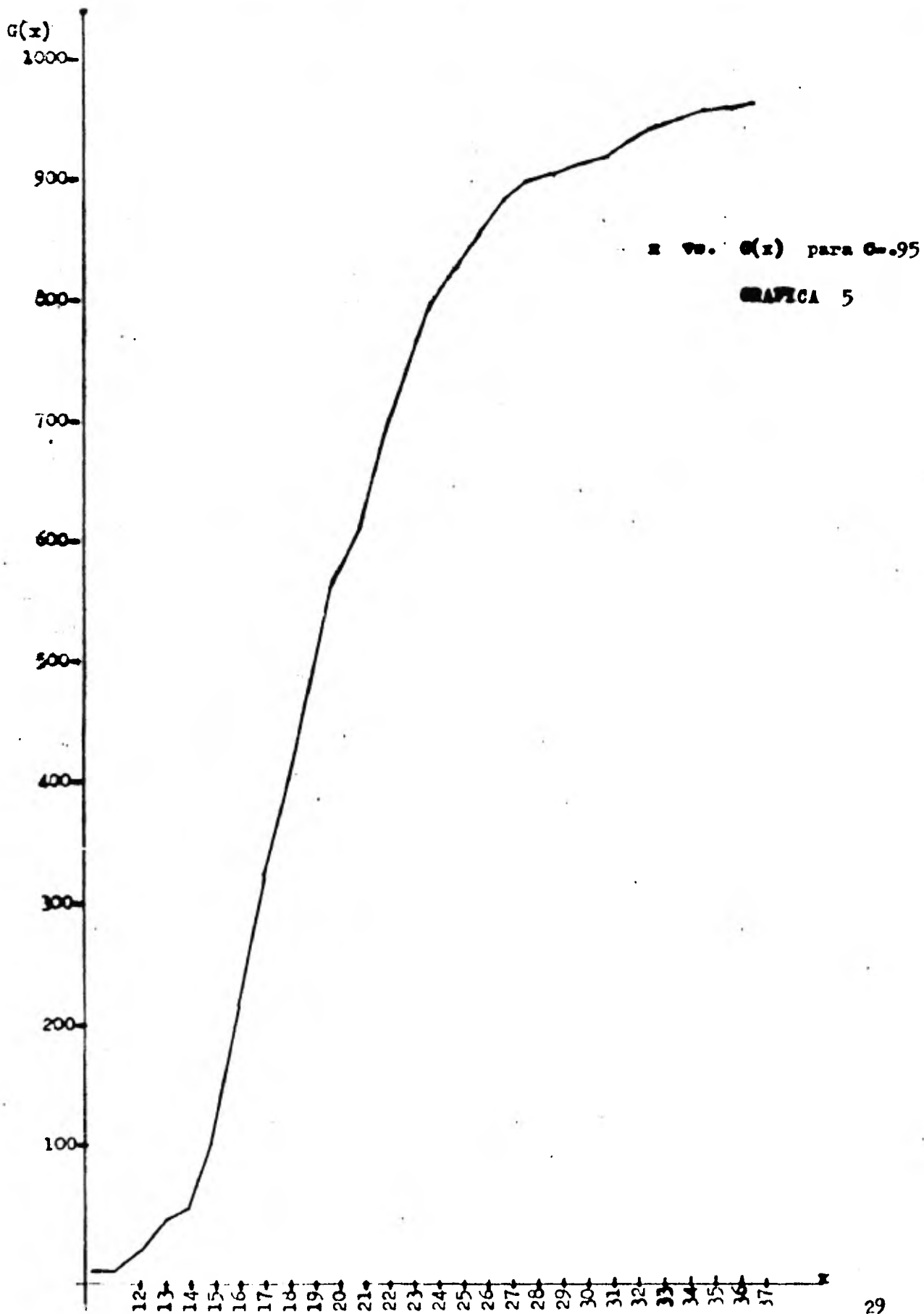
$x$  vs.  $c(x)$  para  $C=.95$

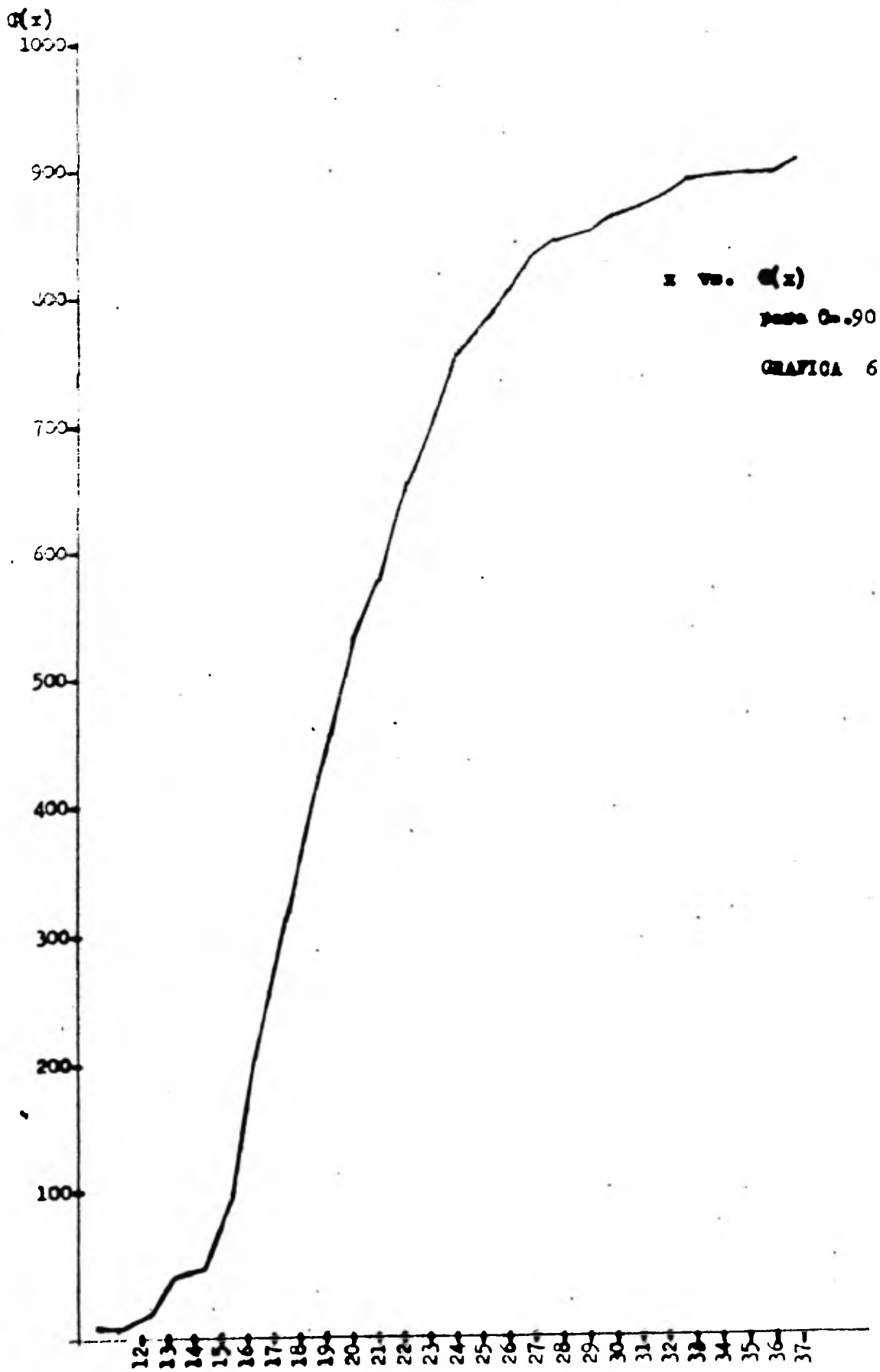
GRAFICA 2







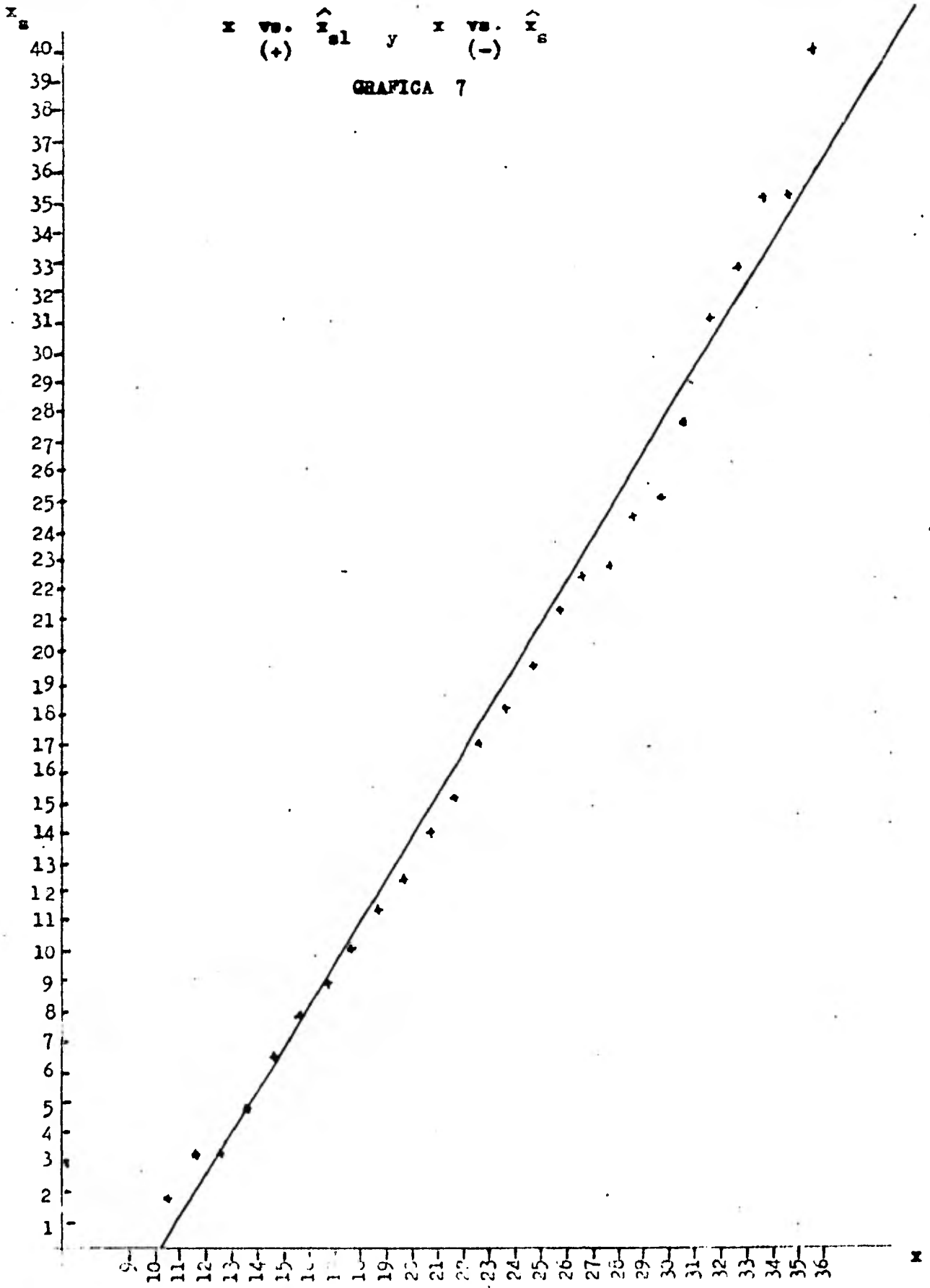




x vs. Q(x)

page 0-90

GRAFICA 6



## CAPITULO 2

### TABLAS DE NUFCIALIDAD

#### Tablas de Eventualidad. Definición.-

Una tabla de eventualidad se define como el instrumento por el cuál se miden las prebabilidades de tener éxito o fracase en el evento en estudio - (que suceda o no el evento), el número de años vividos bajo el evento por grupe, así como los años que le restan por vivir bajo el evento a los se -- brevivientes de cierta edad  $x$ .

Una tabla es la derivación de tres series básicas:

- 1) La serie de " sobrevivientes "  $N_1$  (personas que estando en la edad  $i$  exacta no han sufrido el fenómeno o evento en estudio.
- 2) La serie de los cocientes clásicos  $nq_1$ .
- 3) La serie de los eventos  $e_1$ .

Las tablas son estudios obtenidos de analizar los fenómenos al estado puro, es decir, no se toman en cuenta los perturbadores que pudieran existir según el fenómeno en estudio.

#### Tablas de Generaciones y tablas del momento t.

Se pueden construir en general dos tipos de tablas: las tablas de momento que resumen el fenómeno o evento en estudio por edad a un año dado  $t$  u otro periodo de tiempo corto, conocidas también como el estudio transversal del fenómeno o evento en estudio y las Tablas de generaciones que resumen el fenómeno o evento en estudio por edad pertenecientes a una cohorte (un número de personas que comparten un evento origen en el mismo periodo de tiempo) , y así se extiende sobre muchos años calendario. Ambos tipos asumen un rádix fije en la cohorte, usualmente de 100,000 pudiendo variar éste, y proveen los datos básicos de toda tabla.

#### Tablas de Mortalidad.

El precepto:

"El número de muertes que pueden ocurrir en un grupo suficientemente numeroso de personas, no es enteramente arbitrario sino que está sometido a leyes de promedios cuyo

grado de uniformidad y exactitud permite establecer leyes de cálculo..."(6),

fué el que llevó a construir originalmente las tablas de mortalidad, que caen en la definición ya enunciada : como instrumentos destinados a medir las probabilidades de vida y de muerte de una población, miden el número de años vividos por el grupo y el número de años que le restan por vivir a los sobrevivientes de cierta edad  $x$ . La construcción de estas tablas es una de las prácticas más antiguas en Demografía y su uso se ha extendido para estudiar otros fenómenos como: Nupcialidad, Actividad, Seguros de Vida, etc. Constituyen la descripción estadística más completa de la mortalidad.

Los supuestos fundamentales al construirla son:

- a) Es un modelo teórico que describe la situación de un grupo hipotético inicial.
- b) La ley de extinción corresponde a la mortalidad observada en un periodo corto de tiempo por lo general un año.
- c) Los valores están en función de la edad y no toman en cuenta las variaciones de la mortalidad en el tiempo.

En la práctica, las tablas se hacen para un periodo determinado ya que al hacer una tabla de generaciones se tienen que tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

- El fenómeno estudiado se manifiesta a través de un larguísimo periodo (alrededor de un siglo), lo que dificulta la observación.
- Las reacciones pasadas de las diversas generaciones no parecen repercutir en su porvenir; en otros terminos, la selección mediante la mortalidad parece débil comparada con los demás factores en juego, de modo que un exámen de la mortalidad por generación no aclara el análisis, al paso que, por el contrario, en el caso de la nupcialidad, por ejemplo, no se puede dissociar totalmente el comportamiento de una generación, en una fecha dada, de su historia pasada (recuperación de matrimonios posteriores, etc.).

---

(6) González Galé. "Elementos de Cálculo Actuarial". Edit. Macchi. Buenos Aires, Argentina. 1968. pág. 1.



—Por último, existe un interés evidente en observar el estado de la mortalidad durante el transcurso de un año dado para medir los efectos de diferentes factores económicos, sociales, epidemiológicos, climáticos, y para seguir la medición año tras año: medición que se facilitará conforme a lo que se acaba de decir, por el hecho de que las condiciones pasadas no parecen repercutir en la situación presente, la que parece depender casi exclusivamente de las condiciones del momento.

En resumen, en el estudio de la mortalidad el análisis transversal tiene una prioridad permanente. (7) Como se había establecido al principio de éste párrafo.

### Funciones de la Tabla de Mortalidad.

$(x, x+n)$  - Intervalo de edad: nos da la amplitud en años, entre las edades exactas  $x$  y  $x+n$ , donde  $x$  es la edad exacta y  $n$  la amplitud.

$l_x$  - Sobrevivientes a la edad exacta  $x$  de un grupo inicial  $l_0$ .

$l_0$  - Raíz de la tabla o raíz, es el valor de  $l_x$  para la edad más baja y representa la generación inicial o hipotética de nacidos vivos. Se expresa como una potencia de 10.

$w$  - Se le llama a la edad donde  $l_x = 0$

${}_n d_x$  - Defunciones entre las edades  $x, x+n$  que le van ocurriendo a la generación inicial dentro de cada intervalo de edad y nos indica cuantos de los sobrevivientes a la edad  $x$  mueren antes de alcanzar la edad  $x+n$ .

$$1) \quad {}_n d_x = l_x - l_{x+n}$$

$$2) \quad {}_n d_x = l_x \cdot q_x \quad \text{de donde:}$$

$$i) \quad {}_n q_x = 1 - {}_n p_x$$

$$ii) \quad {}_n q_x = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

$$iii) \quad {}_n q_x \cdot l_x = l_x - l_{x+n} = {}_n d_x$$

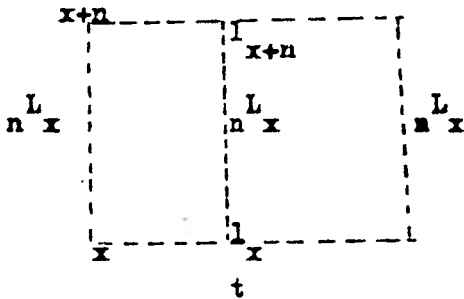
(7) Pressat, Roland. "El análisis Demográfico". Fondo de Cultura Económica, México. 1967. págs. 116-117.

De (1) se deduce que

$$l_x = \sum_{t=x}^{w-1} l_t^d$$

$n^m_x$  - Tasa central o específica de mortalidad, representa la razón entre las personas que murieron entre las edades  $x$  y  $x+n$  en el año de estudio y la población media para las mismas edades.

$$n^m_x = \frac{\frac{n^d_x}{2} P(x, x+n)}{\frac{L}{n_x}} \quad \text{ó} \quad n^m_x = \frac{n^d_x}{\frac{L}{n_x}}, \text{ para el caso de una población estacionaria.}$$



$n^q_x$  - Probabilidad de morir entre las edades exactas  $x$  y  $x+n$ . Es la probabilidad que tiene una persona de edad exacta  $x$  de morir antes de alcanzar la edad exacta  $x+n$ . En base a éste valor se calculan los demás valores de la tabla.

$$n^q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{n^d_x}{l_x} \quad \text{ó} \quad l^q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{l^d_x}{l_x}$$

Con los valores de  $n^q_x$  ó de  $l^q_x$  se inicia la tabla:

$$l_0 \cdot l^q_0 = l^d_0, \quad l_1 = l_0 - l^d_0, \quad l_1 \cdot l^q_1 = l^d_1, \quad l_2 = l_1 - l^d_1, \quad \text{eto.}$$

$n^p_x$  - Probabilidad de sobrevivencia, nos indica la probabilidad de que una persona de edad exacta  $x$  sobreviva hasta alcanzar la edad exacta  $x+n$ .

$$n^p_x = 1 - n^q_x = 1 - \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - l_x + l_{x+n}}{l_x}$$

$$\dots \quad n^p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$n/1^q_x$  - Probabilidad de morir en un año a la edad exacta  $x+n$ , de una persona de edad exacta actual  $x$ .

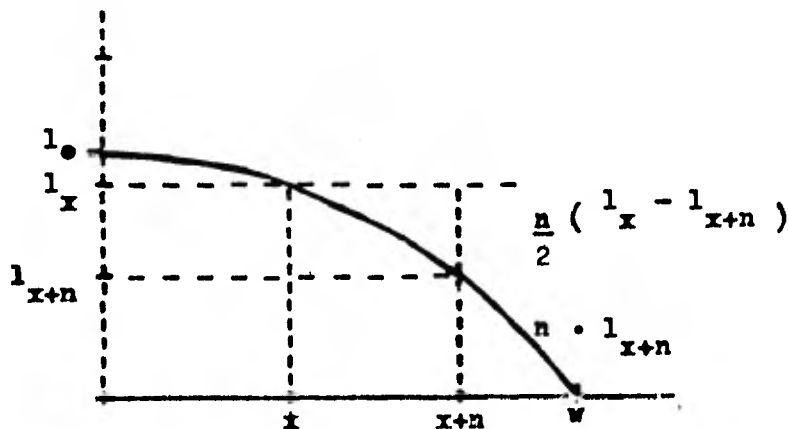
$$n/1^q_x = n^p_x \cdot l^q_{x+n} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l^d_{x+n}}{l_{x+n}} = \frac{l^d_{x+n}}{l_x}$$

$n/m^q_x$  - Representa la probabilidad de morir durante un periodo de  $m$  años de una persona de edad exacta  $x+n$  hasta que alcanza la edad exacta  $x+n+m$ . Es decir es la probabilidad de que una persona de edad actual exacta  $x$ , sobreviva hasta la edad exacta  $x+n$  y muera entre  $x+n$  y  $x+n+m$  exacta.

$$n/m^q_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_x} = n^p_x - n+m^p_x$$

$L_x$  - Años vividos entre las edades  $x$  y  $x+n$ . Es el número de años - que se espera vivirán en conjunto los efectivos de edad exacta  $x$  entre  $x$  y  $x+n$ . Representa también la población estacionaria

$$1) \quad nL_x = \frac{n}{2} (l_x + l_{x+n}) \quad \& \quad 1L_x = \frac{1}{2} (l_x + l_{x+1})$$



$$\begin{aligned}
 nL_x &= \frac{n}{2} (l_x - l_{x+n}) + n \cdot l_{x+n} = \frac{n}{2} l_x - \frac{n}{2} l_{x+n} + n \cdot l_{x+n} \\
 &= \frac{n}{2} (l_x + l_{x+n}) \quad \text{como integral sería:}
 \end{aligned}$$

$$nL_x = \int_x^{x+n} l(t) dt.$$

$$2) \quad nL_x = n \left( l_x - \frac{1}{2} n d_x \right) \quad \delta \quad l_x = l_x - \frac{1}{2} l_x^d$$

$$3) \quad nL_x = n \left( l_{x+n} + \frac{1}{2} n d_x \right) \quad \delta \quad l_x = l_{x+1} + \frac{1}{2} l_x^d$$

$T_x$  - Años que se espera vivirán los sobrevivientes entre la edad exacta  $x$  y la edad  $w$ , donde  $l_{w+1}$  ó  $l_w$  es igual a cero, según el caso.

$$T_x = \sum_{i=x}^w nL_i$$

$$T_0 = L_0 + L_1 + \dots + L_w$$

$$T_x = L_x + L_{x+1} + \dots + L_w$$

$$T_x = \int_x^{x+n} l(t) dt.$$

$e_x^{\circ}$  - Esperanza de vida a edad  $x$ , si el tiempo total que se espera vivirá la cohorte se repartiera de manera uniforme entre las personas que llegan a la edad  $x$ .

$$e_x^{\circ} = \frac{T_x}{l_x} = \frac{\sum_{i=x}^w nL_i}{l_x}$$

La esperanza de vida al nacimiento:

$$e_0^{\circ} = \frac{T_0}{l_0} = \frac{\sum_{i=0}^w nL_i}{l_0}$$

por la propiedad (3) de la función  $nL_x$ , se tiene:

$$e_0^{\circ} = \frac{\sum_{i=0}^w \left( l_{i+1} + \frac{1}{2} l_i^d \right)}{l_0} = \frac{\sum_{i=0}^w \left( \frac{l_i - l_{i+1}}{2} \right)}{l_0}$$

$$q_0 = \frac{\sum_{i=0}^w (0+0.5) d_i}{l_0} ; \text{ pero ésta se pondera por las edades } i:$$

$$q_0 = \frac{\sum_{i=0}^w (i+0.5) d_i}{l_0}$$

El límite de  $q_x^{(m)}$  cuando  $m \rightarrow \infty$ , es la función llamada tasa instantánea de mortalidad:  $\mu_x$

$$\mu_x = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{l_x - l_{x+1/m}}{\frac{1}{m} l_x} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{l_x - l_{x+1/m}}{1/m} \cdot \frac{1}{l_x}$$

sabemos por construcción,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{df(x)}{dx}$  entonces:

$$-\mu_x = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{l_{x+1/m} - l_x}{1/m} \cdot \frac{1}{l_x} = \frac{dl_x}{l_x}$$

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x} \cdot \frac{dl_x}{l_x} \quad \text{y} \quad \frac{df(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{dx} = \frac{d \ln f(x)}{dx}$$

es decir  $\frac{du}{u} = d \ln u$ , entonces:

$$\mu_x = -\frac{d \ln l_x}{dx}$$

Con respecto a la definición de las series básicas de una tabla, en la tabla de mortalidad éstas series serían:

- 1)  $l_x$  la de los sobrevivientes.
- 2)  ${}_n q_x$  la de los cocientes clásicos.
- 3)  ${}_n d_x$  la de los eventos.

Dada la serie (2) se puede obtener mediante el complemento de probabilidades la serie  ${}_n p_x$  pues ambas son independientes. Así pues, se puede construir una tabla completa teniendo como información dos de éstas series.

La esperanza de vida es el índice sintético más empleado cuando se desea resumir convenientemente el riesgo de mortalidad de un país, pues nos denota en sí el número promedio de años de vida que restan desde la edad  $x$  al final de la vida ( $e_x^0$ ). Cabe señalar que el cálculo de la esperanza de vida en un país supone un buen conocimiento estadístico de la mortalidad, y es precisamente en los países de alta mortalidad en donde por lo general faltan los datos. Las comparaciones precisas entre países son difíciles, pues raras veces coinciden los periodos de cálculo de las tablas. Al comparar las esperanzas de vida masculina y femenina aparece una supermortalidad casi universal.(8).

#### Tablas abreviadas de mortalidad.--

Las tablas de mortalidad se fundan en el cálculo de probabilidades anuales que dan por consiguiente los sobrevivientes en todos los aniversarios sucesivos y las defunciones entre estos aniversarios.

Por diferentes razones, se constuyen tablas en las que los aniversarios se encuentran espaciados, por ejemplo cada cinco años:

- ya sea porque se quiere resumir una tabla completa;
- o porque no se dispone de elementos año por año sino solamente elementos aproximados que no permiten construir una tabla completa.

#### Tablas de Nupcialidad.--

Las tablas de nupcialidad se derivan de las tablas de mortalidad y fué ésa la razón por la cuál en el presente trabajo se hizo un análisis de la conformación de una tabla de mortalidad.

Las series básicas de esta tabla serán:

- 1)  $C_x$  la de los sobrevivientes, es decir a los que a la edad  $x$  todavía no les afecta el fenómeno. Se conoce como la columna de los Célibes a edad  $x$ .
- 2)  $\frac{n}{n_x}$  la de los cocientes clásicos. Va a denotar la probabilidad de contraer nupcias.

(1) Pressat, Roland. op.cit. págs. 131-133.

- 3)  $m_x$  - La serie de eventos. (que en este caso son los matrimonios ocurridos entre las edades exactas  $x$  y  $x+1$ ).

La forma de calcular cada una de las series anteriores será la siguiente:

$C_0 = 1000$  - pues es en base a éste radix que se ha estado trabajando en esta investigación.

$\hat{g}(x) = m_x$  de dónde:

$$C_1 = C_0 - \hat{g}(1) ; C_x = 1000 - G(x) \text{ ó } C_x = C_{x-1} - \hat{g}(x-1)$$

$$y n_x = \frac{\hat{g}(x)}{C_x}$$

Se trabajará ejemplificando con una tabla de nupcialidad no abreviada con la información ya corregida de 1940 y después con toda la información se trabajará tanto con tablas por años como con tablas abreviadas.

En una parte posterior se presentarán los resultados obtenidos para los años que se emplearon en la elaboración de esta exposición.

Se puede observar en la Gráfica 8 que la información con que se cuenta es bastante adecuada debido al comportamiento de la curva que denotan los matrimonios a edad  $x$  ajustada  $\hat{g}(x)$ , lo cual resulta obvio pues se está tomando la información ya corregida mediante el modelo de Coale, así como se puede observar también la función acumulada  $\hat{G}(x)$  en la Gráfica 9.

El radix que se toma generalmente para la construcción de una tabla de nupcialidad es nuevamente un múltiplo de diez pero se toma generalmente una generación dada, de preferencia femenina.

Junto a razones históricas particulares, como las guerras y las crisis económicas que perturban la nupcialidad de ciertas generaciones y dejan huellas duraderas, pueden producirse cambios profundos que provocan en la evolución de la nupcialidad movimientos de alta e de baja continuas. Es por eso como se mencionó antes que la tabla de importancia en el fenó-

mente nupcialidad es la tabla de generaciones aún y cuándo éstas sean generaciones ficticias basadas en información transversal logrando — una óptica longitudinal retrospectiva teniéndola ventaja que las mujeres así encuestadas ya han superado los fenómenos migratorios y de mortalidad.

Lo mismo que en el caso de las probabilidades de muerte, a partir de las probabilidades de nupcialidad se pueden calcular tablas de nupcialidad y definir funciones análogas como ya se ha llevado a cabo.

La edad media al casarse ( que es una tendencia central ), se obtiene de multiplicar sucesivamente el número de matrimonios de las distintas edades por cada edad :  $g(15) \cdot 15$ ,  $g(16) \cdot 16$ , etc., sumando todos estos productos y luego dividiendo entre 1000 se obtiene  $\bar{M}$ , conviene agregar medio año, pues no todos los 1000 matrimonios se celebran a las edades exactas, sino que se distribuyen en forma bastante regular entre las edades  $x$  y  $x+1$ , de modo que en promedio se celebran a la edad :  $x + 0.5$ . ( 9 ).

Es interesante observar que esta edad media señalada por Pressat, tiende a parecerse a la esperanza de vida al matrimonio a la edad  $x$ , pero no hay que confundirlas pues esta última se calcula:

$$\bar{m}_x = \frac{\sum_{i=\alpha}^{\beta} (i+0.5) \hat{g}(i)}{\sum_{i=\alpha}^{\beta} \hat{g}(i)}$$

$\alpha$  = edad de entrada al matrimonio  
 $\beta$  = edad de salida

y en el denominador no siempre la suma de eventos es igual al r adix como lo consideran para el cálculo de la edad media al matrimonio.

Tomando la información del Cuadro VII, se verifica que al tener dos columnas básicas de una tabla de nupcialidad se puede proceder a construir la.

Se establece  $C_0 = 1000$  y se sabe que  $m_x = \hat{g}(x)$  por lo que se puede obtener completa la información de la columna  $C_x$  pues como ya se mencionó

(9) Pressat, R. op.cit. p a. 7.

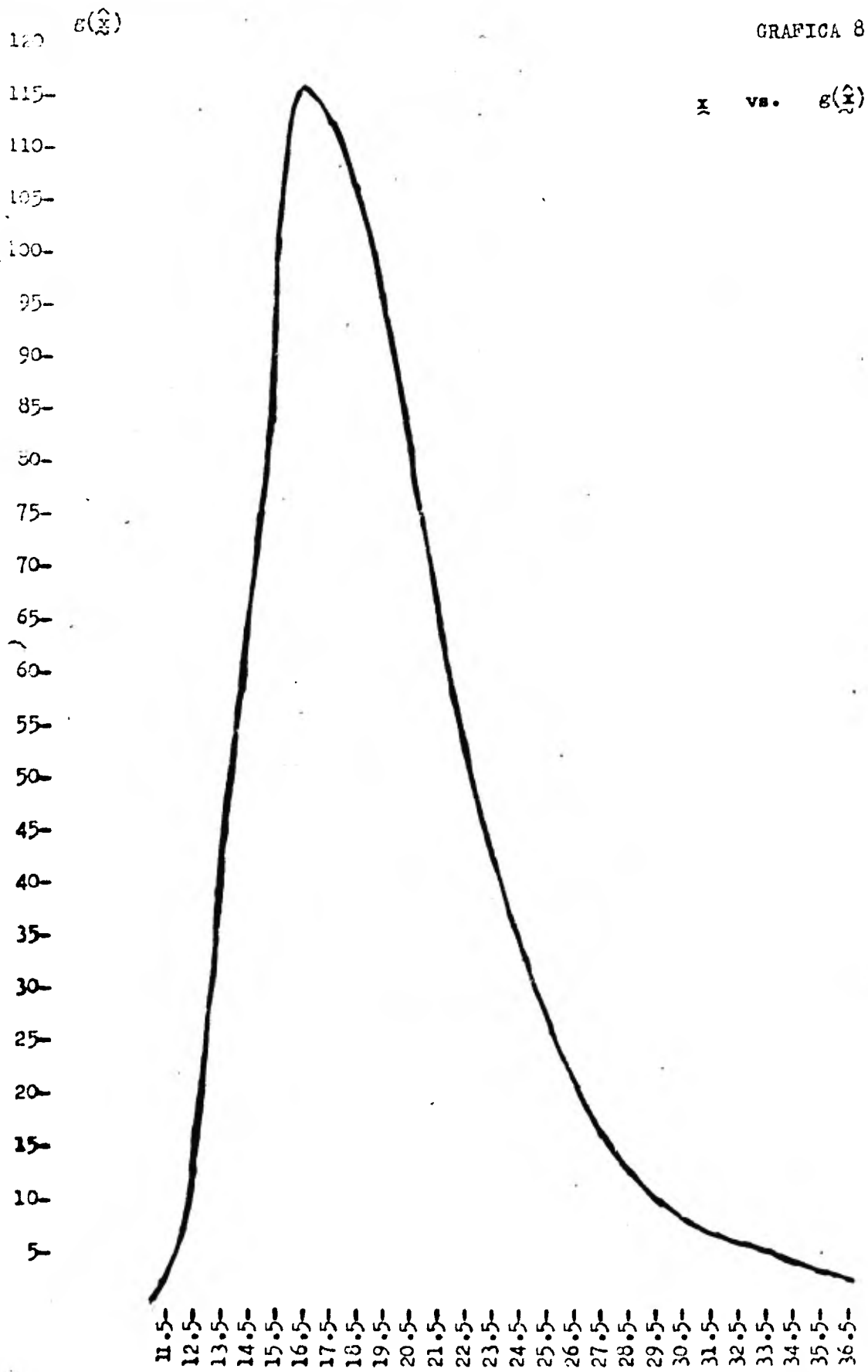


$C_x = C_{x-1} - \hat{g}(x-1)$ ; se procede entonces a construir la columna de las -  
 probabilidades a contraer nupcias entre las edades  $x$  y  $x+1$  pues se encuen-  
 tran al efectuar para cada edad el cociente respectivo entre los matrimo-  
 nios a esa edad y los c6libes a la misma edad. En la gr6fica 10 se mues-  
 tran 6stas.

TABLA DE NUPCIALIDAD  
 PARA 1940.

Edad $x$	C6libes a edad $x$ $C_x$	Matrimonios a la edad $x$ : $m_x = \hat{g}(x)$	Probabilidad de contraer nupcias entre las edades $x$ y $x+1$ : $n_x = \hat{g}(x)/C_x$
11	1000	.283027613	.000233027613
12	999.7169724	10.41750645	.010420455700
13	989.2994659	30.72630720	.031059257800
14	958.5725587	60.93352984	.063566945800
15	897.6390289	82.75312830	.092189761800
16	814.8859006	114.3346326	.140307781100
17	700.5510680	111.6705215	.159403827400
18	588.8805465	105.9803029	.179969101600
19	482.9002436	93.05067290	.192691294200
20	389.8495707	77.84348790	.199675705100
21	312.0060828	63.88753960	.204763763000
22	248.1185432	51.84540280	.208954164100
23	196.2731404	41.53647530	.211625876100
24	154.7366651	33.10627430	.213952357600
25	121.3057756	26.43088950	.217886488700
26	94.8748861	20.87465360	.220022963500
27	74.8746536	16.29699410	.217657021700
28	57.7032384	12.42163370	.215267531700
29	45.2816047	9.60490670	.212114980500
30	35.6766980	7.81660440	.219095511600
31	27.8600936	6.59088420	.236570784500
32	21.2692094	5.57880160	.262294733000
33	15.6904078	4.45631380	.284015167500
34	11.2340940	3.47065920	.308939839700
35	7.7634348	2.64742680	.341012305500
36	5.1160080	1.98376040	.387755531300
37	3.1322476	-	-

GRAFICA 8



74

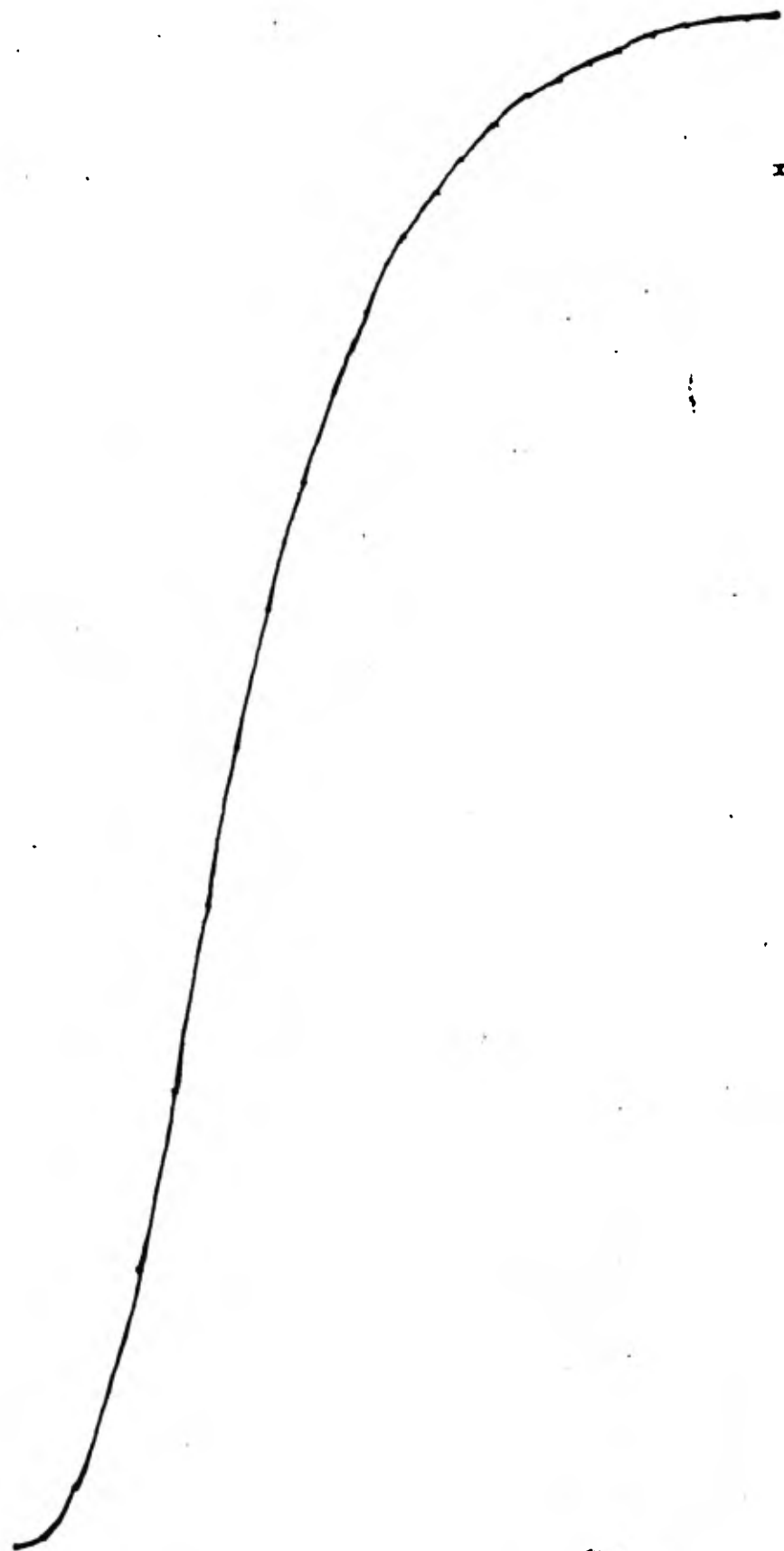
100-  $g(\hat{x})$   
900-  
800-  
700-  
600-  
500-  
400-  
300-  
200-  
100-

GRAFICA 9

x vs.  $G(\hat{x})$

12- 13- 14- 15- 16- 17- 18- 19- 20- 21- 22- 23- 24- 25- 26- 27- 28- 29- 30- 31- 32- 33- 34- 35- 36- 37-

M





### CAPITULO III

#### LA FUNCION RIESGO DE CASARSE

##### Presentación.-

En esta parte del trabajo se tratará de hacer una caracterización de la función riesgo de casarse por primera vez para personas de edad ( $x$ ), de personas que aún permanecen solteras vía la función de Makeham  $r(x) = Ka^x b^{d^x}$  ..(10). Esta función no pretende en sí corregir sino caracterizar el comportamiento de la nupcialidad.

Coale estipuló que el que exista en diferentes poblaciones un patrón común de proporciones de mujeres no solteras, por edad, implica que existe un patrón común de frecuencias de los primeros matrimonios en las poblaciones de referencia que a su vez implica el mismo patrón de riesgo de primer matrimonio, según la edad, que, de acuerdo con lo observado en las poblaciones estudiadas por él mismo, parece ser independiente del tamaño del grupo de mujeres destinadas a permanecer solteras, es decir es independiente de la intensidad de la nupcialidad.

El patrón común de riesgo de primer matrimonio sugirió a Coale, la posibilidad de construir una curva estándar que representara ese riesgo. La curva debía ascender desde el origen ( representado por la edad más temprana en que la cohorte comienza a contraer matrimonio ) hasta un valor máximo, aproximadamente constante cuando ya se ha casado la mayoría de las mujeres destinadas a no permanecer solteras.

El modelo estándar de riesgo de primer matrimonio se derivó a partir de los datos referentes a los matrimonios registrados en Suecia en 1865-1869, por años de edad, y ajustados por una doble exponencial. La función propuesta por Coale es:

$$r_s(x) = 0.174 e^{-4.411e^{-0.309 x}} \dots(11)$$

en donde  $r_s(x)$  representa el riesgo estándar de nupcialidad, es decir,

---

(10) Ver Apéndice I.

(11) A.J.Coale y D.R. McNeil, "The distribution by age of the frequency of first marriage in a female cohort", Journal of the Am. Statis. Association, Dec. 1972, Vol. 67, No. 340, Applications Section.

La probabilidad de que una mujer soltera ingrese al estado matrimonial a la edad  $x$  de la escala horizontal ajustada.

En una cohorte en que los primeros matrimonios comienzan a la edad ( $a$ ) y para la cual la escala de la edad al casarse (eje de las abscisas) está reducida por un factor  $K$ , el riesgo de matrimonio de las mujeres que han de casarse a la edad ( $a$ ) es:

$$r(a) = \frac{0.174}{K} e^{-4.411 e^{-\frac{0.309}{K} (a-a_0)}} \dots(12)$$

Teniendo la información ya corregida vía el modelo de Coale es con la que se trabajará para encontrar que la función riesgo de casarse efectivamente está caracterizada por la función de Makeham.

En este caso las dos causas que traen como consecuencia a la muerte que se emplean para estipular la hipótesis de Gompertz-Makeham:

- 1) El azar, es decir las causas independientes a la edad, y
- 2) La impotencia para resistir la destrucción, es decir las causas en el que el organismo ofrece una resistencia a la muerte que se va perdiendo con el tiempo, pueden aplicarse para el caso

de nupcialidad siendo respetada la estructura de éstas quedando:

- 1) El azar, causas independientes a la edad, ej: accidentes
- 2) La impotencia para resistir la destrucción del organismo.

Se considera que hay un intervalo de tiempo en que la mujer, según la sociedad en que se encuentra, según su religión y otras causas se encuentra en un periodo adecuado para contraer nupcias, y, después de transcurrido ese tiempo, se puede considerar que permanecerá célibe.

El fenómeno nupcialidad va íntimamente relacionado con el fenómeno fecundidad, por lo que generalmente se calculan estimaciones para ambos fenómenos en el mismo periodo de tiempo.

(12) Alejandro Mina J. "Aplicación del modelo estándar de A.J.Coale al caso de México". Demografía y Economía, El Colegio de México, Vol. XIV. Núm. 4 (44). pág. 421-446.

Se puede observar así que la función de Gompertz-Makeham, no sólo describe al fenómeno mortalidad, bajo su hipótesis; al de nupcialidad bajo lo enunciado en la página anterior, sino también al de fecundidad, quedando ésas dos hipótesis de la forma siguientes:

- 1) El azar, causas independientes de la edad
- 2) La impotencia para resistir la destrucción de la capacidad de procrear, es decir, causas en el que el organismo de la mujer ofrece una resistencia a la fecundidad que se va perdiendo con el tiempo.

El período de edad de la mujer que se considera efectivo para procrear es el comprendido entre los 15 y 49 años de edad cumplidos, siendo de la capacidad de dar a luz menor mientras mayor edad poseen las mujeres, siendo en éste mismo intervalo de tiempo que el fenómeno nupcialidad se estudia cómo se señaló anteriormente.

Existen diferenciales de fecundidad que deben ser considerados y que en sí caen dentro de la primera hipótesis y son: entre las áreas urbanas y rurales; la clase social, de acuerdo a la religión o grupo étnico, entre las naciones desarrolladas y subdesarrolladas en el momento actual y entre las naciones desarrolladas en tiempos diferentes siendo éstos los más importantes.

Recapitulando la información:

$g(x)$  = matrimonios ocurridos a edad  $x$  cumplida.

$G(x)$  = matrimonios ocurridos hasta la edad  $x$ .

1000 - indica el ródix de la tabla de nupcialidad.

$r(x)$  = riesgo al que están expuestas las mujeres de edad  $x$  a unirse por primera vez.

Es conveniente aclarar que :

$$G_B(x) = \int_0^x g(x)dx$$

$x$  - edad al casarse por primera vez.

La función  $r(x)$  se calculará empíricamente de la manera siguiente:

$$r(x) = \frac{g(x)}{1 - G(x)}$$

y se supondrá que:

$$r(x) = Ka^x b^d x$$

Se emplearán dos métodos para determinar los valores de los parámetros  $K$ ,  $a$ ,  $b$ , y  $d$  encontrándose así  $r(x)$ . Estos métodos son conocidos bajo los nombres de: "Método de los Grupos no superpuestos" dado a conocer por Albino Becaz (13), y el de "Mínimos Cuadrados No-Lineales: Métodos de Levenberg-Marguardt-Morrison" (14); dándose una breve explicación del porqué de su empleo y su forma de aplicación en la parte final de ésta exposición.

En algunos grupos de datos hubo la necesidad de hacer ensayos con el número total de observaciones para llegar al comportamiento adecuado de  $r(x)$ , fijándose siempre en el sentido creciente de ésta función y descartando los valores que no cumplieran con esta propiedad.

Uno de los factores importantes de esta función es el poder obtener mediante ella valores en continuo, es decir se puede conocer  $r(x)$  para cualquier edad. Se debe tomar en cuenta el comportamiento de la población bajo estudio pues al aplicar los métodos de estimación se debe de analizar y ensayar con la información que se cuente en cada caso.

Dado que la información con que se trabajó se encontraba ya corregida mediante el Modelo de Coale, cabe pues mencionar que es de esperarse que la función de Makeham sea una muy buena aproximación para describir el riesgo de casarse.

En el análisis de ésta función, A.J. Coale encontró que se podía describir adecuadamente mediante la ley de Gompertz, pero considerando que la Ley de Makeham es una ley más general que la anterior, Becaz usó

(13) Albino Becaz, "El uso de la ley de Makeham como función demográfica", Notas de Población, CELADE, Año II diciembre de 1974, Vol 6.

(14) José Guerrero G., "Mínimos cuadrados no-lineales: los métodos de Levenberg-Marguardt-Morrison", Dpto. de Matemáticas de la Fac. de Ciencias de la UNAM, 1960.



esta última para encontrar la función ya mencionada en esta sección.

Entre algunas de las observaciones de Albino Bocaz (15) respecto al riesgo de casarse se encuentran:

1) La función de Makeham para valores muy grandes de  $x$ ; varía según la exponencial simple, es decir:

$$r(x) = K a^x$$

2) Después de analizar la información llegó a la conclusión de que da da la cercanía del parámetro  $a$  con respecto a 1, se podía usar la ley de Gompertz, como lo sugería Coale desde un principio.

3) Que tanto la ley de Gompertz como la de Makeham, daban valores con bastante diferencia en el extremo inferior, pues los valores empíricos tienden a cero a medida que se acerca la edad  $x$  al límite inferior de edad de iniciación del proceso que se analice, (nupcialidad, fecundidad, etc.). Bocaz hace hincapié en que debe recordarse que una de las razones del uso de una ley matemática, en muchos casos, es el de deducir valores de interpolación. El uso de la función de Makeham como curva de ajuste y no de extrapolación es mucho más flexible que la ley de Gompertz.

4) Dentro del significado de los parámetros señala:

El aumento del parámetro  $a$  está asociado a una reducción de los parámetros  $b$  y  $d$ . Si  $b$  aumenta éso implica que  $d$  disminuye, por lo tanto no se pueden emplear valores constantes de  $b$  y  $d$  para un país determinado ya que el valor de esos parámetros está relacionado con la mayor o menor tardanza en casarse.

Análogamente a la presentación de los capítulos anteriores, se tendrán aquí los cálculos para la función riesgo de casarse en el año de 1940, tomándose la información ya corregida, dándose más adelante

---

(15) Albino Bocaz, op. cit. pág. 55

como ya se ha señalado con anterioridad para el periodo 1922-55 en México.

Desarrollo del Trabajo.-

De la tabla de nupcialidad para las mujeres mexicanas nacidas en 1940 (ver Cuadro VIII, se consideraron las columnas  $g(\hat{x}_{slj})/1000$  y  $G(\hat{x}_{slj})/1000$  que por notación se denotarán  $g(x_1)'$  y  $G(x_1)'$  respectivamente, calculándose después la serie  $r(x_1)$ .

CUADRO VIII

Valores de las funciones  $g(x_1)'$ ,  $G(x_1)'$  y  $r(x_1)$   
para las mujeres mexicanas nacidas en 1940.

Nivel $x$	Edad $x_1$	$g(x_1)'$	$G(x_1)'$	$r(x_1)$
0	11	.00028303	.00028303	.00028311
1	12	.01041751	.01070053	.01053019
2	13	.03072691	.04142744	.03205486
3	14	.06093353	.10236097	.06788199
4	15	.08275313	.18511410	.10155179
5	16	.11433483	.29944893	.16320699
6	17	.11167052	.41111945	.18963187
7	18	.10598030	.51709976	.21946624
8	19	.09305060	.61015043	.23868353
9	20	.07784349	.68799392	.24949349
10	21	.06388754	.75186146	.25748797
11	22	.05184540	.80372686	.26414925
12	23	.04153648	.84526333	.26843331
13	24	.03310627	.87836961	.27218752
14	25	.02643089	.90480049	.27763685
15	26	.02087465	.92567515	.28085699
16	27	.01629699	.94197215	.28084779
17	28	.01242163	.95439378	.27236709

Empleando el método de los grupos no superpuestos y utilizando la información de los niveles 0-15, por ser éste un múltiplo de 4, además de que  $r(x_1)$  es creciente únicamente hasta el nivel 15 precisamente, se llega a la siguiente estimación de los parámetros :

$$d = .6178812919$$

$$b = .0024546110$$

$$a = 1.006104551$$

$$K = .2563025461$$

dando así lugar a la estimación de la función  $r(\hat{x}_1)$  :

$$r(\hat{x}_1) = (.2563025461)(1.006104551)^x (.002454611)^x (.6178812919)^x$$

tendiéndose así el Cuadro IX en el que se pueden comparar  $r(x_1)$  y  $r(\hat{x}_1)$ .

CUADRO IX

Valores de la función  $r(x_1)$  empíricos y estimados

Nivel	$r(x_1)$	$r(\hat{x}_1)$
0	.00028311	.000629123
1	.01053019	.006290934
2	.03205486	.026157354
3	.06788199	.063240795
4	.10155179	.109371753
5	.16320699	.153784994
6	.18963187	.190272405
7	.21946624	.217528535
8	.23868353	.236837299
9	.24949349	.250196268
10	.25748797	.259427119
11	.26414925	.265917816
12	.26843331	.270637866
13	.27218752	.274233086
14	.27763685	.277122055
15	.28085699	.279571696

Ahora bien, empleando el método de mínimos cuadrados no-lineales (Levenberg-Marguardt-Morrison), la estimación de los parámetros es la siguiente:

$$d = .4896214$$

$$b = .001972936$$

$$a = 1.042362$$

$$K = .1553054$$

Quedando a su vez en el Cuadro X, la comparación de los valores de  $r(x_1)$  y  $r(\hat{x}_1)$ .

CUADRO X

Valores de la función  $r(x_1)$  empíricos y estimados  
vía Método Levenberg-Marguardt-Morrison

Nivel	$r(x_1)$	$r(\hat{x}_1)$
0	.00028311	.000306408
1	.01053019	.007670692
2	.03205486	.037912597
3	.06788199	.084674392
4	.10155179	.128177221
5	.16320699	.160386485
6	.18963187	.182823531
7	.21946624	.199099594
8	.23868353	.212031996
9	.24949349	.223346706
10	.25748797	.234007938
11	.26414925	.244535673
12	.26843331	.255208997
13	.27218752	.266180717
14	.27763685	.277538644
15	.28085699	.289337589

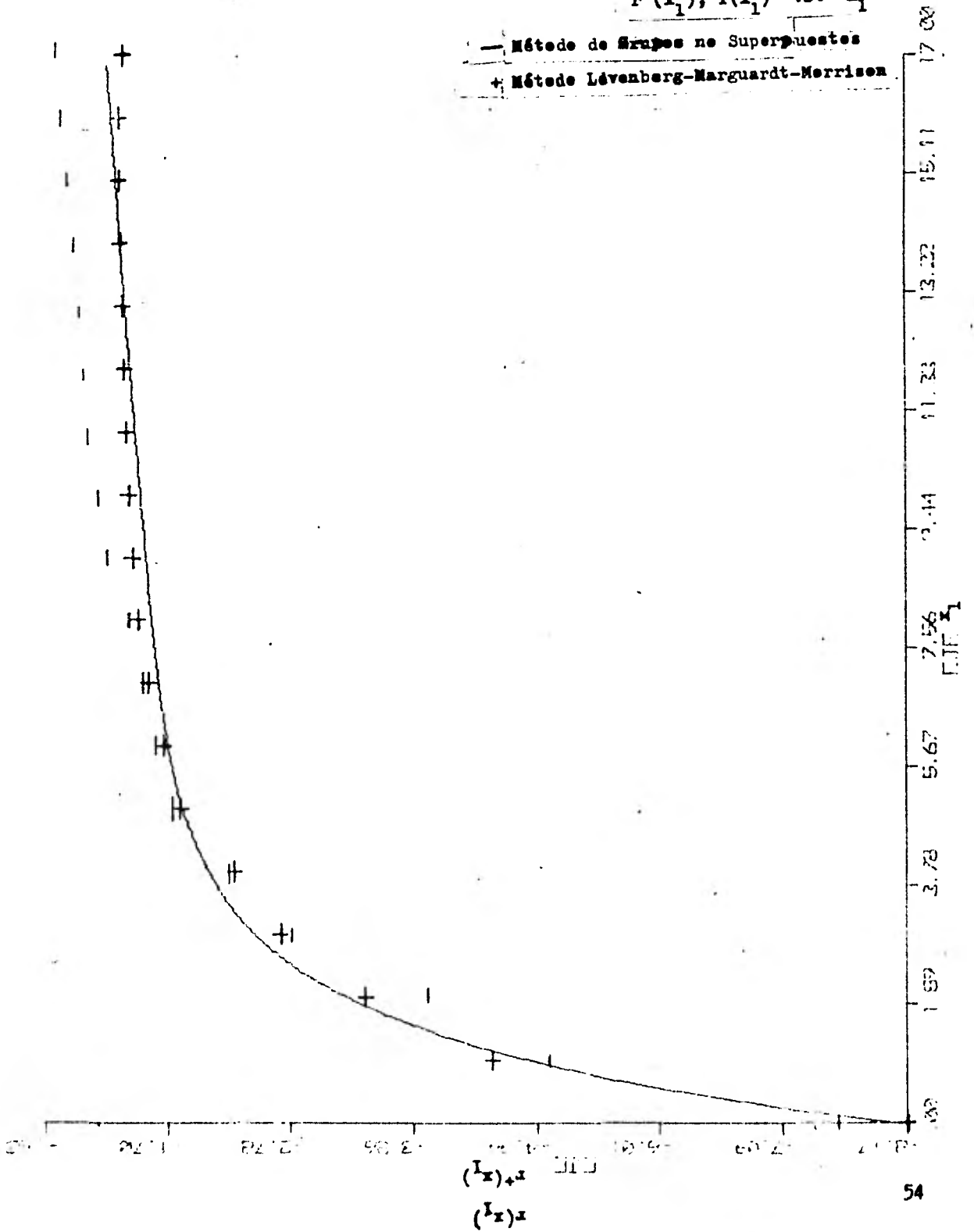
Se llevará a cabo una comparación de los resultados obtenidos posteriormente.

En la página siguiente se presentan las gráficas de los valores estimados vía los dos métodos empleados así como la de los valores observados.

GRAFICA 11

$r^+(x_1), r(x_1)$  vs.  $x_1$

— Método de Grajes no Superpontos  
 + Método Levenberg-Marguardt-Merrison



Cabe hacer la aclaración que si a partir de la edad inicial  $a_0$  se cuenta con el número de mujeres que a cada edad contraen matrimonio - por primera vez y se divide éste número por el total de mujeres (independientemente del estado civil), el cociente representa la frecuencia con que ocurren los primeros matrimonios según la edad, [es decir la probabilidad de contraer nupcias por primera vez]. Si, en cambio, el cociente se calcula con respecto a las mujeres que a cada edad pueden contraer matrimonio por primera vez, o sea las solteras, el resultado corresponde a una estimación del riesgo de matrimonio.

La acumulación de las frecuencias de los primeros matrimonios hasta una edad  $a$  (siendo  $a_0 < a < a_n$ ), representa la proporción de mujeres no solteras de edad  $a$  respecto del total de mujeres de la misma edad. Esta es entonces una función creciente con la edad y la rapidez con que ese ascenso ocurre es consecuencia del ritmo de variación de la frecuencia del ingreso al estado matrimonial al avanzar la edad.(16)

---

(16) Zulma Camisa, "La nupcialidad de las mujeres solteras en la América Latina", CELADE, San José, Costa Rica, Dic. 1977.pág. 7.

CAPITULO IV

ANALISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Desglose y exhibición.-

Se irán presentando los resultados en el orden en que fueron expuestos los capitulos anteriores, para el periodo 1927-1955 como ya se había señalado anticipadamente.

Los parámetros  $a$ ,  $K$  y  $m$  estimados vía el Modelo de Coale para cada uno de los años ya mencionados se encuentran en el Cuadro XI que se da a continuación:

CUADRO XI (continúa)

Parámetros estimados  $a$ ,  $K$  y  $m$  año per año.

t	a	K	m
1927	9.048734687	.8942144326	20.14057149
1928	9.690426649	.7963380503	19.40458291
1929	9.741344963	.8190655051	18.29779231
1930	9.543307087	.7874015748	19.63395099
1931	9.535766318	.8843783979	19.46315789
1932	9.651695064	.7634080715	18.62114254
1933	9.526910281	.8563652100	18.80306205
1934	10.697976880	.7225433526	19.85870164
1935	10.240156520	.6847400090	18.69052770
1936	9.999817002	.6911075191	18.83711692
1937	11.265119230	.6917581874	20.03511534
1938	10.082358500	.7186184611	19.19911407
1939	11.036171570	.7059643990	20.06671105
1940	10.804929680	.6980264618	19.69701524
1941	11.695154030	.6708167870	19.17726126
1942	9.837414300	.7010773749	20.03503099
1943	9.521491181	.8871280380	20.09585637
1944	10.16884912	.8273508587	20.03209110
1945	10.52122444	.6447351707	18.77806385
1946	9.407245958	.8265644073	19.12935745
1947	10.688800600	.6937728521	19.01321864
1948	10.462637010	.7044502573	18.89676032
1949	10.084497070	.8402112720	19.36284591
1950	10.51599724	.7576146358	19.01545356
1951	9.149826118	.8280243387	18.13080620

CUADRO XI (continuación)

Parámetros estimados  $a$ ,  $K$  y  $\bar{m}$  año por año.

t	$a$	K	$\bar{m}$
1952	11.24227155	.6412652938	18.52163671
1953	10.60571785	.6595257849	17.91144081
1954	10.76946632	.6039275388	17.51737051
1955	10.72781806	.5458262741	16.94865109

Una vez desglosada así la información se ve la conveniencia de formar grupos quinquenales constando el primero únicamente de cuatro años, por lo que se calculan los promedios de la información dada, procediendo análogamente con la información de la Encuesta Mexicana de Fecundidad.

CUADRO XII

Parámetros estimados  $a$ ,  $K$  y  $\bar{m}$  per grupos con la información del Cuadro XI.

t	$a_0$	K	$\bar{m}$
1927-30	9.505953347	.8242548907	19.36922462
1931-35	9.931101013	.7822858066	19.08731836
1936-40	10.637679200	.7010950139	19.56701452
1941-45	10.348826610	.7462216459	19.62366071
1946-50	10.231835580	.7645226849	19.08352718
1951-55	10.499010080	.6557138461	17.80598106

CUADRO XIII

Parámetros estimados  $a$ ,  $K$  y  $\bar{m}$  per grupos con la información de la EMF 1976.

t	$a$	K	$\bar{m}$
1927-30	9.307711649	.8372617662	19.84257828
1931-35	9.493711867	.7931749271	19.51931896
1936-40	10.381210650	.7024368085	19.32473818
1941-45	11.254381160	.6043972540	19.10648498
1946-50	11.760588110	.4945022063	18.35791491
1951-55	11.186105940	.4264613960	16.93839942

+ Se empleó la hipótesis  $\theta=1.00$  para su cálculo



Principales Ventajas de la aplicación del modelo.-(17).-

- 1.- Permite estudiar el comportamiento del ingreso al estado matrimonial según la edad y es aplicable a poblaciones que presenten características diferentes en relación con la nupcialidad. Ellas están dadas por la edad a que se inicia ese ingreso, el ritmo de aumento de las frecuencias de los primeros matrimonios desde la edad inicial hasta la edad mediana, y la intensidad de la nupcialidad, medida por la proporción de mujeres no solteras correspondientes a la edad en que la frecuencia del ingreso se hace nula. Este último valor representa entonces una estimación del nivel alcanzado por la nupcialidad en referencia.
- 2.- El modelo es aplicable a un análisis por cohortes y, también a una sección transversal de la población, siempre que la nupcialidad haya permanecido sin cambios.
- 3.- Permite estimar los valores de los tres parámetros mencionados en el punto 1 y obtener las frecuencias anuales medias de los primeros matrimonios por grupos quinquenales de edades. Como estas frecuencias están referidas a una cohorte hipotética de mujeres no expuestas a la mortalidad, la edad media de ingresos al primer matrimonio que se deriva de ella constituye una medida sintética del comportamiento de la nupcialidad por edad, independientemente de la estructura por edad de la población en estudio.
- 4.- Permite derivar las proporciones de mujeres solteras por grupos quinquenales de edades en la población, en ausencia de mortalidad. Por lo tanto, bajo el supuesto de que el modelo representa bien la situación real, la comparación entre estas proporciones y las originales, puede ser un indicador de la existencia de mortalidad diferencial.
- 5.- La aplicación del modelo propuesto por Coale, requiere conocer únicamente la proporción de mujeres no solteras correspondientes a la edad 10-29, cuando la edad de inicio de ingreso al matrimonio es infe

---

(17) Zulma Gamisa, op. cit. pág. 12

rior a los 15 años. Aún en estos casos, no es imprescindible contar con la proporción correspondiente al grupo 10-14. Esto trae aparejado dos ventajas: la primera se relaciona con la disponibilidad de información, la segunda con la calidad de los resultados.

6.- El modelo permite estimar la nupcialidad total correspondiente a cohortes que aún no hayan alcanzado la edad en que ya no ocurren los primeros matrimonios. Por lo tanto puede usarse para estimar las frecuencias futuras del ingreso al estado matrimonial.

Hay que hacer notar que al estudiar la nupcialidad en la región conviene introducir el concepto de nupcialidad general a fin de incluir en un mismo grupo las uniones legales y las convivencias.

#### Análisis del Modelo.-

En éste caso, cuándo se tiene la información desglosada año por año, es difícil el decir que es lo que sucede con los parámetros  $a$ ,  $K$  y  $\bar{m}$ , por lo que se optó por el agrupamiento. Se puede apreciar en el Cuadro XII y en el XIII que el parámetro  $a$  tiene una tendencia creciente, sobretodo en éste último, es decir que la edad de entrada al matrimonio tiende a ubicarse entre el grupo de edad 10-14. El parámetro  $K$ , que es el ritmo en que contrae matrimonio la población en el Cuadro XII, aún cuando no se puede apreciar muy bien se tiene una tendencia decreciente, que se observa claramente en el Cuadro XIII, y la edad media al matrimonio tiende a disminuir.

Estos resultados implican que cuándo el parámetro  $K$  tiende a disminuir, es decir es más rápido el ritmo en que aumentan las frecuencias al estado matrimonial entre la edad en que ellas se inician hasta la edad en que tiene lugar el valor máximo, la posibilidad de que la edad promedio de los ingresos al matrimonio tienden también a disminuir. Esta situación puede llevar a la posibilidad de utilizar los valores de este parámetro ( $K$ ) como un indicador más que resume la evolución de la nupcialidad en los grupos de cohortes estudiadas en cada país.(18)

Teniendo en cuenta el quinquenio de edades en dónde se ubica el valor máximo de la frecuencia de los ingresos se dispone de tres categorías que caracterizan el tipo de nupcialidad según la edad:

- a) Países de nupcialidad tardía ( en los cuáles el valor más alto corresponde a las edades 20-24).
- b) Países de nupcialidad temprana ( en dónde la frecuencia máxima se ubica en las edades 15-19)
- c) Países de nupcialidad intermedia ( si bien el valor más alto se ubica en el grupo 15-19, su diferencia con respecto a la frecuencia del quinquenio 20-24 es de menor importancia que en los países de nupcialidad temprana.

Dada ésta clasificación de los tipos de nupcialidad según la edad se puede observar que en el estudio realizado México cuenta con una nupcialidad temprana.

Algunas características socioeconómicas que tienen relación con el ingreso temprano a la vida matrimonial son los tres indicadores socioeconómicos:

- a) Porcentaje de las mujeres que trabajan, excluidas las pertenecientes a la categoría trabajadoras familiares no remuneradas.
- b) Porcentaje de mujeres sin instrucción, considerando bajo tal denominación a aquéllas que no tienen ningún año de estudio aprobado ( incluidas las que nunca fueron a la escuela).
- c) Porcentaje de mujeres que a la fecha de la encuesta asistían a un establecimiento de enseñanza regular, público o privado.

En un análisis a nivel de América Latina llevado a cabo por la autora Zulma Canisa (19) llega a la conclusión que de los tres indicadores considerados, el que parece estar más relacionado con el ingreso temprano a la vida matrimonial es el referente al nivel de instrucción. Este indicador repercute fuertemente en nuestro país

---

(19) *ibid.* pág. 81.

donde actualmente se cuenta con un nivel de analfabetismo de 20% de la población total (20).

Del estudio del periodo 1940-1960 se obtiene el siguiente cuadro:

CUADRO XIV  
Alfabetismo de la Población de 10 años y más  
1940-1960 (continúa). (21)

Años	Alfabetismo Total				Alfabetos			
	Miles de personas	Total %	Alfab. %	Analfab. %	Miles de personas	Total %	Urbano %	Rural %
1940	13 960	100.0	43.2	56.8	6 029	100.0	n.d.	n.d.
1950	18 147	100.0	56.8	43.2	10 311	100.0	n.d.	n.d.
1960	23 830	100.0	66.5	33.5	15 849	100.0	61.6	38.4

CUADRO XIV  
Alfabetismo de la Población de 10 años y más  
1940-1960 (continuación).

Años	Analfabetos			
	Miles de personas	Total %	Urbano %	Rural %
1940	7 931	100.0	n.d.	n.d.
1950	7 836	100.0	n.d.	n.d.
1960	7 981	100.0	31.0	69.0

de donde si para 1940 se tenía un 56.8% de analfabetismo con respecto a la población total, es de esperarse que en años anteriores fuera mayor el nivel.

De ahí que las acciones y estrategias educativas tengan un papel central en la instrumentación de una nueva estrategia de desarrollo.

Cabe señalar que en base a los datos vertidos en los cuadros

(20) Plan Global de Desarrollo 1980-1982. México 1980. pág.347.

(21) Fuente: Consejo Nacional de Población: México Demográfico, Brevariario 1978. (ibid. pág.507.)

XI, XII y XIII es posible construir Tablas de Nupcialidad como se hizo notar en el desarrollo del capítulo II lo que le da vital importancia al poderse estudiar más de cerca, año por año, la tendencia de la nupcialidad en nuestro país.

Aquí es donde se podría hablar de una posible proyección de la nupcialidad vía los tres parámetros referidos por el Modelo de Coale, teniendo en consideración las tendencias ya descritas de éstos. En cierta medida es posible verificarse esta hacia 1960, mediante el análisis realizado para la Nupcialidad de las Mujeres Solteras - en América Latina (1950-55-60) donde se enfatiza lo siguiente:

- a) En general, los países en donde la edad inicial es más elevada, cercana a los 14 años, la tendencia es hacia el descenso de esa edad ( Argentina, México, Chile y Brasil) y, por el contrario en los países en que ella está entre los 12 y los 13 años la tendencia parece ser hacia un aumento de esa edad. (22)
- b) En México se insinúa una tendencia creciente de 0.37% al nivel del matrimonio y el ingreso al estado matrimonial tiende a iniciarse a una edad más temprana, es decir, la vida matrimonial según la edad viene haciéndose más lentamente, lo que en alguna medida hace que la edad media de los ingresos vaya en aumento. (23)
- c) México tiene frecuencias de ingreso a la convivencia mucho - más bajas que otros países Latinoamericanos. (24)

#### Posterior Exhibición.-

Respecto a los cálculos de la función riesgo de casarse en primer plano se presenta, en los cuadros XV y XVI, la estimación de los parámetros mediante los dos métodos ya mencionados, desglosados año por año. En segundo plano, en los cuadros XVII, XVIII y XIX éstos en forma agrupada.

---

(22) Zulma Camisa, op. cit., pág.30.

(23) ibid., pág. 40.

(24) ibid., pág. 77.

CUADRO XV

Parámetros d, b, a y K estimados vía el método  
de los Grupos no Superpuestos

t	d	b	a	K
1927	.7208139467	.0191653110	.9926894807	.2373204834
1928	.6611562720	.0045306601	1.0037663830	.2251844449
1929	.7166355374	.0279173105	.9788665745	.2995395906
1930	.6661897000	.0076241300	1.0036059000	.2257910000
1931	.6455380400	.0010030048	1.1221637000	.2217452000
1932	.6455370500	.0053284174	1.0062955000	.2414699900
1933	.7080999700	.0433825000	.9974003000	.2288597500
1934	.6348206000	.0056870000	1.0058471000	.2508512000
1935	.6234723980	.0174275339	1.0067472450	.2610583528
1936	.6273659729	.0278882323	1.0070358210	.2574672828
1937	.6280326429	.0163403351	1.0065567210	.2575280532
1938	.6375203818	.0234494285	1.0072550020	.2449812745
1939	.6189514010	.0236103600	1.0084769110	.2449804170
1940	.6178812919	.0024546110	1.0061045510	.2563025461
1941	.7080370000	.0455500000	.9994600000	.2195600000
1942	.7007788974	.0286506272	1.0040706870	.1969189371
1943	.6841950000	.0101667400	1.0122660950	.1766109004
1944	.6937251204	.0169821362	.9973608595	.2373038607
1945	.6086214000	.0098431000	1.0116598000	.2482690000
1946	.6887458914	.0103059609	.9974907567	.2364741925
1947	.6696872803	.0402114653	.9871353139	.3219335866
1948	.6299714237	.0629260998	1.0075341130	.2502517436
1949	.6848997333	.0704127835	1.0037862415	.2129800754
1950	.6569080492	.0082090373	1.0024360900	.2443695582
1951	.6946447859	.0177062513	.9972741946	.2374791762
1952	.6346149631	.0163986551	.9913680788	.3337971016
1953	.6240037013	.0057972917	.9952206442	.3084442257
1954	.5837787410	.0027645106	1.0007896260	.3200737029
1955	.5228284049	.0042588574	1.0411123750	.2665261844

CUADRO XVI

Parámetros d, b, a y K vía el método de  
Levenberg-Marguardt-Morrison

t	d	b	a	K
1927	.6995544	.021418520	1.004527	.1963323
1928	.5759580	.003715084	1.020940	.1659165
1929	.6611125	.047612120	1.018475	.1837879
1930	.5929250	.008456416	1.028525	.1536087
1931	.6224448	.006859351	1.020694	.1590895
1932	.3771290	.005300000	1.042547	.1334970
1933	.7381756	.037764090	.984033	.2824644
1934	.5731144	.005612747	1.023283	.1394661
1935	.6224607	.017894130	1.008756	.2546298
1936	.5724961	.047479990	1.046187	.1624774
1937	.5900973	.020838870	1.029075	.1960251
1938	.6528930	.022698410	1.001012	.2650561
1939	.6586216	.024189290	.997317	.2848752
1940	.4896214	.001972936	1.042362	.1553054
1941	.7282388	.045702730	.995598	.2374095
1942	.7166627	.028679300	1.000117	.2112499
1943	.6093258	.010258010	1.034149	.1290889
1944	.6810934	.019238320	1.004716	.2124256
1945	.5792266	.009776250	1.013678	.2330435
1946	.6437649	.010631840	1.012123	.1874020
1947	.6680450	.043643710	.994746	.3020481
1948	.6838202	.058150180	.992239	.3084266
1949	.6850326	.020765640	1.003184	.2125052
1950	.5913885	.009169123	1.030050	.1704270
1951	.3999388	.029401050	1.047652	.1200970
1952	.6537559	.010747980	.947580	.4894703
1953	.5216236	.008128352	1.052874	.1632433
1954	.4548332	.003496423	1.075920	.1572576
1955	.4609707	.004407352	1.063560	.2077759

CUADRO XVII

Parámetros d, b, a y K estimados vía el primer método con la información de manera agregada.

t	d	b	a	K
27-30	.6954218447	.0127625727	.9965894256	.2363547975
31-35	.6749999728	.0050326430	.9980763607	.2489844471
36-40	.6349595014	.0122424449	1.0048392600	.2591380180
41-45	.6125312270	.0172210437	.9961380120	.3400270745
46-50	.5461551883	.0032100651	1.0024358080	.4077563198 +
51-55	.5275106192	.0239981651	.9792484970	.5727848644 +

+ Estos valores fueron obtenidos bajo la hipótesis de  $C=1.00$  en el modelo de Coale.

CUADRO XVIII

Parámetros d, b, a y K estimados vía el segundo método con la información de manera agregada

t	d	b	a	K
27-30	.6547559	.014160370	1.0137830	.1335611
31-35	.6138286	.008966687	1.0207190	.1763805
36-40	.6109421	.012585030	1.0130930	.2311444
41-45	.5933563	.018560050	1.0075060	.3022804
46-50	.4405394	.003462920	1.0542350	.2507061
51-55	.5095354	.027301840	1.0039100	.4978607

CUADRO XIX

Parámetros d, b, a y K obtenidos por promedios agrupando la información del Cuadro XV.

t	d	b	a	K
27-30	.6911988640	.0148093529	.9947320846	.2469588797
31-35	.6514936116	.0145656912	1.0276907690	.2407968806
36-40	.6264292425	.0188880113	1.0070384310	.2524399929
41-45	.6828232854	.0218298913	1.0073361470	.2267295308
46-50	.6660424757	.0384130694	.9996765029	.2532018313
51-55	.6119741192	.0093851732	1.0051529840	.2932640782



i) Análisis del riesgo de casarse.

Al efectuar el estudio de la tendencia de los parámetros des-  
glosados en el caso 1, pueden apreciarse los siguientes puntos:

- 1) El parámetro  $a$  tiende a uno.
- 2) Los valores de  $d$  se encuentran entre el intervalo (.5, .8).
- 3) El parámetro  $b$  oscila entre .0001 y .08
- 4) El factor  $K$  repercute en el cálculo entre un .17 y .33.

y como es de esperarse, no es posible hablar de una proyección debi-  
do a este comportamiento. Sin embargo, es interesante observar que e-  
fectivamente el aumento del parámetro  $a$  está asociado a una reduc-  
ción de los parámetros  $b$  y  $d$ . Se vió el hecho de que cada año  
tienen un comportamiento similar, generalmente cuando  $d$  crece  $b$   
crece, pudiéndose palpar que no es posible el emplear valores cons-  
tantes de ellos, pues su valor está relacionado, como se había ya  
mencionado, con la mayor o menor tardanza al casarse; ya que si el  
promedio de años que se espera que pasen para que la población entre  
al fenómeno nupcialidad ( $\bar{M}$ ), es grande,  $d$  y  $b$  se encuentran  
en el rango de sus valores mayores, e inversamente si este promedio  
es pequeño se observa que tanto  $d$  como  $b$  toman casi siempre vale-  
res chicos.

En el caso 2, se puede apreciar de manera análoga que la distri-  
bución de los parámetros no ofrece una tendencia de la cuál se pudie-  
ra inferir hacia un futuro, teniéndose que los parámetros  $d$  y  $b$   
ofrecen un comportamiento similar al descrito en el párrafo anterior.

Teniendo esta situación se llevó a cabo el agrupamiento de los  
datos llegándose a una mejor posibilidad de proyección al analizarlos  
los años de 1931-1945 en cada uno de los tres casos expuestos en la  
página anterior.

Puede observarse en los dos primeros casos presentados que durante ese periodo (1931-45), sucede lo siguiente:

- 1) El parámetro  $d$  tiene una tendencia decreciente, y
- 2) Al parámetro  $K$  le sucede la situación inversa.

Y por separado al analizar los casos:

En el primero se observa una  $a$  oscilante, pues asciende y desciende mientras que  $b$  es creciente. Y en el segundo, el parámetro  $a$  tiene un comportamiento análogo al del caso 1, pero el parámetro  $b$ , sigue esta misma tendencia.

El caso tres, se trata aparte pues el comportamiento de los parámetros es diferente al ya expuesto, siendo este el que a continuación se da:

- 1) El parámetro  $d$  va de decreciente a creciente, lo mismo que  $a$ .
- 2) El parámetro  $b$  tiene una tendencia a ser mayor cada vez, y
- 3) El parámetro  $K$  tiene un comportamiento inverso al de  $d$  y  $a$ , es decir, crece y decrece al final.

Al analizar tanto al parámetro  $d$  y  $b$  con respecto a  $\bar{m}$  en este periodo, se tiene:

- 1) En el caso uno,  $d$  decrece y  $b$  crece mientras que  $\bar{m}$  se le observa creciente, como se aprecia en el cuadro XII.
- 2) En el caso dos,  $d$  decrece y  $b$  va de creciente a decreciente y  $\bar{m}$  se comporta como en el caso anterior.
- 3) En el caso tres,  $d$  va de decreciente a creciente mientras que  $b$  crece y  $\bar{m}$  va decreciendo como se aprecia en el cuadro XIII.

Por lo que nuevamente se vé la necesidad de no tomar los valores de los parámetros  $d$  y  $b$  fijos, pudiéndose apreciar en los tres puntos anteriores una relación que efectivamente repercute en la edad promedio en que es alcanzada la cohorte en estudio por el fenómeno nupcialidad.

ii) Análisis de los dos métodos empleados.

Al tener los resultados anteriores, se pudo observar que ambos métodos son adecuados sin que se pudiera llegar a decir que uno es mejor que otro, pues ambos aportan una manera adecuada de estimar los parámetros de la función riesgo de casarse. Esto fue en cierta medida verificado mediante los coeficientes de correlación que en el cuadro XX se darán.

Estos fueron obtenidos al aplicarse el modelo de regresión múltiple:

$$\ln(r) = \ln(K) + x \ln(a) + d^x \ln(b)$$

tomando los logaritmos naturales de los valores de  $r$  de ambos métodos, y suponiendo al parámetro  $d$  bien estimado, donde los parámetros por estimar serían  $\ln(K)$ ,  $\ln(a)$  y  $\ln(b)$  y las variables explicativas serían  $x$ , que es el nivel de edad, y  $d^x$ .

Se pueden así mismo apreciar las correlaciones siguientes:

1) Entre la variable  $\ln(r)$  y  $x$ , es decir  $r_{1.2}$ , tiende a uno por lo que se dice que el logaritmo del riesgo de casarse crece cuando el nivel de edad crece.

2) Entre la variable  $\ln(r)$  y  $d^x$ , es decir  $r_{1.3}$ , tiende a menos uno por lo que se dice que el logaritmo del riesgo de casarse decrece cuando  $d^x$  aumenta.

3) Entre las variables  $\ln(r)$  con respecto a  $x$  y  $d^x$ , es decir  $r_{1.23}$ , que tiende a uno y que implica que al crecer el nivel de edad y la variable  $d^x$  el logaritmo del riesgo de casarse crece.

En ambos casos se puede observar en todo el periodo (1927-55) que el coeficiente de determinación ( $r_{1.23}^2$ ) es de .9 tendiendo a uno, por lo que se puede decir que en los dos modelos entre el 90% y más de la variación total es explicada por el modelo.

CUADRO XX (continúa)

Coefficientes de correlación parciales, múltiple y de determinación correspondientes al modelo  $\ln(r) = \ln(K) + x \ln(a) + d^x \ln(b)$ , para la información de los dos métodos estudiados.

Años	1/2 <sup>+</sup>	r <sub>1.2</sub>	r <sub>1.3</sub>	r <sub>1.23</sub>	r <sub>1.23</sub> <sup>2</sup>
1927		.79137	-.99944	.99960	.99920
		.79137	-.99965	.99978	.99955
1928		.68631	-.99452	.99460	.98922
		.68631	-.99398	.99726	.99453
1929		.85551	-.99920	.99993	.99986
		.85551	-.99843	.99942	.99884
1930		.71343	-.99098	.99381	.98765
		.71343	-.98482	.99651	.99303
1931		.74454	-.99764	.99838	.99675
		.74454	-.99623	.99841	.99682
1932		.73699	-.99638	.99642	.99286
		.73699	-.84593	.93997	.90354
1933		.84251	-.99938	.99939	.99878
		.84251	-.99857	.99961	.99921
1934		.69555	-.99564	.99614	.99229
		.69555	-.99309	.99771	.99543
1935		.78394	-.99967	.99989	.99979
		.78384	-.99934	.99971	.99942
1936		.79252	-.99938	.99984	.99968
		.79252	-.99334	.99818	.99636
1937		.74210	-.98971	.99549	.99099
		.74210	-.98535	.99628	.99257
1938		.76774	-.99954	.99982	.99964
		.76774	-.99992	.99993	.99986

CUADRO XX (continuación)

Años	1/2 <sup>+</sup>	r <sub>1.2</sub>	r <sub>1.3</sub>	r <sub>1.23</sub>	r <sub>1.23</sub> <sup>2</sup>
1939		.76455 .76455	-.99795 -.99952	.99888 .99956	.99777 .99912
1940		.70954 .70954	-.99225 -.99208	.99272 .99689	.98550 .99379
1941		.76056 .76056	-.99925 -.99922	.99929 .99950	.99858 .99900
1942		.79860 .79860	-.99951 -.99995	.99984 .99995	.99968 .99990
1943		.77202 .77202	-.99657 -.99253	.99664 .99822	.99328 .99645
1944		.78423 .78423	-.99962 -.99972	.99964 .99978	.99928 .99957
1945		.72050 .72050	-.99857 -.99784	.99863 .99879	.99726 .99757
1946		.74627 .74627	-.99825 -.99822	.99841 .99912	.99682 .99823
1947		.78121 .78121	-.99964 -.99969	.99936 .99988	.99972 .99975
1948		.78700 .78700	-.99775 -.99927	.99869 .99971	.99737 .99943
1949		.81248 .81248	-.99979 -.99979	.99932 .99982	.99965 .99965
1950		.78688 .78688	-.99797 -.99680	.99809 .99901	.99618 .99802
1951		.82193 .82193	-.99963 -.92922	.99972 .98272	.99944 .96574

CUADRO XX (continuación)

Años	1/2 <sup>+</sup>	r <sub>1.2</sub>	r <sub>1.3</sub>	r <sub>1.23</sub>	r <sub>1.23</sub> <sup>2</sup>
1952		.81760	-.99960	.99979	.99958
		.81760	-.99849	.99948	.99896
1953		.80109	-.99729	.99779	.99554
		.80109	-.99525	.99902	.99804
1954		.79453	-.99419	.99438	.98880
		.79453	-.99406	.99873	.99746
1955		.79572	-.99875	.99881	.99761
		.79572	-.99656	.99928	.99855

Los datos fueron obtenidos mediante el paquete de computación SPSS.

1/2<sup>+</sup> El primer renglón de cada año se refiere al método 1, y el segundo al método 2.

Se procedió de manera análoga con la información agregada teniéndose que el análisis de los datos en el cuadro XXI tienen un comportamiento similar al estudiado antes de la exposición de los datos desagregados.

CUADRO XXI (continúa)

Coefficientes de correlación parciales, múltiples y de determinación correspondientes al modelo  $\ln(r) = \ln(K) + x \ln(a) + d^x \ln(b)$ , para la información de los dos métodos estudiados en forma agregada.

Años	1/2 <sup>+</sup>	r <sub>1.2</sub>	r <sub>1.3</sub>	r <sub>1.23</sub>	r <sub>1.23</sub> <sup>2</sup>
1927-1930		.81705	-.99878	.99903	.99806
		.81705	-.99885	.99949	.99898
1931-1935		.78720	-.99684	.99752	.99505
		.78720	-.99748	.99899	.99797
1936-1940		.78195	-.99949	.99950	.99900
		.78195	-.99906	.99964	.99929
1941-1945		.82417	-.99982	.99994	.99970
		.82417	-.99987	.99989	.99988

CUADRO XXI (continuación)

Años	1/2 <sup>+</sup>	r <sub>1.2</sub>	r <sub>1.3</sub>	r <sub>1.23</sub>	r <sub>1.23</sub> <sup>2</sup>
1946-1950		.76223	-.99655	.99704	.99409
		.76233	-.99651	.99918	.99836
1951-1955		.80522	-.99137	.99795	.99590
		.80522	-.80184	.80196	.64314

1/2<sup>+</sup> El primer renglón de cada grupo de años se refiere al método 1, y el segundo al método 2.

Es importante recalcar que las relaciones descritas en la página anterior a la presentación de estos últimos cuadros son lineales, y cabe decir para finalizar que la adopción del método dependerá de los intereses del investigador y que deberá tener en cuenta que el primer método al tomar la población en cuatro grupos fuerza a que las edades se agrupen de tal manera que la nupcialidad por edades en ese periodo y para la cohorte en estudio es dividida en cuatro casos y no en tres como ya se había señalado anteriormente ( temprana, intermedia y tardía); mientras que el segundo método no considera estas modalidades.

APENDICE I

LEY DE COMPERTZ Y MAKEHAM

Desde que se realizaron los primeros estudios acerca de la mortalidad, a principio del S. XVIII, se trató de hallar una expresión analítica que representara la función de  $l_x$  en una tabla de mortalidad. Esta no es una función lineal sino una curva que tiene por lo menos dos puntos de inflexión, descendiente, y ésto en sí la hace una curva difícil de ser representada mediante una sola fórmula o expresión simple. La primera hipótesis que parecía plausible era la de admitir que esa función decrecía en forma de una progresión geométrica con respecto a la edad, es decir  $l_x = ar^x$ , pero pronto se vió que tal hipótesis no convenía pues, aparte de que, en realidad no llegaba nunca a anularse, por mucho que -- creciese  $x$ , daba para todas las edades, el mismo cociente de mortalidad:

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{ar^x - ar^{x+1}}{ar^x} = 1-r$$

así como siempre daba la misma tasa instantánea de mortalidad :

$$\mu_x = \frac{-d \ln(ar^x)}{dx} = \frac{-d(ar^x)}{ar^x dx} = -\frac{dr^x}{r^x dx} = -\frac{r^x \ln r}{r^x} = -\ln r$$

siendo Abraham de Moivre hacia 1725 quién propuso la hipótesis anterior. Poco tiempo después aún por el mismo investigador fué abandonada la hipótesis anterior, dando a conocer una nueva, diciendo que la función  $l_x$ , decrecía en forma de una progresión aritmética, es decir  $l_x = A - nx$ . De Moivre tomaba más concretamente a partir de los 12 años de edad la siguiente función :  $l_x = 86 - r$ , función que tiene forma de una recta que corta al eje de las abscisas a los 86 años, dando por terminada la vida de las personas a ésa edad. Tomando la función anterior resultaba que tanto el cociente de mortalidad como la tasa instantánea de mortalidad se comportaban de la misma forma en cualquier año :



$$q_x = \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \frac{(86-x) - (86-(x+1))}{86-x} = \frac{1}{86-x}$$

$$\mu_x = \frac{-d \ln(86-x)}{dx} = \frac{-d(86-x)}{(86-x) dx} = \frac{1}{86-x}$$

Todos estos ensayos fueron hechos originalmente para la función  $q_x$  pues la función  $\mu_x$  aún no había surgido como se conoce hoy en día. El objetivo de éstos, sin embargo, era uno práctico, el de simplificar el cálculo de valores de anualidades vitalicias, que en esos tiempos era una tarea ardua. Esta última función  $\mu_x$ , tuvo su origen precisamente cuando Gompertz enunció su famosa hipótesis un siglo después a la de De Moivre, diciendo:

Es posible que la muerte sea la consecuencia de dos causas generalmente coexistentes: una el azar, sin disposición previa a la muerte o al deterioro, [es decir, aquellas causas independientes de la edad como los accidentes, etc.], otra, una deterioración o una impotencia creciente para resistir la destrucción, [es decir, aquellas causas en las que el organismo ofrece una resistencia a la muerte que se va perdiendo con el tiempo]. Si, por ejemplo, existiesen ciertas enfermedades a las que jóvenes y viejos estuvieran igualmente expuestos, y que fuesen igualmente funestas para viejos y para jóvenes, es evidente que las muertes por esta causa, en ambos grupos, guardarían entre sí la misma proporción que los grupos dados, con tal que los números fueran suficientemente grandes como para que pudiesen operar las leyes del azar. La intensidad de la mortalidad podría tenerse por constante. Si no hubiera otras enfermedades, la vida tendría en todas las edades, el mismo valor y, tanto el número de sobrevivientes como el de muertes, decrecería con la edad en progresión geométrica [forma de una progresión geométrica], mientras las edades crecían en progresión aritmética.

Pero si el género humano adquiere, de día en día, gérmenes de indisposición, o - dicho en otros términos - está cada vez más expuesto a morir lo que parece ser una hipótesis verosímil, por lo menos, para una gran parte de la vida, y aún cuando lo contrario pueda ocurrir en ciertos períodos -, fuerza es deducir que el número de sobrevivientes, a partir de cierto número de personas de igual edad, decrece, en intervalos iguales de tiempo, más rápidamente que la progresión geométrica, y que, así, las probabilidades de oír decir que un determinado hombre ha llegado a un determinado punto de la vejez, disminuyen en una progresión mucho más rápida, aunque no haya límite alguno con respecto a la edad que pueda alcanzarse.

Si el agotamiento del poder del hombre para evitar la muerte fuera tal que en promedio, y al fin de períodos de tiempo infinitamente peque-

ños, pero de igual duración, perdiera, también, porciones iguales de poder de oponerse a la muerte que tenía al principio de dicho intervalo, - entonces, a la edad  $x$ , la intensidad de la mortalidad podría ser representada por  $aq^x$ , siendo  $a$  y  $q$  constantes a determinar. (25)

Es decir, examinó el efecto de asumir " la extinción promedio de la fuerza o resistencia de un hombre hacia la muerte tal que al final de pequeños intervalos iguales de tiempo se perdieran proporciones iguales a su fuerza restante hacia la destrucción que tenía al principio de estos intervalos." (26). Así, él asumió que la fuerza o resistencia del hombre hacia la muerte decrecía en una tasa proporcional a sí misma. Dado que  $\mu x$  es una medida de susceptibilidad del hombre hacia la muerte, Gompertz usó el recíproco:  $1/\mu x$  para medir la resistencia del hombre a la muerte. Su hipótesis puede ser expresada como:

$$D(1/\mu x) = -h(1/\mu x) \dots(1)$$

dónde  $h$  es la constante de proporcionalidad.

Integrando de (1) :

$$\int \frac{d(1/\mu x)}{dx} \cdot (1/\mu x) dx = -h \int dx$$

$$\ln(1/\mu x) + \ln B = -hx$$

$$\ln(B/\mu x) = -hx \quad B/\mu x = e^{-hx}$$

$$\mu x = Be^{hx} \quad \dots(2)$$

Sea  $c = e^{hx}$  por (2)

$$\mu x = Bc^x \quad \dots(3)$$

De (3)

$$\mu x = \frac{-d \ln \frac{1}{x}}{dx} = Bc^x$$

Aquí es dónde aparece que la hipótesis de Gompertz es equivalente a el - asumir que la fuerza de mortalidad (tasa instantánea de mortalidad) crece en forma de una progresión geométrica.

(25) González Galé. op. cit. págs 39-43

(26) ibid. pág 44.

P.D.  $l_x = Kg^{c^x}$  donde  $\ln g = -B/\ln c$   $g = e^{-B/\ln c}$

De (1)

$$\frac{-d \ln l_x}{dx} = Bc^x$$

$$\frac{-d \ln l_x}{dx} dx = Bc^x dx$$

$$\ln l_x = -B/\ln c + c^x \ln c dx$$

$$= -Bc^x/\ln c + \ln K$$

Sea  $-B/\ln c = \ln g$

$$\ln l_x = c^x \ln g + \ln K$$

$$\ln l_x = \ln Kg^{c^x}$$

$$l_x = Kg^{c^x}$$

que es la expresión que se tiene para la ley de Gompertz.

Treinta y cinco años más tarde (1860), Guillermo Mateo Makeham dió a conocer un estudio sobre "La ley de mortalidad" en el que tomó como partida los trabajos de Gompertz, al darse cuenta que ésa fórmula :

$$l_x = Kg^{c^x}$$

se ajustaba las tablas con una precisión deseable pero, sin embargo reconoció que, " las mejores prácticas en la construcción de tablas de mortalidad habrían de ser alcanzadas mediante la ley de Gompertz".(27)

Ensayó diversos procedimientos, y comprueba que los valores ajustados corresponden mejor a la realidad sometiendo la fórmula de Gompertz a una modificación que equivale a tomar:

$$\mu_x = A + Bc^x$$

pues, apesar de que Gompertz habia establecido dos hipótesis tomó en cuenta solamente la segunda de las dos causas quedando su hipótesis como se ha mencionado anteriormente, y esta corrección que no hace, más

(27) ibid.pág 45.

que introducir en la fórmula una constante que representa el azar, es a lo que Makeham recurrió, no por haber reconocido a priori la emisión en que había incurrido Gompertz, sino para superar dificultades materiales surgidas en la práctica. Por lo tanto considera tanto las causas que dependen de la edad como las que no dependen de ella.

Según la hipótesis de Gompertz-Makeham, nombre con que se la conoce en definitiva, aún y cuando se le nombra ley de Makeham únicamente, la tasa instantánea de mortalidad tiene la forma:

$$\mu_x = A + Bc^x \quad \dots(4)$$

$$\text{P.D. } l_x = l_0 e^{-\int_0^x \mu_y dy} \quad \dots(5)$$

Se sabe que:

$$\begin{aligned} \mu_x &= -\frac{d \ln l_x}{dx} \\ -\int_0^x \mu_y dy &= \frac{d \ln l_y}{dy} dy \\ &= \ln l_y \Big|_0^x = \ln l_x - \ln l_0 = \ln \left( \frac{l_x}{l_0} \right) \\ -\int_0^x \mu_y dy &= \ln \frac{l_x}{l_0} \\ \therefore l_x &= l_0 e^{\int_0^x \mu_y dy} \end{aligned}$$

Lo que nos indica que la población crece o decrece de una manera exponencial.

Al evaluar primero

$$\int_0^x \mu_y dy = \int_0^x (A + Bc^y) dy = Ax + \frac{Bc^x}{\ln c} + \frac{(-B)}{\ln c}$$

$$\int_0^x \mu_y dy = -Ax - \frac{B(c^x - 1)}{\ln c}$$

Se denota:  $-A = \ln S$  y  $-B/\ln c = \ln g$

lo que implica:

$$\int_0^x \mu y dy = x \ln S + (c^x - 1) \ln g = \ln S^x g^{(c^x - 1)} \quad \dots(6)$$

Substituyendo (6) en (5) :

$$l_x = l_0 S^x g^{(c^x - 1)} = \frac{l_0}{g} S^x g^{c^x}$$

y sea  $K = l_0 / g$

$$\therefore l_x = K S^x g^{c^x}$$

que se aplica para valores no negativos de x.

Una 'deficiencia' en la ley de Gompertz-Makeham es que no se puede extender a las primeras ni a las últimas edades. En sí en su ponencia original, Gompertz restringió el uso de su fórmula para el periodo de aproximadamente 10 ó 15 años a 55 ó 60, y no es posible usar la fórmula sobre todo el range de edades sin hacer un cambio en las constantes en algún punto, usualmente entre las edades 50 y 60. Y aún más, no se podría esperar que una sola fórmula de sólo dos parámetros ajustara la curva  $l_x$  sobre todo su rango debido a sus características. La ley de Makeham fué una admirable superación a la hipótesis de Gompertz, y la fórmula, con una elección propia de los parámetros g, c y S, puede ser aplicada frecuentemente desde aproximadamente la edad 20 hasta casi al final de la vida.

Cada una de éstas leyes involucra un cierto número de parámetros no especificados, y por lo tanto cada uno puede crear un número infinito de funciones de supervivencia diferentes. Así, éstas leyes de mortalidad definen exclusivamente la forma de las funciones matemáticas que deben ser asumidas y no conducen a medidas numéricas de la mortalidad hasta que se escogan valores apropiados para los parámetros. Se debe pues recordar que lo que pretende hacer una ley es el tratar de explicar mediante una función el comportamiento del fenómeno en una función.

A la fórmula de Gompertz-Makeham se le buscó dar una mayor flexibilidad agregándole a  $x$  un término  $H_x$  que fuera proporcional a la edad:

$$x = A + H_x + .Bc^x$$

es decir:

$$l_x = KS^x W^x g^{o x}$$

y aún así, Guillermo Lazarus, actuaria alemán, entendió que para darle elasticidad a la fórmula de Gompertz-Makeham lo que correspondía era darle la forma:

$$x = A + B_1 c_1^x + B_2 c_2^x$$

que es equivalente a:

$$l_x = KS^x g_1^{o_1 x} g_2^{o_2 x}$$

## APENDICE II

### DESARROLLO DE PROCEDIMIENTOS EMPLEADOS

#### 1.- Método de los Grupos no Superpuestos (28).-

Primero suponemos que  $y(x)$ ,  $y(x) = K a^x b^{d^x}$  describe el comportamiento de la población ante el fenómeno nupcialidad; y notación:

$y(x)$  son las observaciones,

$x$  la edad,

$K, a, b, d$  parámetros por estimar.

El número de datos observados, se dividen en cuatro grupos de observaciones sucesivas, con un número igual de datos observados, en caso de no ser el número de observaciones divisible entre cuatro, se eliminan los datos en las edades mayores para así tener que el grupo de observaciones sea divisible entre cuatro.

Para fines de cálculo se recorren las edades a manera de que la primera edad sea cero, teniendo así :

$x$	$y(x)$
0	$y(0)$
1	$y(1)$
.	.
.	.
.	.
$n$	$y(n)$

Sea  $m = \frac{n+1}{4}$  de donde obtenemos cuatro grupos:

Grupo 1

$x: 0 \dots n-1$

$y(x): y(0) \dots y(m-1)$

Grupo 2

$x: m \dots 2m-1$

$y(x): y(m) \dots y(2m-1)$

Grupo 3

$x: 2m \dots 3m-1$

$y(x): y(2m) \dots y(3m-1)$

---

(28) Albino Bocaz, op. cit., pág 41.

Grupo 4

$$x: 3m \dots 4m-1$$

$$y(x): y(3m) \dots y(4m-1)$$

En segundo término, bajo el supuesto  $y(x) = K a^x b^{d^x}$  aplicamos la función logaritmo en ambos lados:

$\log y(x) = \log K + x \log a + d^x \log b$  ; y sumamos los términos de cada grupo quedando:

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{x=0}^{m-1} y(x) = \sum_{x=0}^{m-1} (\log K + x \log a + d^x \log b) = \\ &= \log K \sum_{x=0}^{m-1} 1 + \log a \sum_{x=0}^{m-1} x + \log b \sum_{x=0}^{m-1} d^x = \\ &= m \log K + \frac{m(m-1)}{2} \log a + \frac{d^m - 1}{d - 1} \log b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{x=m}^{2m-1} y(x) = \sum_{x=m}^{2m-1} (\log K + x \log a + d^x \log b) = \\ &= \log K \sum_{x=m}^{2m-1} 1 + \log a \sum_{x=m}^{2m-1} x + \log b \sum_{x=m}^{2m-1} d^x = \\ &= m \log K + \left( m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \right) \log a + d^m \frac{(d^m - 1)}{d - 1} \log b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{x=2m}^{3m-1} y(x) = \sum_{x=2m}^{3m-1} (\log K + x \log a + d^x \log b) = \\ &= \log K \sum_{x=2m}^{3m-1} 1 + \log a \sum_{x=2m}^{3m-1} x + \log b \sum_{x=2m}^{3m-1} d^x = \\ &= m \log K + \left( 2m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \right) \log a + d^{2m} \frac{(d^m - 1)}{d - 1} \log b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{x=3m}^{4m-1} y(x) = \sum_{x=3m}^{4m-1} (\log K + x \log a + d^x \log b) = \\ &= \log K \sum_{x=3m}^{4m-1} 1 + \log a \sum_{x=3m}^{4m-1} x + \log b \sum_{x=3m}^{4m-1} d^x = \\ &= m \log K + \left( 3m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \right) \log a + d^{3m} \frac{(d^m - 1)}{d - 1} \log b \end{aligned}$$

Calculando las primeras diferencias:

$$\Delta S_0 = S_1 - S_0 = m^2 \log a + \frac{(d^m - 1)^2}{d - 1} \log b$$

$$\Delta S_1 = S_2 - S_1 = m^2 \log a + d^m \frac{(d^m - 1)^2}{d - 1} \log b$$

$$\Delta S_2 = S_3 - S_2 = m^2 \log a + d^{2m} \frac{(d^m - 1)^2}{d - 1} \log b$$



las segundas diferencias :

$$\Delta^2 S_0 = \Delta S_1 - \Delta S_0 = \frac{(d^m - 1)^3}{d - 1} \log b \quad \dots \text{(II)}$$

$$\Delta^2 S_1 = \Delta S_2 - \Delta S_1 = d^m \frac{(d^m - 1)^3}{d - 1} \log b \quad \dots$$

De ahí:

$$d^m = \frac{\Delta^2 S_1}{\Delta^2 S_0} \quad \text{de donde} \quad d = \frac{\Delta^2 S_1}{\Delta^2 S_0} \quad \dots \text{(III)}$$

Por lo que ya conocemos a d. De la ecuación II despejamos al parámetro b y tenemos:

$$\log b = \frac{d-1}{(d^m - 1)^3} \Delta^2 S_0 \quad \text{de donde} \quad b = \log^{-1} \frac{d-1}{(d^m - 1)^3} \Delta^2 S_0$$

Y después de la ecuación I ; despejamos al parámetro a:

$$m^2 \log a = S_0 - \frac{\Delta^2 S_0}{d^m - 1} \Rightarrow a = \log^{-1} \left[ \frac{1}{m^2} \Delta S_0 - \frac{\Delta^2 S_0}{d^m - 1} \right]$$

Así hemos determinado el valor de los parámetros a, b y d.

El parámetro K lo calcularemos vía mínimos cuadrados, es decir :

$$Q = \sum_{x=0}^n (y(x) - K a^x b^{d^x})^2$$

Q es la suma de las diferencias al cuadrado entre los valores observados y los de la función, por lo que tratamos de hallar el valor de K para el cual Q sea mínimo; es decir:

$$\sum_{x=0}^n (y(x) - K a^x b^{d^x})^2 = 0$$

Denotando  $V(x) = a^x b^{d^x}$

$$\sum_{x=0}^n (y(x) - K V(x))^2 = 0$$

Desarrollando y reacomodando:

$$\sum_{x=0}^n (y(x)^2 - 2 K y(x) V(x) + K^2 V(x)^2) = 0$$

Suponiendo  $K V(x) = y(x)$ , se tiene:

$$\sum_{x=0}^n (y(x)^2 - 2 y(x)^2 + K^2 V(x)^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{x=0}^n (K^2 V(x)^2 - y(x)^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{x=0}^n K^2 V(x)^2 = \sum_{x=0}^n y(x)^2 \Rightarrow K^2 = \frac{\sum_{x=0}^n y(x)^2}{\sum_{x=0}^n V(x)^2}$$

pero como  $K^2 V(x)^2 = y(x)^2 = K(KV(x)) V(x) = K y(x) V(x)$

$$\Rightarrow K^2 = \frac{\sum_{x=0}^n (K y(x) V(x))}{\sum_{x=0}^n V(x)^2} \Rightarrow K = \frac{\sum_{x=0}^n V(x) y(x)}{\sum_{x=0}^n V(x)^2}$$

y . ya están determinados los parámetros a, b, d y K.

## 2.- Método de Levenberg-Marquardt-Morrison.-

Con este método se pretende aproximar la función:

$$y_i = m(x_i) / (1 - G(x_i))$$

mediante el modelo:

$r(x) = K a^x b^{c^x} = \phi_i(\beta)$ , que depende de los parámetros  $\beta = (k, a, b, d)^t$ , usando el criterio de mínimos cuadrados, que consiste en determinar aquel vector  $\beta^* = (K^*, a^*, b^*, d^*)^t$  que minimice:

$$\varepsilon(\beta) = \| \underline{y} - \phi(\beta) \|^2$$

El método clásico es el de Gauss-Newton, que consiste en tomar una aproximación de Taylor de primer orden de  $\phi(\beta)$  alrededor de  $\beta_k$  y obtener  $\beta_{k+1}$  como aquel vector que minimiza:

$$\varepsilon_k(\beta) = \| \underline{y} - \phi(\beta_k) - \phi'(\beta_k)(\beta - \beta_k) \|^2$$

Aunque hoy en día no se acostumbra, el problema anterior se puede atacar resolviendo el sistema de ecuaciones lineales:

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \beta_j} = 0$$

que son las ecuaciones normales, que en forma explícita son:

$$J_k^t J_k \underline{h} = J_k^t \underline{y}_k$$

en donde :

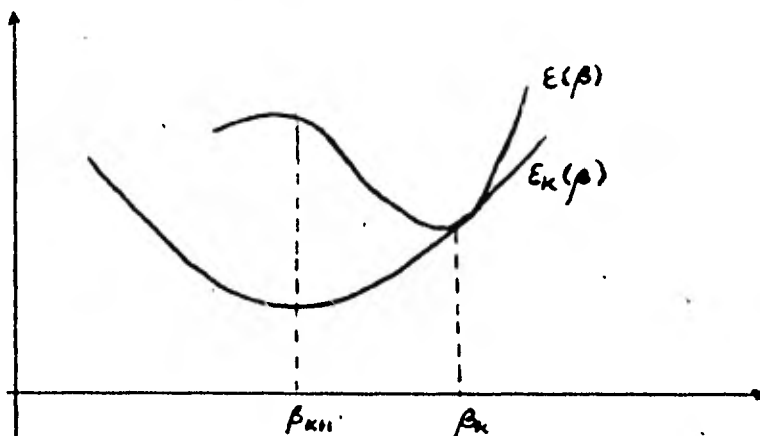
$$J_k = \phi'(\beta_k) = \text{Jacobiano de } \phi(\beta_k),$$

$$\underline{y}_k = \underline{y} - \phi(\beta_k) \quad y$$

$$\underline{h} = \beta - \beta_k.$$

El procedimiento anterior tiene una interpretación geométrica sencilla y, para el caso de un parámetro corresponde, por ejemplo, a

la siguiente gráfica:



Si bien el método de Gauss-Newton tiene la propiedad de converger rápidamente, su principal desventaja es que no siempre converge, lo que implica que al obtener  $\beta_{k+1}$  no se garantiza que

$$E(\beta_{k+1}) < E(\beta_k) .$$

A partir de esta dificultad es que Levenberg (29) propone aplicar el método de Gauss-Newton "amortiguado", es decir restringiendo el tamaño del paso  $h_k$  dentro de una vecindad de  $\beta_k$  en donde  $E_k(\beta)$  aproxima suficientemente bien a  $E(\beta)$ . De este modo se llega a las ecuaciones:

$$(J_k^t J_k + \lambda I) h = J_k^t y_k$$

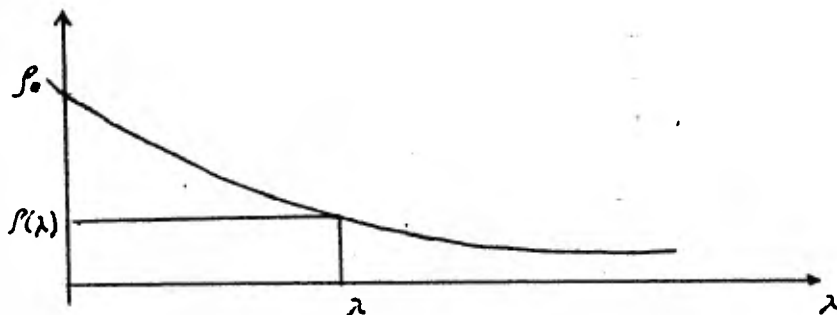
que son básicamente las ecuaciones normales, con los elementos de la diagonal perturbados por una constante .

Posteriormente, y en forma independiente, Marguardt (30) encontró que el problema así planteado consistía en minimizar  $E_k(\beta)$  sobre una vecindad de radio  $\rho$ , alrededor de  $\beta_k$  y estableció que es una función monótona decreciente de  $\lambda$ , con una expresión analítica

(29) K. Levenberg. "A method for the solution of certain Non-Linear problems in Least-Squares", Quart. Appl. Math. 2 (1944) pp. 164-168.

(30) D. Marguardt. "An algorithm for least-squares estimation of Non-linear Parameters" J. Soc. Indust. Appl. Math., 11, 1963, pág. 431-441

difícil de encontrar pero con un comportamiento cualitativo como se ilustra a continuación:



$f_0$  = Norma de la solución obtenida por el método de Gauss-Newton.

Al mismo tiempo hizo ver que el ángulo formado entre  $\underline{h}_k$  y la dirección de  $-\nabla \epsilon_k(\underline{\beta}_k)$  es también una función monótona decreciente de  $\lambda$ , y es en este sentido que se puede considerar a este método como una combinación de los métodos de Gauss-Newton y de Descenso más rápido (31).

El ganar este conocimiento sobre el comportamiento de  $f$  y del ángulo como una función de  $\lambda$ , ha permitido nuevas contribuciones respecto a la forma de elegir un valor adecuado de  $\lambda$ , que garantice en cada paso el descenso ( Ver p. ej. (30) y (32) ).

Como conclusiones se llega a que el algoritmo que presenta Margardt comparte con los métodos que emplean la dirección del gradiente su habilidad de converger de una condición inicial que puede estar fuera de la región de convergencia de otros métodos. El algoritmo comparte con el método de las series de Taylor la habilidad de acercarse a los valores convergentes rápidamente después de que se ha alcanzado una vecindad alrededor de ellos. Así pues, el método combina las mejores ca

(31) Kowalik, J. & Osborne M.R., "Methods for Unconstrained Optimization Problems", American Elsevier Publishing Co. Inc., New York. 1968.

(32) Jennings, L.S. & Osborne M.R., "Applications of Orthogonal Matrix Transformations to the Solution of Systems of Linear and Non-Linear Equations", Australian Nat. Univ. Computer Center Tech. Rept. No. 37, Canberra, Australia, 1970

racterísticas de sus predecesores mientras que evita sus más serias li  
mitaciones.

Relaciones de Tablas, Cuadros y Gráficas.-

TABLAS .-

pág.

Tablas 1,2,3,4.

Distribución de las mujeres alguna vez unidas según año de nacimiento y edad a primera unión. 16-23 .

Tabla 5

Modelo Estándar de las proporciones de mujeres no solteras a la edad  $x_s$  por intervalos de 0.1 años. 24

Tabla de Nupcialidad para 1940. 42

CUADROS.-

Cuadro I

Distribución de las mujeres alguna vez unidas nacidas en 1940 según su edad a la primera unión (EMF). 6

Cuadro II

Función Acumulada  $G(x)$  para 1940. 7

Cuadro III

Funciones  $G(x)$  y  $g(x)$  para cada C incluido ya el factor r. 8

Cuadro IV

Edades teóricas  $x$  vs. edades estándar  $x_s$  encontradas mediante la interpolación de las series  $G(x)$ 's con respecto a las edades  $x$  para encontrar las edades  $x_s$  para cada hipótesis de C. 11

Cuadro V

Ordenada al origen, pendiente y coeficiente de correlación calculados según la serie  $(x_{s1})$ . 12

Cuadro VI

Valores de los parámetros  $x_0$  y K para el año de 1940. 12

## Cuadro VII

Edades estándar ajustadas  $x_{slj}$  y sus correspondientes funciones  $G(x_{slj})$  y  $g(x_{slj})$ . 13

## Cuadro VIII

Valores de las funciones  $g(x_1)$ ,  $G(x_1)$  y  $r(x_1)$  para las mujeres mexicanas nacidas en 1940. 51

## Cuadro IX

Valores de la función  $r(x_1)$  empíricos y ajustados. 52

## Cuadro X

Valores de la función  $r(x_1)$  empíricos y ajustados vía Método Levenberg- Marguardt- Morrison. 53

## Cuadro XI

Parámetros estimados  $a_0$ ,  $K$  y  $\bar{m}$  año por año. 56-57

## Cuadro XII

Parámetros estimados  $a_0$ ,  $K$  y  $\bar{m}$  por grupos con la información del cuadro XI. 57

## Cuadro XIII

Parámetros estimados  $a_0$ ,  $K$  y  $\bar{m}$  con la información de la EMF 1976. 57

## Cuadro XIV

Alfabetismo de la población de 10 años y más 1940-1960. 61



	pág.
<b>Cuadro XV</b>	
Parámetros d,b,a y K estimados vía el Método de los Grupos No Superpuestos.	63
<b>Cuadro XVI</b>	
Parámetros d,b,a y K estimados vía el Método de Levenberg-Marquardt-Morrison.	64
<b>Cuadro XVII</b>	
Parámetros d,b,a y K estimados vía el primer método con la información de manera agregada.	65
<b>Cuadro XVIII</b>	
Parámetros d,b,a y K estimados vía el segundo método con la información de manera agregada.	65
<b>Cuadro XIX</b>	
Parámetros d,b,a y K obtenidos por promedios agregando la información del cuadro XV.	65
<b>Cuadro XX</b>	
Coefficientes de Correlación parciales, múltiple y de determinación correspondientes al modelo: $\ln(r) = \ln(K) + x \ln(a) + d^x \ln(b)$ , para la información de los dos métodos estudiados.	69-71
<b>Cuadro XXI</b>	
Coefficientes de correlación parciales, múltiples y de determinación correspondientes al modelo: $\ln(r) = \ln(K) + x \ln(a) + d^x \ln(b)$ , para la información de los dos métodos estudiados en forma agregada.	71-72

GRAFICAS.-

Gráfica 1	
x vs. $g(x)$ para $C=1.00$	25
Gráfica 2	
x vs. $g(x)$ para $C = .95$	26
Gráfica 3	
x vs. $g(x)$ para $C= .90$	27
Gráfica 4	
x vs. $G(x)$ para $C = 1.00$	28
Gráfica 5	
x vs. $G(x)$ para $C = .95$	29
Gráfica 6	
x vs. $G(X)$ para $C = .90$	30
Gráfica 7	
x vs. $x_{s1}$ (+) y x vs. $x_s$ (-)	31
Gráfica 8	
x vs. $g(x)$	43
Gráfica 9	
x vs. $G(x)$	44
Gráfica 10	
x vs. $n_x$	45
Gráfica 11	
$x_1$ vs. $r^+(x_1), r(x_1)$	54