

26 Ejem.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**METODOS ANALITICOS PARA LA EVALUACION CUAN-  
TITATIVA DE ALTERNATIVAS DE INVERSION BAJO  
CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE.**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
A C T U A R I O  
P R E S E N T A N:

REBECA LIMA CARCAÑO

VERONICA LIMON CASTAÑEDA

MEXICO, D. F.

1981



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## I N D I C E

### PRIMERA PARTE: INTRODUCCION

CAPITULO 1. ASPECTOS GENERALES DE LA INVERSION	1
1.1 Significado de Inversión	2
1.2 Descripción General del Problema	2
1.3 Fuentes de Financiamiento y Medios de Inversión	6
CAPITULO 2. MEDIDAS CLASICAS DEL BENEFICIO DE UNA ALTERNATIVA DE INVERSION	9
2.1 Introducción	10
2.2 Período de Recuperación	12
2.3 Tasa Interna de Retorno	14
2.4 Valor Presente Neto	16
CAPITULO 3. EL PROBLEMA DEL RIESGO Y SU CONSIDERACION EN LA EVALUACION DE PROYECTOS	18

### SEGUNDA PARTE: METODOS DE SOLUCION AL PROBLEMA DE EVALUACION BAJO CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE

CAPITULO 4. ENFOQUE PROBABILISTICO	24
4.1 Introducción	25
4.2 Aspectos Generales del Enfoque Probabilístico	25
4.3 Reformulación del Problema	30

4.4	Enfoque Analítico	33
4.4.1	Modelo Básico de Hillier	33
4.4.2	Modelo Extendido de Hillier	38
4.4.3	Modelo de Wagle	53
4.5	Enfoque de Simulación	67
CAPITULO 5.	OTRA SOLUCION PROPUESTA	73
CAPITULO 6.	COMPARACION DE LOS METODOS PROPUESTOS	99
	CONCLUSIONES GENERALES	129

## PROLOGO

Este trabajo es una presentación concisa de algunos de los aspectos generales de la inversión de capital, haciendo énfasis en las medidas utilizadas en la evaluación de las alternativas de inversión. La inversión de capital se contempla aquí desde el punto de vista del tomador de decisiones que se enfrenta con un presupuesto específico y un programa de inversiones. Una situación de decisión es vista como una elección entre acciones alternativas futuras encontradas por el tomador de decisiones. Lo que se pretende es seleccionar aquella alternativa o aquel conjunto de alternativas que promete el máximo incremento en el valor del capital para la inversión a realizar.

Se consideran algunas de las medidas clásicas del valor de una alternativa de inversión: valor presente neto, tasa interna de retorno y período de recuperación, definiéndolas y mencionando sus principales ventajas y desventajas. Para nuestros fines, resulta particularmente apropiada la medida del valor presente neto, la cual posteriormente será redefinida como una variable aleatoria y aplicada a las situaciones de riesgo.

Para facilitar la presentación, empezamos con situaciones en las que el tomador de decisiones dispone de información completa y de certeza acerca de los valores de

los cash flows generados por las alternativas. Aunque la lógica de estos modelos de evaluación es muy simple, proporciona bases didácticas para la mejor comprensión de la lógica de modelos de evaluación más complejos.

A continuación consideramos el caso en que las decisiones están sujetas a incertidumbre en la información. Las decisiones están basadas sobre pronósticos de futuros eventos y es por ello que surge el problema de considerar la incertidumbre que existe respecto a la precisión de los pronósticos. Un enfoque que considera esta incertidumbre es el analítico, que consiste en desarrollar una expresión formal para la incertidumbre mediante el uso de variables aleatorias. De esta manera, los costos y beneficios aparecen representados bajo la forma de variables aleatorias. Posteriormente se reconoce la existencia de interrelaciones o dependencias entre los cash flows, por ejemplo, ingresos de ventas y costos directos. Con base en estas medidas de beneficio de la inversión, tratadas como variables aleatorias y de las interrelaciones representadas por un patrón de variación de los cash flows a partir de sus esperanzas y varianzas, se presentan métodos mediante los cuales las alternativas pueden, finalmente, ser evaluadas.

## O B J E T I V O S

Uno de los problemas más difíciles dentro de la metodología de la planificación<sup>1</sup> consiste en determinar los criterios de elección entre diversos proyectos de inversión. Para ello es de primordial importancia establecer la forma en la cual los proyectos deben ser evaluados. Aunque haya sido debatido a menudo, este último problema no ha recibido todavía una solución universalmente aceptada. La multiplicidad de los métodos y la fragilidad de muchos de ellos testimonian la dificultad inherente a este punto.

El propósito de este trabajo no es discutir la validez de los diversos criterios existentes, sino más bien, hacer una breve exposición de algunos de ellos y presentar la solución mediante dichos métodos a algunos casos simplificados.

- 
1. La planificación puede ser descrita como una estimación de la situación futura de los aspectos financieros de un programa de negocios. Sus objetivos fundamentales son colocar a la empresa en una situación financiera sólida y obtener rendimientos satisfactorios, ambos para el futuro inmediato y a largo plazo.

PRIMERA PARTE

INTRODUCCION

C A P I T U L O    1

ASPECTOS GENERALES

DE LA INVERSION

## 1.1 SIGNIFICADO DE INVERSION

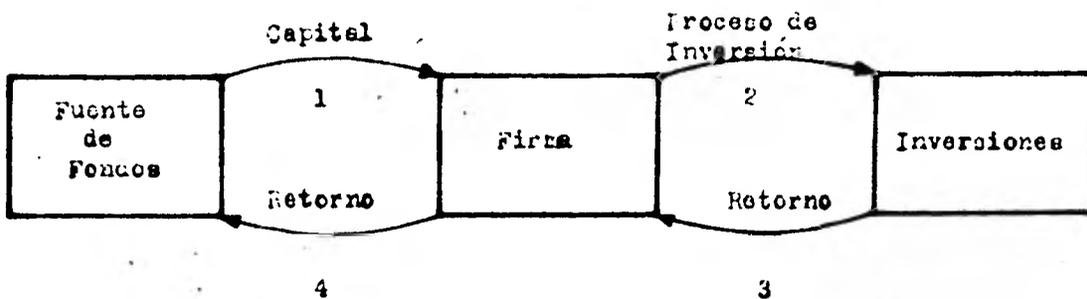
Desde el punto de vista financiero, es decir, el de los inversionistas o proveedores de capital, la inversión es el compromiso de fondos presentes con el propósito de derivar ingresos futuros en forma de interés, dividendos o aumento en el valor del capital. Aquí no es importante si el dinero invertido se dedica a un uso "productivo" en el sentido económico.

Aunque el significado financiero y el económico del término están relacionados (ya que parte del ahorro de los individuos que penetra al mercado de capital, directamente o por medio de las instituciones, está dedicado al nuevo financiamiento del capital permanente), a lo largo de este trabajo se utilizará el término inversión en el sentido financiero y las inversiones incluirán aquellos medios o instrumentos en los cuales se coloca el ahorro.

## 1.2 DESCRIPCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA

A fin de concentrar nuestra atención sobre los pro-

blemas relacionados con el análisis de proyectos, que se rán material de estudio de este trabajo, comenzaremos por decir que una firma puede ser considerada como una entidad que obtiene capital de una fuente de fondos (fase 1), invierte este capital (fase 2), recibe rendimientos de la inversión (fase 3) y regresa fondos a la misma fuente (fase 4). En las empresas estas fases están ocurriendo simultáneamente; la firma evalúa continuamente las posibles fuentes de fondos así como las posibles oportunidades para invertir estos fondos.



#### CICLO DE ADQUISICION E INVERSION DE CAPITAL EN UNA FIRMA

Un proyecto se define aquí como una colocación de los recursos hecha con la esperanza de la realización de beneficios que se espera ocurran dentro de un período razonable de tiempo en el futuro y que el problema de decisión de inversión, puede ser estructurado como un proce-

so que consta de los siguientes cuatro pasos<sup>1</sup>:

- 1 Identificación de la necesidad de una decisión o de una oportunidad de inversión.
- 2 Formulación de vías (alternativas de inversión o proyectos) para satisfacer esta necesidad.
- 3 Evaluación de los proyectos identificados.
- 4 Selección de uno o más proyectos para su realización.

Debido a la subjetividad implícita en las dos primeras fases del problema de decisión de inversión, ya que se realizan de acuerdo a la experiencia e iniciativa del tomador de decisiones, resulta imposible la existencia de un modelo matemático que se adapte a la infinidad de criterios existentes; por ello partiremos de la suposición de que ya se ha identificado la necesidad para una decisión de inversión y que ya han sido formuladas las diversas alternativas posibles para la satisfacción de esta necesidad. El objetivo de este trabajo estará dirigido hacia la solución del Paso 3 del proceso de inversión.

Supondremos además que disponemos de ofertas de inversión merecedoras de consideración preliminar, es decir, que habiéndose hecho una evaluación racional de las alternativas, se han eliminado los proyectos no favora-

---

1. Felipe Ochoa Rosso, Estructura del Problema de Selección Óptima de Inversiones, Seminario sobre la Aplicación de la Investigación de Operaciones en el Sector Financiero, México, D.F., Dic. 1973.

bles de acuerdo con los objetivos del tomador de decisiones; igualmente, daremos por sentado que para cada una de ellas existe, completa, la investigación técnica y de mercado que es de rigor. Supondremos en fin que tales estudios nos permiten medir el valor en dinero de los fondos desembolsados y de los beneficios obtenidos a consecuencia de la inversión, en cada uno de los futuros períodos de tiempo. Al establecer tales hipótesis, estamos excluyendo el estudio de muchos tipos de inversiones, aquéllas en que el intento de medir todos los costos y beneficios se encuentran con que ambos no siempre pueden describirse en términos puramente monetarios. Por ejemplo, considérese un programa publicitario destinado a reforzar el prestigio asociado con el nombre de una empresa. Se trata, desde luego, de una inversión, puesto que los desembolsos se realizan con esperanza de obtener beneficios, que continuarán mucho tiempo después de haberse realizado el desembolso correspondiente a la campaña propagandística en cuestión. Pero, aún así, resulta difícil estimar en dinero el valor exacto de los beneficios extra que proporcionará el programa publicitario.

Nosotros no trataremos estos casos, sino que nos ocuparemos únicamente de aquellas inversiones cuyos costos y beneficios pueden ser cuantificables en términos monetarios.

### 1.3 FUENTES DE FINANCIAMIENTO Y MEDIOS DE INVERSION

Al igual que los individuos, las firmas se enfrentan con dos decisiones financieras fundamentales. Tienen que determinar: 1) dónde deben invertir sus fondos y en qué proporciones, y 2) dónde pueden conseguir fondos y en qué proporciones. La firma tiene una gran diversidad de oportunidades de inversión y de financiamiento y habrá de adoptar sus decisiones financieras de modo tal que pueda conseguir su objetivo propuesto.

Para cualquier tipo de inversionista existe una gran diversidad de medios para la inversión. La variedad de formas en que los fondos son comprometidos, puede clasificarse en una forma general en inversiones en seguros, depósitos, valores y títulos, bienes raíces e inversión directa en la propiedad de una empresa.

Sin embargo, para el caso de una empresa, la inversión en sentido amplio, equivale a cualquier destino dado a los fondos financieros y comprende, tanto el pago de deudas, gastos y adquisición de materias primas, como la compra de bienes de equipo e instalaciones. Estos son los que consideramos como los medios en que la empresa puede colocar sus recursos.

Los fondos financieros son el "combustible" de la

actividad comercial, la elección apropiada de éstos es parte de la tarea directiva de planificación y está íntimamente relacionada con la naturaleza de las operaciones, las condiciones planeadas, la actividad y el tipo de administración de la empresa. Esta tarea planificadora supone una adecuación de las fuentes apropiadas de fondos a las operaciones e inversiones actuales y futuras.

Las fuentes de fondos para una empresa<sup>1</sup> son numerosas y variadas, podemos hacer, entre otras, las siguientes clasificaciones<sup>2</sup> de los medios financieros a que la empresa puede recurrir para cubrir sus necesidades de fondos: fuentes a corto y largo plazo; garantizadas y no garantizadas; "open-market" y "customer-loan"; atendiendo a la utilización de sus propios recursos, autofinanciación; a recursos de sus propietarios o socios, aportaciones y acciones; a recursos de otras personas y entidades, empréstito, crédito, etc.

1. Los gobiernos, ya sean nacionales, estatales o locales, tienen, desde luego, sus propias formas de financiamiento como son los impuestos y otro tipo de políticas fiscales, así como la emisión de valores gubernamentales. Sin embargo, el tratamiento de estos instrumentos de financiamiento no corresponde al caso de una empresa, que es el que se está considerando aquí.
2. Un tratamiento más profundo de los medios de financiamiento para una empresa, aunque muy importante, resultaría demasiado extenso y está fuera de los objetivos contemplados en el presente trabajo.

Los sistemas de financiamiento se entrelazan y adquieren diversas formas de acuerdo con los fines y necesidades que cubre el financiamiento y de acuerdo con el tamaño de la empresa. El fin a que se destinarán los fondos determina, en cierto modo, la forma en que deben ser obtenidos.

No debemos dejar sin mencionar la importancia de la sociedad anónima como medio de obtención de capital. Al estudiar la sociedad anónima como forma de organización para la realización de negocios se considera que sus ventajas sobre otras clases de sociedades mercantiles son las siguientes: 1) mayor facilidad para la obtención de capitales, 2) duración indefinida, 3) centralización de la responsabilidad y de las facultades de duración. Pero la ventaja verdaderamente sobresaliente de la sociedad anónima, estriba en su mayor eficacia para reunir los capitales necesarios para una gran empresa.

C A P I T U L O 2

MEDIDAS CLASICAS DEL BENEFICIO DE UNA  
ALTERNATIVA DE INVERSION

## 2.1 INTRODUCCION

En este capítulo se describirán métodos de solución al problema de evaluación de inversión, considerando que toda la información asociada con el problema es perfectamente conocida de antemano. Aunque el carácter determinístico de la información asociada a los proyectos ha permitido desarrollar procedimientos de solución al problema que se está considerando, el medio ambiente circundante es en mayor o menor medida incierto. De aquí la necesidad de crear procedimientos que tomen en cuenta esta incertidumbre, por ello, a partir del próximo capítulo este trabajo estará encaminado al tratamiento de algunos de estos procedimientos.

Existen muchas situaciones de decisión o elección entre posibles acciones alternativas. Algunas de estas decisiones pueden ser triviales y otras muy importantes. Las triviales son comunes y están reducidas a patrones establecidos de conducta. Sin embargo, las decisiones importantes como es el caso de las decisiones de inversión de capital, deben hacerse con un claro delineamiento de todas las alternativas posibles, un claro entendimiento de las consecuencias favorables y de las no favo-

rables así como una cuidadosa comparación de las diferencias entre las alternativas posibles, puesto que es precisamente en estas diferencias en las que se basará la decisión. Por ello, se requiere establecer un valor que pueda servir como estándar para medir la atractividad relativa de las oportunidades de inversión. Este valor puede ser determinado mediante diversas medidas llamadas de beneficio.

Las medidas de beneficio pueden ser divididas en dos categorías principales:

- a) Aquéllas que no involucran descuento sobre el tiempo. Aquí se incluyen medidas tales como el período de recuperación, la tasa contable de rendimiento, etc. Estas técnicas funcionan solamente para tipos particulares de proyectos, algunas veces incluyen factores cualitativos.
- b) Aquéllas que involucran descuento sobre el tiempo. Las dos más ampliamente utilizadas son el valor presente neto (VPN) y la tasa interna de retorno (TIR). Estos métodos se han discutido ampliamente en la literatura y se han investigado algunas dificultades para su uso, algunas de ellas se centran en el hecho de que la tasa interna de retorno para un proyecto particular puede no ser única y por ello podría justificarse tanto la aceptación como el rechazo para el proyecto dado.

Aunque existen muchas formas en las cuales pueden ser evaluados los beneficios de las inversiones, nuestra presentación se limita únicamente a los tres criterios más ampliamente utilizados. Estos son: criterio del período de recuperación, criterio de la tasa interna de retorno y criterio del valor presente neto. Para ello asumiremos que se dispone de las "medidas adecuadas" de los costos y beneficios, sin entrar a la discusión de lo que constituye una medida adecuada.

Considerando un proyecto específico, la notación utilizada será la siguiente:

$C_0$  : desembolso inicial requerido para el proyecto.

$C_j$  : costo esperado o gasto requerido para un proyecto en el período  $j$ .

$Q_j$  : beneficio esperado en el período  $j$ , si el proyecto es aceptado, donde  $Q_0 = 0$ .

## 2.2 PERIODO DE RECUPERACION

Este criterio ocupa un lugar prominente entre todos los criterios de evaluación y esto no es debido propiamente a que es el más simple de aplicar, sino a que es el más intuitivo de comprender.

mente a sus méritos, sino a su amplia aceptación entre los ejecutivos de negocios de todo el mundo.

El período de recuperación es simplemente una medida del tiempo requerido para que las ganancias de un proyecto obtenidas mediante la inversión iguallen al desembolso original hecho por la firma. Se define como la mínima  $n \in \mathbb{Z}$ , tal que

$$C_0 \leq \sum_{j=1}^n (Q_j - C_j)$$

El ordenamiento en este criterio de beneficio para las alternativas de inversión depende de la longitud del período de recuperación. Mediante este criterio, dados dos proyectos, deberá aceptarse aquél que proporcione el menor tiempo de recuperación de la inversión.

Aunque el período de recuperación es fácil de calcular, ya que todo lo que necesita son estimaciones de los cash flows para los primeros años y la posibilidad de obtenerlos sucesivamente a partir de la inversión inicial, en un examen más profundo, su efectividad como criterio para evaluar proyectos es un poco más cuestionable ya que su medida no es un índice confiable de beneficio. Esto se debe a que no considera cualquier net cash flow que pueda ocurrir después del período de recuperación.

Además, falla al considerar cualquier diferencia en el cálculo del tiempo en que ocurren los cash flows antes del fin del período de recuperación. Lo que lo hace atractivo únicamente para consideraciones a corto plazo.

Sin embargo, se efectúan muchas inversiones en las que el pago es altamente incierto y su esperanza de vida lo es aún más. Bajo estas circunstancias, la recuperación puede volverse importante, no tanto como una medida de beneficio, sino como un medio de establecer una cota superior sobre el grado aceptable de riesgo. Cuando uno puede evaluar el futuro cercano con alguna confiabilidad pero se está en la obscuridad completa respecto a los prospectos a mayor plazo, un período corto de pago puede ser una garantía adecuada en contra de la pérdida.

### 2.3 TASA INTERNA DE RETORNO

La tasa de retorno es otra medida ampliamente utilizada para encontrar el valor de la inversión que toma en cuenta el factor del interés. También es conocido como la "eficiencia marginal del capital" o como la "tasa de retorno sobre costo".

Por definición, la tasa de retorno es la tasa de descuento que iguala el valor presente de los beneficios netos con el costo del proyecto. Puede ser encontrada resolviendo la siguiente ecuación para  $r$

$$\sum_{j=0}^n \frac{Q_j}{(1+r)^j} = \sum_{j=0}^n \frac{C_j}{(1+r)^j}$$

donde  $r$  es la tasa de retorno y los otros símbolos tienen los significados asignados anteriormente. Denotaremos al valor presente de los beneficios como  $V$ , donde

$$V = \sum_{j=0}^n \frac{Q_j}{(1+r)^j}$$

y el de los costos como  $C$ , donde

$$C = \sum_{j=0}^n \frac{C_j}{(1+r)^j}$$

Los cálculos requeridos para encontrar  $r$  son algo más complicados que en el método anterior, ya que se tiene que resolver un polinomio de grado  $r$  y en la mayoría de los casos, de alto grado. El enfoque consiste en escoger una tasa estimada (el recíproco del período de recuperación, aunque resulta limitado como criterio de inversión, puede ser útil para elegir un punto de partida). Entonces son calculados los valores presentes y sumados para encontrar  $V-C$ . Si  $V-C$  es positivo, debe intentarse con una tasa más alta, si es negativa, con una tasa menor. Si  $V-C = 0$ , la tasa ha sido encontrada. En otro caso, el procedimiento debe continuar hasta que se encuentre una tasa para la cual  $V-C=0$ . En la práctica puesto que no todos los valores para  $r$  están tabulados, se encuentran dos tasas para las cuales, respectivamente,  $V-C$  es positivo pero pequeño y  $V-C$  es negativo pero pequeño. Entonces, el valor correcto es encontrado por interpolación.

#### 2.4 VALOR PRESENTE NETO

El criterio del valor presente neto (VPN) de un pro-

yecto, se define como la diferencia entre el valor presente de los beneficios y el valor presente de los costos. Es decir,

$$VPN = \sum_{j=0}^n \frac{Q_j}{(1+r)^j} - \sum_{j=0}^n \frac{C_j}{(1+r)^j}$$

donde  $r$  es el costo del capital<sup>1</sup>.

De acuerdo con este criterio, cualquier proyecto con un VPN positivo deberá ser aceptado, en cualquier otro caso se debe rechazar. El ordenamiento para este criterio consiste en que un proyecto será mejor que otro si su VPN es mayor.

---

1. Costo del Capital o Tasa de Interés es el precio pagado por los prestatarios a los acreedores por utilizar el dinero.

C A P I T U L O    3

EL PROBLEMA DEL RIESGO Y SU CONSIDERACION  
EN LA EVALUACION DE PROYECTOS

A menudo, las empresas se ven forzadas a realizar selecciones entre cursos alternativos de acción. Los datos cuantitativos suministrados, aparecen en forma de estimaciones dirigidas a mostrar cuál será el resultado si se elige uno u otro curso de acción. Puesto que estas cifras se relacionan con el futuro, llevan consigo la incertidumbre asociada generalmente con la predicción. En los años recientes se han hecho intentos de aplicación de las leyes de probabilidad para modificar estas estimaciones involucrando la medida del grado de incertidumbre. El enfoque probabilístico se ha colocado entre los más importantes, debido a que conduce de una mejor manera a la evaluación de los resultados posibles de un proyecto bajo condiciones de incertidumbre.

La esencia del problema de incertidumbre es simplemente que muchas de las variables que afectan el resultado de un plan particular de acción no son controlables por el planificador o tomador de decisiones, de tal manera que para la evaluación, se requieren juicios acerca de las probabilidades de ocurrencia de las variables no controlables.

Es muy importante señalar que las condiciones relevantes de incertidumbre para este estudio son únicamente las relacionadas con un proyecto particular y no con la incertidumbre global que afecta los resultados que se

presentan en la actividad de los negocios de una firma. Y además, que el concepto de incertidumbre se referirá a las situaciones donde los cash flows asociados con una alternativa de inversión no se conocen de antemano.

Es común hacer distinción entre las situaciones caracterizadas por "riesgo" (probabilidades conocidas) y las caracterizadas por "incertidumbre" (probabilidades desconocidas). Aquí no adoptaremos esta distinción ya que dentro del contexto de las decisiones de inversión de capital, carece de significado preciso la afirmación de que las probabilidades son desconocidas, puesto que si existiera una ignorancia completa acerca de los resultados que ocurrirán, estos se convertirían en igualmente probables, implicando así, que la distinción entre riesgo e incertidumbre es inoperante.

La evaluación de proyectos de inversión, en particular, ha sentido lo inadecuado de los modelos que ignoran el papel de la incertidumbre y debido a esto han surgido intentos para corregir tal deficiencia.

Entre los primeros intentos que consideran la presencia de la incertidumbre se encuentran los llamados Procedimientos Crudos: el método del período de recuperación, pronósticos conservadores, tasa inflada de descuento con riesgo y el análisis de sensibilidad.

Estos métodos, con excepción del análisis de sensi-

bilidad, son deficientes en cuanto a que las decisiones correspondientes están basadas en los cálculos del VPN, u otro tipo de medidas realizadas de acuerdo a estimaciones simples de la información incierta y proporcionan una evaluación muy cruda e informal del riesgo asociado con un proyecto particular.

El análisis de sensibilidad supera esta falla y está dirigido hacia un análisis explícito de la incertidumbre de la información asociada con un proyecto individual, por tanto, representa un paso adelante hacia un análisis adecuado del problema y una herramienta importante para reducir situaciones complejas, pero también es deficiente ya que no proporciona la información relevante requerida para tomar una decisión.

El enfoque probabilístico aborda más apropiadamente (respecto a los procedimientos crudos) el problema de la evaluación de proyectos bajo condiciones de riesgo, ya que proporciona una descripción formal de la incertidumbre asociada con un proyecto particular, en términos de los diferentes valores que puede tomar el VPN y la probabilidad de ocurrencia de cada uno de estos resultados. Es decir, se deduce una distribución de probabilidad para el VPN del proyecto, que le permite al tomador de decisiones conocer los resultados que puede esperar y las oportunidades de obtener cualquier resultado particular.

Dentro del análisis probabilístico existen dos enfo

ques propuestos para la deducción de la distribución de probabilidad del VPN: el enfoque analítico y el enfoque de simulación.

En la segunda parte del Trabajo nos ocuparemos de la descripción de los métodos del enfoque analítico y solamente haremos mención de los aspectos generales del enfoque de simulación.

S E G U N D A   P A R T E

METODOS DE SOLUCION AL PROBLEMA DE EVALUACION  
BAJO CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE

C A P I T U L O    4

ENFOQUE PROBABILISTICO

#### 4.1 INTRODUCCION

El propósito de este capítulo es mostrar la importancia del papel que juegan las variables básicas dentro de la evaluación de inversiones bajo condiciones de incertidumbre y la utilidad de la aplicación del cálculo de probabilidades<sup>1</sup> en el tratamiento del problema de la agregación en las variables, mediante la obtención de distribuciones de probabilidad para cada uno de los factores relevantes, incorporándolas a la distribución de probabilidad específica de los rendimientos del proyecto.

#### 4.2 ASPECTOS GENERALES DEL ENFOQUE PROBABILISTICO

En la actualidad, como se ha indicado en el capítulo precedente, el análisis probabilístico proporciona un método eficaz para calcular los riesgos implícitos en de

- 
1. Haciendo uso de los conceptos más importantes relacionados con una distribución de probabilidad: media, varianza y covarianza.

cisiones de inversión de capital. Gracias a este sistema que evalúa las probabilidades en favor o en contra para el rendimiento posible de un proyecto, el tomador de decisiones cuenta con mayor y mejor información para examinar las distintas alternativas en relación con los objetivos de la empresa.

La evaluación de un proyecto de inversión se basa en el principio de que la productividad potencial del capital invertido se mide por el rendimiento que el inversionista puede esperar en un determinado período. El tomador de decisiones sabe que estos cálculos "precisos" se basan en datos que no son exactos. En el mejor de los casos, el dato que tiene sobre el VPN del proyecto, es un promedio basado en diferentes estimaciones de precisión variable. Esta realidad de toda inversión puso de manifiesto las deficiencias de los métodos que se utilizaban para medir la bondad relativa de las alternativas por medio de 1) promedios de las utilidades y gastos anuales o 2) agrupaciones globales de las utilidades y gastos anuales, como se hace en el caso del método del período de recuperación. Estas deficiencias han estimulado a los especialistas en la toma de decisiones a investigar métodos más precisos para evaluar y clasificar las inversiones propuestas. Entre ellos se encuentran los métodos analíticos y los de simulación. De ellos

hablaremos más adelante.

La fatal deficiencia en los intentos anteriores para evaluar las inversiones de capital, no tiene nada que ver con el método de calcular el VPN. La realidad es que, sea cual sea el procedimiento que se utilice, muchas de las variables que entran en el cálculo del VPN están sujetas a un alto grado de incertidumbre.

Esta incertidumbre, la ilustra un caso sencillo: Los cash flows normalmente provienen de fuentes tales como ventas, costos fijos, costos variables, etc. Estos cash flows, a su vez, son calculados a partir de otros factores. Los costos fijos, por ejemplo, pueden incluir rentas, intereses, mantenimiento de edificios, etc. Los costos variables pueden incluir materiales, pago de salarios, etc. El cash flow de ventas puede estar constituido por tamaño de mercado, porción de mercado, precio por unidad, etc. Estos a su vez pueden subdividirse en factores más básicos. Son precisamente estos factores "desagregados" los que resultan relevantes en el análisis de un proyecto con riesgo. De hecho, en estas variables radica la incertidumbre del problema. La incertidumbre de las "variables agregadas" tales como el cash flow de ventas está determinada por la incertidumbre de estos factores relevantes a los que nos referiremos en adelante como variables básicas.

Es decir, en una evaluación más profunda, los bene-

ficios netos totales y los costos netos totales aparecen como funciones que describen la relación cuantitativa entre las variables básicas y los cash flows.

En la práctica, los métodos convencionales no operan a satisfacción debido a que las estimaciones utilizadas para el cálculo del VPN no son sino eso, únicamente estimaciones. Desde luego, un mayor grado de exactitud en estas estimaciones sería de utilidad, pero la incertidumbre residual puede bastar para derribar las expectativas de la empresa. No obstante, existe una solución. Para lograr que las estimaciones relacionadas con los factores básicos se apeguen a la realidad, es necesario realizar un análisis a fondo de cada uno de estos factores, a fin de descubrir las incertidumbres que encierran y las causas que las provocan.

La ventaja del análisis probabilístico es que nos ayuda a pensar en términos de la desagregación de las fuentes de la incertidumbre e incorporar al análisis un juicio completo sobre el rango posible de valores para cada variable y la probabilidad de cada valor dentro de este rango, obteniéndose no sólo un único valor para la variable de decisión, sino el rango total de valores que puede tomar. Las técnicas de estimación convencionales se limitan a colocar toda la complejidad del juicio del evaluador en un sólo valor, en cambio el análisis probabilístico cuantifica toda la información en una forma

clara y comprensible. Debe notarse que un análisis basado sobre la "mejor estimación" (es decir, un análisis que utiliza solamente el valor más probable para cada uno de los factores claves), ocultaría totalmente la información incierta. El análisis probabilístico permite al tomador de decisiones conocer más aproximadamente el grado de riesgo en el que está incurriendo al seleccionar un curso de acción determinado y puede ayudarlo a reducir el riesgo, indicándole cual entre todos los factores que influyen en el problema contribuye más significativamente.

Es importante señalar que si bien es cierto que el evaluador necesita conocer los efectos que tiene la incertidumbre propia de cada uno de los factores importantes sobre los rendimientos probables del proyecto, existe, sin embargo, un límite para la desagregación en las variables debido a que surgen problemas con la correlación entre ellas, creando graves dificultades en el análisis del proyecto. El que las variables estén correlacionadas significa que tienen probabilidad de variar juntas en una forma sistemática y la descripción de la correlación no es otra cosa más que la descripción de la forma en que están relacionadas sus variaciones.

Cuando las variables independientes son agregadas, el efecto de la variación de una puede ser compensado

por la variación de otra en una dirección opuesta. Si están positivamente correlacionadas, el efecto de la variación de una puede estar agravado por la variación de las otras. Las correlaciones también pueden ser negativas, es decir, las variables pueden compensarse unas a otras de una manera sistemática. Esta dificultad se incrementa considerablemente si se presentan dependencias entre las variables básicas la cual es una situación más realista. Por ejemplo, un incremento en los precios está asociado con un decremento en la porción del mercado, un incremento en el costo puede estar asociado con un incremento en los precios, un decremento en el tamaño del mercado puede estar seguido de un decremento en los precios, los que a su vez pueden ser seguidos de un incremento en la porción del mercado.

#### 4.3 REFORMULACION DEL PROBLEMA

El método del análisis probabilístico combina la variación de todos los factores pertinentes y su propósito es dar una imagen clara del riesgo relativo asociado con las variables básicas. Esto requiere una nueva fórmula

ción del problema que incorpore al análisis, la incertidumbre involucrada en términos de una distribución de probabilidad y del grado de asociación o correlación de estas variables, en lugar de tratar con variables agregadas tales como los cash flows o net cash flows.

En el Capítulo 2 se utilizó el siguiente modelo para la evaluación del VPN:

$$VPN = \sum_{j=0}^n \frac{Q_j}{(1+r)^j} - \sum_{j=0}^n \frac{C_j}{(1+r)^j}$$

donde  $Q_j$  y  $C_j$  son respectivamente el beneficio y el costo neto asociado con el proyecto que se espera ocurra en el período  $j$ ,  $r$  es el costo del capital y  $n$  el horizonte de planeación. Este modelo aparece expresado en términos de cash flows, pero la estimación que se hace de los costos y beneficios, ignora, o considera sólo parcialmente la incertidumbre de las variables básicas y en consecuencia la incertidumbre específica del VPN del proyecto. Sin embargo, un análisis tendiente a modificar esta falla debe tomar en cuenta explícitamente la incertidumbre de las variables básicas en términos de una función de probabilidad.

Con este propósito, en lo sucesivo, el VPN de un proyecto con riesgo será considerado como una variable aleatoria y estará definido como sigue:

$$VPN = \sum_{j=0}^n (1+r)^{-j} X_j$$

$$\text{con } X_j = f_j(A_1, A_2, \dots, A_m)$$

donde  $r$  es el costo del capital,  $A_1, A_2, \dots, A_m$  son las variables básicas identificadas en el período  $j$  y  $f_j$  es la función que relaciona el net cash flow en el período  $j$  con las variables básicas en el mismo período.

El propósito del análisis probabilístico es deducir la distribución de probabilidad del VPN de un proyecto con riesgo sobre un horizonte de planeación de  $n$  períodos de tiempo, donde por proyecto entenderemos un conjunto de net cash flows  $X_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) sobre un horizonte de planeación de  $n$  períodos de tiempo y toda  $X_j$  es una función  $f_j$  de las variables básicas  $A_1, A_2, \dots, A_m$  identificadas en el período  $j$ . Las variables  $A_1, A_2, \dots, A_m$  son variables aleatorias (inciertas)

con alguna distribución de probabilidad asociada.

#### 4.4 ENFOQUE ANALITICO

Partiendo de la suposición de que se dispone de las medias y varianzas correspondientes a las distribuciones de probabilidad de las variables básicas, así como las covarianzas asociadas con cualquier par de variables dependientes, el método analítico consiste en calcular la media y varianza de la medida del VPN, y la interpretación de los resultados en términos de una distribución de probabilidad.

##### 4.4.1 MODELO BASICO DE HILLIER

El problema tratado en el modelo básico de Hillier está restringido a la descripción de la deseabilidad de las inversiones individuales. El objetivo es demostrar

cómo obtener una distribución de probabilidad para la medida de beneficio de una inversión.

Este procedimiento requiere únicamente que, además de una estimación del valor esperado del cash flow, la inexactitud de ésta aparezca descrita en términos de una estimación de la desviación estándar. Sobre estas bases se obtiene una descripción explícita y completa del riesgo involucrado, en términos de la distribución de probabilidad del VPN.

Considérese una alternativa de inversión que generará cash flows durante los próximos  $n$  años. Sea  $X_j$  una variable aleatoria que denota el valor del net cash flow durante el  $j$ -ésimo año, donde  $j=0,1,\dots,n$ . Asíumase que  $X_j$  tiene una distribución normal con media  $\mu_j$  y desviación estándar  $\sigma_j$  conocida.

Se harán también, las siguientes suposiciones respecto a la relación que existe entre las variables aleatorias  $X_j$  para diferentes períodos de tiempo  $j$ . Todas las variables aleatorias  $X_j$  son mutuamente independientes o están perfectamente correlacionadas.

De acuerdo con estas suposiciones, el VPN para una alternativa puede ser definido como

$$VPN = \sum_{j=0}^n \frac{X_j}{(1+r)^j}$$

donde  $r$  es el costo del capital.

El procedimiento usual en la evaluación de una alternativa propuesta es calcular el valor esperado del VPN.

$$\mu_{\text{VPN}} = \sum_{j=0}^n \frac{\mu_j}{(1+r)^j} \quad \dots (1)$$

El criterio sería que si  $\mu_{\text{VPN}} > 0$  la inversión es aceptada, en otro caso debe rechazarse. Cuando se trata de una comparación entre alternativas mutuamente exclusivas que compiten por los mismos fondos de inversión, se preferirá la alternativa con el mayor valor de  $\mu_{\text{VPN}}$ .

Supóngase que  $X_0, X_1, \dots, X_n$  son mutuamente independientes. Por consiguiente, el VPN tiene una distribución normal, donde la media está dada por (1) y la varianza es,

$$\sigma_{\text{VPN}}^2 = \sum_{j=0}^n \frac{\sigma_j^2}{(1+r)^{2j}}$$

Ahora, supóngase que  $X_0, X_1, \dots, X_n$  están perfectamente correlacionadas. Es decir, que si el valor que toma  $X_m$  es  $\mu_m + C\sigma_m$ , entonces el valor que debe tomar es  $\mu_j + C\sigma_j$  para  $j=0,1,\dots,m,\dots,n$ . Por tanto, esta suposición establece que si las circunstancias que provocan que un cash flow se desvie durante algún período de sus expectativas, entonces estas mismas circunstancias también afectarán el net cash flow en todos los otros períodos en una manera muy similar. Para este caso, el VPN tiene una distribución normal con media dada por (1) y una desviación estándar

$$\sigma_{\text{VPN}} = \sum_{j=0}^n \frac{\sigma_j}{(1+r)^j}$$

Un modelo mucho más real que combina las dos suposiciones anteriores se presenta a continuación. Este modelo considera que, a menudo, algunos de los cash flows están estrechamente relacionados, mientras que otros son independientes. Por ello, se hará la suposición de que  $Y_j, Z_j^{(1)}, Z_j^{(2)}, \dots, Z_j^{(n)}$  son variables aleatorias distribuidas normalmente, tales que

$$X_j = Y_j + Z_j^{(1)} + Z_j^{(2)} + \dots + Z_j^{(m)}$$

donde las variables aleatorias son mutuamente independientes con la excepción de que  $Z_0^{(k)}, Z_1^{(k)}, \dots, Z_n^{(k)}$  están perfectamente correlacionadas para  $k=1, 2, \dots, m$ . En otras palabras, el net cash flow para cada período consiste de un cash flow independiente más  $m$  distintos cash flows que están perfectamente correlacionados con los cash flows correspondientes en los otros períodos.

De acuerdo con este modelo, el VPN está dado por:

$$VPN = \sum_{j=0}^n \frac{X_j}{(1+r)^j} = \sum_{j=0}^n (1+r)^{-j} (Y_j + Z_j^{(1)} + \dots + Z_j^{(m)})$$

de esta expresión y bajo la suposición de normalidad de las variables  $Y_j, Z_j^{(1)}, \dots, Z_j^{(m)}$  se sigue que el VPN es una variable aleatoria que tiene una distribución normal con

$$\mu_{VPN} = \sum_{j=0}^n \frac{X_j}{(1+r)^j}$$

$$= \sum_{j=0}^n \frac{E(Y_j) + \sum_{K=1}^m E(Z_j^{(K)})}{(1+r)^j}$$

y varianza

$$\sigma_{VPA}^2 = \sum_{j=0}^n \left[ \frac{\text{VAR}(Y_j)}{(1+r)^{2j}} \right] + \sum_{K=1}^m \left[ \sum_{j=0}^n \left[ \frac{\sqrt{\text{VAR}(Z_j^{(K)})}}{(1+r)^j} \right]^2 \right]$$

En realidad, los dos primeros son casos especiales del modelo que combina las dos suposiciones. El primer caso de dependencia completa se obtiene cuando  $m=0$ . El segundo caso de correlación completa se obtiene cuando  $m=1$ ,  $Y_j \equiv 0$ .

#### 4.4.2 MODELO EXTENDIDO DE HILLIER

El propósito de esta sección es centrar la atención

sobre un modelo que considera las interrelaciones de diversas clases que existen entre los proyectos propuestos y el riesgo asociado con la inversión, utilizando estos factores para determinar la mejor combinación total de proyectos que deberán ser aprobados, haciendo uso del valor presente y de la utilidad esperada del valor presente como criterios para efectuar esta elección. Sin embargo, debido a la gran complejidad y a lo extenso del modelo, más que repetir la mayor parte de los detalles técnicos y de los fundamentos teóricos, haremos énfasis en la interpretación de la estructura básica del modelo.

Este enfoque es, en gran parte, el resultado de la extensión y generalización de las ideas elementales presentadas en el enfoque básico de Hillier. El problema considerado es la evaluación de un conjunto de inversiones interrelacionadas que generan una o más series de cash flows distribuidos normalmente, donde los cash flows dentro de cada serie son mutuamente independientes o están perfectamente correlacionados. Este modelo, al igual que el básico, reconoce explícitamente que el VPN es una variable aleatoria y la consideración explícita del riesgo involucrado en seleccionar cualquier conjunto de inversiones, se hace mediante el examen del patrón de variación de  $X_j$  y en consecuencia del VPN. Su principal propósito es identificar y proporcionar medidas

cuantitativas ( $\mu(\sigma)$ ,  $\sigma(\sigma)$ ), el perfil de riesgo y  $E\{U(\text{VPN}(\sigma))\}$  para las diversas combinaciones que se estén considerando.

Básicamente, el enfoque consiste en el desarrollo de un modelo que considera las interrelaciones entre las inversiones y que permite identificar la distribución de probabilidad del valor presente  $\text{VPN}(\sigma)$  para soluciones  $\sigma$ -dadas. En particular, se obtienen expresiones para la media  $\mu(\sigma)$  y la varianza  $\sigma^2(\sigma)$  de esta distribución y se indica que la forma funcional de la distribución, bajo ciertas condiciones, será aproximadamente una normal. Después se describe como construir una función de utilidad  $U(\text{VPN})$  apropiada (que es función únicamente del  $\text{VPN}$ ) que cuantifica formalmente el juicio del ejecutivo sobre el riesgo. Esto reduce el problema bajo consideración al de determinar cual combinación factible de inversiones maximiza la utilidad esperada, es decir,  $\max E\{U(\text{VPN}(\sigma))\}$  sobre todas las soluciones factibles  $\sigma$ . Posteriormente, Hillier indica como se puede calcular  $E\{U(\text{VPN}(\sigma))\}$  para una  $\sigma$ -dada y desarrolla dos procedimientos para determinar la solución óptima: un enfoque aproximado de programación lineal y un algoritmo exacto de ramificación y acotación, donde la solución óptima es la  $\sigma$  que corresponde a la mejor combinación de inversiones que maximiza esta función.

### FORMULACION DEL PROBLEMA

Supóngase que un cierto número de alternativas para inversión de capital han sido sometidas a consideración y que la clase de inversiones consideradas son proyectos del tipo sí o no, es decir, que solo podrán ser aprobados o rechazados. Supóngase también que ya ha sido identificado un número  $m$  de posibilidades favorables de inversión.

Introduciremos una variable de decisión  $\delta_k$  para cada una de las posibilidades de inversión, donde la variable tiene asignado un valor de 1 o 0 de acuerdo a si la decisión es sí o no.

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{si la } K\text{-ésima inversión propuesta es aprobada} \\ 0 & \text{si la } K\text{-ésima inversión propuesta es rechazada} \end{cases}$$

para  $K=1,2,\dots,m$ .

Sea  $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$ . Por lo tanto, una "solución" al problema de decisión de inversión corresponde a un valor particular de  $\delta$ , donde cada uno de los componentes es 0 o 1. Supóngase que las inversiones generan cash flows de ganancias (positivos) o de gastos

(negativos) durante los próximos  $n$  períodos de tiempo, pero no después.

Sea  $X_j(\sigma)$  una variable aleatoria con la cual denotaremos al net cash flow total (cash flow total positivo menos cash flow total negativo) durante el período de tiempo  $j$  ( $j=0,1,2,\dots,n$ ) que se generaría si se llevara a cabo la decisión particular  $\sigma$ .

Sea  $r$  el costo del capital y  $U(VPN)$  la utilidad para el conjunto aprobado de inversiones.

Sea  $S$  el conjunto de soluciones factibles, es decir, el subconjunto de  $\{\sigma / \sigma_k = 0 \text{ o } 1; k=1,2,\dots,m\}$  cuyos elementos son vectores de decisión factibles.

De acuerdo con lo anterior, el problema considerado será el de determinar  $\sigma \in S$  tal que

$$\text{Maximizar}_{\sigma \in S} E \{U(VPN(\sigma))\}$$

donde

$$VPN(\sigma) = \sum_{j=0}^n \frac{X_j(\sigma)}{(1+r)^j}$$

Es importante reconocer dos aspectos acerca de la naturaleza de  $X_j(\sigma)$ . El primero es que el conjunto de cash flows resultante de una decisión  $\sigma$  es realmente una agregación de muchos conjuntos de cash flows distintos, algunos de los cuales están interrelacionados de diversas maneras. Cada inversión individual aprobada, genera un conjunto de cash flows, que a su vez pueden ser una agregación de las variables básicas que fueron mencionadas al principio de este capítulo. Sin embargo, los valores numéricos asociados con los conjuntos de cash flows de las inversiones individuales pueden ser afectados significativamente por los otros. Es el análisis de estas interrelaciones entre los componentes del cash flow agregado el que forma las bases para el modelo que se presenta. La segunda propiedad crucial de las  $X_j(\sigma)$  es que, cuando se trata de inversiones con riesgo normalmente son variables aleatorias en lugar de constantes. El net cash flow total generado por una decisión durante el período  $j$  puede tomar cualquiera de los diferentes valores posibles, dependiendo de las circunstancias que intervengan. Por lo tanto, el valor que  $X_j(\sigma)$  puede tomar solamente puede ser descrito en términos de una distribución de probabilidad. En consecuencia, una decisión  $\sigma$  generará un conjunto de cash flows agregados a partir de una distribución de probabilidad conjunta de  $X_0(\sigma), X_1(\sigma), \dots, X_N(\sigma)$ .

Para evaluar un  $\sigma$  particular y escoger entre los valores alternativos factibles de  $\sigma$ , es necesario evaluar la deseabilidad de cada uno de los conjuntos identificados. Aunque varias medidas de beneficio se utilizan en la práctica, como se indicó al principio de este trabajo, el criterio del valor presente es el que se adoptará aquí

$$VPN(\sigma) = \sum_{j=0}^n \frac{X_j(\sigma)}{(1+r)^j}$$

Puesto que  $X_j(\sigma)$  son los net cash flows (ingresos menos desembolsos) para los períodos respectivos, VPN representa la ganancia (si es positivo) o pérdida (si es negativo) de las inversiones aprobadas después de descontarlos para un cierto costo del capital. Debe observar se que puesto que  $X_j(\sigma)$  son variables aleatorias, el  $VPN_j(\sigma)$  es también una variable aleatoria. Cuando un conjunto de inversiones con riesgo es aprobado, no se conoce de antemano si generará una gran pérdida o un gran beneficio. Por lo tanto, el  $VPN(\sigma)$  que resulte de una decisión  $\sigma$  únicamente puede ser representado en términos de una distribución de probabilidad sobre su rango de valores posibles.

Cuando solamente se evalúa una inversión, la esencia del enfoque del análisis de riesgo propuesto en el modelo básico de Hillier, es desarrollar una distribución de probabilidad (para el valor presente o cualquier otra medida de beneficio) y entonces analizar este perfil de riesgo para concluir si el monto del riesgo es aceptable o no. Si el grado del riesgo representado por cada una de las probabilidades y la magnitud de las pérdidas posibles es suficientemente pequeño en relación con los valores de estas cantidades para las ganancias posibles, entonces la inversión deberá ser aprobada.

Para el problema considerado aquí, donde muchas inversiones interrelacionadas necesitan ser evaluadas simultáneamente, el propósito del análisis es un poco diferente. En lugar de evaluar si un perfil de riesgo es "aceptable", el principal objetivo se transforma en identificar el "mejor" perfil obtenible de riesgo. La meta es determinar cual combinación de inversiones proporciona la mejor distribución de probabilidad del  $VPN(\sigma)$ , considerando las posibilidades de pérdida y las de ganancia.

#### INTERPRETACION DEL MODELO

Supóngase que la distribución de probabilidad del  $VPN(\sigma)$  ha sido identificada para un cierto número de soluciones  $\sigma$ -factibles. En general, existen muchos conjuntos alternativos para ser analizados, cada uno con su

propia distribución del valor presente. Es necesario determinar cual de todas estas distribuciones es la mejor. Resultaría difícil evaluar y comparar explícitamente todas las combinaciones interesantes de alternativas. Por lo tanto, se requiere formalizar el juicio del ejecutivo sobre el riesgo, expresándolo cuantitativamente para que el procedimiento de selección pueda llevarse a cabo sistemáticamente para así identificar las mejores alternativas que deberán ser evaluadas explícitamente y comparadas por el ejecutivo.

Afortunadamente, la teoría de utilidad proporciona una herramienta satisfactoria para esto. El enfoque involucra el desarrollo de la función de utilidad  $U(VPN)$ , que cuantifica el juicio para el tomador de decisiones acerca del riesgo. La interpretación básica de la utilidad es que mide la deseabilidad relativa (si es positiva) o indeseabilidad (si es negativa) del resultado.

Una vez obtenida la función de utilidad, cualquier decisión  $\delta$  puede ser evaluada mediante el cálculo de su utilidad esperada  $E\{U(VPN(\delta))\}$ , donde la esperanza es tomada de acuerdo a la distribución de probabilidad del valor presente VPN. Este valor puede ser interpretado como la diferencia de dos cantidades, a saber, un término positivo (utilidad esperada positiva construida sobre las ganancias que pueden obtenerse) menos una penalización para el riesgo de posibles pérdidas. Por esto,

$E\{U(VPN(\sigma))\}$  es una medida cuantificable en un sólo valor de beneficios de  $\sigma$  que combina apropiadamente la información acerca de las posibles ganancias y el riesgo asociado con el conjunto aprobado de inversiones. Esto reduce el problema a determinar qué combinación factible de inversiones maximiza la utilidad esperada, es decir,

$$\max \{E U(VPN(\sigma))\}$$

sobre todas las soluciones factibles  $\sigma$ .

Lo que resta ahora, es indicar cómo puede ser calculada  $E\{U(VPN(\sigma))\}$  para una  $\sigma$  dada y qué procedimiento de solución pueden ser utilizados para encontrar una  $\sigma$  factible particular, que maximice esta cantidad.

Bajo la mayoría de las circunstancias, encontrar el valor exacto de  $E\{U(VPN(\sigma))\}$  no es una tarea directa puesto que se requiere el cálculo del valor esperado o bien de una función  $U(\cdot)$  muy complicada de una variable aleatoria  $VPN(\sigma)$  que quizá tenga una distribución de probabilidad muy compleja. Sin embargo, una excepción es cuando  $VPN(\sigma)$  tiene una distribución normal. Para este caso, la utilidad esperada se encuentra de la siguiente manera.

Supóngase que  $VPN(\sigma)$  es normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Un resultado muestra que la función gene-

matriz de momentos para esta variable aleatoria normal es

$$E \left\{ e^{t \text{VPN}(\sigma)} \right\} = e^{t \left( \mu + \frac{t \sigma^2}{2} \right)}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E \left\{ U(\text{VPN}(\sigma)) \right\} &= E \left\{ a_1 + b_1 \text{VPN}(\sigma) - a_1 e^{-\left(\frac{1-b_1}{a_1}\right) p(\sigma)} \right\} \\ &= a_1 + b_1 \mu(\sigma) - a_1 e^{-\left(\frac{1-b_1}{a_1}\right) \left( \mu(\sigma) + \frac{(1-b_1)^2 \sigma^2(\sigma)}{2} \right)} \end{aligned}$$

El modelo asume que  $U(p)$  converge a una asíntota

$$a_1 + b_1 X \quad (\text{donde } a_1 > 0, \quad 0 \leq b_1 < 1)$$

conforme  $p$  se incrementa, pero  $U(\text{VPN})$  diverge de esta

asíntota exponencialmente conforme  $p$  decrece. Es decir, se asume que la forma de la función es

$$U(p) = a_1 + b_1 p - K_1 e^{-K_2 p}$$

y se hace la convención de que  $U(p)$  pasa a través del origen con pendiente uno determinando completamente  $K_1$  y  $K_2$ .

En muchos otros casos, es necesario desarrollar una aproximación de  $E\{U(VPN(\sigma))\}$ . Esto puede lograrse utilizando una expansión por series de Taylor para  $U(VPN)$  alrededor del punto  $E\{VPN(\sigma)\}$ .

Para ello se supondrá que  $U(p)$  tiene una derivada de orden  $n$   $U^{(n)}(p)$  para toda  $p$  y que  $U^{(n-1)}(p)$  es continua en todas partes. El Teorema de Taylor establece que para cualquier  $p^*$  y toda  $p \neq p^*$ , existe un punto  $\xi$  interior en el intervalo que contiene a  $p$  y  $p^*$  tal que

$$U(p) = U(p^*) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{U^{(k)}(p^*)}{k!} (p-p^*)^k + \frac{U^{(n)}(\xi)}{n!} (p-p^*)^n$$

Si denotamos  $\mu = E\{VPN(\delta)\}$  y hacemos  $p^* = \mu$ .  
Entonces

$$E\{U(VPN(\delta))\} = U(\mu) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U^{(k)}(\mu)}{k!} E\{(VPN(\delta) - \mu)^k\}$$

Puesto que

$$E\{VPN(\delta) - \mu\} = 0$$

y

$$E\{(VPN(\delta) - \mu)^2\} = \text{VAR}\{VPN(\delta)\}$$

la cual denotaremos por  $\sigma^2$ . Esta expresión se reduce a

$$E\{U(VPN(\delta))\} = U(\mu(\delta)) +$$

$$+ \frac{U^{(2)}(\mu(\delta))}{2} \sigma^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{U^{(k)}(\mu(\delta))}{k!} E\{(VPN(\delta) - \mu(\delta))^k\}$$

Ignorándose los términos superiores a los de segundo orden, se obtiene una buena aproximación de  $E\{U(\text{VPN}(\sigma))\}$ ,

$$E\{U(\text{VPN}(\sigma))\} \approx U(\mu(\sigma)) + \frac{U^{(2)}(\mu(\sigma))}{2} \sigma^2(\sigma)$$

Esta aproximación es muy conveniente puesto que sólo necesita del conocimiento de la media y la varianza del  $\text{VPN}(\sigma)$ , la función de utilidad  $U(p)$  y de su segunda derivada  $U^{(2)}(p)$ .

Ahora describimos las características generales de los dos procedimientos de solución que pueden ser utilizados para encontrar la  $\sigma$  óptima correspondiente a la mejor combinación de inversiones.

Uno de estos métodos es un procedimiento aproximado, es decir, encuentra una buena solución  $\sigma$  pero que no se garantiza que sea la óptima. Consiste en resolver una secuencia de cinco problemas de programación lineal, donde de cada uno se construye introduciendo una aproximación lineal adecuada de la función objetivo  $E\{U(\text{VPN}(\sigma))\}$

basada en la solución del problema precedente. Para dos de estos problemas es necesario obtener una solución entera aproximada, que puede ser alrededor de la solución de programación lineal o utilizando métodos adecuados de programación entera. Puesto que se dispone de programas muy eficientes para resolver un problema de programación lineal en una computadora, el procedimiento aproximado proporciona un enfoque apropiado que puede ser usado aún en problemas extremadamente grandes.

El segundo procedimiento de solución es exacto, es decir, la solución  $\sigma$  que se obtiene es definitivamente óptima con respecto al modelo y a la función objetivo utilizados. Está basado en la técnica de ramificación y acotación, ya que el procedimiento consiste en la aplicación de algún algoritmo de ramificación y acotación especial para programación entera no lineal. Este algoritmo se aplica primero a un subproblema y después al problema original. El objetivo del subproblema es encontrar la solución factible  $\sigma$  que maximice el valor presente esperado  $E\{VPN(\sigma)\}$ . Esta solución es usada para estructurar el problema original de tal forma que el algoritmo de ramificación y acotación puede aplicarse directamente.

Aunque el procedimiento exacto no es computacionalmente factible para problemas muy grandes que pueden ser manejados mediante el procedimiento aproximado, es muy

eficiente para problemas de tamaño moderado (aproximadamente 10 alternativas de inversión).

#### 4.4.3 MODELO DE WAGLE

Este modelo está basado en el modelo extendido de Hillier, cuyo punto de sustentación son las medias y varianzas de los cash flows, sin embargo, en muchas situaciones no se conocen directamente, sino que únicamente se dispone de las medias y varianzas de los factores básicos que conforman a estos cash flows. Este método está orientado precisamente hacia el manejo de este tipo de situaciones.

Como ya se mencionó cuando se habló de las variables básicas, los cash flows normalmente provienen de un gran número de fuentes diferentes tales como ventas, costos fijos, etc., que a su vez, son calculados a partir de otros factores, que también pueden subdividirse en otros factores. La intención de este modelo es tratar separadamente estas diversas fuentes con el fin de determinar más fácilmente el patrón de variación del net cash flow, mediante el uso de medias y varianzas para cada uno

de los factores que conforman a los cash flows.

La característica sobresaliente de este método es que permite deducir la distribución de probabilidad del VPN considerando que los cash flows pueden estar expresados en términos de las variables básicas mediante funciones de la forma

$$Y_{j\alpha} = A_{j\alpha,1} \cdot A_{j\alpha,2} \cdot \dots \cdot A_{j\alpha,m_{j\alpha}}$$

para  $j=0, \dots, n$

$\alpha=1, \dots, m$

donde

$Y_{j\alpha}$  es el cash flow proveniente de la  $\alpha$ -ésima fuente, identificado para el período  $j$ .

$A_{j\alpha,k}$  es el  $k$ -ésimo componente del cash flow

$Y_{j\alpha}$  y  $m_{j\alpha}$  es el número de componentes (o variables básicas) que afectan a  $Y_{j\alpha}$

Supongamos que un cash flow generado por una inversión proviene de un número  $m$  de fuentes diferentes. Denotemos por  $X_{j\alpha}$  al cash flow para el período  $j$  que pro

viene de la  $\alpha$ -ésima fuente. Supondremos que  $X_{j\alpha}$  tiene media finita  $\mu_{j\alpha}$ .

Denotemos por  $X_j$  al net cash flow en el  $j$ -ésimo año.

Entonces

$$X_j = Y_{j1} + Y_{j2} + \dots + Y_{jm}$$

Tomando esperanzas y varianzas, tenemos

$$E[X_j] = \sum_{\alpha=1}^m \mu_{j\alpha} = w_j$$

$$\text{VAR}[X_j] = \sum_{\alpha=1}^m \sigma_{j\alpha}^2 + 2 \sum_{\alpha \neq \beta} \text{COV}[X_{j\alpha}, X_{j\beta}]$$

Si los cash flows continúan sobre los  $n$  períodos, entonces el valor presente de esta inversión está definido como

$$\text{VPN}_n = \sum_{j=0}^n \left[ \frac{X_j}{(1+r)^j} \right]$$

Tomando esperanzas y varianzas del VPN, tenemos

$$E \left( \text{VPN}_n \right) = \sum_{j=0}^n \frac{w_j}{(1+r)^j} = w_n$$

$$\text{VAR} \left( \text{VPN}_n \right) = \sum_{j=0}^n \frac{\text{VAR}(X_j)}{(1+r)^{2j}} + 2 \sum_{j \neq j'} \frac{\text{COV}(X_j, X_{j'})}{(1+r)^{j+j'}} = \Lambda_n^2$$

Por tanto:

$$E \left( \text{VPN}_n^2 \right) = \Lambda_n^2 + w_n^2 = \mathbb{E}_n^2$$

Para una tasa de descuento  $r$ , las tres ecuaciones anteriores dan la media condicional, varianza y el segundo momento alrededor del origen para el VPN en una  $n$  dada.

Ahora bien, si la vida del proyecto  $n$  es considerada como una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad  $f(n)$  conocida, entonces las estimaciones dadas por estas ecuaciones deben ser combinadas basándose en esta distribución de  $n$  para obtener la media incondicional y la varianza del VPN total que son

$$E\{VPN\} = \sum_{n=N_1}^{N_2} VPN_n E\{VPN_n\} = \sum_{n=N_1}^{N_2} VPN_n W_n$$

$$E\{VPN^2\} = \sum_{n=N_1}^{N_2} VPN_n E\{VPN_n^2\} = \sum_{n=N_1}^{N_2} VPN_n M_n^2$$

$$VAR\{VPN\} = E\{VPN^2\} - \{E\{VPN\}\}^2$$

Los parámetros  $E\{VPN\}$  y  $VAR\{VPN\}$  de la distribución del VPN constituyen la base para la evaluación de la

medida del riesgo en la alternativa. Es posible que surjan casos donde el evaluador puede no ser capaz de es timar directamente los parámetros anteriores para los cash flows. Tomemos, por ejemplo, el caso del cash flow de ventas, que puede ser el producto de dos variables  $U_1$  y  $U_2$ , con medias  $\eta_1$  y  $\eta_2$  y varianzas  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_2^2$  respectivamente.

Partiendo de que existe información que toma en cuenta la incertidumbre de los factores importantes que influyen en cada variable, podemos suponer que se dispone de estimaciones de sus valores y algún indicador del coeficiente de correlación entre ellos. El objetivo es determinar la media y la varianza del cash flow de ventas.

El coeficiente de correlación entre  $U_1$  y  $U_2$  será denotado por  $\rho$ .

Consideremos tres casos:

- 1)  $U_1$  y  $U_2$  son variables aleatorias independientes (es decir  $\rho=0$ ). Entonces

$$E(U_1 U_2) = \eta_1 \eta_2$$

$$y \quad \text{VAR}(U_1 U_2) = \eta_1^2 \sigma_2^2 + \eta_2^2 \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2$$

2)  $U_1$  y  $U_2$  no son variables independientes. Entonces

$$E(U_1 U_2) = \eta_1 \eta_2 + \rho \sigma_1 \sigma_2$$

y

$$\begin{aligned} \text{VAR}(U_1 U_2) &= \eta_1^2 \sigma_2^2 + \eta_2^2 \sigma_1^2 + 2\eta_1 \eta_2 \rho \sigma_1 \sigma_2 + \\ &+ 2\eta_1 E_{12} + 2\eta_2 E_{21} + E_{22} - E_{11}^2 \end{aligned}$$

donde

$$E_{ij} = E \left[ (U_1 - \eta_1)^i (U_2 - \eta_2)^j \right]$$

3)  $U_1$  y  $U_2$  tienen distribución conjunta normal bivarida. Entonces

$$E(U_1 U_2) = \eta_1 \eta_2 + \rho \sigma_1 \sigma_2$$

y

$$\text{VAR}(U_1 U_2) = \eta_1^2 \sigma_2^2 + \eta_2^2 \sigma_1^2 + 2\rho \eta_1 \eta_2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 + \rho^2)$$

Aún cuando el cash flow dependiera de K-factores

$$U_1, U_2, \dots, U_K$$

y si estos factores tuvieran distribución normal K-varianza conjunta, la media y la varianza de este cash flow podrían ser obtenidas.

Considérese, por ejemplo, que el cash flow formado por estos K-factores puede ser expresado como

$$U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2} \dots U_K^{\alpha_K}$$

Entonces

$$\text{VAR}(U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2} \dots U_K^{\alpha_K}) = E \left[ U_1^{2\alpha_1} U_2^{2\alpha_2} \dots U_K^{2\alpha_K} \right] - \left\{ E \left[ U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2} \dots U_K^{\alpha_K} \right] \right\}^2$$

Puesto que  $U_1 \dots U_K$  siguen una distribución nor-

mal multivariada con media el vector  $\eta$  y matriz de dispersión  $\Sigma$ , entonces la función característica de la distribución está dada por

$$\exp \left[ i \xi' \eta - 1/2 \xi' \Sigma \xi \right]$$

donde  $\xi$  es el vector de variables dummy. Las expresiones

$$E \left[ \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_K \\ U_1 & U_2 & \dots & U_K \end{matrix} \right]$$

y

$$\left\{ E \left[ \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_K \\ U_1 & U_2 & \dots & U_K \end{matrix} \right] \right\}^2$$

pueden obtenerse a partir de esta función característica mediante el número apropiado de diferenciaciones y haciendo el vector  $\xi = 0$ .

Debe hacerse notar que para poder aplicarse, el modelo anterior requiere estimaciones de los coeficientes

de correlación (covarianzas) entre los diversos cash flows. El procedimiento de estimación es bastante complicado, sin embargo, Hillier considera un patrón de correlaciones simplificado que resulta adecuado a las limitaciones que existen en los procedimientos de estimación y cálculo. El patrón propuesto es el siguiente:

Supóngase que

1. Los cash flows del mismo tipo son "Markov-dependientes", es decir, un cash flow en el período  $(t-1)$  influenciará a un cash flow del mismo tipo en el período  $J$ , donde  $J > t$  en el sentido de que esta influencia es acarreada sobre el período  $t$ . En términos estadísticos, el coeficiente de correlación parcial entre  $Y_{t\alpha}$  y  $Y_{t'\alpha}$  con respecto a  $Y_{t-1,\alpha}$  es 0.
2. La correlación de los cash flows del mismo tipo en períodos adyacentes es constante sobre el tiempo. Bajo la suposición 1. se tiene:

$$\text{COR} \left[ Y_{t\alpha}, Y_{t'\alpha} \right] = \text{COR} \left[ Y_{t\alpha}, Y_{t-1,\alpha} \right] \times \text{COR} \left[ Y_{t'\alpha}, Y_{t-1,\alpha} \right]$$

es decir

$$\text{COR} \left[ Y_{t\alpha}, Y_{t'\alpha} \right] = \rho_{\alpha} \text{COR} \left[ Y_{t-1,\alpha}, Y_{t'\alpha} \right]$$

que usando la relación recursiva y la suposición 2. se tiene que

$$\text{COR} \left[ Y_{t,\alpha}, Y_{t',\alpha} \right] = \rho_{\alpha}^{|t'-t|}$$

donde  $\rho_{\alpha}$  denota la correlación entre períodos sucesivos que provienen de la  $\alpha$ -ésima fuente.

3. Se considera el caso de correlación entre cash flows de diferentes tipos. Asumiremos que para dos tipos diferentes de cash flows en un mismo período  $k$ , digamos  $T_1$  y  $T_2$ , entonces  $T_2$  en el período  $k$  es independiente de  $T_1$  en el período  $k-1$ . Esta situación es bastante real puesto que las circunstancias que influyen para elevar o disminuir los diversos tipos de cash flows, afectan a estos cash flows simultáneamente en lugar de hacerlo en períodos diferentes de tiempo.

4. El coeficiente de correlación entre cash flows que provienen de dos fuentes para un mismo período es independiente del período de tiempo.

La suposición 3. implica que el coeficiente de correlación parcial correspondiente es 0. Por lo tan-

to tenemos que para  $(t > t')$  el coeficiente de correlación entre los cash flows  $Y_{t\alpha}$  y  $Y_{t'\beta}$  está dado por

$$\begin{aligned} \text{COR} \left[ Y_{t\alpha}, Y_{t'\beta} \right] &= \text{COR} \left[ Y_{t\alpha}, Y_{t\beta} \right] \times \text{COR} \left[ Y_{t\beta}, Y_{t'\beta} \right] \\ &= (\rho_{\alpha\beta}^*) (\rho_{\beta}^{|t'-t|}) \end{aligned}$$

donde  $\rho_{\alpha\beta}^*$  es el coeficiente de correlación entre  $Y_{t\alpha}$  y  $Y_{t\beta}$ , y es independiente de  $t$ .

Pero, para poder utilizar los resultados anteriores necesitamos conocer los siguientes coeficientes de correlación básica.

- 1) Coeficientes de correlación entre cash flows en períodos sucesivos para cada fuente, es decir,  $\rho_{\alpha}$ .
- 2) Coeficientes de correlación entre cash flows en el mismo período de tiempo  $\rho_{\alpha\beta}^*$ .

Hillier propone el siguiente procedimiento para la estimación de estos coeficientes de correlación básica sobre bases subjetivas, suponiendo que se conocen las medias y varianzas para dos cash flows,  $Z_1$  y  $Z_2$  cuyas varianzas son  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_2^2$  respectivamente.

El coeficiente de correlación entre  $Z_1$  y  $Z_2$  será

denotado por  $\rho$ . Sabemos que la recta de regresión de mínimos cuadrados para  $Z_1$  y  $Z_2$  es

$$g(z) = E(Z_2) + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} [z - E(Z_1)] \quad \dots (2)$$

que representa la mejor estimación lineal de  $E[Z_2/Z_1=Z]$  constituyendo una base práctica para la estimación subjetiva de  $\rho$ .

El procedimiento de estimación consiste en que para un valor dado de  $Z_1=Z$ , se requiere obtener tres estimaciones: "optimista", "pesimista" y "más probable" de  $Z_2$ .

Con ésto se obtuvo el valor esperado condicional  $E[Z_2/Z_1=Z]$  utilizando la suposición de que la distribución condicional de  $Z_2/Z_1$  es una distribución  $\beta$ . Entonces el valor de  $\rho$  puede ser estimado mediante la ecuación (2).

Para el caso en que los cash flows estén expresados en términos de las variables básicas por funciones de la forma

$$X_{j\alpha} = \prod_{k=1}^m A_{j\alpha, k}^{j\alpha}$$

donde:

$j=0, \dots, n$

y

$\alpha=1, \dots, m$

el procedimiento es el siguiente.

Consideremos, por ejemplo, que el cash flow  $Z_1$  puede ser el producto de ventas ( $U_1$ ) y precios ( $U_2$ ) y el cash flow  $Z_2$  es el producto de costos de operación ( $U_3$ ) y ventas. Suponiendo que se disponen de estimaciones para las medias, varianzas y covarianzas entre  $U_1$ ,  $U_2$  y  $U_3$ , deseamos estimar la covarianza entre  $Z_1$  y  $Z_2$ . Para esto se requiere la estimación de  $E[Z_1 Z_2]$ , es decir,  $E[U_1^2 U_2 U_3]$ . Si efectuamos la suposición de normalidad multivariada para  $U_1$ ,  $U_2$  y  $U_3$ , entonces la esperanza anterior puede ser obtenida a partir de la función característica:

$$\exp \left[ i \xi' \eta - 1/2 \xi' \Sigma \xi \right]$$

como

$$E(U_1 U_2) = \mu_1 \mu_2 + \lambda_{12}$$

$$y \quad E(U_1 U_3) = \mu_1 \mu_3 + \lambda_{13}$$

donde  $\lambda_{ij}$  denota la covarianza entre  $U_i$  y  $U_j$ , se sigue que

$$\begin{aligned} \text{cov}(z_1 z_2) = & \lambda_{12} \lambda_{13} + \lambda_{12} \gamma_1 \gamma_3 + \lambda_{13} \gamma_1 \gamma_2 + \\ & + \gamma_1^2 \lambda_{23} + \lambda_{11} \lambda_{23} + \lambda_{11} \gamma_2 \gamma_3 \end{aligned}$$

#### 4.5 ENFOQUE DE SIMULACION

Los verdaderos resultados futuros en un proyecto de inversión dependen de muchos factores que se desarrollarán en un ambiente cuyas características sólo pueden ser estimadas. Cada uno de los factores que deben ser considerados y la evaluación de una colocación de recursos específica está sujeto a incertidumbre. Para determinar el ambiente futuro en el cual puede realizarse una inversión, el tomador de decisiones necesita conocer el marco de los efectos de la incertidumbre que rodea a cada factor significativo. En esta sección se introducen las características y ventajas de un procedimiento diseñado para proporcionar este marco. El procedimiento es útil en situaciones donde la complejidad del problema no conduce fácilmente a suposiciones acerca de la distribu-

ción de probabilidad del VPN del proyecto bajo consideración. Se le conoce como procedimiento de simulación y está basado en la llamada técnica Monte Carlo, cuya esencia es diseñar un modelo que represente los problemas que surgen en situaciones de la vida real.

El objetivo definitivo de la simulación es evaluar las políticas posibles reproduciendo el comportamiento de las variables críticamente importantes, con el propósito de presentar una imagen clara de las incertidumbres y los riesgos que acompañan a toda inversión.

La construcción y operación de un modelo de simulación permite la observación de la conducta dinámica de un proyecto en condiciones controladas, permitiendo efectuar experimentos<sup>1</sup> para comprobar hipótesis acerca del proyecto bajo estudio. Observando "lo que sucede" en estas condiciones de operación simuladas, tenemos la base para una evaluación más informada del modelo. Si el modelo sugerido no funciona satisfactoriamente, puede alterarse de alguna manera y la simulación repetirse.

Cualquier resultado que se obtenga del modelo, estará determinado por los valores de las variables relevantes que afectan la situación y estos valores particulares, a su vez, están determinados por un proceso de se-

- 
1. Los experimentos adoptan la forma de cambios en las variables entre o durante corridas del modelo, de tal modo que se puedan hacer comparaciones entre las condiciones que describen el comportamiento del modelo.

lección aleatoria que se realiza de acuerdo con las distribuciones de probabilidad de las variables.

La experimentación por medio de la simulación en computadoras, puede vencer algunas de las restricciones que existen cuando se emplean otras formas de análisis. Abre la posibilidad de ocuparse de procesos demasiado complejos, para ser representados mediante modelos matemáticos más rígidos, como es el caso de la programación lineal y los métodos analíticos. Aún cuando los resultados de un modelo puedan expresarse analíticamente, la simulación del modelo puede estar justificada con objeto de apoyar los resultados analíticos.

Esta clase de modelo es significativo porque permite al tomador de decisiones: 1) obtener y utilizar todos los datos disponibles de una manera lógica, 2) utilizar este conocimiento para analizar la incertidumbre de los factores que afectan los resultados finales y, 3) también, para determinar el riesgo y rendimiento esperado de las decisiones alternativas, 4) además, proporciona información acerca de la sensibilidad de los resultados posibles a la variabilidad de los factores introducidos; así como la probabilidad de obtener diversos valores para el VPN.

Es importante señalar que la clave para entender y realizar un experimento de simulación reside en comprender el tratamiento de los factores aleatorios que subya-

cen al modelo. Estas variables aleatorias básicas, con sus distribuciones de probabilidad conocidas son los elementos que ponen en marcha los procesos del modelo.

El desarrollo de un modelo de simulación para la obtención de la distribución de probabilidad del VPN debe realizarse de acuerdo a las siguientes etapas:

- 1) Generar una combinación de  $m$  números aleatorios

$$R_1, \dots, R_m$$

- 2) Muestrear una combinación de valores para las variables básicas  $X_1, \dots, X_m$  (de aquí en adelante serán referidas como variables aleatorias  $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_m$ ).

- 3) Calcular

$$V = f(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_m)$$

donde  $f$  es la función que relaciona el VPN con las variables básicas, y  $V$  es el valor particular del VPN correspondiente a los valores  $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_m$  para las variables básicas.

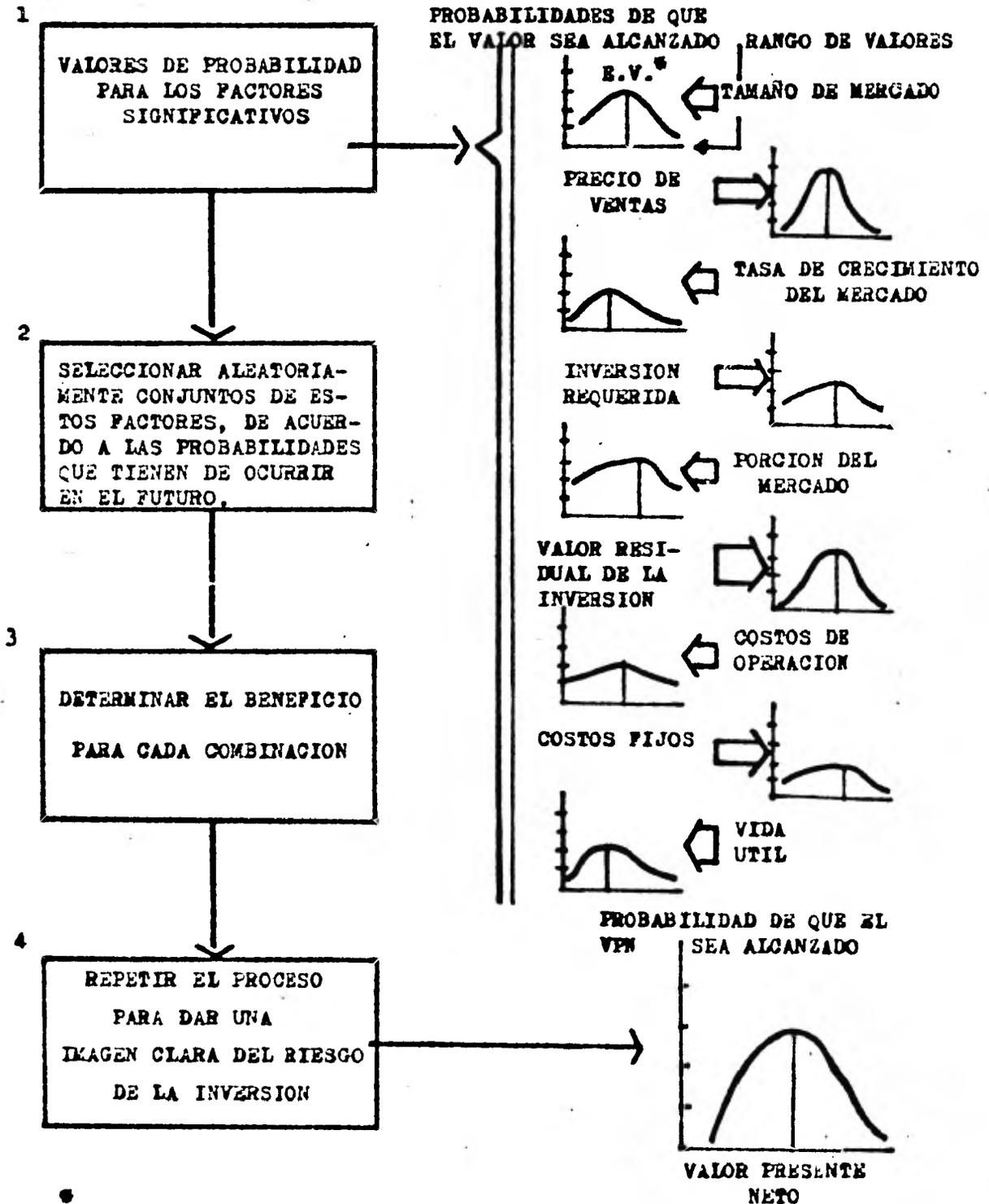
- 4) Generar un número de realizaciones del proyecto (es decir, repetir los pasos 1) a 3) una y otra vez), hasta que el requerimiento predeterminado sea satisfecho.
- 5) Resumir los resultados mediante el uso de métodos estadísticos convencionales.

El esquema 1 muestra el proceso para determinar las probabilidades de los beneficios (en nuestro caso VPN), que se obtendrán para cada una de las diversas combinaciones aleatorias de los factores claves involucradas en el proyecto.

Resumiendo, podemos decir que la función de la simulación consiste en evaluar un modelo mediante una serie de pruebas en condiciones que se cree representan adecuadamente el ambiente operativo de la firma. Es útil para desarrollar modelos complejos, teorías que son demasiado difíciles de expresar y de estudiar por medios analíticos. Es útil para el examen previo de modelos, cuando una prueba real resulta relativamente costosa. Es útil para desarrollar resultados que prestan apoyo a conclusiones previamente deducidas por medios analíticos.

ESQUEMA 1

SIMULACION PARA LA EVALUACION DE UNA INVERSION



\* Valor Esperado = Punto más alto de la curva.

C A P I T U L O    5

OTRA SOLUCION PROPUESTA

El propósito de este capítulo es sugerir y describir una nueva técnica que combine las ventajas del enfoque del análisis de riesgo y del enfoque del árbol de de ci si ón. La nueva técnica tiene todo el poder de las técnicas que le dan origen, pero es más simple para usar. La técnica es llamada el Enfoque del Arbol Estocástico de Decisión.

Para entender el enfoque del árbol estocástico de decisión, es necesario entender las dos técnicas, a partir de las cuales fue desarrollado.

El análisis de riesgo consiste en estimar la distri buc ión de probabilidad de cada factor que afecta a una decisión de inversión y entonces simular las posibles combinaciones de los valores de cada factor para determi nar el rango de los posibles resultados y la probabilidad asociada con cada uno de ellos.

Para ilustrar el beneficio de la técnica del análisis de riesgo, la Figura 1 muestra los resultados de dos análisis realizados para una alternativa de inversión. Primero, la alternativa fue analizada asignando un solo valor, "el mejor pronosticado", para cada factor. El segundo análisis utilizó una estimación de la distribuc ión de probabilidad asociada con cada factor y una simu lacion para determinar la distribución de probabilidad de los resultados posibles.

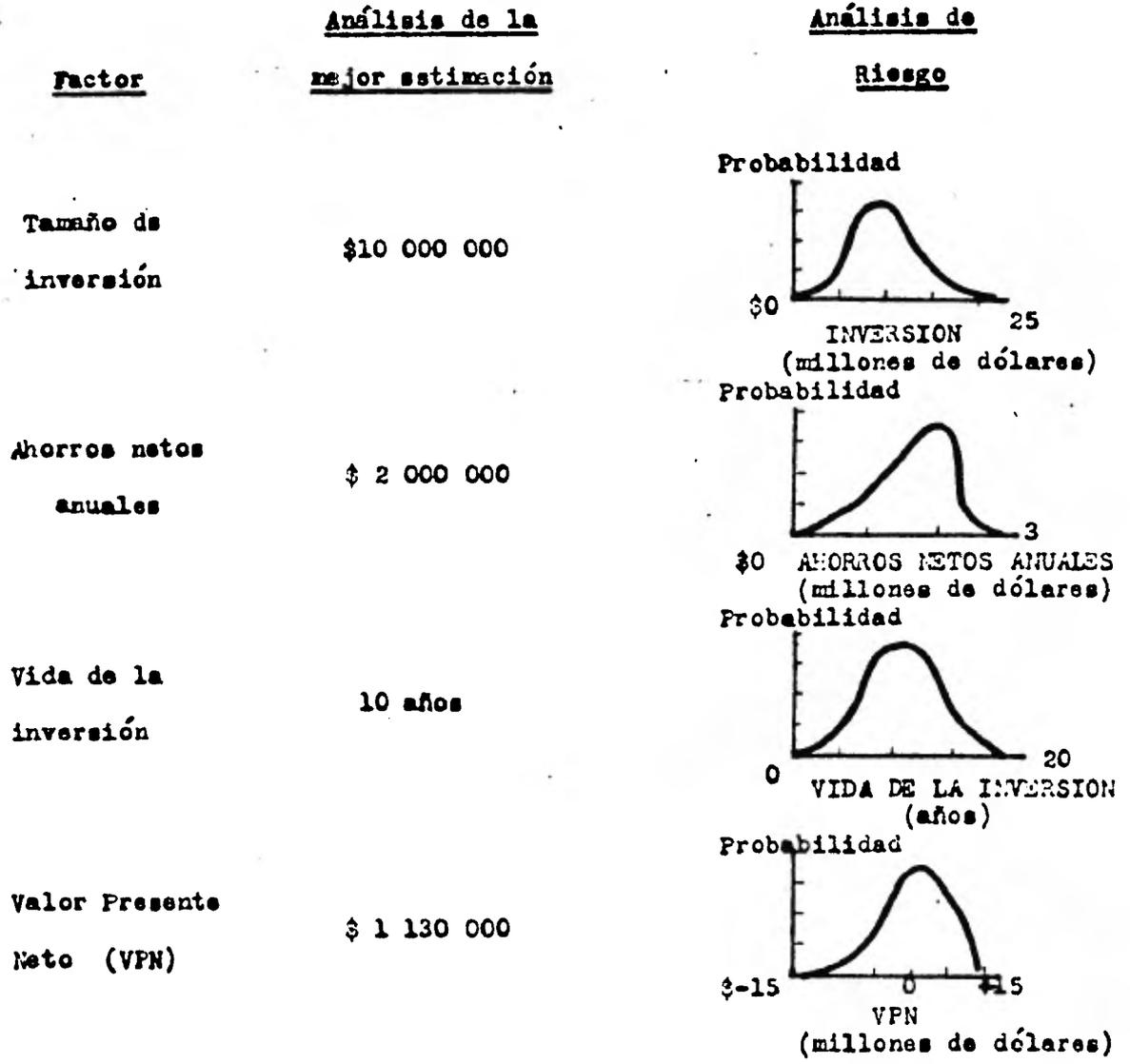


FIGURA 1

El análisis basado en un solo valor indica un valor presente de \$1,130,000, mientras que el análisis de riesgo muestra que la combinación más probable de eventos da al proyecto un valor presente neto esperado de solamente

\$252,000.

La técnica convencional falla al tomar en cuenta las distribuciones sesgadas de los diversos factores y las interacciones entre los factores y está influenciada por los aspectos subjetivos de las estimaciones simples. Además, el análisis convencional no da ninguna indicación de que la inversión tiene un 48 por ciento de posibilidades de perder dinero. El conocimiento de este hecho podría afectar significativamente la decisión sobre esta alternativa, particularmente si el inversionista es conservador y dispone de otras alternativas menos riesgosas.

El análisis de riesgo puede también ser utilizado para efectuar un análisis de sensibilidad. El propósito del análisis de sensibilidad es determinar la influencia de cada factor sobre el resultado y por consiguiente identificar los factores más críticos en la decisión de inversión ya sea por su gran influencia, gran incertidumbre o ambas cosas. En un análisis de sensibilidad se hacen variaciones igualmente probables en los valores de cada factor para determinar sus efectos sobre el resultado o valor presente neto. La Figura 2 muestra el efecto de la variación individual de cada factor (varios de los cuales son componentes del net cash flow de beneficios).

FIGURA 2

USO DEL ANALISIS DE SENSIBILIDAD  
PARA DETERMINAR LOS FACTORES ALTAMENTE CRITICOS

<u>Un cambio desfavorable de</u> <u>10 percentiles del valor</u> <u>de la media de este factor</u>	<u>que correspondería</u> <u>a un cambio de por</u> <u>centaje de</u>	<u>reduciría</u> <u>el VFN</u> <u>en</u>
Net cash flow anual		
Nivel de ventas	12	17
Precio de ventas	10	21
Costos de Manufactura	18	58
Costos fijos	4	6
Monto de la inversión	5	12
Vida de la inversión	12	30

El análisis indica que los costos de manufactura es un factor altamente crítico tanto en influencia como en incertidumbre. Conociendo esto, la administración puede concentrar sus esfuerzos en reducir los costos de manufactura o al menos reducir la incertidumbre en estos costos.

El análisis de riesgo se ha establecido en la industria americana como una técnica regular en sus procedi-

mientos de análisis de inversión y continuamente surgen avances. Por ejemplo, se han elaborado métodos para re presentar interrelaciones complejas entre los factores. También se han mejorado los métodos para reunir estimaciones de probabilidades subjetivas y se han desarrollado métodos para mejorar el análisis de sensibilidad.

Sin embargo, la capacidad de esta técnica todavía excluye un aspecto de las decisiones de inversión, el problema de la toma de decisiones secuenciales, es decir, el análisis de un gran número de decisiones de inversión altamente interrelacionadas que ocurren en diferentes puntos en el tiempo. Hasta el momento, no se ha desarrollado ninguna extensión del análisis de riesgo que pueda manejar apropiadamente el problema.

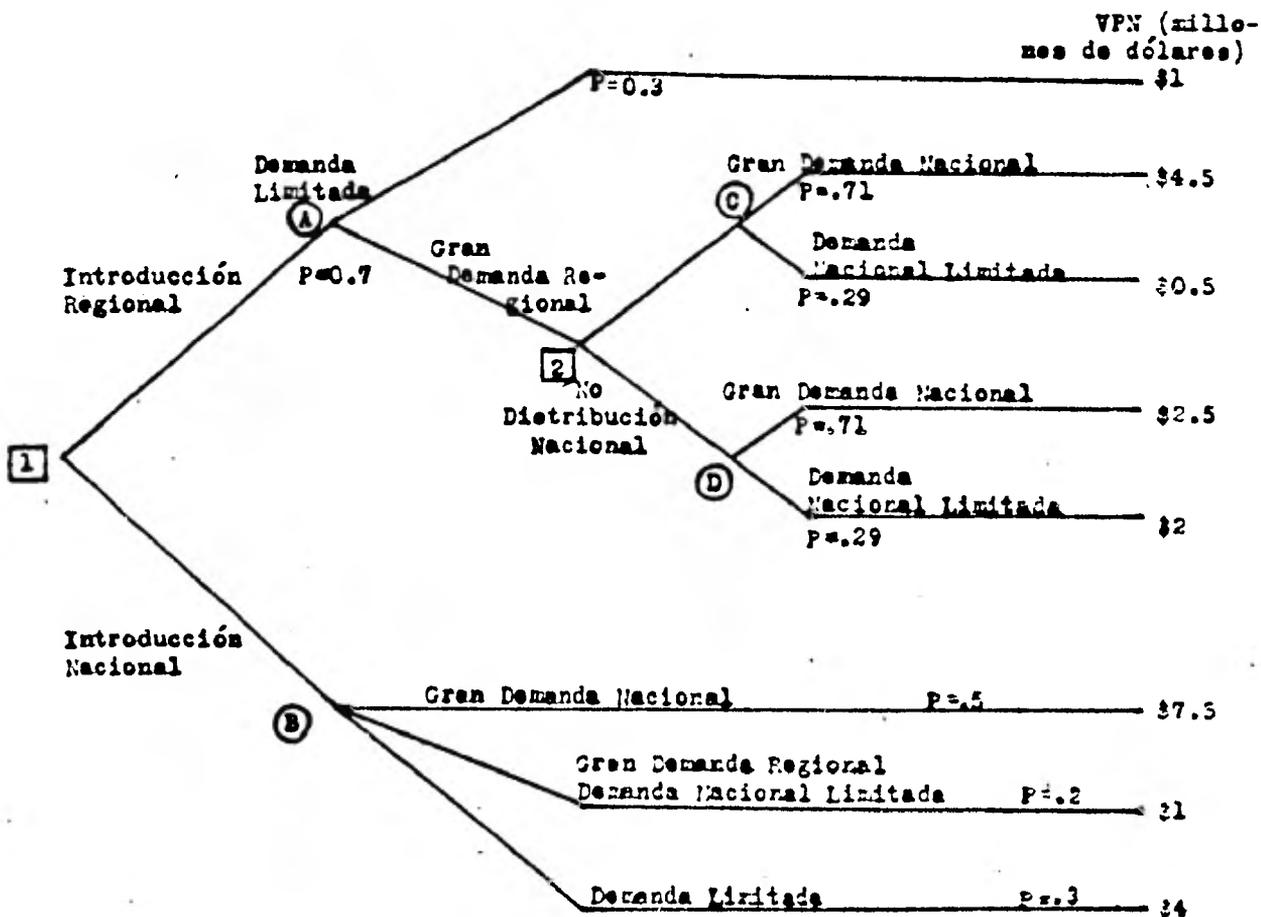
El enfoque del árbol de decisión, es un método conveniente para representar y analizar una serie de decisiones de inversión a realizarse en algún período de tiempo.

Cada punto de decisión está representado por un número encerrado en un cuadro en una ramificación o nodo en el árbol de decisión. Cada rama que procede de un nodo, representa una de las alternativas que pueden ser elegidas en este punto de decisión. En el primer punto de decisión, las dos alternativas en el ejemplo, mostrado en la Figura 3, son: "introducir el producto a nivel

nacional" e "introducir el producto a nivel regional".  
 (Se asume que ya se ha hecho la decisión de introducir el producto en alguna forma).

FIGURA 3

USO DEL ARBOL DE DECISION AL ANALISIS DE ALTERNATIVAS DE INVERSION PARA LA INTRODUCCION DE UN NUEVO PRODUCTO



Además de representar puntos de decisión, los árboles de decisión representan eventos probables. Los nodos en el árbol donde los eventos probables influyen en el resultado, están indicados por un círculo. En el ejemplo, los nodos de eventos probables representan los diversos niveles de demanda que pueden presentarse para el producto.

Un nodo que representa un evento, generalmente tiene una probabilidad asociada con cada una de las ramificaciones que emanan de él. Esta es la probabilidad de que el evento asuma el valor asignado a esa rama particular. El total de estas probabilidades, resultante de un nodo debe ser igual a 1. En nuestro ejemplo, la probabilidad de alcanzar una gran demanda en la introducción regional del producto es 0.7, que aparece en la rama que proviene del nodo A. Cada combinación de decisiones y eventos probables tiene algún resultado, en este caso, el valor presente neto (VPN) asociado con ella.

La secuencia óptima de decisiones en un árbol de decisión se encuentra comenzando por el lado derecho y retroavanzando. En cada nodo debe ser calculado un VPN esperado. Si el nodo es un nodo evento probable, se calcula el VPN para todas las ramificaciones que emanan de él. Si el nodo es un punto de decisión, se calcula el VPN para cada rama y se selecciona el mayor VPN. En cualquiera de estos casos, el VPN esperado para ese nodo

se lleva al siguiente evento probable o punto de decisión multiplicándolo por las probabilidades asociadas con las ramificaciones. Por lo tanto, en la Figura 3 el VPN esperado de todas las ramas que emanan del nodo evento probable C es \$3.05 millones ( $\$4.5 \times .71 + \$-0.5 \times .29$ ). Análogamente, el VPN esperado en el nodo D es \$2.355 millones. Ahora regresando al siguiente nodo (punto de decisión 2) puede verse que la alternativa con el mayor VPN es "distribuir nacionalmente", con un VPN de \$3.05 millones. Esto significa que si el tomador de decisiones se enfrenta con la decisión del nodo 2, el elegirá la distribución nacional y esperará un VPN de \$3.05 millones.

En todo lo que resta del análisis, podemos ignorar la otra rama de decisión que emana del nodo 2 y todos los nodos y ramificaciones a que puedan conducir.

Para continuar con el análisis, es necesario llevar de regreso este VPN en el árbol. Las ramas que provienen del nodo-evento probable A tienen un VPN total de \$2.435 millones ( $\$1 \times 0.3 + \$3.05 \times 0.7$ ). Análogamente, el VPN esperado en el nodo B es de \$2.75 millones. Estos cálculos, resumidos en la Figura 4, muestran que la alternativa que maximiza el VPN esperado del árbol de decisión completo es "introducir a nivel nacional" en el punto de decisión 1. Nótese que en este caso particular no hay decisiones subsecuentes que hacer.

FIGURA 4

VALOR PRESENTE NETO DE ALTERNATIVAS DE INVERSION  
PARA LA INTRODUCCION DE UN NUEVO PRODUCTO

<u>ALTERNATIVA</u>	<u>EVEN TO</u>	<u>PROBABILIDAD DEL EVENTO</u>	<u>VPN</u>	<u>VPN ESPERADO</u>
Introducción de Producto Nacional	Gran Demanda Nacional	.5	\$7.5	} \$2.75
	Gran Demanda Regional, Demanda Nacional Limitada	.2	1.0	
	Demanda Limitada	.3	-4.0	
Introducción de Producto Regional (y distribución nacional si la demanda regional es grande)	Gran Demanda Nacional	.5	4.5	} 2.44
	Gran Demanda Regional, Demanda Nacional Limitada	.2	-0.5	
	Demanda Limitada	.3	1.0	
Introducción de Producto Regional (y no distribución nacional)	Gran Demanda Nacional	.5	2.5	} 1.95
	Gran Demanda Regional, Demanda Nacional Limitada	.2	2.0	
	Demanda Limitada	.3	1.0	

Una desventaja del enfoque del árbol de decisión es que los cálculos pueden volverse totalmente inmanejables, ya que el número de puntos finales en el árbol de decisión se incrementa muy rápidamente, conforme el número de puntos de decisión o eventos probables se incrementa. Para hacer este enfoque práctico, es necesario limitar el número de ramificaciones que emanan de los nodos-eventos probables a un número muy pequeño. Esto significa que la distribución de probabilidad de los eventos probables en cada nodo, debe estar representada por muy pocos puntos estimados. Como consecuencia, las respuestas obtenidas mediante un análisis de árbol de decisión frecuentemente son inadecuadas. El resultado obtenido, digamos VPN, normalmente es parecida a la expectativa de la distribución de probabilidad de todos los VPN posibles, sin embargo, puede diferir un poco del VPN esperado dependiendo de como fueron seleccionadas las estimaciones de los puntos a partir de las distribuciones fundamentales y de la sensibilidad del VPN a este proceso de selección. Por otra parte, el enfoque del árbol de decisión no da ninguna información sobre el rango de posibles resultados de la inversión o de las probabilidades asociadas con dichos resultados, lo que puede resultar una seria desventaja.

En el ejemplo de las Figuras 3 y 4, el enfoque del árbol de decisión indica que introducir el producto a ni

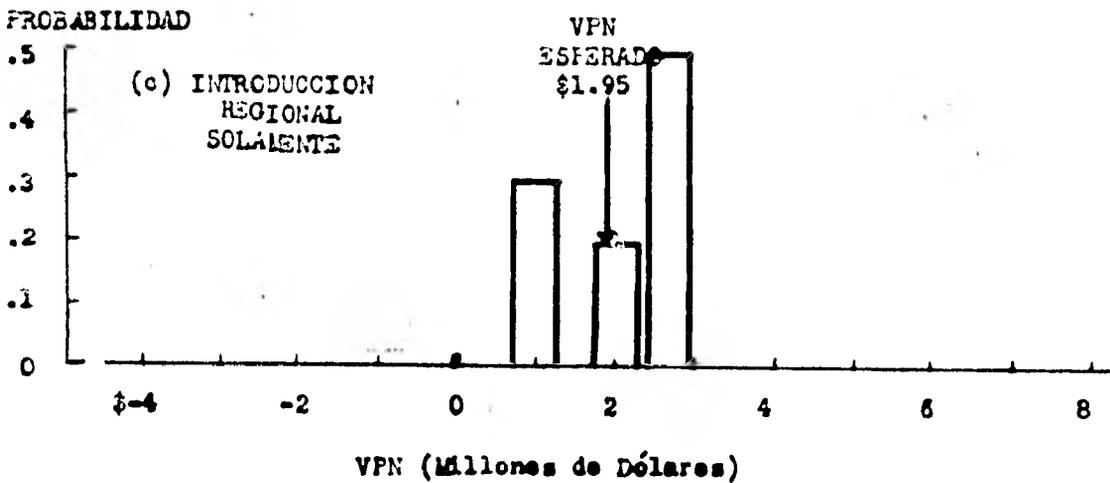
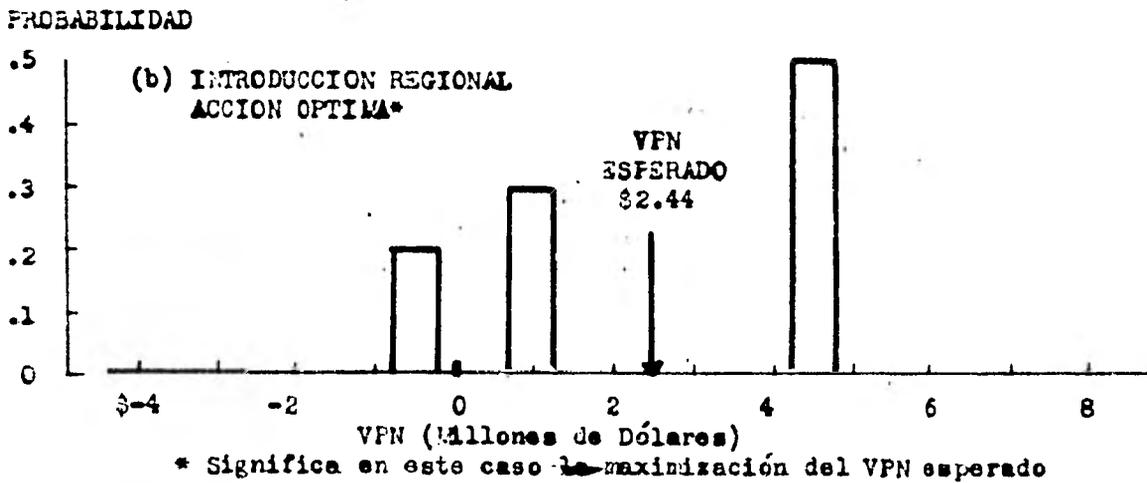
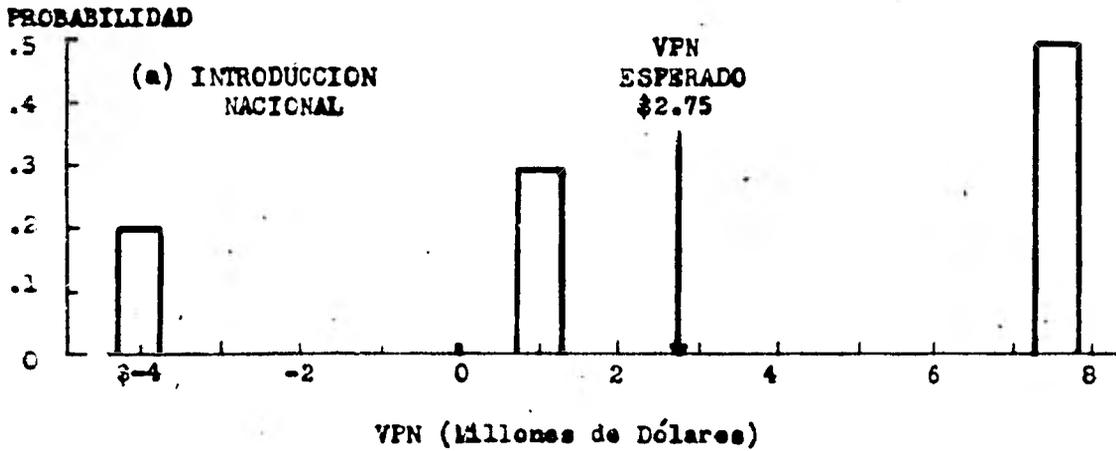
vel nacional resultaría la estrategia óptima para maximizar el VPN esperado. Sin embargo, el VPN de \$2.75 millones es simplemente la media de tres valores posibles para el VPN, cada una de las cuales está representando a su vez, un rango entero de valores posibles, como se muestra en la Figura 5a. La comparación del rango de posibles VPN bajo cada conjunto posible de decisiones muestra una imagen bastante diferente del resultado, Figuras 5b y 5c.

Aunque la primera alternativa tiene el más alto VPN esperado, un tomador de decisiones podría preferir cualquiera de las otras dos. La elección dependería de la función de utilidad o de la aversión al riesgo por parte del tomador de decisiones o de su organización. Si el tomador de decisiones tuviera una función de utilidad lineal escogería la primera alternativa debido a la gran probabilidad de pérdida que existe y al alto valor de utilidad que se asigna a una pérdida, como muestra la Figura 6b. Este pensamiento conservador se debe, en gran parte, a las recompensas o castigos que existen en muchas grandes empresas.

No obstante estas dificultades, el enfoque del árbol de decisión es una herramienta analítica muy importante. Es particularmente útil para la conceptualización de la planeación de inversión.

FIGURA 5

RANGO DE POSIBLES RESULTADOS  
PARA CADA UNA DE TRES ALTERNATIVAS



(a)  
FUNCION DE UTILIDAD  
LINEAL

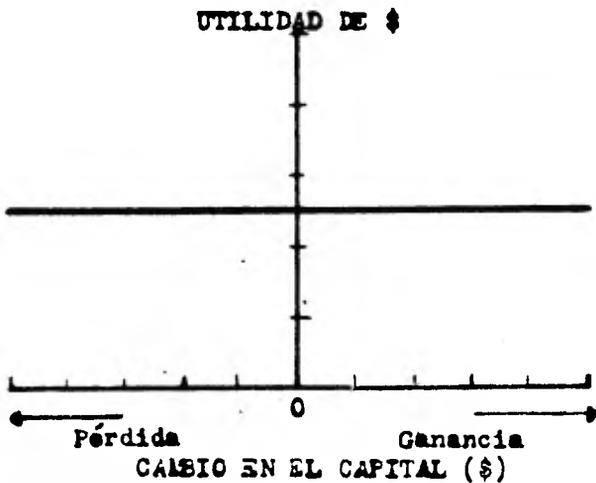
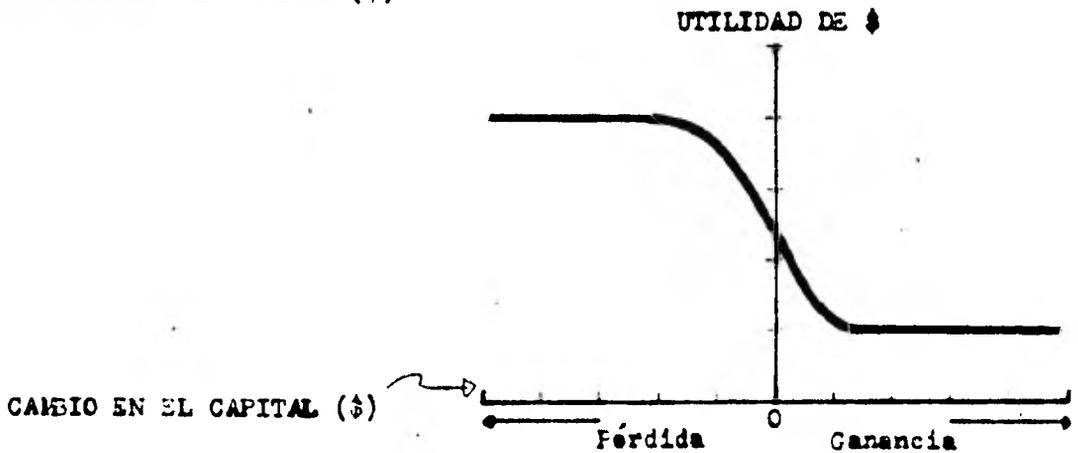


FIGURA 6

EJEMPLO DE FUNCIONES  
DE UTILIDAD

(b)  
FUNCION DE UTILIDAD NO  
LINEAL, MAS TIPICA



Las ventajas y desventajas complementarias del análisis de riesgo y de los árboles de decisión hacen pensar que puede desarrollarse una nueva técnica que combine los puntos favorables de cada uno y elimine sus desventajas. Esta es precisamente la intención del concepto de árboles estocásticos de decisión introducido aquí.

El enfoque del árbol estocástico de decisión es similar al enfoque convencional del árbol de decisión,

excepto por que tiene además las siguientes características:

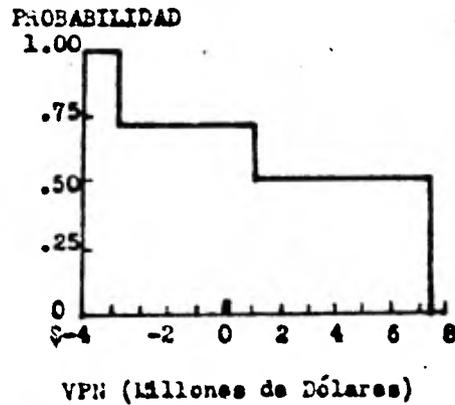
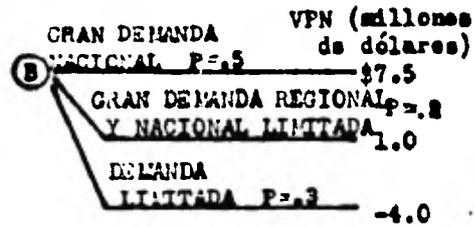
- 1) Todas las cantidades y factores, incluyendo los eventos probables están representados por distribuciones continuas empíricas de probabilidad.
- 2) La información acerca de los resultados de alguna o todas las combinaciones posibles de decisiones hechas en puntos secuenciales en el tiempo es obtenida en una forma probabilística.
- 3) La distribución de probabilidad de los resultados posibles de cualquier combinación particular de decisiones, se analiza utilizando los conceptos de utilidad y riesgo.

La inclusión de distribuciones de probabilidad para los valores asociados con los eventos probables es equivalente a añadir un número arbitrariamente grande en cada nodo-evento probable. En un árbol de decisión convencional, la adición de un gran número de ramas puede servir para representar cualquier distribución empírica de probabilidad. Por lo tanto, en el ejemplo anterior, el nodo-evento B puede utilizarse para aproximar con mayor exactitud la distribución continua de probabilidad, incrementando el número de ramificaciones, como se muestra en la Figura 7a y 7b. Sin embargo, este procedimiento hace el árbol muy complejo y los cálculos se vuelven sumamente complicados. Por ello, en la práctica,

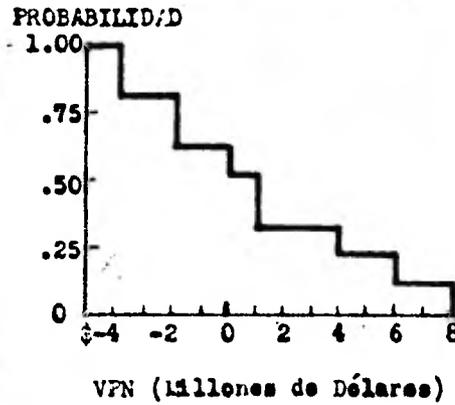
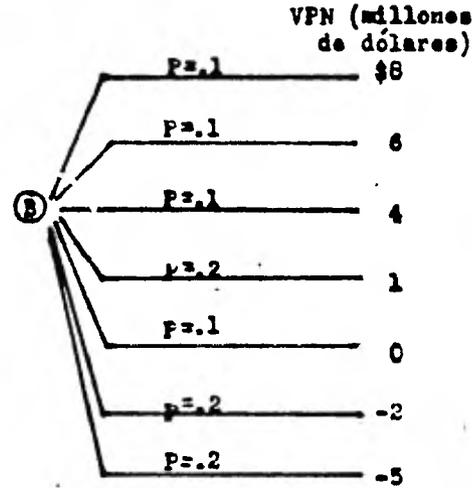
FIGURA 7

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD EN LOS NODOS EVENTOS PROBABLES

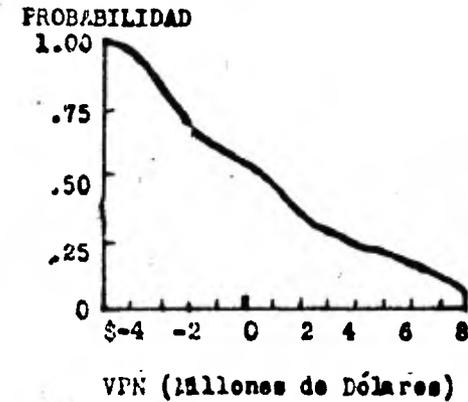
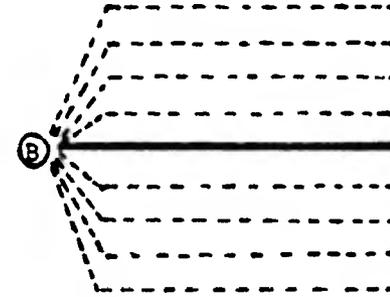
(a) DISTRIBUCION DE TRES PUNTOS



(b) NUMERO INCREMENTADO DE PUNTOS



(c) DISTRIBUCION CONTINUA



sólo se utilizan dos o tres ramas como una aproximación burda a la verdadera distribución continua de probabilidad.

Puesto que el árbol estocástico de decisión está basado en la simulación, no es necesario añadir un gran número de ramificaciones en los nodos-eventos probables. En realidad es posible reducir a uno el número de ramas en el nodo, (Figura 7c). De esta manera, el nodo-evento probable puede ser eliminado. En su lugar, es decir, el punto donde el nodo-evento probable ocurre, se hace una selección aleatoria en cada iteración a partir de un modelo económico probabilístico como el que aparece en la Figura 8 y el valor seleccionado es usado para calcular el VPN para esa iteración particular. La rama única que emana de este nodo simplificado se extiende hacia el siguiente punto de decisión o hacia el final del árbol. El resultado es un drástico afinamiento del árbol de decisión como se ilustra en la Figura 9.

En un árbol de decisión, factores tales como el tamaño de la inversión en una nueva planta tienen asignados valores específicos. Normalmente estos valores están expresados como un solo número, aún cuando estos números a menudo no se conocen con certeza.

Si los valores de estos factores pudieran ser representados mediante distribuciones de probabilidad, podría

FIGURA 8

MODELO PROBABILISTICO ECONOMICO TIPICO  
USADO AL SELECCIONAR VALORES DE FACTORES  
EN LOS NODOS EVENTOS PROBABLES

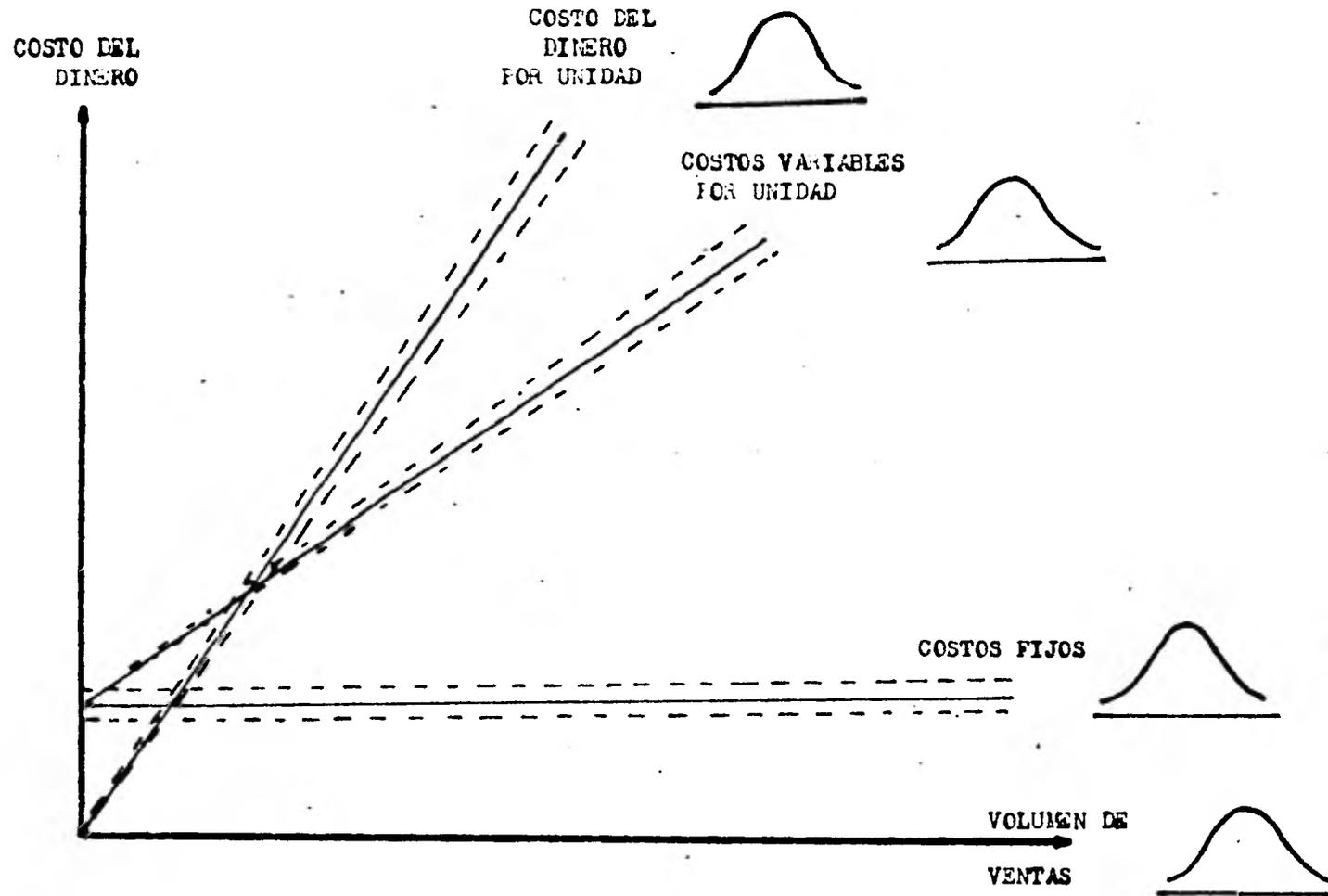
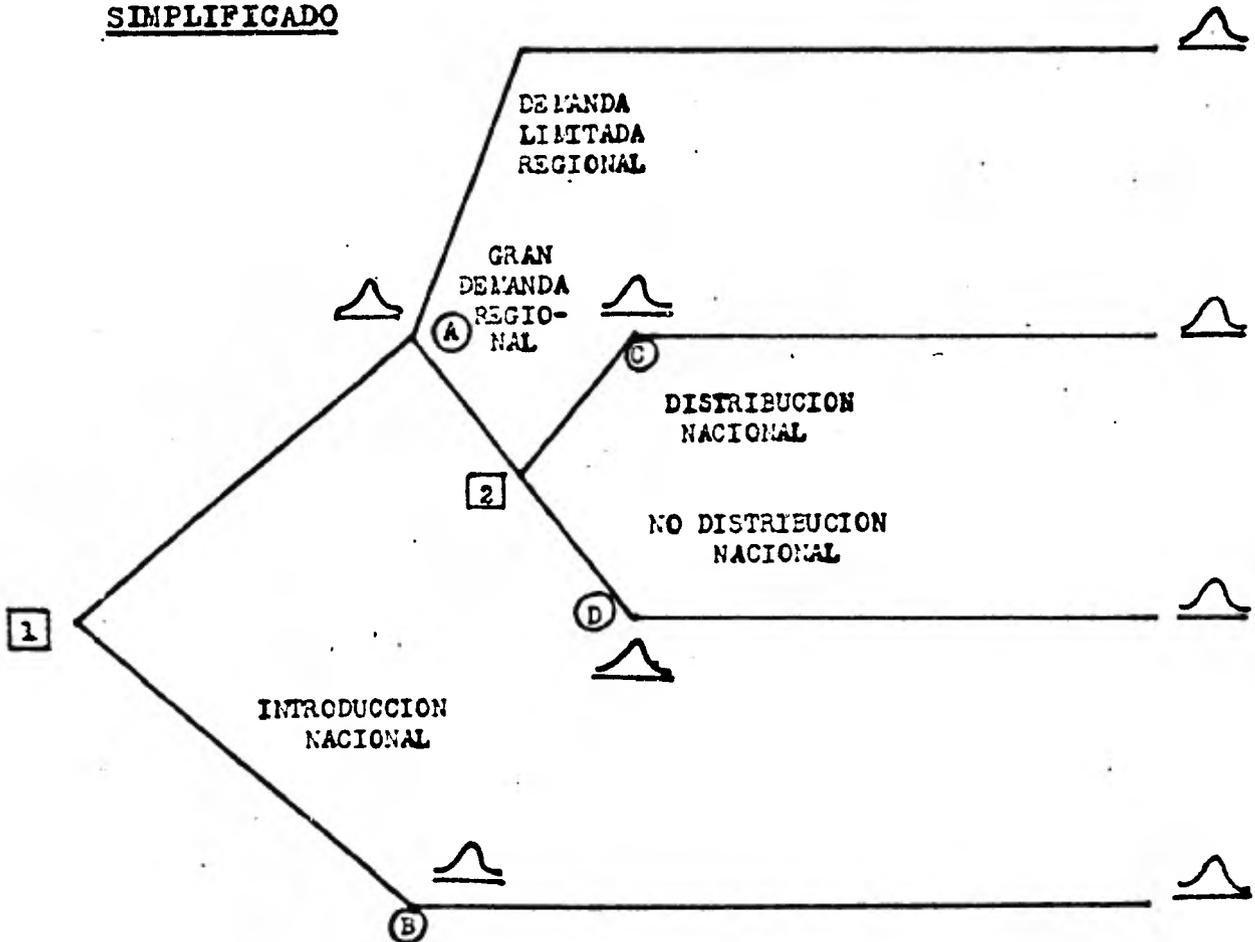


FIGURA 9  
ARBOL DE DECISION  
SIMPLIFICADO



expresarse el grado de incertidumbre que caracteriza a cada valor. El enfoque del árbol estocástico hace esto posible. Como el enfoque es básicamente una simulación, alguno o todos los valores específicos en el análisis de inversión pueden ser representados por distribuciones de probabilidad. En cada iteración de la simulación, se selecciona aleatoriamente un valor para cada factor a

partir de la distribución de frecuencia apropiada y se utiliza en el cálculo. En el ejemplo, el VPN puede ser calculado no solamente mediante distribuciones empíricas de la demanda, sino también estimaciones probabilísticas de la inversión, costo, precio y otros factores.

Como este enfoque del árbol estocástico simplifica enormemente la estructura del árbol de decisión, es posible evaluar por enumeración completa todos los caminos posibles a través del árbol. Por ejemplo, si hay cinco decisiones secuenciales en un análisis y cada decisión ofrece dos alternativas, hay a lo sumo 32 rutas posibles a través del árbol de decisión. Este número de rutas es fácilmente manejable en computadoras. Como la mayoría de los puntos de decisión son bifurcados, o cuando menos tendrán un número muy pequeño de alternativas, es factible y conveniente evaluar todas las rutas posibles a través del árbol de decisión cuando se utiliza el enfoque del árbol estocástico de decisión.

El árbol de decisión convencional se ocupa solamente de valores esperados. Evalúa decisiones mediante la comparación de sus esperanzas y selecciona la más grande como mejor en todos los casos.

Sin embargo, el árbol estocástico de decisión produce resultados probabilísticos para cada conjunto posible de decisiones. Estas distribuciones de probabilidad asociadas con cada ruta posible a través del árbol de de-

cisión, pueden ser comparadas sobre la base de sus esperanzas, si ésta se considera suficiente. Pero los conjuntos alternativos de decisiones también pueden ser evaluados comparando las distribuciones de probabilidad asociadas con cada conjunto, en una forma totalmente análoga a la del análisis de riesgo. El enfoque del árbol estocástico de decisión hace posible evaluar una serie de decisiones interrelacionadas mediante los mismos criterios de incertidumbre que se utilizarían en un análisis de riesgo convencional.

En un problema con un árbol de decisión grande, aún con las simplificaciones logradas con el árbol estocástico, la enumeración completa de todas las rutas posibles a través del árbol de decisión puede volverse computacionalmente muy poco práctica, o la comparación de las distribuciones de probabilidad asociadas con todas las posibles rutas puede ser demasiado laboriosa y costosa.

En tal caso existen dos simplificaciones posibles. Primero podría usarse una versión modificada de la técnica de retroavance. Este retroavance tomaría en cuenta la naturaleza probabilística de la información manejada. Se eliminarían ramas del árbol sobre la base de dominación en lugar del valor esperado. Por ejemplo, una rama podría ser eliminada si tuviera un bajo rendimiento esperado y una varianza mayor que cualquier otra rama alternativa. Podría eliminarse un buen número de conjun-

tos posibles de decisiones sin ser completamente evaluados, dejando un conjunto eficiente de secuencias de decisión para evaluar con más detalle.

La computación también podría reducirse haciendo reglas de decisión antes de la simulación, tales que si, en cualquier iteración, el valor de un evento probable excede algún criterio, la decisión resultante no sería considerada. Esto mismo se hace en el ejemplo de la Figura 3. Si aparece una demanda limitada en el nodo A, la introducción nacional del producto ya no sería evaluada. En la simulación, si la demanda fuera menor que algún valor especificado, la simulación no proseguiría al punto de decisión 2. Esta técnica sólo ahorra esfuerzo computacional, pero no simplifica la estructura del árbol y si el criterio es elegido apropiadamente, no afectará el resultado final.

Ya se ha visto que las distribuciones de probabilidad son más útiles que las estimaciones de un solo número como medidas del valor de un conjunto particular de decisiones. El enfoque de simulación permite obtener estas distribuciones de probabilidad en forma relativamente fácil.

La técnica consiste simplemente en que cada iteración o ruta a través del árbol de decisión, cuando el computador encuentra un punto de decisión binario, está instruido para dividir en dos y llevar a cabo los cálcu-

los apropiados a lo largo de ambas ramas que emanan de ese nodo de decisión. (La misma lógica se aplica para un nodo con tres o más ramas). Por lo tanto, cuando el computador completa una iteración, se calcula un VPN para cada ruta posible. Estos VPN son calculados en distribuciones de probabilidad separadas.

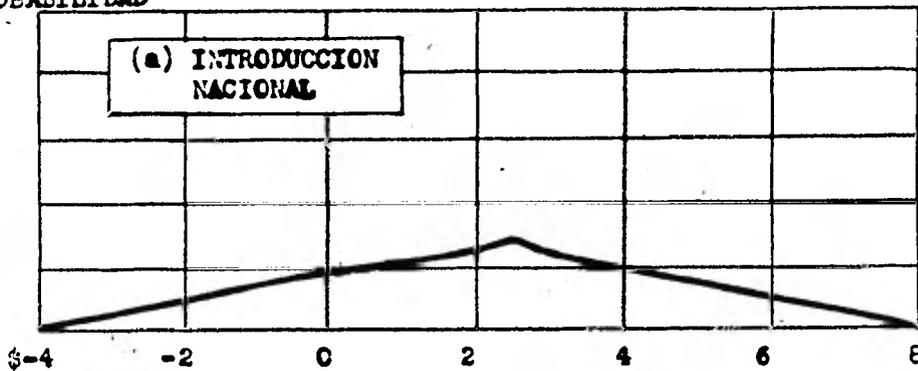
Al término de un número adecuado de iteraciones habrá una distribución de probabilidad del VPN asociada con cada conjunto de decisiones que es posible hacer pasando a través del árbol. Estos diferentes conjuntos pueden compararse uno con otro, en el problema usual del análisis de riesgo, como si fueran decisiones alternativas de inversión (que de hecho lo son). Es decir, pueden compararse tomando en cuenta no solamente el rendimiento esperado, sino también la forma de cada distribución de probabilidad y los efectos de la utilidad y riesgo. Sobre estas bases, se puede seleccionar el mejor conjunto de decisiones, o un pequeño número de conjuntos posiblemente aceptables. Estos conjuntos de decisiones secuenciales se evalúan y puede hacerse una decisión de si tomar o no la inversión, comparándola con inversiones alternativas o contra usos alternativos para el dinero.

El problema de la introducción de un nuevo producto se ha resuelto utilizando un análisis de árbol estocástico de decisión, para ilustrar la clase de resultados que pueden esperarse. Estos resultados aparecen en la Figura 10.

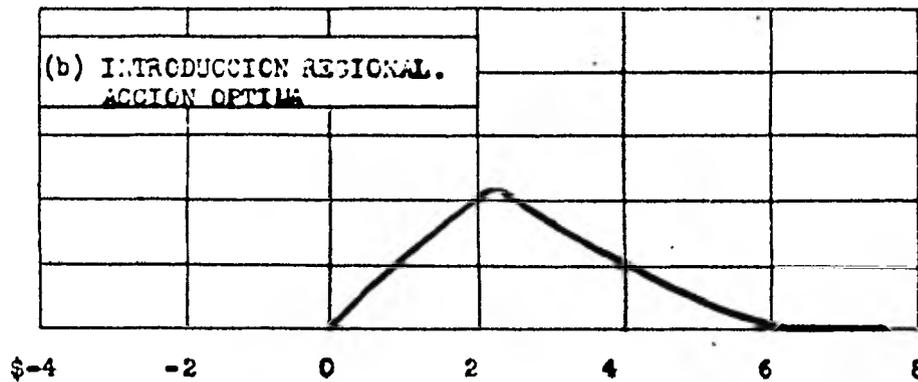
FIGURA 10

**RESULTADOS DEL ANALISIS**  
**DEL ARBOL DE DECISION ESTOCASTICA**

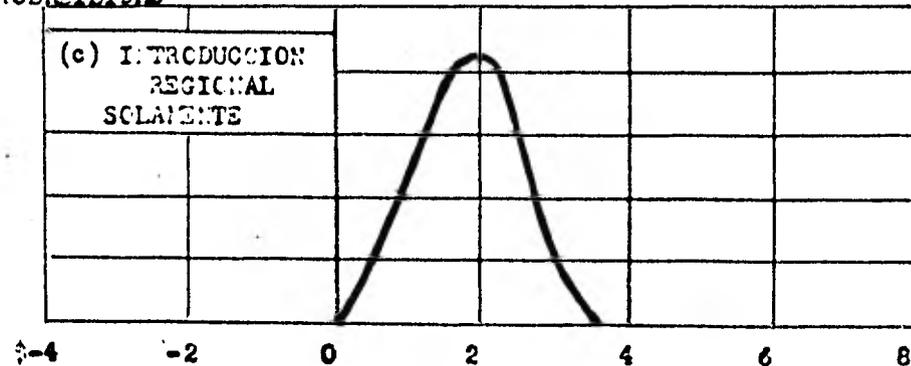
PROBABILIDAD



PROBABILIDAD



PROBABILIDAD



VPN (Millones de Dólares)

Los valores esperados de estas distribuciones no serán necesariamente idénticos a las expectativas del enfoque del árbol de decisión convencional, porque:

1. Las interdependencias entre las variables no fueron consideradas por el enfoque convencional.
2. El pequeño número de puntos estimados que se utilizan para aproximar la distribución completa bajo el enfoque convencional no utiliza toda la información disponible.

Presentando las tres alternativas en esta forma, es más fácil entender porqué un tomador de decisiones podría seleccionar otra alternativa diferente de aquélla con el mayor VPN esperado. Con el rango total de resultados posibles relativos a cada alternativa, puede seleccionar la más consistente con su utilidad personal y su disposición para aceptar el riesgo.

Los árboles estocásticos de decisión combinan las mejores características del análisis de riesgo y los árboles de decisión convencionales, y son más simples de construir y usar que cualquiera de estos. Los pasos para seleccionar datos y conceptualizar el problema son los mismos para el enfoque del árbol estocástico de decisión que para el enfoque del análisis de riesgo. Estos pasos son:

1. Reunir las estimaciones de probabilidad subjetivas de

los factores que afectan a la inversión.

2. Definir y describir cualesquiera interdependencias significativas entre los factores.
3. Especificar la elección probable del tiempo de futuras decisiones secuenciales de inversión.
4. Especificar el modelo que se utilizará para evaluar la inversión.

En el ejemplo de las Figuras 4, 5 y 6 muestra enfáticamente como el enfoque del árbol estocástico de decisión puede detectar los resultados probables de una estrategia de inversión que serían considerados como óptimos por el enfoque del árbol de decisión convencional, pero que por muchos tomadores de decisiones sería considerado definitivamente como indeseable.

Resumiendo, puede decirse que el enfoque del árbol estocástico de decisión para analizar las decisiones de inversión es un mejoramiento sobre los enfoques del análisis de riesgo y el árbol de decisión para el análisis de inversión, combinando sus principales ventajas pero eliminando varias desventajas y con una mayor facilidad para aplicarse.

C A P I T U L O 6

COMPARACION  
DE LOS METODOS PROPUESTOS

La aplicación del enfoque probabilístico al análisis de riesgo en alternativas de inversión de capital, puede ser mejor ilustrado mediante un ejemplo numérico que además permita ver objetivamente algunas de las ventajas y limitaciones de los métodos.

La Compañía Zeiss se encarga principalmente de la fabricación de cámaras. Pronto será descontinuada la producción de uno de sus modelos más antiguos, y están investigando ahora que debería hacerse con la capacidad productiva extra de que se dispondrá como consecuencia. Existen dos posibilidades atractivas. La primera alternativa es expandir la del modelo A, uno de los últimos y más populares. Este modelo fue vendido inicialmente el año pasado y la aceptación posterior que tuvo junto con una investigación de mercados, que resultó favorable, indica que existe y continuará existiendo mercado para esta producción extra. La segunda alternativa es iniciar la producción del modelo B. El modelo B involucra un gran número de cambios revolucionarios que ha desarrollado el departamento de investigación. Mientras que no existen ahora modelos comparables en el mercado, rumores en la industria indican que un gran número de otras compañías podrían tener modelos similares en sus planes. La investigación de mercados indica un potencial muy atractivo pero incierto para este modelo, ya

que existe incertidumbre en relación con la cantidad de los nuevos artefactos propuestos, porque se requiere experiencia en la producción de este modelo y además porque existe la posibilidad de que el mercado sea invadido poderosamente por modelos de la competencia de manera si multánea, todo esto sumado al riesgo involucrado en esta alternativa. En resumen, la decisión está entre la seguridad, la inversión conservadora en el modelo A, o la riesgosa pero promisoría inversión en el modelo B. Se piensa que estos dos modelos serán vendibles en los próximos cinco años. Debido a la falta de fondos de inver sión y de capacidad productiva se ha decidido que solamente una de estas alternativas puede ser seleccionada. Se asume que la producción del modelo B no afectaría al mercado para la producción planeada del modelo A.

Se han hecho estudios detallados que consideran las consecuencias de los cash flows de las dos alternativas. El análisis de la inversión requerida en el modelo A indica que se requiere gran cantidad de equipo nuevo, herramienta y modificación de los procesos de producción. Se estimó que la diferencia en el cash flow inmediato de bida a la inversión en el modelo A sería (-\$400,000). Sin embargo, se reconoce, que esta estimación es sólo aproximada, de tal forma que es apropiado estimar la desviación estándar para este cash flow. Recordemos que la probabilidad es 0.6827, 0.9545 y 0.9973, respectiva-

mente de que el verdadero cash flow se encuentre dentro de uno, dos o tres desviaciones estándar respectivamente, del cash flow esperado; se decidió que una estimación de \$20,000 resultó la más apropiada. En otras palabras, los juicios fueron que, siendo  $Y_0$  el cash flow,

$$\text{Prob} \{ -\$400,000 - \sigma \leq Y_0 \leq -\$400,000 + \sigma \} = 0.6827$$

$$\text{Prob} \{ -\$400,000 - 2\sigma \leq Y_0 \leq -\$400,000 + 2\sigma \} = 0.9545$$

$$\text{Prob} \{ -\$400,000 - 3\sigma \leq Y_0 \leq -\$400,000 + 3\sigma \} = 0.9973$$

debería reflejar verdaderamente las probabilidades subjetivas del estimador si  $\sigma$  se escogía como \$20,000.

Procediendo con un análisis similar, fueron estimados los valores esperados y las desviaciones estándar de los net cash flows para cada uno de los próximos cinco años. Debido a la experiencia previa con el modelo A, estas desviaciones estándar fueron consideradas como pequeñas. La variación que existe surge, en gran medida, de la variación en los costos de producción, tales como mantenimiento, reemplazo de equipo, y costos de acabados y del estado de la economía. Puesto que estas condiciones tienden a variar aleatoriamente año con año, se decidió que la suposición apropiada es que los net cash flows en los diferentes años, son mutuamente independien

tes. Se encontró un problema especial en la determinación de la desviación estándar para el quinto año puesto que este net cash flow combina el cash flow regular para el quinto año más el valor efectivo de salvamento del equipo que se utiliza. Esta desviación estándar fue obtenida suponiendo independiencia, de tal forma que la varianza de la suma es igual a la suma de las varianzas de estos cash flows. Por lo tanto, aún cuando la desviación estándar para el valor de salvamento fue estimada en \$30,000 y la desviación estándar para el resto del net cash flow en \$40,000, la desviación estándar del net cash flow para el quinto año es \$50,000.

La Tabla 1 resume los resultados del proceso de estimación del modelo A. El procedimiento para describir la inversión en el modelo B fue similar. La diferencia principal fue que se consideró que esta inversión generó una serie de cash flows correlacionados y una serie de cash flows independientes. Por lo tanto, en la ecuación

$$X_j = Y_j + Z_j^{(1)} + Z_j^{(2)} + \dots + Z_j^{(m)}$$

$m=1$  en lugar de  $m=0$  como la inversión en el modelo A. Esta diferencia surgió debido a la incertidumbre relacionada con la aceptación del modelo B en el mercado. Por tanto, se pensó que si la aceptación excedió las ex-

pectativas durante el primer año o dos, continuaría excediendo las expectativas presentes en lo sucesivo.

TABLA 1

<u>Año</u>	<u>Símbolo</u> <u>Correspondiente</u>	<u>Valor Esperado</u>	<u>Desviación</u> <u>Estándar</u>
0	$Y_0$	-400	20
1	$Y_1$	+120	10
2	$Y_2$	+120	15
3	$Y_3$	+120	20
4	$Y_4$	+110	30
5	$Y_5$	+200	50

La conclusión fue que para cada uno de los cinco años, el net cash flow resultante de los ingresos de ventas menos los gastos para publicidad y alcance de mercado requeridos, debió asumirse como perfectamente correlacionado. Por otra parte, se pensó que el análisis de los gastos de producción involucrados era suficientemente seguro y que cualquier desviación de las expectativas

en un determinado año debería atribuirse principalmente a las fluctuaciones aleatorias en los costos de producción, especialmente en renglones tan irregulares como los costos de mantenimiento. Por tanto se concluyó que el net cash flow de producción para cada uno de los cinco años debía suponerse mutuamente independientes. El valor efectivo de salvamento del equipo, siendo esencialmente independiente de los otros cash flows, fue incluido en el cash flow de producción neta para el quinto año.

Detallados análisis de los diferentes componentes del cash flow total llevan, al igual que en el modelo A, a las estimaciones deseadas de las esperanzas y desviaciones estándar del net cash flow para mercadeo y para producción para cada uno de los cinco años, así como para la inversión inmediata que se requiere. Estos resultados aparecen en la Tabla 2.

El procedimiento para utilizar estos datos en la deducción de la distribución de probabilidad del valor presente, será ilustrado a continuación. Para este caso particular, el valor apropiado de  $r$  se considera que es  $r=10\%$ .

Para la inversión en el modelo A, las ecuaciones

$$U_{VP} = \sum_{j=0}^n \frac{E(Y_j) + \sum_{k=1}^m E(Z_j^{(k)})}{(1+r)^j}$$

$$\sigma_{VPN}^2 = \sum_{j=0}^n \left[ \frac{\text{VAR}(Y_j)}{(1+r)^{2j}} \right] + \sum_{k=1}^m \left[ \sum_{j=0}^n \left[ \frac{\sqrt{\text{VAR}(Z_j^{(k)})}}{(1+r)^j} \right] \right]^2$$

indican que, puesto que  $m=0$ ,

$$\mu_{VPN} = \sum_{j=0}^5 \frac{E(Y_j)}{(1.1)^j} = -400 + \dots + \frac{200}{(1.1)^5} = +95$$

$$\sigma_{VPN}^2 = \sum_{j=0}^5 \frac{\text{VAR}(Y_j)}{(1.1)^{2j}} = (20)^2 + \dots + \frac{(50)^2}{(1.1)^{10}} = 2247$$

de tal forma que  $\sigma_{VPN} = 47.4$ . Por lo tanto, la distribución de probabilidad del valor presente de la inversión en el modelo A es una distribución normal con media 95 y desviación estándar 47.4 (en unidades de miles de dólares). Por lo tanto, remitiéndonos a las tablas de probabilidad de la distribución normal para encontrar que proporción de la población es menor que la media menos

95/47.4 desviaciones estándar, se concluye que

$$\text{Prob. } \{ \text{VPN} < 0 / r=10\% \} = 0.023$$

TABLA 2

<u>Año</u>	<u>Origen del Cash Flow</u>	<u>Símbolo Correspondiente</u>	<u>Valor Esperado</u>	<u>Desviación Estándar</u>
0	Inversión Inicial	$Y_0$	-600	50
1	Producción	$Y_1$	-250	20
2	Producción	$Y_2$	-200	10
3	Producción	$Y_3$	-200	10
4	Producción	$Y_4$	-200	10
5	Producción; valor de salvamento	$Y_5$	-100	$10\sqrt{10}$
1	Mercado	$Z_1^{(1)}$	+300	50
2	Mercado	$Z_2^{(1)}$	+600	100
3	Mercado	$Z_3^{(1)}$	+500	100
4	Mercado	$Z_4^{(1)}$	+400	100
5	Mercado	$Z_5^{(1)}$	+300	100

Procediendo de manera similar para la inversión en el modelo B, las ecuaciones anteriores indican que, puesto que  $m=1$ ,

$$\mu_{\text{VPN}} = \sum_{j=0}^5 \frac{E(Y_j) + E(Z_j^{(0)})}{(1.1)^j} = -600 + \frac{50}{1.1} + \dots + \frac{200}{(1.1)^5} = 262$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{VPN}}^2 &= \sum_{j=0}^5 \frac{\text{VAR}(Y_j)}{(1.1)^{2j}} + \left[ \sum_{j=0}^5 \left[ \frac{\text{VAR}(Z_j^{(0)})}{(1.1)^j} \right]^2 \right] \\ &= 2500 + \dots + \frac{1000}{(1.1)^{10}} + \left[ \frac{50}{1.1} + \dots + \frac{100}{(1.1)^5} \right]^2 \\ &= 114,700 \end{aligned}$$

Entonces  $\sigma_{\text{VPN}} = 339$ . Por tanto

$$\text{Prob} \{ \text{VPN} < 0 / r=10\% \} = 0.22$$

Esta información que considera la distribución de probabilidad del valor presente, permite una comparación probabilística precisa de las dos alternativas de inversión. Con el fin de facilitar esta comparación, es útil en algunas ocasiones sobreponer (empalmar) las dos curvas normales (o las funciones de distribución acumulada) sobre la misma gráfica.

Hasta este momento, el problema pudo ser resuelto mediante un modelo bastante restringido como es el modelo básico de Hillier, cuyo punto de sustentación son las medias y varianzas de los cash flows, sin embargo, en muchas situaciones no se conocen directamente, sino que únicamente se dispone de las medias y varianzas de los factores básicos que conforman a estos cash flows. Consideremos, por ejemplo, el cash flow de ventas que puede ser el producto de dos variables, ventas y precios, a los cuales denotaremos por  $U_1$  y  $U_2$  respectivamente, con media  $\mu_1$  y varianza  $\sigma_1^2$  para el primer caso y media  $\mu_2$  y varianza  $\sigma_2^2$  para el segundo caso.

Partiendo de que existe la información que toma en cuenta la incertidumbre de los factores importantes que influyen en cada variable, podemos suponer que se dispone de estimaciones de sus valores y algún indicador del coeficiente de correlación entre ellos. El objetivo es determinar la media y la varianza del cash flow de ventas.

La Tabla 3a. resume las variables en el estudio, sus valores más probables y sus rangos. Las medias y las desviaciones estándar de los diversos factores se obtienen utilizando el "enfoque PERT" y son mostradas en la Tabla 3b. Asumiremos también que los cash flows en diferentes períodos de tiempo son independientes uno del otro.

TABLA 3a.  
DATOS BASICOS

<u>Variables</u>	<u>Estimación más probable (m)</u>	<u>Rango (b a)</u>
1. Tamaño de mercado (tons)	250,000	100,000-340,000
2. Precio de venta (\$ por ton)	510	385-575
3. Tasa de crecimiento del mercado (%)	3	0-6
4. Porción de mercado (%)	12	3-17
5. Inversión requerida (millones \$)	9.5	7-10.5
6. Valor residual (millones \$)	4.5	3.5 - 5.0
7. Costos de operación (\$ por ton)	435	370-545
8. Costos fijos (miles \$)	300	250-375
9. Vida útil	10	5-15

TABLA 3b.  
DATOS BASICOS

<u>Variables</u>	<u>Media</u> <u>(a+b+4m)/6</u>	<u>Desv.Est.</u> <u>(a-b)/6</u>
1. Tamaño de mercado (tons)	240,000	40,000
2. Precio de venta (\$por ton)	500	31.67
3. Tasa de crecimiento del mercado (%)	3	1
4. Porción de mercado (%)	11.33	2.33
5. Inversión requerida (millones \$)	9.25	0.58
6. Valor residual (millones \$)	4.40	0.25
7. Costos de operación (\$ por ton)	443	29.17
8. Costos fijos (miles \$)	304	20.80
9. Vida útil	10	1.67

ETAPA 1: Cálculo de las esperanzas y desviaciones estándar de los diversos cash flows.

Estimación del Cash Flow de Ventas.- puesto que el tamaño total del mercado inicial y su tasa de crecimiento son variables aleatorias (que suponemos independientes) el uso de las ecuaciones

$$E(U_1 U_2) = \eta_1 \eta_2$$

y

$$\text{VAR}(U_1 U_2) = \eta_1^2 \sigma_2^2 + \eta_2^2 \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2$$

proporciona la media y la desviación estándar del tamaño del mercado en cualquier año.

Después, como las ventas de la compañía son un producto del tamaño del mercado total y de la porción del mercado, las ecuaciones anteriores pueden usarse nuevamente para estimar la media y la desviación estándar correspondientes, de las ventas de la compañía.

Finalmente, el cash flow que emana de las ventas de una compañía es producto de las ventas y precios. Asumiremos que estos dos factores están correlacionados. Este coeficiente de correlación es de hecho, estimado sobre bases subjetivas utilizando la ecuación

$$g(z) = E(z_2) + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} [z - E(z_1)] \quad \dots (2)$$

donde asumimos que si el precio fuera incrementado a, di

gamos \$600, entonces las ventas esperadas alcanzarían al rededor de 10,000 unidades y si, por otro lado, el precio decayera a \$400, entonces las ventas esperadas se elevarían a 47,000 unidades. Las dos estimaciones de  $\rho$  obtenidas se promedian obteniéndose una estimación final de -0.8 . El uso de las ecuaciones

$$E(U_1 U_2) = \eta_1 \eta_2 + \rho \sigma_1 \sigma_2 \dots (3)$$

y

$$\begin{aligned} \text{VAR}(U_1 U_2) = & \eta_1^2 \sigma_2^2 + \eta_2^2 \sigma_1^2 + 2\rho \eta_1 \eta_2 + \\ & + \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 + \rho^2) \dots (4) \end{aligned}$$

proporcionará la media y la varianza de los cash flows en varios años. Estos resultados están resumidos en la Tabla 4.

Estimación de los Cash Flows de Costos.- el siguiente paso es calcular las medias y desviaciones estándar de otros cash flows, a saber, costos variables y costos fijos.

TABLA 4

CASH FLOW DE VENTAS

Año	<u>Total mercado</u> (00's tons)		<u>Porción de</u> <u>mercado (%)</u>		<u>Ventas Compa-</u> <u>ñía (tons)</u>		<u>Precio</u> <u>por ton</u>		<u>Cash flow de</u> <u>ventas (000's \$)</u>	
	Media	Desv. Est.	Media	Desv. Est.	Media	Desv. Est.	Media	Desv. Est.	Media	Desv. Est.
1	2400	400	11.33	2.33	27,192	7258	500	31.67	13,412	3000
2	2472	413	11.33	2.33	28,008	7471	500	31.67	13,615	3085
3	2546	426	11.33	2.33	28,846	7708	500	31.67	14,228	3190
4	2622	440	11.33	2.33	29,707	7955	500	31.67	14,652	3290
5	2701	454	11.33	2.33	30,602	8190	500	31.67	15,093	3390
6	2782	468	11.33	2.33	31,520	8445	500	31.67	15,546	3500
7	2865	483	11.33	2.33	32,460	8705	500	31.67	16,009	3600
8	2951	498	11.33	2.33	33,435	8979	500	31.67	16,490	3715
9	3040	514	11.33	2.33	34,443	9248	500	31.67	16,987	3830
10	3131	530	11.33	2.33	35,474	9529	500	31.67	17,495	3940
11	3225	547	11.33	2.33	36,539	9823	500	31.67	18,021	4065
12	3322	565	11.33	2.33	37,638	10,130	500	31.67	18,562	4190
13	3422	584	11.33	2.33	38,771	10,450	500	31.67	19,121	4465
14	3525	604	11.33	2.33	39,938	10,783	500	31.67	19,696	4465
15	3631	625	11.33	2.33	41,139	11,128	500	31.67	20,288	4610

Suponemos costos variables por tonelada y que las ventas están correlacionadas una con otra. Con el propósito de estimar este coeficiente de correlación, utilizaremos una vez más la ecuación (2), con la información de que si los costos variables por tonelada estuvieran en sus puntos extremos, digamos \$370 por tonelada o \$530 por tonelada, entonces el valor esperado de las ventas condicionales sería de 37,000 y 17,000 toneladas respectivamente. Esto llevaría a una estimación del coeficiente de correlación entre costos variables y ventas del -0.5 .

El uso de las ecuaciones (3) y (4), proporcionaría la media y la desviación estándar de los cash flows que resultan de los costos variables en varios años. Se supone que el cash flow de costos fijos tiene un valor esperado constante y desviación estándar constante sobre todos los años. Los resultados se muestran en la Tabla 5.

ETAPA 2: Cálculo de los parámetros de la distribución del net cash flow en varios años.

El uso de las ecuaciones

$$E [X_j] = \sum_{\alpha=1}^n w_{j\alpha} \mu_{j\alpha} = w_j$$

y

$$VAR [X_j] = \sum_{\alpha=1}^n \sigma_{j\alpha}^2 + 2 \sum_{\alpha \neq \beta} COV [X_{j\alpha}, X_{j\beta}] \dots (5)$$

TARLA 5

CASH FLOWS DE COSTOS

Año	COSTOS VARIABLES				COSTOS FIJOS	
	Costos variables por tonelada		Costos variables totales		Costos fijos totales	
	Media	Desv. Est.	Media (000's)	Desv. Est. (000's)	Media (000's)	Desv. Est. (000's)
1	443	29.17	11,940	2910	304	20.8
2	443	29.17	12,298	2996	304	20.8
3	443	29.17	12,666	3092	304	20.8
4	443	29.17	13,044	3191	304	20.8
5	443	29.17	13,437	3285	304	20.8
6	443	29.17	13,840	3385	304	20.8
7	443	29.17	14,253	3492	304	20.8
8	443	29.17	14,681	3603	304	20.8
9	443	29.17	15,123	3712	304	20.8
10	443	29.17	15,576	3823	304	20.8
11	443	29.17	16,043	3942	304	20.8
12	443	29.17	16,526	4064	304	20.8
13	443	29.17	17,023	4194	304	20.8
14	443	29.17	17,534	4326	304	20.8
15	443	29.17	18,061	4468	304	20.8

nos dará la media y la varianza del net cash flow en cada año. Sin embargo, como el cash flow de ventas y el cash flow de costos variables están correlacionados uno con otro, se requiere alguna idea de este coeficiente de correlación antes de utilizar la ecuación (5). Este coeficiente es estimado ya sea sobre bases subjetivas utilizando la ecuación (2) o el enfoque bosquejado en la ecuación

$$\begin{aligned} \text{COV}(z_1, z_2) = & \lambda_{12} \lambda_{13} + \lambda_{12} \gamma_1 \gamma_3 + \lambda_{13} \gamma_1 \gamma_2 + \\ & + \gamma_1^2 \lambda_{23} + \lambda_{11} \lambda_{23} + \lambda_{11} \gamma_2 \gamma_3 \end{aligned}$$

En este ejemplo hemos estimado  $\rho = 0.8$ . La Tabla 6 resume las medias y desviaciones estándar de el net cash flow en varios años.

**ETAPA 3: Cálculo de las medias y varianzas del valor presente para diferentes tasas de descuento y vida de la inversión.**

Para diferentes tasas de descuento, utilizando las ecuaciones

$$E\left[VPN_n\right] = \sum_{j=0}^n \frac{w_j}{(1+r)^j} = w_n$$

TABLA 6

MEDIAS Y DESVIACIONES ESTANDAR DE VARIOS CASH FLOWS

Año	<u>Costos de inversiones</u>		<u>Cash flow de ventas</u>		<u>Cash flow de costos variables</u>		<u>Cash flow de costos fijos</u>		<u>Valor residual</u>		<u>Net cash flow</u>	
	Media (000's)	Desv. Est. (000's)	Media (000's)	Desv. Est. (000's)	Media (000's)	Desv. Est. (000's)	Media (000's)	Desv. Est. (000's)	Media (000's)	Desv. Est. (000's)	Media (000's)	Desv. Est. (000's)
0	9250	580									-9250	1000
1			13,412	3000	11,940	2910	304	20.8			1168	1871
2			13,815	3085	12,298	2996	304	20.8			1213	1930
3			14,228	3190	12,666	3092	304	20.8			1258	1900
4			14,652	3290	13,044	3191	304	20.8			1304	2052
5			15,093	3390	13,437	3285	304	20.8			1352	2110
6			15,546	3500	13,840	3388	304	20.8			1402	2179
7			16,009	3600	14,253	3492	304	20.8			1452	2243
8			16,490	3715	14,681	3603	304	20.8			1505	2317
9			16,987	3830	15,123	3712	304	20.8			1560	2390
10			17,495	3940	15,576	3823	304	20.8			1616	2458
11			18,021	4065	16,043	3942	304	20.8			1674	2535
12			18,562	4190	16,526	4064	304	20.8			1732	2613
13			19,121	4333	17,023	4194	304	20.8			1794	2700
14			19,696	4475	17,534	4328	304	20.8			1858	2783
15			20,288	4610	18,061	4468	304	20.8			1923	2874
Residual									4400	250	4400	250

$${}^y \text{VAR} \left[ \text{VPN}_n \right] = \sum_{j=0}^n \frac{\text{VAR}(X_j)}{(1+r)^{2j}} + 2 \sum_{j \neq j'} \frac{\text{COV}(X_j, X_{j'})}{(1+r)^{j+j'}} = \wedge_n^2$$

podemos estimar la media y la varianza del valor presente condicional sobre el cash flow que permanece un número de años. Los resultados aparecen resumidos en la Tabla 7, que también da la distribución de probabilidad de la vida de la inversión.

**ETAPA 4:** Cálculo de la media y la desviación estándar de la distribución incondicional del valor presente para diferentes tasas de descuento.

Utilizando las ecuaciones:

$$E \left[ \text{VPN} \right] = \sum_{n=N_1}^{N_2} \text{VPN}_n E \left[ \text{VPN}_n \right] = \sum_{n=N_1}^{N_2} \text{VPN}_n W_n$$

$$E \left[ \text{VPN}^2 \right] = \sum_{n=N_1}^{N_2} \text{VPN}_n E \left[ \text{VPN}_n^2 \right] = \sum_{n=N_1}^{N_2} \text{VPN}_n M_n^2$$

$$\text{VAR} \left[ \text{VPN} \right] = E \left[ \text{VPN}^2 \right] - \left\{ E \left[ \text{VPN} \right] \right\}^2$$

TABLA 7

MEDIAS Y VARIANZAS DEL VALOR PRESENTE

PARA DIFERENTES TASAS DE DESCUENTO Y VIDA DE LA INVERSION

Vida de la inversión		Tasa de descuento (%)											
		0		2.5		5		10		12.5		15	
Años	Prob.	Media	Var.	Media	Var.	Media	Var.	Media	Var.	Media	Var.	Media	Var.
5	0.03	144	2084	48	1803	-37	1577	-178	1234	-236	1104	-288	996
6	0.04	285	2558	159	2156	51	1841	-124	1385	-194	1220	-256	1084
7	0.05	430	3062	272	2513	138	2096	-72	1518	-155	1317	-226	1156
8	0.09	580	3499	387	2874	226	2341	-22	1635	-117	1398	-199	1213
9	0.13	736	4169	503	3240	312	2578	25	1737	-83	1467	-173	1259
10	0.18	898	4774	620	3609	398	2806	71	1827	-50	1524	-150	1296
11	0.16	1065	5417	740	3982	483	3026	114	1906	-19	1572	-128	1326
12	0.14	1239	6099	860	4359	567	3238	155	1976	10	1613	-108	1350
13	0.10	1418	6828	982	4742	650	3442	195	2037	37	1647	-89	1369
14	0.05	1604	7602	1106	5130	733	3640	232	2090	62	1676	-72	1384
15	0.03	1796	8428	1231	5524	815	3831	267	2138	85	1700	-57	1397

Media en unidades de  $10^4$   
 Varianza en unidades de  $10^{10}$ .

y la distribución de probabilidad de la vida de la inversión, obtenemos los parámetros de la distribución de los valores presentes totales para diferentes tasas de descuento. Los resultados están resumidos en la Tabla 8.

El procedimiento básico de Hillier es una combinación de los procedimientos simplificados que dan al tomador de decisiones solamente una parte de la información requerida y de los procedimientos teóricos que asumen la disponibilidad de información que es en su mayoría imposible de obtener. Mientras que tiene algunas de las mismas deficiencias, también disfruta de muchas de las ventajas de ambos tipos de procedimientos. Supera al enfoque simplificado ya que proporciona información adicional, a saber, la distribución de probabilidad de la medida de beneficio de la inversión. Al mismo tiempo, esta información proporciona al ejecutivo un procedimiento teórico para la evaluación de la utilidad esperada. Por lo tanto, las técnicas desarrolladas por este método son en realidad herramientas para exhibir más claramente el riesgo involucrado y para complementar, más que reemplazar, a la mayoría de los procedimientos comúnmente utilizados en la evaluación de inversiones.

El modelo básico de Hillier sólo requiere que además de una estimación del valor esperado de un cash flow, la inexactitud de la estimación esté descrita como una esti

TABLA 8

RESULTADOS FINALES

Parámetro	Unidades	Tasa de descuento (%)					
		0	2.5	5	10	12.5	15
Media: $E\{VPN\}$	$10^3$	9666	6624	4230	792	-453	-1474
Segundo momento: $E\{VPN^2\}$	$10^{10}$	15,900	8885	5036	1993	1591	1532
Varianza: $VAR\{VPN\}$	$10^{10}$	6556	4497	3247	1930	1570	1315
Desviación Estándar	$10^3$	8100	6700	5700	4400	3963	3626
Prob $\{VPN < 0 / r\}$	%	12	16	23	43	54	66

mación de la desviación estándar. Este modelo dá una descripción explícita y completa del riesgo involucrado en términos de la distribución de probabilidad del valor presente. Sin embargo, el método básico de Hillier no considera que existen situaciones donde las medias y varianzas de los cash flows no pueden conocerse directamente pero en las que si se dispone de las medias y las varianzas de los factores que las conforman, en cambio, el modelo de Wagle es muy adecuado para el manejo de estas situaciones, lográndose obtener después, la media y la varianza exactas de la distribución de probabilidad del VPN. Los cálculos son bastantes simples, hacen uso de datos que pueden obtenerse fácilmente y pueden llevarse a cabo en una calculadora de bolsillo. En el caso de que el número de variables se incremente considerablemente, los cálculos pueden hacerse en una computadora sin ningún problema.

Tanto el modelo básico de Hillier como el modelo de Wagle son aplicables únicamente al caso de una sola inversión, lo que no sucede con el modelo extendido de Hillier que está especialmente diseñado para el caso de muchas inversiones que están, además, interrelacionadas. Esta es la razón que no nos permite aplicar en el ejemplo dado en este capítulo, el modelo extendido de Hillier. Por otra parte, no pudo encontrarse algún ejemplo que ilustrara adecuadamente el uso de este modelo, ya

que se requiere una tremenda cantidad de información a la cual no tenemos acceso como estudiantes y porque los cálculos requieren una gran cantidad de tiempo y de la disponibilidad de una computadora. No obstante, hablaremos de las ventajas de este método.

Este enfoque involucra la consideración de la distribución de probabilidad del valor presente para las combinaciones posibles de inversiones para buscar la combinación factible que maximice el valor esperado de la función de utilidad del valor presente. Toma en cuenta varias clases de interrelaciones entre las inversiones propuestas. La correlación que existe entre los diversos cash flows debe ser especificada con el fin de calcular correctamente la varianza del valor presente. Aunque esto puede ser hecho en principio estimado directamente el coeficiente de correlación para cada par de variables, el número de pares tiende a ser demasiado grande para que este enfoque sea práctico. La ventaja de este enfoque es que desarrolla un modelo para el patrón de correlaciones entre los cash flows que es suficientemente simple para ser compatible con las limitaciones de los procesos de estimación y cálculo. Este modelo permite inferir los valores de todos los coeficientes de correlación basándose en los valores estimados para solamente una pequeña porción de ellos.

El modelo extendido de Hillier representa un valio-

so y definitivo avance dentro del método analítico asociado con el enfoque probabilístico. Sin embargo, para propósitos prácticos, tiene la desventaja de no incorporar explícitamente la incertidumbre de las variables básicas asociadas con el proyecto. Como resultado hay una dificultad implícita para estimar los parámetros requeridos a nivel de cash flows, lo cual no sucede con el modelo de Wagle que da un tratamiento explícito a este tipo de incertidumbre, sin embargo, no debemos olvidar que el modelo de Wagle está hecho para el caso de una sola inversión y que la ventaja principal del modelo extendido de Hillier radica en la consideración de un gran número de proyectos interrelacionados y que posiblemente si se utilizara un patrón de correlación para las variables básicas como el de Wagle, el modelo se volvería mucho más complejo de lo que ya es.

En conclusión debe ser enfatizado que el principal propósito práctico de este enfoque para analizar inversiones interrelacionadas bajo condiciones de riesgo es identificar y describir cuantitativamente las mejores combinaciones de inversiones para la evaluación cuidadosa por parte de la administración. Por lo tanto, más que utilizar un conjunto de valores de los parámetros, una función de utilidad y un procedimiento de solución para encontrar "la solución óptima", es importante realizar un análisis de sensibilidad sobre los datos para identificar aque-

llas soluciones que son mejores bajo algunos conjuntos de estimaciones. Esto puede involucrar el uso de más de un modelo de función de utilidad y de un procedimiento de solución. Este proceso identificará un pequeño número de alternativas que requieran consideración adicional, y proporcionará medidas cuantitativas relevantes del comportamiento ( $\mu(\delta)$ ,  $\sigma(\delta)$ , el perfil del riesgo resultante y  $E\{U(P(\delta))\}$ ) para estas alternativas bajo diferentes suposiciones. De esta manera, el tomador de decisiones podrá analizar entonces esta información, así como otros factores relevantes no incorporados en el modelo y realizar su decisión para aprobar la mejor combinación de alternativas de inversión.

Por último se describió un método mejorado para las tomas de decisión de inversiones. El método, que es llamado el "Método del Árbol Estocástico de Decisión", es particularmente adecuado para inversiones caracterizadas por un alto grado de incertidumbre pero que requieren una secuencia de decisiones que se encuentran relacionadas y que serán realizadas dentro de un período de tiempo. El método del árbol estocástico de decisión se construye sobre conceptos utilizados en el método del análisis de riesgo y el método del árbol de decisión, ambos para el análisis de inversiones. Permite el uso de estimaciones subjetivas de probabilidad o distribuciones empíricas de frecuencia para todos los factores que afec

tan la decisión. Esta aplicación lo hace práctico para todas o casi todas las combinaciones factibles en el árbol de decisión tomando en cuenta tanto el valor esperado del rendimiento como la aversión al riesgo. El análisis de sensibilidad del modelo, puede hacer resaltar los factores que son críticos debido a su gran influencia sobre la medida del comportamiento o gran incertidumbre, o bien ambos. El método puede ser aplicado con relativa facilidad a una gran variedad de situaciones de inversión y es ideal para la simulación en una computadora.

Desafortunadamente tiene una desventaja seria que lo hace poco adecuado para el manejo de muchas inversiones interrelacionadas. Dicha desventaja es que se requiere una nueva corrida de simulación para cada combinación de inversiones interrelacionadas que se está considerando. Puesto que una sola corrida de tamaño aceptable es cara y que puede haber miles o aún millones de correlaciones factibles, esto volvería a la simulación prohibitivamente cara.

Como puede observarse, todos los enfoques expuestos tratan ya sea el efecto de las interrelaciones entre los proyectos propuestos, o bien, la evaluación del riesgo asociado con las inversiones individuales. Sin embargo, los únicos modelos que toman en cuenta simultáneamente

ambas consideraciones con el fin de obtener la distribución de probabilidad del VPN y la mejor combinación total del grupo de inversiones propuestas, respectivamente, son el Modelo de Wagle y el Modelo Extendido de Hillier. Desafortunadamente, esta clase de extensión no es muy factible con el enfoque de simulación al análisis de riesgo, por las razones antes mencionadas. Sin embargo, el enfoque analítico al análisis de riesgo es adecuado para la extensión al caso de inversiones interrelacionadas. De hecho, puede ser incorporado directamente en un formato de programación matemática.

Por todo lo anterior, consideramos que de los métodos expuestos en este trabajo, los más sobresalientes por sus características son el Modelo de Wagle y el Modelo Extendido de Hillier, cada uno dentro de su campo particular de acción.

**CONCLUSIONES**

**GENERALES**

En México, el problema de la decisión de inversión es tratado todavía a nivel determinístico, por esta razón esta tesis fue elaborada con la intención de: primero, mostrar la importancia que tiene la consideración del riesgo dentro del problema de la evaluación de inversiones y, segundo, difundir los métodos más sobresalientes para atacar este problema.

Desgraciadamente, en la práctica común, a la incertidumbre se le ignora o sólo se le considera sobre bases intuitivas dentro de los modelos de evaluación, pero cualquier tomador de decisiones debe estar consciente de que los eventos imprevistos pueden invalidar las estimaciones necesarias para el cálculo del Valor Presente Neto (que constituye la base para la mayoría de los procedimientos de solución). Por esto, cuando la suposición determinística acerca de la información es relajada, la validez del Valor Presente Neto como criterio de estimación se ve seriamente afectada.

Creemos que la contribución principal de esta tesis es, precisamente, la de poner al alcance de los tomadores de decisiones herramientas que les permitan manejar más adecuadamente el problema al que se enfrenta.

Con los métodos que fueron expuestos, se buscó que el tomador de decisiones pudiera ocuparse de cualquier tipo de proyecto de inversión, ya que se contempla desde el caso de un proyecto individual, pasando por el caso de un proyecto en el cual sus cash flows están fuertemente interrelacionados, así como el caso en el que deben evaluarse una gran cantidad de proyectos simultáneamente, que además están interrelacionados, hasta el caso en que se presente el problema de decisiones secuenciales.

Este trabajo está enfocado a la rama industrial y pretende difundir un conjunto de conocimientos con el propósito de que todos aquellos interesados en el desarrollo industrial de México, llámense inversionistas, industriales, banqueros o investigadores o estudiosos en todo cuanto atañe a este importante sector de nuestra economía, tengan al alcance un trabajo como el que presentamos y pueda serles de utilidad, en calidad de guía para normar criterios o pautas de acción para invertir en un determinado grupo de industrias.

Este trabajo puede servir también para apoyar proyectos de inversión en industrias que sean susceptibles de ser financiadas con recursos no sola-

mente de fideicomisos nacionales, sino de cualquier otra institución crediticia.

Esperamos pues que nuestra tesis proporcione el fundamento teórico necesario para la evaluación práctica de las inversiones y que estimule una mayor investigación dentro de esta importante área de las finanzas.

## BIBLIOGRAFIA

1. Charles L. Prather and James E. Wett, Financing Business Firm, Richard D. Irwin, Inc. Homewood Illinois, 1964.
2. Harold Bierman Jr. and Seymour Snidt, The Capital Budgeting Decision, McMillan, New York, 1960.
3. James T. S. Porterfield, Investment Decisions and Capital Cost, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1965.
4. Ernest W. Walker, Essential of Financial Management, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1964.
5. Dougall Herbert Edward, Investment, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1960.
6. Harold G. Moulton, Financial Organization and The Economic System, McGraw Hill, New York and London, 1964.
7. Shlomo Reutlinger, Techniques for Project Appraisal under Uncertainty, International Bank for Reconstruction and Development, Paper number ten, The John Hopkins Press, 1969.
8. Analysis for Financial Decisions, William Beranek, Richard D. Irwin, Inc., Homewood, Illinois, 1975.
9. Poulighen Louis Y., Risk Analysis in Project Appraisal, World Bank Staff Occasional Paper number eleven, 1970.

10. David J. Luck, Marketing Research, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1978.
11. David B. Hertz, New Power for Management, Computer Systems and Management Science, McGraw Hill Book Company, 1969.
12. William A. Chance, Statistical Methods for Decision Making, Richard D. Irwin, Inc., 1969.
13. Maier Robert C., Simulation in Business and Economics, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1969.