23

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN MODELO PARA ANALISIS DE RIESGOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A

MA. ELENA GURAIEB RUEDA

NOVIEMBRE 1981

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCION

En esta tesis se hará un análisis del factor de riesgo en la toma de decisiones. El riesgo es un factor que generalmente aparece en el contexto del tomador de decisiones y que sin embargo no se le presta la atención que se debiera. Parte de esta situación se debe a que las técnicas más diseminadas para medir el riesgo tienen serias carencias. En el presente trabajo se propondrá un modelo para medir el riesgo que conjuga las características de facilidad de manejo con la consideración del parámetro de aversión al riesgo del tomador de decisiones. Es precisamente este parámetro el que permite objetivizar la medición del riesgo de un tomador de decisiones.

En el Capítulo I se presenta el marco conceptual, en el Capítulo II se fundamenta la selección de la familia exponencial de funciones de utilidad para ser aplicadas en los cálculos de proyectos riesgosos (1). Posteriormente, en el tercer capítulo se describe una teoría normativa del manejo del riesgo. El modelo de evaluación del riesgo es el objeto del Capítulo IV. Finalmente, en el Capítulo V se ejemplifican algunas aplicaciones.

1 En esta tesis se utiliza el término aventura para designar cualquier empresa o proyecto riesgoso.

CAPITULO I

Definición de Conceptos

¿Qué es el riesgo?

Aversión al riesgo

Formas de medir el riesgo

1: DEFINICION DE CONCEPTOS

¿Qué es el riesgo?

El riesgo es un factor o elemento que involucra incertidumbre, peligro o azar y por lo tanto, implica la posibilidad de sufrir un daño o pérdida pero que se puede correr a cambio de un beneficio esperado. Diferentes personas se exponen al azar de diferentes maneras.

A nivel gerencial, el manejo del riesgo es un campo especializado que está creciendo rápidamente. Aunque se está desarrollando una conciencia de la estructura y las características especializadas del riesgo, su manejo riguroso se verá obstaculizado si no existe una definición más precisa y operativa.

La esencia del riesgo es la incertidumbre y cuando involucra dinero, es un concepto probabilístico financiero.

Todas las medidas propuestas en la literatura conocida hasta ahora han fallado en proveer una herramienta práctica de manejo para la toma de decisiones. El valor esperado es un criterio sencillo que se utiliza frecuentemente para medir el riesgo de muchas situaciones, sin embargo, es una medida muy burda para representar situaciones riesgosas de la vida real. Por ejemplo, el valor esperado no indica la pérdida máxima que se puede sufrir. Claramente, diferentes tomadores de decisiones están dispuestos a sufrir pérdidas de distinta magnitud. La varianza del tamaño de la pérdida es un indicador más aproximado de la naturaleza verdadera del riesgo pero, frecuentemente, la extrema asimetría de las distribuciones típicas de pérdida, ocasionan que la varianza tenga uso limitado como medida del riesgo. Allen y Duvall (1) definen verbalmente al riesgo como : "La posibilidad de una desviación desfavorable de lo esperado". Asímismo, observan: "Aunque la mayoría de los practicantes y estudiosos de este campo parecen capacitados para definir este tipo de riesgo con ejemplos, prevalece una gran discordancia en cuanto a cuáles son los verdaderos parámetros de estos riesgos". Head (4) establece la relación entre el riesgo y el grado de predictabilidad del tamaño de la pérdida: "Si las pérdidas contra las cuales una compañía desea protegerse fueran totalmente predecibles, la función de manejo de riesgos no existiría". A pesar de que se ha escrito mucho acerca del riesgo, todavía se necesita una definición precisa que encuadre estas ideas.

Aversión al riesgo.

Existen tres maneras de evaluar una aventura :

1) Cuando el tomador de decisiones es neutral al riesgo (indiferente).
2) Cuando el tomador de decisiones es averso al riesgo, y
3) Cuando el tomador de decisiones es atraído por el riesgo (jugador).

Para el primer caso, diremos que un individuo es neutral al riesgo si no toma en consideración su tolerancia al riesgo y mide sus aventuras por medio del valor esperado.

Para el segundo caso, se tomará en consideración un concepto subjetivo que es el rechazo al riesgo. Evidentemente, existe en cada individuo o empresa, un índice de aversión al riesgo que los mueve a tomar o rechazar, en un momento dado, una aventura. Este rechazo al riesgo se podría explicar como la actitud de cada persona en respuesta a un evento que represente para ella la ganancia o la pérdida de algo que estime a un grado dependiente de sus propios valores, mismos que le llevan a cuestionarse si debe o no correr el riesgo.

Por ejemplo, la adquisición de un seguro se basa en una aversión al riesgo que no se explica por el valor esperado de pérdida. La Compañía de Seguros debe cargar una prima en exceso de la pérdida esperada para cubrir sus gastos de operación. Muchos individuos o empresas desean pagar esta prima para evitar el riesgo de posible pérdida. Aún las Compañías de Seguros muestran una aversión al riesgo contratando un reaseguro con otras compañías. Otro ejemplo son las decisiones de inversión. Llevar una cartera de inversiones en lugar de una única inversión es normalmente una respuesta al riesgo que representan las inversiones. Aún los grandes negocios a menudo entran en combinaciones para proseguir con los proyectos riesgosos. Esta acción les permite reducir el riesgo de cada firma individual a un nivel aceptable.

Se podría considerar un tercer tipo de tomador de decisiones cuya actitud ante el riesgo es positiva y está dispues to a aceptar situaciones que involucren pérdidas sustancia les con probabilidades altas en espera de ganancias exorbi tantes con probabilidades bajas. Este sería el caso del ju gador.

Formas de medir el riesgo.

Se han hecho muchos intentos para medir la idea del riesgo de una manera objetiva; por ejemplo: la varianza (desviación estándar), coeficiente de variación, probabilidad de pérdida, pérdida máxima, coeficiente beta, etc. Aquí se va a considerar sin embargo, que lo "riesgoso" de un proyecto está en relación al tomador de decisiones. De aquí que se deban estudiar los dos lados de "lo riesgoso", es decir, las características de riesgo de un proyecto y la actitud hacia el riesgo (aversión al riesgo) de un tomador de decisiones que está considerando el proyecto en cuestión.

CAPITULO II

La Familia Exponencial de
Funciones de Utilidad

Funciones de Utilidad

Función Exponencial

II: LA FAMILIA EXPONENCIAL DE FUNCIONES DE UTILIDAD

Funciones de Utilidad.

En este capítulo se podrá observar que la teoría de utilidad puede particularizarse para obtener una representación del riesgo, que tenga las propiedades de consistencia y amplitud de la teoría de utilidad y que pueda ser fácilmente aplicable a muchos problemas financieros.

En la última década se ha desarrollado una enorme cantidad de literatura sobre riesgo desde el punto de vista de su portador. La mayoría de estos artículos se han basado en la teoría de utilidad, también conocida como "Teoría de preferencias de riesgo". Los artículos presentan puntos de vista "normativos" que pretenden dar al manejador del riesgo una base científica y lógica sobre la cual pueda tomar decisiones que involucren el riesgo. Las teorías normativas no están basadas en una evidencia científica donde el comportamiento observado del tomador de decisiones sea acorde con el comportamiento previsto. En su lugar, una teoría normativa comienza con axiomas de comportamiento y de ahí se derivan reglas para decisiones. Los tomadores de decisiones pueden confiar en las reglas de decisión en la medida en que estén de acuerdo con los axiomas. El método axiomático procede proponiendo una propiedad global y busca probar que una familia de funciones posea de manera única esa propiedad. El usuario en potencia es libre de decidir si desea asumir esa propiedad o no, al menos, es la persona que conoce las implicaciones de sus suposiciones.

El manejo del riesgo necesita una teoría de decisión normativa que pueda producir una medida del riesgo precisa y operativa. Teóricamente, la habilidad para medir es un prerequisito para conducir, decidir o controlar, por ejemplo, un termostato no puede existir sin un termómetro. El manejo del riesgo necesita una manera de medirlo.

La literatura teórica recomienda casi uniformemente la teoría de utilidad como la base de una teoría normativa del manejo de riesgo. Sin embargo, este método es práctico en la medida en que se pueda obtener la forma funcional de la curva de utilidad. Lo anterior representa dos aspectos: El primero consiste en decidir que "forma funcional" o "familia" de funciones de utilidad se va a usar. El segundo se relaciona con la decisión de la función de utilidad específica, dentro de esa familia, que utilizará un manejador de riesgos en particular.

La función exponencial.

En los últimos años ha habido una tendencia notable hacia el uso de la familia exponencial de las funciones de utilidad para el estudio de los problemas de decisión de manejo de riesgos. Shpilberg y DeNeufville (7) explican su selección de la utilidad exponencial basados en su experiencia: "La preferencia de situaciones riesgosas es independiente del tipo de función de utilidad de aversión al riesgo elegida". Haehling von Lanzenauer y Wright (3) asumen la función exponencial sin dar una razón. Neter, Williams y Whitmore (5) demuestran que es correcto analizar separadamente situaciones de riesgo independientes (una-a-la-vez) cuando se usa esta función de utilidad. Freifelder (2) ha propuesto una teoría para la elaboración de primas de seguros basado en la utilidad exponencial. Estos autores se han sentido probablemente atraídos por la facilidad de cálculo que resulta del uso de la utilidad exponencial. Pero puede existir una razón más poderosa para su uso. Los teóricos de la utilidad, Pratt, por ejemplo, parecen estar de acuerdo en que la utilidad es una propiedad de la riqueza, no una propiedad de los proyectos de inversión de generación de riqueza individuales (o situaciones de riesgo puro de riqueza agotada). Esto concuerda con el sentido común de que el valor de un peso en la tesorería de una compañía no depende de su orígen, ya sea este de ganancias o de una reducción de pérdida.

Freifelder (2) ha demostrado que la familia exponencial de las funciones de utilidad es única en tener la propiedad de permitir un análisis de situaciones riesgosas una-a-la-vez. A continuación se da una declaración más precisa de esta propiedad:

Siguiendo la notación de Pratt, sea x la riqueza total al inicio del período. Sea $U(x)$ la función de utilidad individual para la riqueza al final del período. $U(x)$ es contínua y posee segunda derivada. Sea $\tilde{z}$ la ganancia (in cremento de riqueza) durante el período. Entonces la riqueza terminal será $x + \tilde{z}$ al final del período. La ganancia es una variable aleatoria en el tiempo inicial. Tiene una distribución de probabilidad con función de densidad $f(\tilde{z})$. Esta distribución puede ser discreta o contínua. Sin embargo, sin que se pierda la generalidad, se usará la notación de variables aleatorias contínuas.

Al principio del período la posición de utilidad individual es la utilidad esperada de la riqueza final

$$E\{U(x+\tilde{z})\} = \int U(x+\tilde{z})\, f(\tilde{z})\, d\tilde{z}$$

La certeza equivalente de la oportunidad de ganancia se denota $\Pi_0(x+\tilde{z})$. Se define como la cantidad de dinero en la cual le sería indiferente al tomador de decisiones guardar o vender la oportunidad de ganancia. Se define, por esta relación de indiferencia

$$U(x + \Pi_0(x, \tilde{z})) = E\{U(x+\tilde{z})\} \qquad (1)$$

Esto define de una forma única la certeza equivalente porque una función de utilidad debe ser una función creciente monotónicamente y tiene una función inversa única.

Entonces, invirtiendo la fórmula (1),

$$\Pi_0(x, \tilde{z}) = U^{-1}\{E\{U(x+\tilde{z})\}\} - x$$

Si $\tilde{z}$ fuera la suma de dos riesgos: $\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2$, entonces

$$\Pi_0(x, \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2) = U^{-1}\{E\{U(x + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2)\}\} - x$$

La pregunta hecha por Freifelder, es ¿Qué conjunto de funciones de utilidad tiene, para todos los pares $\tilde{z}_1$, $\tilde{z}_2$ de riesgos independientes, la propiedad de:

$$\Pi_0(x, \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2) = \Pi_0(x, \tilde{z}_1) + \Pi_0(x, \tilde{z}_2)$$

La respuesta que él encontró fué que solamente la familia exponencial de funciones de utilidad (incluyendo las lineales) tienen esa propiedad de aditividad de certezas equivalentes independientes.

Definición: La función de utilidad $U(x)$ tiene la propiedad de cartera si, y solo si, da una certeza equivalente

$$U(x + \Pi_0(x, \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2)) = E\{U(x + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2)\} ;$$

la cual es aditiva, esto es

$$\Pi_0(x, \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2) = \Pi_0(x, \tilde{z}_1) + \Pi_0(x, \tilde{z}_2)$$

donde $\Pi_0(x, \tilde{z}_i)$ se define por

$$U(x + \Pi_0(x, \tilde{z}_i)) = E\{U(x + \tilde{z}_i)\}$$

posibles oportunidades de ganancia indepen-
los niveles de riqueza x.

Dreifelder demuestra que esta propiedad la tiene la familia exponencial de las funciones de utilidad con el siguiente Teorema:

<u>Teorema</u>: El conjunto de las funciones de utilidad que poseen la propiedad de cartera son las familias exponenciales y lineales, definidas por:

$U(x) = -e^{-rx}$ para $r > 0$ {cóncava (aversión al riesgo)

$U(x) = x$ para $r = 0$

$U(x) = e^{-rx}$ para $r < 0$ {convexa (preferencia de riesgo)

o cualquier transformación lineal positiva de estas.

La prueba demuestra que $r(x)$ debe ser una función constante de x y Pratt ha demostrado que esta condición implica que la función de utilidad debe ser de la forma exponencial lineal.

La forma analítica de esta familia es:

$$U(x) = \frac{1}{r}\left(1 - e^{-rx}\right) \qquad (2)$$

incluye todos los valores parámetro $-\infty < r < \infty$.
Para los valores positivos de r, las funciones de utilidad son todas cóncavas, representando grados crecientes de aversión al riesgo. Para los valores negativos de r, los

miembros de esta familia representan gusto por el riesgo. El valor cero de r representa la neutralidad al riesgo que implica la utilidad lineal. Esto puede demostrarse como un proceso limitante:

$$\lim_{r \to 0} \left| \frac{1}{r} \left(1 - e^{-rx} \right) \right| = x$$

que se demuestra con la expansión de la serie de la función exponencial.

Es fácil demostrar que esta función de utilidad es estrictamente cóncava si $r > 0$. La concavidad estricta representa aversión al riesgo ya que se puede usar la desigualdad de JENSEN para demostrar que $\Pi a(x, \tilde{z}) < E(\tilde{z})$ o, equivalentemente, $\Pi(x,\tilde{z}) > 0$ para cualquier variable aleatoria no degenerada $\tilde{z}$. Similarmente, $r<0$ representa una preferencia positiva por el riesgo.

Siguiendo la notación de Pratt, el premio del riesgo de la oportunidad de ganancia se denota $\Pi(x,\tilde{z})$ y es la cantidad que el tomador de decisiones le descuenta a la ganancia esperada $E(\tilde{z})$ esto es

$$\Pi(x\ \tilde{z}) = E(\tilde{z}) - \Pi a(x,\tilde{z})$$

Asimismo, Pratt define la función de aversión al riesgo como:

$$r(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}$$

Desigualdad de Jensen: Sea x la variable aleatoria con media $E[x]$ y sea $g(x)$ una función convexa; entonces

$$E[g(x)] \geq g(E[x])$$

Demostración: Ya que $g(x)$ es contínua y convexa, por la definición de función convexa, existe una línea, $l(x) = a + bx$ tal que $l(x) = a + bx \leq g(x)$ y $l(E[x]) = g(E[x])$, $l[x]$ es una línea dada por la definición de contínuo y convexa que va a través del punto $(E[x], g(E[x]))$.
Ya que $E[l(x)] = E[(a + bx)] = a + bE[x] = l(E[x])$, entonces $g(E[x]) = l(E[x]) = E[l(x)] \leq E[(x)]$ usando la propiedad de aditividad de los valores esperados.

La familia exponencial ha sido estudiada por Pratt (6) quien demostró que esta familia es la única en mantener constante la función local de aversión al riesgo. Ya que es constante, puede ser llamada "el nivel de aversión al riesgo" de la función de utilidad. El hecho de que esta familia de funciones de utilidad tenga sólo un parámetro y que el parámetro tenga una interpretación muy útil, es muy importante al simplificar la aplicación del concepto de utilidad. Aunque la mayoría de los intentos para medir directamente las curvas de utilidad han fallado, existe una buena razón para esperar que la medición de un parámetro sea una tarea mucho más fácil que la medición de una curva entera.

En todas las aplicaciones del análisis de utilidad para riesgo y seguros, las variables aleatorias siempre representan pérdidas (riesgos puros) y nunca ganancias. Se utilizará el símbolo $\tilde{x}$ para denotar la variable aleatoria. Los valores positivos de $\tilde{x}$ representan pérdidas. Además, de una manera convencional, se cambiará el signo de la función de utilidad y será llamada "des-utilidad". La familia exponencial de las funciones de des-utilidad para pérdida ℓ está dada por:

$$DU(\ell) = -\frac{1}{r}(1 - e^{+rl})$$

La des-utilidad esperada de pérdida ℓ, cuya función de distribución de probabilidad es $F(\ell)$, es

$$E\{DU(\tilde{\ell})\} = \int_0^{\infty} DU(\ell)\, dF(\ell)$$

El concepto de "Costo ajustado de riesgo" (CAR), se define como el negativo del equivalente de certeza:

$$DU(CAR) = E\left\{-\frac{1}{r}(1 - e^{+r\tilde{l}})\right\}$$

La solución para CAR da la fórmula general

$$CAR = \frac{1}{r}\ln\left\{E\{e^{+r\tilde{l}}\}\right\} \qquad (3)$$

Demostración: Dada la función de des-utilidad

$$DU(\ell) = -\frac{1}{r}(1 - e^{rl})$$

La pérdida de equivalencia de certeza (CAR) se define por la igualdad entre la des-utilidad de pérdida cierta de la cantidad CAR y la des-utilidad esperada de pérdida $\tilde{\ell}$

$$DU(CAR) = E\{DU(\tilde{\ell})\}$$

$$-\frac{1}{r}(1 - e^{rCAR}) = -\frac{1}{r}(1 - E(e^{r\tilde{l}}))$$

$$1 - e^{rCAR} = 1 - E(e^{r\tilde{l}})$$

$$e^{r\,CAR} = E\{e^{r\tilde{l}}\}$$

$$\therefore\ CAR = \frac{1}{r}\ \ln\left\{E\{e^{r\tilde{l}}\}\right\}$$

Bajo la formulación general de la utilidad de la riqueza, no sería posible calcular CAR para un determinado riesgo sin especificar: el nivel de riqueza, el conjunto de todos los otros riesgos y el conjunto de riesgos de inversión de la firma. Utilizando la familia exponencial de las funciones de utilidad, todos estos factores son irrelevantes excepto, probablemente, para otros riesgos que no son independientes de la probabilidad del riesgo que se está evaluando. Sin embargo, para situaciones de riesgo puro, la independencia en probabilidad es la regla y no la excepción y por lo tanto, cada situación riesgosa puede ser evaluada normalmente con la base de una-a-la-vez. Las situaciones de riesgo dependientes pueden ser agregadas juntas y evaluadas como una sola situación de riesgo. Entonces, el uso de la familia exponencial de las funciones de utilidad es mucho más importante y estimulante que como se ha sugerido en la literatura actual. Es capaz de producir una base teórica del manejo del riesgo, normativa y aplicable. 6.

CAPITULO III

Fundamentos Teóricos

Una teoría normativa del manejo del riesgo

Curvas del perfil del riesgo

Propiedades de las curvas del perfil del riesgo

III: FUNDAMENTOS TEORICOS

Una Teoría Normativa del Manejo del Riesgo.

Al determinar el costo ajustado de riesgo de una aventura, se está midiendo el riesgo. Ya que el costo ajustado del riesgo (CAR) es una medida de costo, puede ser comparada con una prima de seguros. Si el problema de decisión es elegir entre la retención total y la transferencia total, entonces la decisión óptima es la retención, si la prima para la transferencia completa excede el valor de CAR para la retención total del riesgo. De otra manera, se prefiere la transferencia total.

Con el objeto de hacer una comparación realista entre retención y transferencia, la pérdida debe ser medida y definida realistamente. Aunque la medición de la pérdida no es lo principal aquí, es de todas formas, importante. Los costos deberían estimarse en una base de valor presente de flujo de caja, de tal forma que el valor del dinero en el tiempo se reconozca explícitamente. Esto tiende a que las pérdidas se vean más pequeñas y puede provocar el balance hacia la retención del riesgo. Lo anterior será particularmente importante para riesgos de responsabilidad donde a menudo existe un lapso grande de tiempo entre el evento de pérdida y el ajuste. La transferencia del riesgo a través del seguro proporciona servicios de ajustes de pérdida al manejador del riesgo. Si se evalúa la retención del riesgo, entonces el tamaño de pérdida ℓ debería incluir el costo del verdadero auto-seguro. La retención del riesgo requiere que los costos de ajustes y costos administrativos de auto-seguro sean incluídos en la medida de ℓ. Esto puede inclinar la balanza hacia la retención del riesgo. Una representación de todos los costos reales darán una comparación realísta entre la retención y la transferencia.

En suma, la medición del tamaño de pérdida se basa en el valor presente de flujos de caja, tal como se hace para análisis de inversión, incluyendo todos los costos de la retención del riesgo. La medición de la distribución de probabilidad de tamaño de pérdida futuro suscita otro asunto; los métodos estadísticos basados en experiencias pasadas, estarán sistemáticamente equivocados a menos de que las pérdidas pasadas se ajusten a las tendencias inflacionarias de acuerdo a los indicadores oficiales (inflación social).

Se ha escrito mucho acerca del uso de distribuciones de probabilidad analíticas en el manejo del riesgo. Las distribuciones normal, gamma, logarítmica normal y muchas otras han sido estudiadas y utilizadas en varias aplicaciones; sin embargo, ahora aparece que ninguna forma simple de distribución se encontrará útil para todas las aplicaciones. La forma más básica y más flexible de distribuciones de probabilidad es una forma de distribución de histograma. Es también la forma más simple de describir los tamaños de pérdida posibles. Esto puede especificarse con una tabla de intervalos de tamaño de pérdida y, dentro de cada intervalo, la probabilidad de la pérdida real.

Sea n el número utilizado de intervalos. Sean los tamaños de pérdida de las cotas del i-ésimo intervalo: ℓ_i a ℓ_{i+1} . Sea p_i la probabilidad de que la pérdida real caiga sobre el i-ésimo intervalo. El tamaño de pérdida más grande posible es: ℓ_{n+1} .

TABLA 1

Intervalo de pérdida i	Probabilidad p_i	Probabilidad de que la pérdida exceda ℓ_{i+1}
ℓ_1 a ℓ_2	p_1	$1 - p_1$
ℓ_2 a ℓ_3	p_2	$1 - p_1 - p_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
ℓ_n a ℓ_{n+1}	p_n	0

La fórmula para CAR, encontrada directamente de la ecuación (3) por integración de la integral de esperanza, es

$$\text{CAR} = \frac{1}{r} \ln \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{e^{r\ell_{i+1}} - e^{r\ell_i}}{r(\ell_{i+1} - \ell_i)} \right\} \qquad (4)$$

Por ejemplo, supóngase que la distribución de probabilidad es la que se muestra en la Tabla 2.

TABLA 2

Intervalo de pérdida en millones	Probabilidad P_i	Probabilidad de que la pérdida exceda ℓ_{i+1}
0 a .1	60%	40%
.1 a .5	25%	15%
.5 a 1.0	12%	3%
1.0 a 10.0	3%	0%

A un nivel de aversión al riesgo = .1 x 10^{6}, el CAR es .428 millones, que es 1.19 veces la pérdida esperada de .36 millones. Las fórmulas para el CAR pueden ser derivadas de muchas distribuciones analíticas. Para la distribución normal con tamaño de pérdida media μ y desviación estándar σ, la fórmula CAR es

$$\text{CAR} = \mu - \frac{1}{2} r\sigma^2 \tag{5}$$

La familia de distribuciones gamma con parámetro N, truncada y normalizada al tamaño de pérdida máximo L, tiene la función de densidad de probabilidad

$$f_N(\ell) = \frac{\alpha(\alpha\ell)^{N-1}\, e^{-\alpha\ell}}{(N-1)!\, S(\alpha L, N)} \qquad \text{para } 0 \leq \ell \leq L$$

donde la función S (X,N) se define para valores enteros de N como la serie finita:

$$S(X,N) = 1 - e^{-x}\left|\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{X^n}{n!}\right)\right|$$

La fórmula para CAR se encuentra nuevamente de la ecuación (3) por la integral de esperanza

$$CAR = \frac{1}{r}\ ln\left|\left(\frac{\alpha^N}{S(\alpha L,N)}\right)\left(\frac{S((\alpha-r)\ L,\ N)}{(\alpha-r)^N}\right)\right| \qquad (6)$$

Para la mayoría de las distribuciones se puede encontrar la forma de expresión más compacta de CAR. No se puede encontrar de una forma compacta para la tan utilizada distribución logarítmica normal pero siempre se puede obtener una serie de expansión.

Un problema surge con las distribuciones sin cotas (variables aleatorias) para el tamaño de la pérdida; todas son irreales. Desde un punto de vista pragmático, cada distribución de tamaño de pérdida debe tener una pérdida máxima posible ya que solo hay una cantidad finita de dinero. Las distribuciones infinitas no son realistas y pueden causar divergencia de la integral de esperanza para algunas distribuciones. El valor de CAR será siempre finito cuando se utilicen variables aleatorias acotadas. Las distribuciones de probabilidad sin cotas que tienen valores extremos altos pueden ocasionar queel CAR sea infinito para niveles grandes de aversión al riesgo.

Asímismo, se puede utilizar el número de ocurrencias para obtener una distribución de pérdida agregada. Sea k una variable aleatoria del número de ocurrencias de pérdida, con distribución de probabilidad. Sea ℓ la pérdida agregada; ℓ es la suma de un número aleatorio de variables aleatorias.

$$\tilde{\ell} = \tilde{\ell}_1 + \tilde{\ell}_2 + \ldots + \tilde{\ell}_{\tilde{k}} \qquad (7)$$

Desafortunadamente, la derivación matemática o la construcción numérica de la distribución de probabilidad de pérdida agregada es un problema muy difícil en muchos casos. Aunque la media y la varianza de la distribución de pérdida agregada se obtienen fácilmente, no contienen suficiente información acerca de la forma de la distribución de pérdida agregada. La simulación por computadora Monte Carlo es muy usada para obtener la distribución de pérdida agregada, sin embargo, es un método costoso ya que se necesitan muchas simulaciones para obtener un cuadro exacto de la cola de la distribución de la pérdida agregada.

El CAR de la distribución de pérdida agregada se puede obtener muy fácilmente por métodos analíticos. Las fórmulas simples resultantes se evalúan fácilmente sin necesidad de una computadora. De aquí que existe beneficio natural de efectividad de costo en el método CAR.

Sea P (k) la distribución de probabilidad de k.
Sean todas las pérdidas individuales variables aleatorias no negativas, idénticas e independientemente distribuídas con densidad de probabilidad $f(l)$ y tamaño de pérdida: l.

Sea $\tilde{s}$ la pérdida agregada.
El CAR para la pérdida agregada es.

$$CAR(\tilde{s}) = \frac{1}{r} \ln \left\{ E\{e^{r(l_1+l_2+\dots+l_k)}\} \right\} \tag{8}$$

La derivación es idéntica a la de la función generatríz de momentos de $\tilde{s}$.
El resultado se púede expresar en términos de severidad de riesgo ajustado, ("SRA") que se define como:

$$SRA = \frac{1}{r} \ln \left\{ E\{e^{rl}\} \right\}$$

o,

$$SRA = \frac{1}{r} \ln \left\{ \int_0^\infty e^{rl} f(l)\, dl \right\} \tag{9}$$

Supóngase que $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas.
Empezamos con el resultado bien conocido de función generatríz de momentos de la suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

$$E_{s/k}\{e^{rs}\} = \left[E\{e^{rl}\} \right]^k$$

$$CAR = \frac{1}{r} \ln E_k \left\{ E_{s/k}\{e^{rs}\} \right\}$$

$$CAR = \frac{1}{r} \ln \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} P(k)\,(e^{rSRA})^k \right\}$$

y de aquí, el resultado general:

$$CAR = \frac{1}{r} \ln \left| \sum_{k=0}^{\infty} P(k)\, e^{k r_{SRA}} \right|$$

Este resultado tan útil puede aplicarse inmediatamente a muchos casos especiales de distribuciones de frecuencia. Para la distribución binomial con parámetro p y N, P(k) es

$$P(k) = \frac{N!}{k!\,(N-k)!}\, p^k\,(1-p)^{N-k} \qquad \text{para} \quad k=0,1,\ldots,N$$

La fórmula resultante para CAR, es

$$CAR = \frac{N}{r} \ln \left| p\, e^{r_{SRA}} + (1-p) \right| \qquad (10)$$

Para la distribución de Poisson con parámetros F, P(k), es

$$P(k) = \frac{F^k\, e^{-F}}{k!} \qquad \text{para} \quad k = 0,1,2,\ldots$$

La fórmula resultante para CAR, es

$$CAR = \frac{F}{r} \left(e^{r_{SRA}} - 1 \right) \qquad (11)$$

Para la distribución binomial negativa con parámetros p y b, P(k) es

$$P(k) = \frac{(k+b-1)!}{(b-1)!\; k!}\, p^b\,(1-p)^k \qquad \text{para} \quad k = 0,1,2,\ldots$$

La media es $\frac{b(1-p)}{p}$ y la varianza es $\frac{b(1-p)}{p^2}$

La fórmula resultante para CAR es

$$CAR = \frac{b}{r} \ln \left| \frac{p}{1-(1-p)\,e^{rSRA}} \right| \qquad (12)$$

Ejemplo.-

El ejemplo numérico anterior (Tabla 2), fué de una distribución de forma de histograma. Supóngase ahora que la tabla representa una distribución de severidad en lugar de una distribución de pérdida agregada. Supóngase que la frecuencia está representada por una distribución de Poisson con valor esperado de .10 casos por año. El cálculo previo mostró que para un nivel de aversión al riesgo de $r = .1 \times 10^{-6}$, la severidad del riesgo ajustado es: SRA = .428 millones. Ahora, usando la ecuación (8), el CAR de la pérdida agregada es .04373 millones, comparado con una pérdida esperada de .036 millones.

En suma, hasta aquí hemos tratado con la medición de pérdida y la medición de riesgo, presentado fórmulas para el CAR de algunas formas útiles de distribuciones tanto de frecuencia como de severidad. Todos los resultados presentados fueron derivados de la ecuación (3), la fórmula general para CAR.

Curvas del Perfil del Riesgo.

El riesgo es fundamentalmente un concepto subjetivo y es, probablemente por eso que ha habido tanta disidencia al tratar de definirlo con la suficiente precisión para poder medirlo. Es necesario empezar con el concepto de nivel de aversión al riesgo antes de que el riesgo pueda ser definido. Usando la estructura desarrollada aquí, el riesgo se mide por su costo, CAR, una función de la aversión al riesgo. El "grado de lo riesgoso" puede ser definido en términos del radio de CAR-PE a PE

$$\frac{CAR-PE}{PE} \qquad (13)$$

donde PE es la pérdida esperada. Esto desplaza la influencia de la pérdida esperada y es similar a la medida estadística llamada coeficiente de variación (desviación estándar, dividida entre la pérdida esperada).

Sin embargo, CAR es todavía una función del nivel de aversión al riesgo r, e involucra, por tanto, elementos subjetivos. Esta subjetividad se puede manejar con efectividad con el siguiente mecanismo:

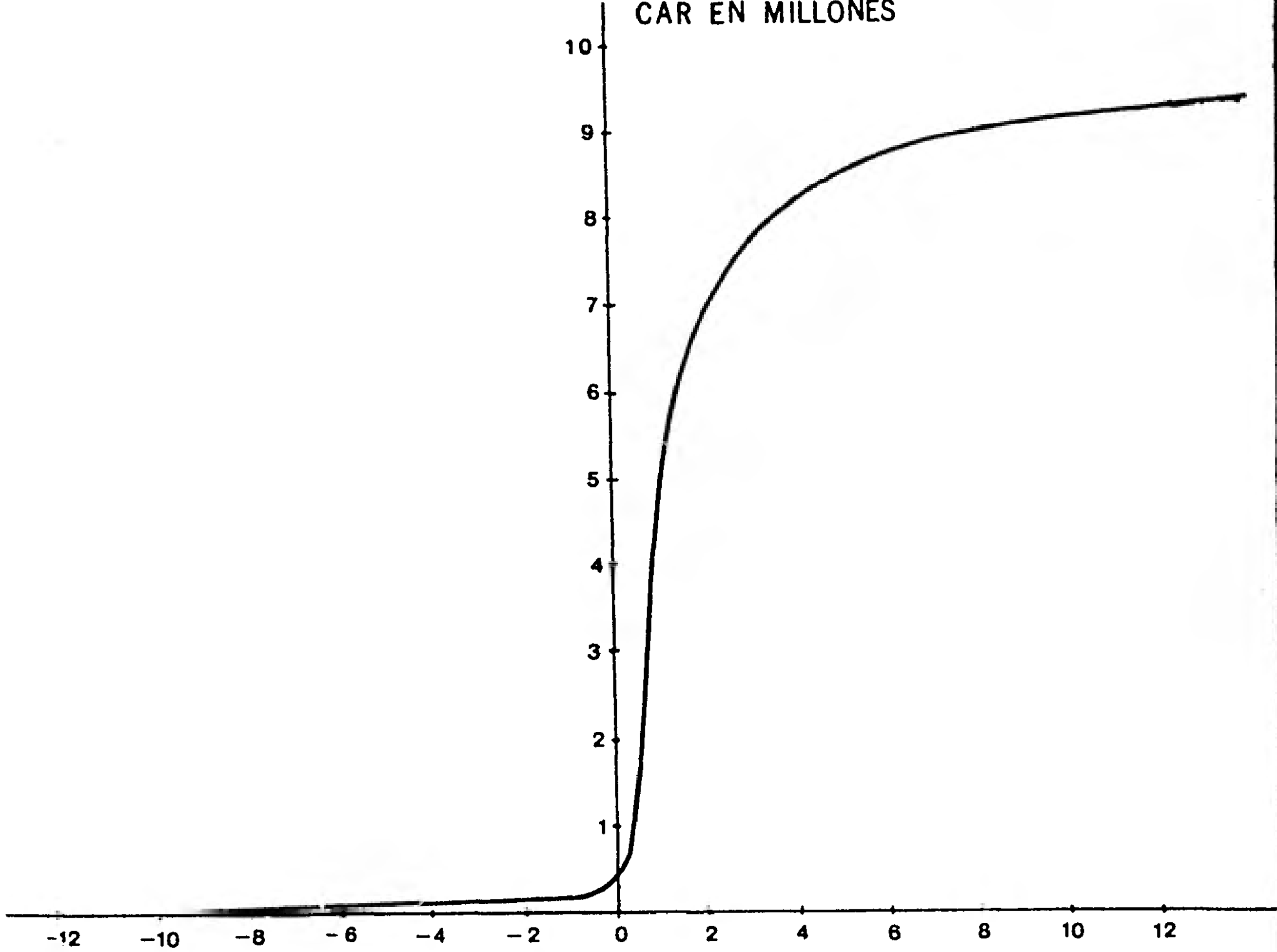
Una gráfica de CAR contra r puede desplegar el riesgo para todos los diferentes tomadores de decisiones. Entonces, la gráfica es una representación objetiva del riesgo. Todos los tomadores de decisiones que concuerden en las probabilidades de pérdida, obtendrán las mismas curvas del perfil del riesgo.

Se puede hacer una analogía a la medición física. El "color de un objeto no puede ser medido por un número, ya que el color es una reflexión de la luz incipiente. El color se puede definir en términos de una función de respuesta que específica la reflexividad de un objeto para cada longitud de onda de luz incipiente diferente".

Por analogía, CAR se puede ver como una "función de respuesta" a la situación de riesgo de todos los posibles niveles de aversión al riesgo (constantes). Es una propiedad de la situación de riesgo individual. Esta función de respuesta es una transformación logarítmica de la función generatríz de momentos. Las propiedades de la función generatríz de momentos demuestra que esta función de respuesta es una propiedad única de la situación de riesgo, codificando de una forma única todos los momentos de la distribución de probabilidad de pérdida. Entonces, cada situación de riesgo tiene una única curva de perfil del riesgo que transforma la información de la distribución de probabilidad en una información directamente aplicable a la toma de decisiones. El nombre "perfil del riesgo" parece justificado para esta curva.

Ejemplo.-

Para la distribución de histograma dada en el primer ejemplo, la curva está acotada hacia arriba por la pérdida más grande posible y hacia abajo por la pérdida más pequeña posible. La curva de perfil del riesgo cruza los ejes a una altura igual a la pérdida esperada. La curva muestra tanto los niveles de aversión al riesgo positivos como negativos aunque los manejadores prácticos de riesgo únicamente estarán interesados en los niveles positivos. La escala horizontal fué escogida para mostrar substancialmente toda la curva, ya que su significado es mostrar el valor de CAR para todos los miembros de la familia exponencial de las funciones de utilidad.



Gráfica No. 1

Propiedades de las Curvas del Perfil del Riesgo.

Sea PE la pérdida esperada, que es la media de la distribución de pérdida, $E\{\tilde{l}\}$,
Sea l_w el peor resultado de pérdida posible, (el más grande)
Sea l_B el mejor resultado de pérdida posible, (el más pequeño),

Propiedad 1.- La intersección (en el eje vertical) de la curva del Perfil del Riesgo.

La curva del perfil del riesgo intersecta el eje vertical a una altura igual a la pérdida esperada.

$$\lim_{r \to 0} \left\{ CAR(r) \right\} = \lim_{r \to 0} \left\{ \frac{\ln E\{e^{r\tilde{l}}\}}{r} \right\} = \lim_{r \to 0} \left\{ \frac{E\{\tilde{l}e^{r\tilde{l}}\}}{E\{e^{r\tilde{l}}\}} \right\} = E\{\tilde{l}\} = PE$$

Propiedad 2.- El valor más grande de CAR

$$\lim_{r \to \infty} \left\{ CAR(r) \right\} = l_w$$

Considérense las distribuciones de pérdida discretas, por simplicidad.
Sean $l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n$, n posibles resultados de pérdida.
La más grande l_w es la más pequeña l_B. Las probabilidades correspondientes son $p_1, p_2, \ldots. p_n$.

$$\lim_{r \to \infty} \{CAR(r)\} = \lim_{r \to \infty} \left| \frac{1}{r} \ln\left((e^{r l_w})(p_w + \sum_{i \neq w} p_i \, e^{r(l_i - l_w)})\right) \right|$$

$$= \lim_{r \to \infty} \left| l_w + \frac{1}{r} \ln\left(p_w + \sum_{i \neq w} p_i \, e^{r(l_i - l_w)} \right) \right|$$

Ya que todos los términos $(l_i - l_w)$ son estrictamente negativos, los términos exponenciales tenderán a cero mientras r crezca.

Entonces el CAR tiene un límite superior cuando la distribución de pérdida tiene un resultado más grande posible.

Propiedad 3.- El valor más pequeño de CAR

$$\lim_{r \to -\infty} \left| CAR(r) \right| = l_s$$

$$\lim_{r \to -\infty} \left| CAR(r) \right| = \lim_{r \to -\infty} \frac{1}{r} \ln \left| e^{r l_s}\left(p_s + \sum_{l \neq s} p_l \, e^{r(l_l - l_s)}\right) \right|$$

$$= l_s + \lim_{r \to -\infty} \frac{1}{r} \ln \left| p_w + \sum_{l \neq s} p_l \, e^{r(l_l - l_s)} \right|$$

Ya que todos los términos $(l_l - l_s)$ son estrictamente positivos, mientras los valores de r se consideren negativos, de nuevo los términos exponenciales tenderán a cero.

Propiedad 4.- Monotonicidad estricta para distribuciones de pérdida no-degeneradas.

El teorema 1 de Pratt demuestra que $r_1 > r_2$ implica $CAR(r_1) > CAR(r_2)$ para cualquier par de valores de r_1 y r_2.
$CAR(r)$ sería una función constante de r en el caso de una distribución de pérdida degenerada, teniendo toda probabilidad asociada con un resultado.

Estas cuatro propiedades demuestran que la curva del perfil del riesgo se incrementa monotónicamente desde ℓ_B, intersecta el eje vertical a la altura PE y crece hacia arriba hasta un valor máximo de ℓ_w.

CAPITULO IV

Presentación del Modelo

Diagrama de Lotería

Curva de utilidad y utilidad esperada

Costo Ajustado de Riesgo

Curva del perfil del riesgo

Ejemplo

Comentarios

IV: PRESENTACION DEL MODELO

Para formular el Modelo se requiere:

1) Elaborar un diagrama de lotería
2) Calcular la curva de utilidad y la utilidad esperada,
3) Calcular el Costo Ajustado de Riesgo, y
4) Graficar la curva del perfil del riesgo.

1. Diagrama de Lotería

Es la parte del Modelo que proporciona la manera de representar el problema. Agrupa la siguiente información:

a. Identificación de la "Aventura con Resultados Inciertos".
b. La lista de sus resultados posibles y de los niveles de utilidad asociados con cada uno de éstos.
c. La asociación de probabilidades para cada resultado. Estos pueden estimarse de diversas formas, ya sea mediante métodos apriorísticos basados en la experiencia o el juicio de los expertos, o empíricamente mediante el análisis estadístico de datos o la simulación por computadora.

2. Curva de Utilidad y Utilidad Esperada

Es la parte del Modelo que describe la manera de enfrentar el problema. Como se vió en el Capítulo II, la familia exponencial de funciones de utilidad es la más adecuada para el manejo del riesgo de una aventura. Entonces se procede a utilizar la fórmula dada por Freifelder (2) para la curva de utilidad.

$$U(x) = \frac{1}{r} (1 - e^{-rx})$$

donde:

r: es un parâmetro dado por cada tomador de decisiones y representa su índice dė aversión al riesgo.

$e^{(\ )}$: es una función exponencial.

En base a esta curva de utilidad se calculará la utilidad esperada con la fórmula:

$$UE = \sum_{i=1}^{n} p_i \; U(x_i) \tag{14}$$

3. Costo Ajustado de Riesgo

Es la parte del Modelo que permite la elaboración de los cálculos.

Se desea encontrar el valor de x que satisfaga $U(x) = UE$.

A este valor de x se le llamará Costo Ajustado de Riesgo (CAR).

Ya que $U(x) = \frac{1}{r}(1 - e^{-rx})$,

Desarrollando la igualdad

$$UE = \frac{1}{r}(1 - e^{-rx})$$

Se llega a la fórmula general

$$X = CAR = -\frac{1}{r} \ln \sum_{i=1}^{n} p_i \, e^{-r x_i} \qquad (15)$$

Que será utilizada para el cálculo del Costo Ajustado de Riesgo.

Curva del Perfil del Riesgo

Esta parte del Modelo permite la elaboración de la gráfica para representar el Perfil del Riesgo. El método para hacer la gráfica es el siguiente:

a. Encontrar el Costo Ajustado de Riesgo (CAR) para algunos valores alrededor e incluyendo el rango de r.

b. Graficarlo contra r.

Hasta aquí ha quedado descrito el modelo y a continuación se elabora un ejemplo siguiendo los pasos mencionados.

Ejemplo:

Se plantea una aventura de exploración

Siguiendo los pasos del Modelo:

1. Se elabora el Diagrama de Lotería

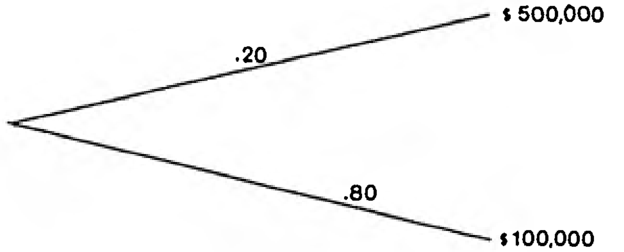
   a) Aventura: "Cavar un pozo de exploración petrolera a un costo de $100,000".

   b) La lista de sus resultados posibles asociados con la utilidad de cada uno, y

   c) Las probabilidades de cada resultado

Resultados	Probabilidades	Ganancias
Se descrubre un pozo con petroleo	.20	$500,000
Pozo seco	.80	$-100,000

Diagrama de Lotería



2. Cálculo de la Curva de Utilidad y la Utilidad Esperada.

Dada la fórmula

$$U(x) = \frac{1}{r} (1 - e^{-rx})$$

y suponiendo que para esta aventura el tomador de decisiones tiene un índice de aversión al riesgo $r = 10^{-6}$, se calcularán las utilidades de cada posible resultado, reemplazando x por la ganancia en cada uno de ellos;

$$\begin{aligned} U(500{,}000) &= 1'000{,}000 (1 - e^{-.5}) \\ &= 10^6 (1 - e^{-.5}) \\ &= 393{,}469 \text{ utilidades} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(-100{,}000) &= 10^6 (1 - e^{.1}) \\ &= -105{,}170 \text{ utilidades} \end{aligned}$$

Se calculará ahora la utilidad esperada:

$$\begin{aligned} UE &= (p_1) (U(x_1)) + (p_2) (U(x_2)) \\ &= (.20)(393{,}469) + (.80)(-105{,}170) \\ &= 78{,}693 - 84{,}136 \\ &= -5{,}442 \text{ utilidades} \end{aligned}$$

3. Costo Ajustado de Riesgo

Se desea encontrar ahora el valor de x que satisfaga

$$U(x) = -5,442 = UE$$

Substituyendo:

$$
\begin{aligned}
x &= CAR \\
p_1 &= .20 \\
p_2 &= .80 \\
X_1 &= 500,000 \\
X_2 &= -100,000 \\
r &= 10^{-6}
\end{aligned}
$$

en la fórmula (15)

$$
\begin{aligned}
CAR &= -10^6 \ln (.20(e^{-10^{-6}(500000)}) + .80(e^{10^{-6}(-100000)})) \\
&= -10^6 \ln (.2e^{-.5} + .8e^{-.1}) \\
&= -10^6 \ln (.2\ (.606531) + .8\ (1.105171)) \\
&= -10^6 \ln (1.0054429) \\
&= -10^6 \times .005428 \\
&= \$-5,428
\end{aligned}
$$

El valor de la aventura para este tomador de decisiones es:-$5,428

El valor de la aventura resulta negativo, esto indica que tomarla representa demasiado riesgo.

Curva del Perfil del Riesgo

Es posible que no se conozca exactamente la r, pero sí el rango en el que se encuentra en base a experiencias pasadas. Así, por ejemplo, se puede suponer que el nivel de aversión al riesgo de la Compañía que está evaluando este proyecto, a la cual llamaremos "XYZ", se encuentra en el rango (0.001,0.000,002). Conociendo este rango es posible observar el comportamiento gráficamente.

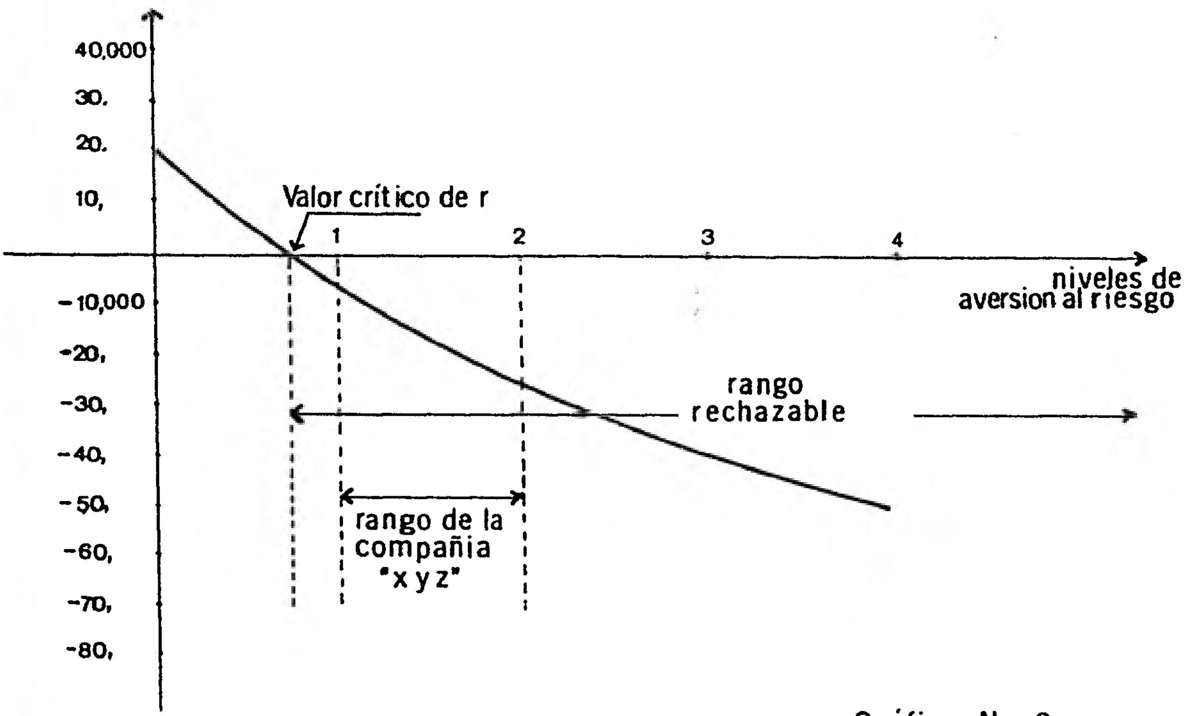
Gráfica de la curva del perfil del riesgo.

Siguiendo el método descrito en el Modelo, para este ejemplo:

Utilizando la fórmula (15) para el Costo Ajustado de Riesgo, se encuentran, para algunos valores de r, los siguientes resultados:

Valores de r	CAR ($)
0.01×10^{-6}	19,712
0.05×10^{-6}	18,568
0.10×10^{-6}	17,154
0.50×10^{-6}	6,456
1.00×10^{-6}	-5,428
2.00×10^{-6}	-24,727
5.00×10^{-6}	-57,845
10.00×10^{-6}	-77,747

Para eliminar los ceros, se tomará como unidad 1 millón de pesos en lugar de un peso; por lo tanto, r también se tomará a escala. De esta forma, $r = .2 \times 10^{-6}$ se convierte en $r = 2$ y el resultado, CAR, será dado en millones de pesos.



Gráfica No. 2

Con esta herramienta es mucho más fácil observar lo peligroso que puede ser para la Compañía "XYZ" llevar a cabo este proyecto. Como ya se mencionó, los valores negativos de CAR en el rango de las r's representan demasiado riesgo.

Valor Crítico de r (r_c)

r toma su valor crítico cuando el Costo Ajustado de Riesgo es igual a cero (CAR = 0); esto significa que existe un rango de r's que contiene a r_c y que para los valores a la izquierda de r_c, la aventura resulta positiva y para los de la derecha, negativa. Si el tomador de decisiones en cuestión tiene este rango de r's, le será más difícil decidir si toma o no el riesgo. En este caso será necesario acotar más la r para volver más real el valor de CAR.

Método para encontrar r_c

La búsqueda de r_c se hace por el método de prueba y error, dando valores a r de tal manera que CAR se vaya aproximando a cero.

Así, para nuestro ejemplo:

Si r_c = .75 millones, CAR = $513 ∴ .75 es muy pequeño,
Si r_c = .76 millones, CAR = $76 ∴ .76 es muy pequeño,
Si r_c = .765 millones, CAR = $-42 ∴ .765 es muy grande,

Así, consecutivamente, se encuentra que

Si r_c = .76322 millones
CAR = $-36 ó CAR = $+36
lo cual está suficientemente cerca de cero.

Por lo tanto, suponiendo que otra empresa quisiera evaluar la misma aventura, también podría hacer uso de esta gráfica aceptando la aventura si su r está entre cero y 0.76322 millones y rechazándola si su r es mayor que 0.76322 millones.

Comentarios

1. La Curva del Perfil del Riesgo permite dar una medida más objetiva del riesgo ya que provee diferentes niveles de aversión al riesgo a lo largo de todo el rango de las r's de manera que uno puede apreciar su comportamiento en cualquier intervalo seleccionado.

2. La Curva del Perfil del Riesgo es la base para controlar el riesgo, al comparar CAR en cada opción de decisión posible.

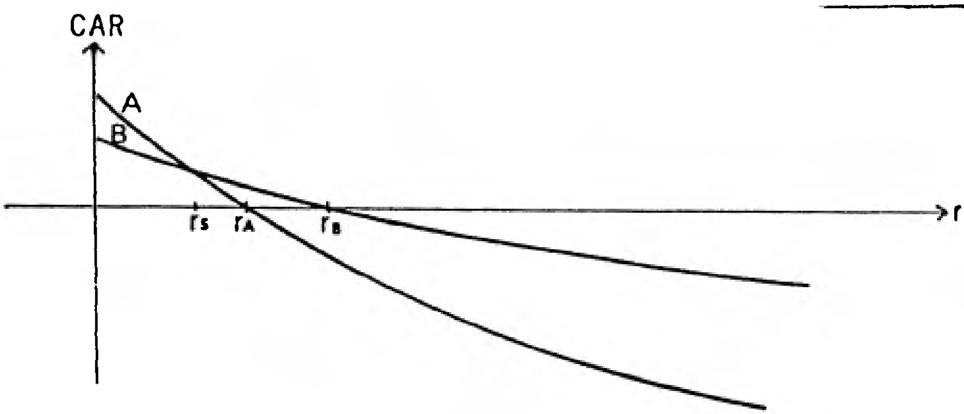
3. Las características de riesgo de una situación riesgosa pueden expresarse en términos de curvas del perfil del riesgo. Esta es una buena ayuda para el tomador de decisiones aún en el caso de que no se haya establecido su nivel de aversión al riesgo, pues muestra la dimensión del riesgo explícitamente.

4. Muchas decisiones no son muy sensibles al valor <u>preciso</u> de la r. Por ejemplo, en la gráfica No. 2 del Perfil del Riesgo, si se supiera únicamente que r estaba en el intervalo $0 < r < r_c$, entonces serían obvias las mejores decisiones. La curva del perfil del riesgo muestra la sensitividad de la decisión a r. Además, como algunas decisiones son sensitivas a r mientras que otras no lo son, si los beneficios son lo sufientemen -

te importantes, existirá la motivación de especificar la r. En una situación de decisión de una organización, claramente la r es un parámetro de la política gerencial, por lo que su valor debe ser fijado por los niveles jerárquicos superiores o por el individuo que soporta la responsabilidad de manejar el riesgo. Es esta persona quien debe soportar la prerogativa y la responsabilidad de fijar y mantener una política de tolerancia al riesgo.

La Curva del Perfil del Riesgo es una herramienta muy útil para la comparación de proyectos. Dentro de la misma gráfica se puede trazar la curva de otra aventura y observar como se comporta en el rango de las r's, de manera que la gráfica refleje la mejor opción dentro del intervalo o punto de aversión al riesgo seleccionado.

Por ejemplo, suponiendo que en la siguiente gráfica estén representados
El proyecto A con Perfil del Riesgo A y
El proyecto B con Perfil del Riesgo B



Grafica No. 3

Se puede concluir lo siguiente:

a) El proyecto A tiene un valor esperado más grande que el proyecto B, por lo tanto, su perfil empieza más arriba.

b) El proyecto A tiene un peor resultado más negativo que el de B, por lo tanto, eventualmente, su perfil llega más abajo.

c) Los 2 perfiles se intersectan entre sí una sola vez en r_s, por lo tanto,
Si la r es menor que r_s, se preferirá A
Si la r es mayor que r_s, se preferirá B

d) El perfil de A cruza el eje en r_A, por lo tanto, si la r excede r_A, se rechazará A.

e) El perfil de B cruza el eje en r_B, por lo tanto, si la r excede r_B, se rechazará B.

f) r_B es mayor que r_A, por lo tanto, el proyecto B es menos riesgoso que el proyecto A.

Otra manera de establecer la comparación es con el formato de la regla de decisión:

- Si la r es menor que r_s, A se prefiere a B, pero aún son elegibles los dos.

- Si la r excede a r_s pero es menor que r_A, B se prefiere a A, pero aún son elegibles las dos.

- Si la r excede a r_A pero es menor que r_B, se toma A solamente.

- Si la r excede a r_B, se rechazan las dos.

Esto se resume en la siguiente tabla

Rango de r	Acción
$0 < r < r_s$	tomar A o B
$r_s < r < r_A$	tomar A o B·
$r_A < r < r_B$	tomar B
$r_B < r$	ninguna

La evaluación de la aventura por medio del valor esperado, resulta en una cantidad mucho mayor que con el Costo Ajustado de Riesgo, como se demuestra a continuación.

Aplicando la fórmula del Valor Esperado

$$VE = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

y reemplazando: $p_1 = .20$, $x_1 = 500{,}000$
$p_2 = .80$, $x_2 = -100{,}000$

$$\begin{aligned} VE &= (.20)(500{,}000) + (.80)(-100{,}000) \\ &= (100{,}000 - 80{,}000) \\ &= \$20{,}000 \end{aligned}$$

El valor esperado produce un resultado positivo, lo cual implicaría la aceptación de la aventura. De aquí que, una empresa neutral al riesgo que evalúa sus aventuras con el valor esperado tomaría el riesgo y una con índice de aversión al riesgo $r = 10^{-6}$, lo rechazaría.

7. El Costo Ajustado de Riesgo (CAR), mide el riesgo mostrando el valor del descuento del riesgo.

8. Consistencia de la tolerancia al riesgo.- La teoría de Utilidad (preferencia de riesgo) prueba que el único comportamiento lógico es, para un mismo individuo o empresa, aplicar la misma función de utilidad para todas las aventuras. Por lo tanto, con base en la Teoría de Utilidad, se debe usar el mismo nivel de aversión al riesgo r para todas las aventuras.

9. Cabe aclarar que la r es una variable exógena, cuyo valor es objeto de decisión política y que no existe un valor exacto susceptible de cálculo mediante deducciones formales. La Teoría de Utilidad no dice que nivel de aversión al riesgo debe utilizarse. Así como se tiene la prerogativa de fijar la r, también se tiene la de cambiarla tan frecuentemente como sea necesario. Por ejemplo, hay situaciones en las que sería razonable cambiarla cada año, o bien, los cambios pueden ser el producto del reconocimiento de la dinámica prevaleciente en el sistema económico (v. gr. tasas de interés, inflación, etc.)

10. Ya que no se tiene la experiencia de usar la r como un parámetro de control, inicialmente se podría intentar deducir su valor de tres diferentes formas:

a) De los valores de r que han estado implicados en decisiones de riesgo anteriores, elaborando la gráfica de las curvas del perfil del riesgo correspondientes.

b) Dándole el valor del recíproco de la cantidad que se puede invertir en el proyecto en cuestión.

c) Despejándola en la función de utilidad individual usada en experiencias pasadas.

11. Cabe resaltar el hecho de que la r es el único parámetro que debe calcular el tomador de decisiones.

12. Es importante hacer notar que cualquier empresa tiene aversión al riesgo y de aquí que la r sea un parámetro indispensable en la toma de decisiones para las aventuras riesgosas.

CAPITULO V

Aplicaciones

a. Presupuestos de Capital
   y Selección de proyectos

b. La selección óptima

c. Comparación de las carteras
   a y b

Conclusiones

V: APLICACIONES

a. Presupuestos de Capital y Selección de Proyectos.

En el ejemplo del Capítulo anterior se ha evaluado con un solo proyecto donde se ha empleado la regla de decisión: "Acéptese si CAR es positivo". En la presente aplicación será incluída la restricción de que el Capital que se va a invertir en el proyecto es limitado, de tal forma, que la regla de decisión será cambiada para tomar en cuenta los recursos limitados de Capital, ya que de no ser así el gasto podría ascender demasiado.

Se usará un criterio de aceptación más estricto como

$$\frac{CAR}{C} \geq \text{algún valor límite}$$

Donde: C es el Costo del Proyecto y
El valor límite es un porcentaje (10%, 20%, etc.)

El hecho de usar un criterio de aceptación de este tipo es importante cuando el Capital es escaso porque permite asignar a cada proyecto una jerarquía que, posteriormente, hará posible la selección de aquellos proyectos que puedan tomarse sin exceder el límite del Capital. Estos proyectos seleccionados determinarán lo arriesgado que es la empresa. El riesgo tomado y el resultado del proyecto ayudarán a determinar cuánto Capital se podrá aumentar en las actividades futuras. Resumiendo, la decisión de aumento de Capital será determinada por las características de riesgo/resultado del negocio que a su vez estarán determinadas por las medidas empleadas para jerarquizar los proyectos. Si para especificar estas medidas se emplea un método que no considere el riesgo, entonces se puede tender a escoger únicamente actividades con alto grado de riesgo que volverían muy arriesgado el negocio. Desafortunadamente, las medidas empleadas hasta ahora para jerarquizar los proyectos, no consideran el riesgo; fueron desarrolladas en un ambiente de manufactura y producción donde el riesgo no era el asunto más importante. De aquí que, es necesaria una nueva medida para jerarquizar inversiones que consideren el riesgo. Asímismo, el descuento del riesgo debe ser proporcional al riesgo real y no al riesgo percibido por un inversionista potencial mal informado. El riesgo debe ser considerado aún en los más altos niveles de decisiones estratégicas.

La exploración petrolera podría ser una actividad menos riesgosa si se comprendieran y utilizaran los métodos para controlar el riesgo de una forma más eficiente. Probablemente entonces, se pudiera atraer más capital y tasas más favorables.

Requerimientos de entrada.

1. Nivel de aversión al riesgo (r)
2. Nivel de presupuesto (p)
3. La lista de todos los proyectos disponibles

Ejemplo:

Supóngase que

$r = .80$ millones
$p = \$1.25$ millones
y que se tiene una lista de 11 posibles proyec-
tos.

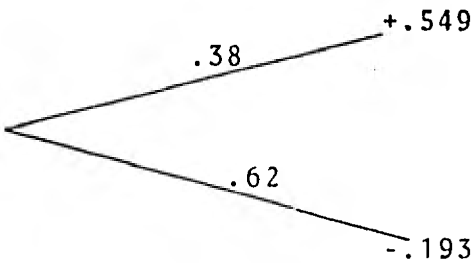
El método consiste en:

1. Calcular Cp = Costo presupuestado.

2. Calcular el Costo Ajustado de Riesgo por peso (CARPP) del costo presupuestado.

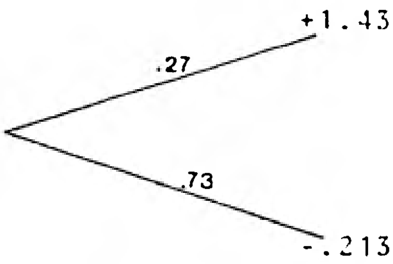
3. Repetir los pasos anteriores para todos los pro-
yectos elegibles y sintetizar los resultados.

Proyecto A



VE = .088,960 CAR = .040,082
VEPP = .461 CARPP = .208
r_c = 1.5710

Proyecto B

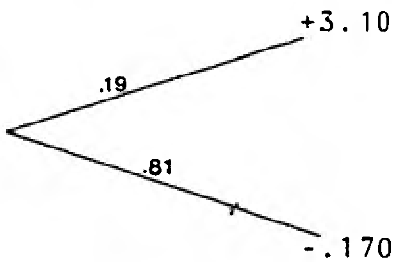


VE = .230610 CAR = .061,980

VEPP = 1.083 CARPP = .291

r_c = 1.2650

Proyecto C

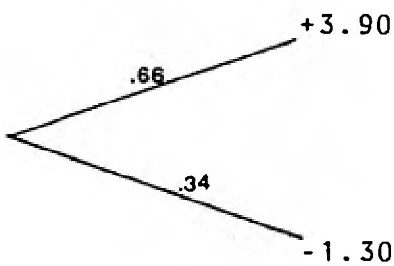


VE = .451,300 CAR = .072,151

VEPP = 2.655 CARPP = .424

r_c = 1.2130

Proyecto D

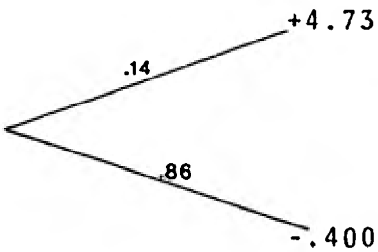


VE = .318,200 CAR = -.214,826

VEPP = .796 CARPP = -.787

r_c = .2840

Proyecto E

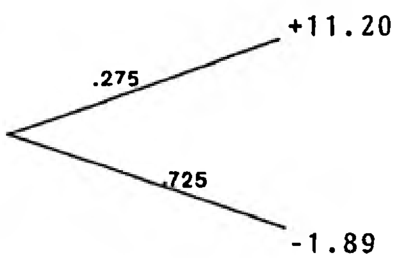


VE = .318,200 CAR = -.214,826

VEPP = .796 CARPP = -.537

r_c = .2840

Proyecto F

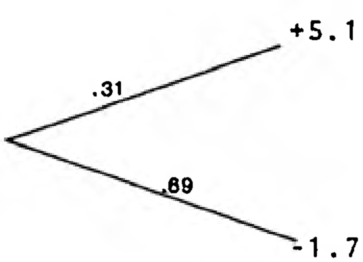


VE = 1.709,750 CAR = -1.488,000

VEPP = .905 CARPP = -.787

r_c = .1383

Proyecto G

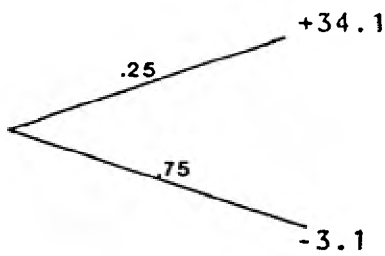


VE = .408,000 CAR = -1.238,605

VEPP = .240 CARPP = -.729

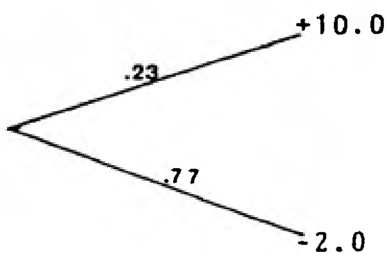
r_c = .0901

Proyecto H



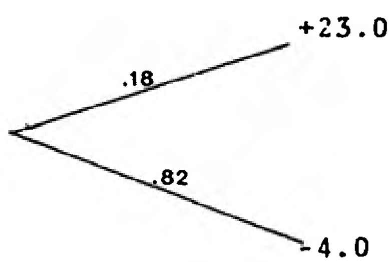
VE = 6.200 CAR - 2.740,397
VEPP = 2.00 CARPP = -.8840
r_c = .0888

Proyecto I



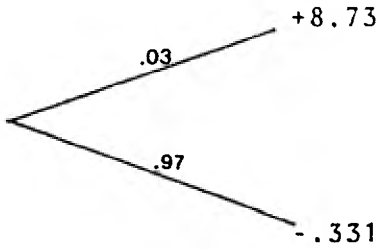
VE = .760,000 CAR = -1.673,319
VEPP = .380 CARPP = -.837
r_c = .0701

Proyecto J



VE = .860,000 CAR = -3.751,936
VEPP = .215 CARPP = -.938
r_c = .0177

Proyecto K



VE = -.059,170 CAR = -.292,953

VEPP = -.179 CARPP = -.885

r_c = negativo

La lista anterior de los 11 proyectos está en orden de lo arriesgado de cada uno, como lo indica r_c. Los proyectos menos riesgosos son los primeros, mientras que los últimos son los más riesgosos.

4. Ordenar los proyectos jerárquicamente de acuerdo a CARPP de arriba hacia abajo y anotar el gasto en cada uno hasta agotar el capital

Esto puede hacerse en una tabla, en donde además, se anotará el porcentaje de participación:

Aventura	CARPP	Costo del Proyecto	Gasto Deseado	Participación
C	.424	.170	.170	100%
B	.291	.213	.213	100%
A	.208	.193	.193	100%
D	.009	1.300	.674	51.85%
E	-.537	.400	0	0
G	-.729	1.700	0	0
F	-.787	1.890	0	0
I	-.837	2.000	0	0
H	-.884	3.100	0	0
K	-.885	.331	0	0
J	-.938	4.000	0	0
TOTAL		15.297	1.250	

Nota: La participación de 51.85% del proyecto D se permite para acabarse el presupuesto. El CAR de esta participación es .421,247. El CARPP es .625

b. Mejoramiento de Carteras por "participación óptima"

Esta es una modificación de la aplicación anterior en la que se calcula la participación óptima de cada uno de los proyectos en lugar de participaciones fijas.

Se introduce el parámetro α que representa la participación óptima. Para cada nivel de aversión al riesgo, existe una participación óptima en cada proyecto; mientras mayor sea el nivel de aversión al riesgo, menor será la participación.

Ya que el tener un porcentaje de participación en un proyecto implica que se va a tener el mismo porcentaje de participación en las utilidades, si α es el porcentaje de participación en el proyecto, αv_i será el porcentaje de participación de las utilidades para el i-ésimo posible resultado. De esta forma, la fórmula (15) se modifica de la siguiente manera:

$$CAR = -\frac{1}{r} \ln \sum_{i=1}^{n} p_i e^{-r\alpha v_i}$$

Con esta fórmula se encontrará la α óptima, variando α en diferentes porcentajes (digamos 10%, 20%, 30%, etc.) y calculando los valores de CAR para cada uno de ellos. La α será acotada tanto como se desee, hasta encontrar el CAR más alto. El valor correspondiente de α cuando CAR alcance su valor máximo, será el mejor porcentaje de participación.

Método:

1. Calcular la participación óptima (α) para cada proyecto.

2. Calcular el CAR de la participación óptima (CAR (α)).

3. Calcular la participación del costo (αC)

4. Calcular CARPP = $\frac{CAR(\alpha)}{\alpha C}$

Usando el ejemplo de la aplicación anterior y haciendo los cálculos pertinentes, se obtienen los siguientes resultados:

Aventura	CARPP	Costo	Gasto	Participación
C	1.082	.094,452	.094,452	55.56%
H	.853	.135,470	.135,470	4.37%
D	.796	.550,550	.550,550	42.35%
B	.491	.147,396	.147,396	69.20%
F	.417	.146,097	.146,097	7.76%
E	.364	.063,840	.063,840	15.96%
A	.223	.180,729	.112,191	58.13%
I	.182	.083,600	0	0
G	.117	.093,330	0	0
J	.104	.043,200	0	0
K	0	0	0	0
TOTAL			1.250	

Nota: El proyecto A tiene una mejor participación de 93.64%, sin embargo, el capital se agota con el 58.13% de participación. Con esta participación, el CAR es .034,730 y el CARPP es .310

Comparación de las carteras a y b.

En la siguiente tabla se muestran algunos valores relevantes de las carteras completas a y b.

	Cartera a	Cartera b
Número de proyectos	4	7
Valor esperado total	1.876,312	1.818,827
Costo Ajustado de riesgo total	.595,460	.847,303
Probabilidad total de pérdida	.1246	.0583
CARPP de la cartera completa	.476	.678

Al hacer el análisis de los resultados mostrados en la tabla se puede observar que la cartera b tiene un valor esperado ligeramente más pequeño que la cartera a, pero un Costo Ajustado de Riesgo mucho más grande.

De esta manera se han presentado, en una forma global, los resultados obtenidos del análisis, lo cual permite evaluar de una forma objetiva carteras completas de inversión.

CONCLUSIONES

Las funciones de utilidad exponencial hacen posible una forma útil de análisis de riesgo basada en las curvas del perfil del riesgo. Estas curvas compilan todas las propiedades de las distribuciones de probabilidad representadas y permiten una comparación significativa de proyectos riesgosos de una manera muy fácil de entender por los tomadores reales de decisiones.

El Modelo presentado en esta tesis ha demostrado ser aplicable a la evaluación de proyectos simples, a la selección de la mejor opción entre varios proyectos y a la selección de la mejor cartera.

Se ha demostrado, asímismo, que con el uso de un solo parámetro la labor de la toma de decisiones en cuanto a proyectos riesgosos se refiere, se simplifica de una forma notable.

El Modelo es flexible. Se pueden incluír los parámetros necesarios como se ha hecho en las dos aplicaciones que se presentan.

Cabe mencionar que es factible ampliar el modelo de tal manera, que permita analizar carteras completas de inversión de acuerdo con los objetivos del propio tomador de decisiones (p.ej. optimización del capital a invertir en una cartera o grupo de carteras) .

Aunque en esta tesis no se han elaborado estas metodologías es posible que se desarrollen en futuros trabajos, ya sean de tesis o en el campo profesional.

FUENTES CONSULTADAS

1. Allen, T.C., y R.M. Duval, A Theoretical and Practical Approach to Risk Management, Artículo 1, "A Panorama of the Risk Management Process", Risk and Insurance Management Society, New York, 1971.

2. Freifelder, L.R., A Decision Theoretic Approach to Insurance Ratemaking. S.S. Huebner Foundation Monograph No. 4. Wharton School, University of Pennsylvania. Distribuído por Richard D. Irwin, Inc., Homewood, Illinois, 1976.

3. Haehling von Lanzenauer, C. y D. Wright, "Selecting Rational Insurance Coverage", Zeitschrift für Operations Research, Vol. 19, 1975, pags. 49-62

4. Head, G.L., "Forecasting in Risk Management", Risk Management, Marzo, 1977.

5. Neter, J., C.A. Williams, y G.A. Whitmore, "Optimality of Independent Decision Making for two Independent Risk Situations", Decision Sciences, Vol. 1, Nos. 1 y 2, Enero y Abril, 1970.

6. Pratt, J.W., "Risk Aversion in the Small and in the Large", Econometrica, Vol. 32, No. 1, Enero 1964, Pags. 122-136.

7. Shpilberg, D., y Richard DeNeufville, "Use of Decision Analysis for Optimizing Choice of fire Protection and Insurance: An Airport Study", Journal of Risk and Insurance, 1975.