UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DEL PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDAD LINEAL, Y SU RESOLUCION EMPLEANDO EL METODO DE C.E.LEMKE.

T E S I S

Que para obtener el título de:

A C T U A R I O

P r e s e n t a :

UBALDO ALCALA GAYTAN

México, D. F. 1981

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

CONTENIDO

INTRODUCCION

El Problema de Complementaridad Lineal y el método de C.-E.Lemke para resolverlo, es un modelo matemático de optimización de fácil manejo, del que se puede asegurar que es posible estructurarlo para resolver al menos los siguientes tres tipos de problemas: el problema de programación lineal primal-dual factible, el problema de programación cuadrática, y los juegos bimatriciales. El objetivo de este trabajo es exponer con detalle en qué consiste este modelo, cómo debe estructurarse para resolver los problemas que se han señalado anteriormente, y qué se puede decir respecto a la existencia de soluciones al aplicarlo.

Dos artículos son los que proporcionan los resultados esenciales que son desarrollados detalladamente en este trabajo. El primer artículo es "Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming"*[1] en el que C.E.Lemke expone un método para dar solución al Problema de Complementaridad Lineal. El segundo artículo es "Complementary Pivot Theory of Mathematical Programming"*[2] cuyos autores son R.W.Cottle y G.B.Dantzing, quienes mediante la definición de un problema equivalente al Problema de Complementaridad Lineal, llamado Problema --

---

*[1] {13}

*[2] {3}

Fundamental, muestran cómo debe estructurarse este último para dar solución a los tres tipos de problemas que se han mencionado en el párrafo anterior; además, demuestran la existencia de soluciones al aplicar el método de Lemke a ciertos tipos de Problemas Fundamentales. Las demás referencias bibliográficas actuan como soporte de estos dos artículos.

Este trabajo consta de cuatro capítulos y dos apéndices. En el Capítulo I se expone en qué consiste el Problema de Complementaridad Lineal, y cómo se define a partir de éste un problema equivalente llamado Problema Fundamental, que será el que consideraremos a lo largo de este trabajo. Además, se dá una idea geométrica del Problema Fundamental, que será útil para comprender los resultados que se exponen en capítulos posteriores.

El Capítulo II trata de cómo y porqué es posible estructurar el Problema Fundamental para resolver problemas de programación lineal primal-dual factibles, los problemas de programación cuadrática, y los juegos bimatriciales.

En el Capítulo III se expone el método de Lemke para resolver el Problema de Complementaridad Lineal. Se parte de un ejemplo geométrico sencillo que motiva la idea del método de Lemke. Posteriormente, mediante resultados de Programación Lineal y el teorema de Lemke que justifica su método, se obtiene un algoritmo para resolver el Problema Fundamental.

En el Capítulo IV se muestra cómo es posible dar inicio al método de Lemke para la búsqueda de soluciones que resuelvan a diferentes tipos de Problemas Fundamentales. Así mismo, se trata los resultados de existencia de soluciones al aplicar este método. Los Apéndices 1 y 2 son complemento de este capítulo.

CAPITULO I

EL PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDAD LINEAL

1-1. INTRODUCCION

El Problema de Complementaridad Lineal fue identificado a principios de la década de los sesentas. Gracias al Teorema de Kuhn-Tucker que establece las condiciones necesarias de optimalidad para problemas de programación matemática, y a la prueba constructiva (debida a C.E.Lemke y J.T.Howson Jr.) que demuestra la existencia de puntos de equilibrio para juegos bimatriciales, se observó que el Problema de Complementaridad Lineal puede ser estructurado adecuadamente para resolver otro tipo de problemas. Es por esto que es importante desarrollar técnicas que lo solucionen, y determinar bajo qué condiciones esto es posible o si el Problema de Complementaridad Lineal planteado no tiene solución.

1-2. DEFINICION DEL PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDAD LINEAL

Sea F un mapeo de $\mathbb{R}^m$ en sí mismo; es decir, una asociación

$$F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

que adjunta a todo elemento de $\mathbb{E}^m$ un elemento de $\mathbb{E}^m$. El Problema de Complementaridad con respecto al mapeo F es el de encontrar solución al sistema

$$x \geq 0, \quad F(x) \geq 0, \quad \langle x, F(x) \rangle = 0,$$

donde F(x) es la imagen de x bajo F, y $\langle \cdot , \cdot \rangle$ es el producto escalar ordinario en $\mathbb{E}^m$,

$$\langle x, F(x) \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i f_i(x)$$

(x_i y $f_i(x)$, i=1,..,m, son las componentes de x y F(x) respectivamente); es decir, el Problema de Complementaridad es el de encontrar un vector x no-negativo, cuya imagen F(x) bajo el mapeo sea no-negativa y ortogonal a él.

El Problema de Complementaridad se clasifica dependiendo del tipo de mapeo que sea F. Cuando este es afín a la forma

$$F(x) = q + Mx,$$

donde q es un vector de números reales de m componentes y M es una matriz real de m x m, el respectivo Problema de Complementaridad se dice que es Lineal, y es no-lineal si F no es afín a esta forma.

1-3. DEFINICION DEL PROBLEMA FUNDAMENTAL

El Problema de Complementaridad Lineal ha sido, hasta el momento, la clase de problemas de complementaridad a la que --

los investigadores han enfocado mayor atención*. Entre ellos podemos mencionar a C.E.Lemke, R.W.Cottle, G.B.Dantzing y J.T. Howson, quienes han desarrollado e implementado técnicas para resolver el Problema.

Consideremos el mapeo de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^m$,

$$F : z \to q + Mz,$$

con q y M definidos como antes. Observemos que existe un apareamiento entre las componentes de un vector $z \in \mathbb{R}^m$ y su imagen $q + Mz$ también en $\mathbb{R}^m$. Sea $q_1 + M_1 z, \ldots, q_m + M_m z$ las funciones componente de $q + Mz$, entonces z_i y $q_i + M_i z$, $i = 1, \ldots, m$, son llamadas variables complementarias, y una solución $\bar{z}$ al Problema de Complementaridad Lineal:

$$z \geq 0, \quad q + Mz \geq 0, \quad \langle z, q + Mz \rangle = 0,$$

es llamada solución complementaria. El vector $\bar{z}$ es una solución factible si cumple que $\bar{z} \geq 0$, $q + M\bar{z} \geq 0$.

La siguiente definición del vector de variables de holgura, w, será de gran utilidad. Sea

$$w = q + Mz, \quad w \geq 0,$$

---

* (5,p 102)

Observemos que el Problema de Complementaridad Lineal y el Problema Fundamental son equivalentes; sin embargo, con respecto a la definición de solución complementaria, para uno y para otro, la diferencia es esencial. Mientras en el Problema de Complementaridad Lineal una solución que satisface sus condiciones es llamada solución complementaria, en el Problema Fundamental, una solución que cumple sus condiciones es llamada solución complementaria factible. Así, una solución complementaria del Problema de Complementaridad Lineal resuelve el Problema Fundamental, pero una solución complementaria del Problema Fundamental no necesariamente resuelve el Problema de Complementaridad Lineal; además, debe ser factible para hacerlo.

Esta diferencia tiene como objetivo facilitar la nomenclatura de soluciones, que no siendo factibles, de alguna forma estarán involucradas en la obtención de soluciones del Problema Fundamental, como veremos posteriormente.

1-4.IDEA GEOMETRICA DEL PROBLEMA FUNDAMENTAL

Dado el Problema Fundamental (1-1), (1-2) y (1-3), como sabemos, un vector $\bar{z}$ es solución factible si satisface (1-1) y (1-2). Sea

$$Z = \{ z \in \mathbb{R}^m \mid z \geqq 0, \quad q + Mz \geqq 0 \}$$

el conjunto de soluciones factibles. Este es un conjunto convexo, pues resulta de la intersección de los semiespacios cerrados

$$W_i = \{ z \in \mathbb{E}^m \mid q_i + M_i z \geqq 0 \}, \quad i = 1,.., m,$$

$$Z_i = \{ z \in \mathbb{E}^m \mid z_i \geqq 0 \}, \quad i = 1,.., m,$$

que son conjuntos convexos. Z será llamado región de soluciones factibles del Problema Fundamental (1-1), (1-2) y (1-3).

Una ecuación frontera es la que resulta de considerar la igualdad en vez de la desigualdad que define el semiespacio. De esta forma, una solución factible se encuentra en la ecuación frontera del semiespacio W_i cuando $w_i = q_i + M_i z = 0$, o bien, se encuentra en la ecuación frontera del semiespacio Z_i cuando $z_i=0$.

Un punto extremo de Z es una solución factible que no es combinación lineal convexa de otras dos soluciones factibles.

Una arista de Z es un segmento de línea recta que une a dos puntos extremos de tal forma, que ningún punto en el segmento se pueda expresar como una combinación lineal convexa - de otros dos puntos de Z, que no estén en el segmento. Una arista es cerrada si incluye los puntos extremos a los que es adyacente, y es abierta si no los incluye.

Un rayo es una arista abierta de Z adyacente a un punto - extremo y no acotada.

Consideremos ahora un ejemplo geométrico para analizarlo. Supongamos un mapeo $F : z \to q + Mz$ que va de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$. El Problema Fundamental es el de encontrar una solución que satisfaga (1-1), (1-2) y (1-3), donde (1-1) es tal que

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_1^1 & M_1^2 & M_1^3 \\ M_2^1 & M_2^2 & M_2^3 \\ M_3^1 & M_3^2 & M_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

La región de soluciones factibles es el conjunto

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \geqq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_1^1 & M_1^2 & M_1^3 \\ M_2^1 & M_2^2 & M_2^3 \\ M_3^1 & M_3^2 & M_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \geqq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Supongamos que al graficar el conjunto Z obtenemos la región cerrada y acotada que se muestra en la figura 1-4-I.

Caracterizaremos ahora los diferentes puntos de Z empleando sus holguras respecto a las ecuaciones fronteras de los semiespacios W_i y Z_i, $i = 1,.., m$. Esto es, dada una solución $\bar{z}$,

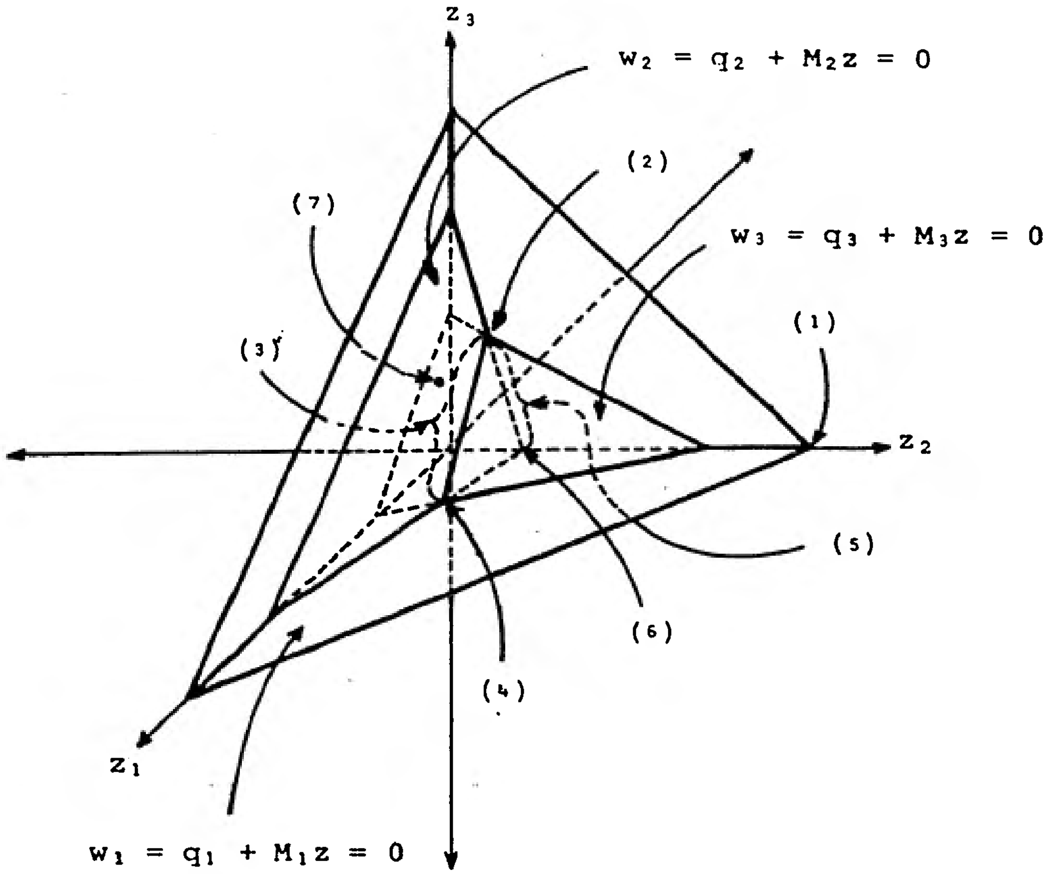


FIGURA 1-4-I

si ésta se encuentra en el semiespacio Z_i, pero no en su frontera, entonces $\bar{z}_i > 0$, (>)*. Cuando esta solución está en la -- frontera de Z_i, entonces $\bar{z}_i = 0$, (0). Cuando no está en el semiespacio Z_i, entonces $\bar{z}_i < 0$, (<). Para la misma solución, -- cuando se encuentra en el semiespacio W_i, pero no en su frontera, entonces $\bar{w}_i = q_i + M_i\bar{z} > 0$, (>). Cuando $\bar{z}$ se encuentra en la frontera de W_i, entonces $\bar{w}_i = q_i + M_i\bar{z} = 0$, (0). Cuando la solución no se encuentra en el semiespacio W_i, entonces ------ $\bar{w}_i = q_i + M_i\bar{z} < 0$, (<). El signo ($\neq$) indicará simplemente que

* Los signos entre paréntesis indicarán el tipo de holgura.

la holgura es diferente de cero.

Caractericemos el punto etiquetado con 1 en la figura 1-4-I. Para éste, observamos que la coordenada $\bar{z}_2$ es mayor que cero, y las coordenadas $\bar{z}_1$ y $\bar{z}_3$ son ambas cero por encontrarse el punto en cuestión sobre el eje z_2; esto es, se encuentra en la ecuación frontera de los semispacios Z_1 y Z_3. Ahora analicemos su relación con respecto a las ecuaciones fronteras de W_i, $i = 1, 2, 3$. El punto 1 satisface únicamente la ecuación frontera de W_1; así, $\bar{w}_1 = 0$, y $\bar{w}_2$ y $\bar{w}_3$ deberán tener un valor diferente de cero. Ahora bien, como 1 está en la región de soluciones factibles, debe satisfacer que $\bar{w} \geqq 0$. De esta forma, $\bar{w}_2$ y $\bar{w}_3$ son mayores que cero.

Presentamos por pares de variables complementarias, la caracterización del punto que analizamos

PUNTO EXTREMO	z_1 w_1	z_2 w_2	z_3 w_3
1	0 0	> >	0 >

Concluimos que el punto 1 es una solución factible casi-complementaria, pues $\bar{z} \geqq 0$, $\bar{w} \geqq 0$, y cumple que $\bar{z}_i \bar{w}_i = 0$ con excepción de un índice $i = \beta = 2$ tal que $\bar{z}_{\beta=2} \neq 0$, $\bar{w}_{\beta=2} \neq 0$.

El punto cuya etiqueta es el número 2 en la figura 1-4-I, se encuentra sobre las ecuaciones fronteras de los semiespacios Z_1, W_2 y W_3. Esto significa que $\bar{z}_1 = 0$, $\bar{w}_2 = 0$, $\bar{w}_3 = 0$. Los demás valores son mayores que cero puesto que este punto pertenece a la región de soluciones factibles Z. Así, el punto 2 queda caracterizado como

PUNTO. EXTREMO	z_1 w_1	z_2 w_2	z_3 w_3
2	0 >	> 0	> 0

El punto que acabamos de describir es una solución complementaria factible; es decir, es una solución del Problema Fundamental que planteamos.

Describiremos los puntos etiquetados con 3 en la figura 1-4-I. Apartir del punto 2, si permanecemos sobre las ecuaciones fronteras de W_2 y W_3, nos podemos alejar de la ecuación frontera de Z_1 de dos formas: decrementando el valor de z_1 y salirnos de Z puesto que $\bar{z}_1 < 0$, o bien, incrementándolo. Al incrementar el valor de z_1, estaremos describiendo el conjunto etiquetado con 3. Sin embargo, este incremento no es infinito si sólo deseamos caracterizar esta arista. Esto es, al aumentar z_1 de valor y al permanecer w_2 y w_3 en cero, las variables z_2, z_3 y w_1 se modifican de tal forma que, cuando $z_3 = 0$, habremos llegado al punto etiquetado con 4. Así, también hemos encontrado la descripción de esta última solución factible.

ARISTA	z_1 w_1	z_2 w_2	z_3 w_3
3	> >	> 0	> 0
PUNTO EXTREMO			
4	> >	> 0	0 0

.

Los puntos sobre la arista de Z etiquetada con 3 son soluciones factibles casi-complementarias (β=1), y el punto 4 resulta también una solución factible casi-complementaria (β=1).

La arista etiquetada con 5 satisface las ecuaciones fronteras de los semiespacios Z_1 y W_2; satisface también las condiciones de los semiespacios W_1, Z_2 y Z_3, pero no satisface la condición de W_3.

Así,

ARISTA	z_1 w_1	z_2 w_2	z_3 w_3
5	0 >	> 0	> <

.

El punto 6 resulta cuando $\bar{z}_3 = 0$.

PUNTO EXTREMO	z_1 w_1	z_2 w_2	z_3 w_3
6	0 >	> 0	0 <

Los puntos que componen la arista 5 resultan ser soluciones no-factibles casi-complementarias (β=3), y el punto 6 es una solución complementaria no-factible.

En lo que respecta al punto 7, éste no satisface la ecuación frontera de ninguno de los semiespacios; sin embargo, como se encuentra dentro de la región de factibilidad, cumple que $\bar{z} \geqq 0$ y $\bar{w} \geqq 0$. Así su representación es

PUNTO	z_1 w_1	z_2 w_2	z_3 w_3
7	> >	> >	> >

Esta última clase de puntos son simplemente soluciones factibles.

REFERENCIAS

1-1.INTRODUCCION

{ 1, p V }

{ 5, p 177, p 182 }

{ 12, p 413 }

{ 13, p 681 }

1-2.DEFINICION DEL PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDAD LINEAL

{ 1, p V }

{ 5, p 178 }

{ 11, p 83 }

1-3.DEFINICION DEL PROBLEMA FUNDAMENTAL

{ 3, p 103, p 108 }

{ 5, p 178, p 182 }

CAPITULO II

COMO ESTRUCTURAR EL PROBLEMA FUNDAMENTAL PARA RESOLVER OTRO TIPO DE PROBLEMAS

2-1. INTRODUCCION

La importancia del Problema Fundamental se debe a que es posible estructurarlo para resolver otro tipo de problemas. - El Problema de Programación Lineal primal-dual factible, el - Problema de Programación Cuadrática y los Juegos Bimatricia-- les pueden ser resueltos mediante el Problema Fundamental.

En las siguientes secciones de este capítulo, desarrolla remos la forma de estructurar el Problema Fundamental, para - resolver cada uno de los problemas mencionados en el párrafo anterior.

2-2. COMO ESTRUCTURAR EL PROBLEMA FUNDAMENTAL PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL PRIMAL-DUAL FACTIBLE.

Consideremos primero el problema de programación lineal primal en su forma canónica

$$\text{(P)} \max z = c^t x \qquad (2\text{-}1)$$

s.a.

$$Ax \leq b, \qquad (2\text{-}2)$$

$$x \geq 0, \qquad (2\text{-}3)$$

donde A es una matriz real de m x n, c y b son vectores reales de n y m componentes respectivamente, y x es un vector de n variables reales. Consideremos además el problema dual asociado a este problema primal:

$$\text{(D)} \min w = b^t y \qquad (2\text{-}4)$$

s.a.

$$A^t y \geq c, \qquad (2\text{-}5)$$

$$y \geq 0, \qquad (2\text{-}6)$$

donde y es un vector de m variables reales.

Una solución $\bar{x}$ es factible para (P) si satisface (2-2) y (2-3), y será óptima si además maximiza la función objetivo (2-1). Una solución $\bar{y}$ es factible para (D) si satisface (2-5) y (2-6), y será óptima si además minimiza la función objetivo (2-4). Deseamos obtener una solución factible y óptima para nuestros problemas primal y dual al resolver el Problema Fundamental.

Introducimos primero la condición de factibilidad. Para ello, observamos que los sistemas de desigualdades $Ax \leq b$ y -

$A^t y \geq c$, de (P) y (D) respectivamente, pueden llevarse a un - sistema equivalente de ecuaciones mediante la introducción de los vectores de variables de holgura, v y u, definidos como - sigue:

$$v' = b - Ax, \quad v \geq 0,$$
$$u = A^t y - c, \; u \geq 0,$$

donde v es un vector de m variables de holgura, y u es un vec tor de n variables de holgura.

De esta forma, los sistemas de desigualdades son equivalentes a

$$\begin{aligned} Ax + v &= b, \quad v \geq 0, \quad x \geq 0, \\ A^t y - u &= c, \quad u \geq 0, \quad y \geq 0; \end{aligned} \tag{2-7}$$

o bien,

$$\begin{aligned} u &= -c \qquad + A^t y, \quad u \geq 0, \quad y \geq 0, \\ v &= \;\; b - Ax \qquad , \quad v \geq 0, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Al expresar ambos sistemas en forma matricial, tenemos

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A^t \\ -A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} u \geq 0, \quad y \geq 0, \\ v \geq 0, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Definimos ahora

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & A^t \\ -A & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad (2\text{-}8)$$

donde q, w y z resultan ser vectores de m + n componentes, y M una matriz de (m + n) x (m + n).

Observemos que $w \geq 0$ porque $u \geq 0$ y $v \geq 0$. Además, $z \geq 0$, porque $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Así, podemos asegurar que dada una solución $\bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ que satisface el sistema

$$w = q + Mz,$$
$$w \geq 0, \quad z \geq 0,$$

(estructurado como se indica en (2-8), después de introducir los vectores de holguras v y u a los problemas (P) y (D) respectivamente), $\bar{x}$ es una solución factible del problema primal (P) y $\bar{y}$ es una solución factible del problema dual (D).

Sólo falta introducir la condición de optimalidad. Demostraremos que ésta es considerada en el Problema Fundamental - al requerir que $z^t w = 0$. Para ello, emplearemos el resultado de Programación Lineal que indica que $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son soluciones óptimas factibles de (P) y (D) respectivamente, si y sólo si

$$c^t\bar{x} = b^t\bar{y}.$$

Esta condición de optimalidad para los problemas primal-dual factibles es

$$c^t x = b^t y,$$

o bien,

$$x^t c = y^t b. \tag{2-9}$$

Demostraremos primero que (2-9) implica que $z^t w = 0$. Al sustituir los valores b y c de (2-7) en (2-9), tenemos que

$$x^t (A^t y - u) = y^t (Ax + v),$$

o bien,

$$x^t A^t y - x^t u = y^t Ax + y^t v.$$

Como $x^t A^t y = y^t Ax$, por ser números reales, los cancela-- mos y entonces

$$-x^t u = y^t v,$$

o bien,

$$x^t u + y^t v = 0,$$

que resulta ser el producto escalar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0.$$

Recordemos que z y w están definidos como

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Así,

$$z^t w = 0,$$

como deseábamos demostrar. La demostración de la suficiencia es el procedimiento inverso.

Podemos asegurar entonces que al resolver el Problema -- Fundamental

$$w = q + Mz,$$
$$w \geqq 0, \quad z \geqq 0,$$
$$z^t w = 0,$$

estructurado como se indica en (2-8), resolveremos el problema de programación lineal primal-dual factible.

2-3. COMO ESTRUCTURAR EL PROBLEMA FUNDAMENTAL PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE PROGRAMACION CUADRATICA

Iniciamos con la definición de forma cuadrática.

Una forma cuadrática en n variables $x_1, \ldots, x_n$ es una función numérica de estas variables que puede ser escrita como sigue:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_i^j x_i x_j .$$

Otra forma de expresarla es la siguiente:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} A_i^j x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i x = x^t A x.$$

Esta es la notación matricial de una forma cuadrática.

Nótese que cuando $i \neq j$ el coeficiente asociado a $x_i x_j$ es A_i^j, y el de $x_j x_i$ es A_j^i. Como $x_i x_j = x_j x_i$, entonces factorizando tenemos que el coeficiente de $x_i x_j$ en la forma cuadrática es $(A_i^j + A_j^i)$. Esto significa que si obtenemos una segunda matriz simétrica $A' = \frac{1}{2}(A + A^t)$ cuyos elementos A'^j_i y A'^i_j sean ambos $\frac{1}{2}(A_i^j + A_j^i)$, el coeficiente asociado a $x_i x_j$ es

$$(A'^j_i + A'^i_j) = \left(\tfrac{1}{2}(A_i^j + A_j^i) + \tfrac{1}{2}(A_i^j + A_j^i)\right) = (A_i^j + A_j^i).$$

Así, las formas cuadráticas $x^t A x$ y $x^t A' x$ son equivalentes, y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que una forma cuadrática está asociada a una matriz simétrica. Este resultado es útil para esta sección y será considerado posteriormente.

El problema de programación cuadrática se establece de la iguiente forma:

$$\max z = c^t x + \tfrac{1}{2} x^t D' x$$

s.a

$$Ax \leq b,$$

$$x \geq 0,$$

donde $D' = (D + D^t)$ y por consiguiente D' es simétrica.

Una importante observación es que cuando D' es la matriz cero, el problema de programación cuadrática se reduce a un problema de programación lineal. Así, el problema de programación lineal es un caso especial del problema de programación cuadrática.

Ahora estructuraremos el Problema Fundamental. Para nuestro propósito, emplearemos el teorema de Kuhn-Tucker.* Este teorema establece las condiciones necesarias para que una solución sea óptima absoluta en la región de soluciones factibles. El teorema es el siguiente:

Consideremos el problema de programación no-lineal:

---

* {9, pp 190-192}

$$\max z = f(x)$$

s.a

$$g_i(x) \leq b_i \ , \quad i = 1,.., u,$$

$$g_i(x) \geq b_i \ , \quad i = u + 1,.., v,$$

$$g_i(x) = b_i \ , \quad i = v + 1,.., m,$$

$$x \geq 0.$$

Supongamos que f y g_i , i = 1,.., m, son diferenciables en el ortante no-negativo. Sea

$$F(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - g_i(x)\right)$$

la función lagrangeana.

Si x es un máximo absoluto de f(x) en la región de soluciones factibles, es necesario que exista λ* tal que

$$\nabla_x F(x^*,\lambda^*) = \nabla_x f(x^*) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla_x g_i(x^*) \leq 0, \qquad (2\text{-}10)$$

$$\nabla_x F(x^*,\lambda^*)\ x^* = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \left[\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j}\right] = 0, \qquad (2\text{-}11)$$

$$\nabla_\lambda \; F(x^*,\lambda^*)\lambda^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\big(b_i - g_i(x^*)\big) = 0. \qquad (2\text{-}12)$$

Deseamos saber, en particular, cual es la representación de estas condiciones para el problema de programación cuadráti ca. Para este caso tenemos que

$$f(x) = c^t x + \tfrac{1}{2}x^t D' x, \quad D' = (D + D^t),$$

$$g_i(x) = A_i x, \quad i = 1,.., m.$$

Encontraremos primero los gradientes $\nabla_x \; f(x)$ y $\nabla_x \; g_i(x)$. Por definición de gradiente,

$$\nabla_x \; f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad y \quad \nabla_x \; g_i(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_i(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial g_i(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ necesitamos saber que términos de la - forma cuadrática $x^t D'x$ involucran la variable x_i. Observemos que en el producto $x^t D'$ los términos en los que interviene x_i son $x_i D'_i$. De la misma forma, para el producto $D'x$ éstos están dados por $D'^i x_i$. Así, al considerar conjuntamente $x_i D'_i x$ y --- $xD'^i x_i$, el elemento $x_i D'^i_i x_i$ está incluido dos veces, entonces los términos que involucran a x_i en la forma cuadrática $x^t D'x$ son:

$$x_i D_i' x + {}^t x D'^i x_i - x_i D'^i_i x_i.$$

Además, como D' es simétrica tenemos que $D_i' x = {}^t x D'^i$, entonces la expresión anterior se reduce a

$$2x_i D_i' x - x_i D'^i_i x_i.$$

Ahora podemos calcular la derivada parcial

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(c^t x + \tfrac{1}{2} x^t D' x) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}(c_i x_i + x_i D_i' x - \tfrac{1}{2} x_i D'^i_i x_i) =$$

$$= c_i + D_i' x + D'^i_i x_i - D'^i_i x_i = c_i + D_i' x, \quad i = 1,.., n.$$

El gradiente $\nabla_x f(x)$ es entonces

$$\nabla_x f(x) = c + D'x.$$

Calcularemos ahora el gradiente $\nabla_x g_i(x)$. Para ello, observamos que

$$g_i(x) = A_i x = A_i^1 x_1 + \quad + A_i^j x_j + \quad + A_i^n x_n, \quad i = 1,.., m,$$

entonces, la derivada parcial de $g_i(x)$ con respecto a la variable x_j es

$$\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial A_i x}{\partial x_j} = A_i^j, \quad j = 1,.., n.$$

Así,

$$\nabla_x \, g_i(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_i^n \end{bmatrix} = A_i^t$$

La representación de las condiciones de Kuhn-Tucker para el problema de programación cuadrática es la siguiente:

Para la primera condición,

$$\nabla_x \, F(x^*,\lambda^*) = \nabla_x \, f(x^*) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, \nabla_x \, g_i(x) \leq 0,$$

$$\nabla_x \, F(x^*,\lambda^*) = c + D'x^* - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i^t =$$

$$= c + D'x^* - A^t\lambda^* \leq 0.$$

Introducimos el vector de holguras u* de n-componentes

$$u^* = - (c + D'x^* - A^t\lambda^*), \quad u^* \geq 0,$$

entonces, la primera condición de Kuhn-Tucker está representada por

$$c + D'x^* - A^t\lambda^* + u^* = 0.$$

Para la segunda condición,

$$\nabla_x F(x^*,\lambda^*)x^* = \sum_{j=1}^{n} \cdot x_j^* \left[\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j}\right] = 0,$$

observamos que dado el vector de holguras u^* definido anteriormente, tenemos que

$$\nabla_x F(x^*,\lambda^*) = c + D'x^* - A^t\lambda^* = -u^*, \quad u^* \geqq 0.$$

Empleando este resultado, la segunda condición de Kuhn-Tucker queda representada por

$$\nabla_x F(x^*,\lambda^*)x^* = -u^{*t}x^* = 0, \quad u^* \geqq 0,$$

o bien,

$$u^{*t}x^* = 0, \quad u^* \geqq 0.$$

Para la tercera condición,

$$\nabla_\lambda F(x^*,\lambda^*)\lambda^* = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*\left(b_i - g_i(x^*)\right) = 0,$$

sabemos que

$$Ax^* \leqq b, \quad x^* \geqq 0,$$

puesto que x* es factible. Entonces, al introducir el vector - de holguras

$$v^* = b - Ax^*, \quad v^* \geq 0,$$

la tercera condición queda representada como

$$F(x^*,\lambda^*)\lambda^* = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*(b_i - A_i x^*) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* v_i^* =$$

$$= v^{*t}\lambda^* = 0, \quad v^* \geq 0.$$

En resumen, dada una solución factible x*; es decir, que satisface

$$Ax^* \leq b,$$
$$x^* \geq 0,$$

para que la función objetivo

$$z = c^t x + \tfrac{1}{2} x^t D' x$$

evaluada en esta solución sea un máximo absoluto en la región de soluciones factibles, es necesario que exista λ^* tal que

$$x^* \geq 0, \quad u^* \geq 0, \quad \lambda^* \geq 0, \quad v^* \geq 0,$$
$$x^{*t}u^* = 0, \quad \lambda^{*t}v^* = 0,$$

donde

$$u^* = -c - D'x^* + A^t\lambda^*$$

y

$$v^* = b - Ax^*.$$

De esta forma, el problema de programación cuadrática nos lleva a la búsqueda de una solución del sistema

$$\begin{aligned} &u = -c - D'x + A^t\lambda, \quad x \geq 0, \quad \lambda \geq 0, \\ &v = b - Ax, \qquad\qquad\quad u \geq 0, \quad v \geq 0, \\ &x^t u + \lambda^t v = 0; \end{aligned}$$

expresado en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -D' & A^t \\ -A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \geq 0,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0.$$

Así, las siguientes definiciones indican cómo debe estructurarse el Problema Fundamental para que, al resolverlo, encontremos una solución óptima del problema de programación cuadrática.

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -D' & A^t \\ -A & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

2-4. COMO ESTRUCTURAR EL PROBLEMA FUNDAMENTAL PARA RESOLVER JUEGOS BIMATRICIALES

El juego bimatricial de dos personas se define como sigue: sean I y J dos jugadores. El jugador I tiene m estrategias puras a su elección y J tiene n. En cualquier instancia del juego, si I emplea su i-ésima estrategia pura y J utiliza su j-ésima estrategia pura, la pérdida para I es A_i^j y la pérdida para J es B_i^j. Denotaremos por A y B a las matrices de m x n cuyos elementos (i,j) son A_i^j y B_i^j respectivamente, entonces I será el jugador renglón y tendrá asociada la matriz de pérdida A, en tanto que J será el jugador columna y su matriz de pérdida asociada será B. Estas matrices definen un juego bimatricial que es denotado por $\Gamma(A,B)$.

Una estrategia mixta para I es una columna x de elementos no-negativos, donde una componente x_i de x representa la frecuencia relativa con la que I jugará su i-ésima estrategia pura del total de instancias del juego. Así, la suma de las frecuencias relativas debe ser 1. De esta forma, x es tal que

$$x = (x_1, \ldots, x_m)^t \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

Similarmente, una estrategia mixta para J es una columna y cuyas componentes y_j son no-negativas y suman 1.

$$y = (y\ ,\dots,y_n)^t \geqq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Sea e_i un vector columna de orden i cuyas componentes son unos. Un par (x,y) de estrategias mixtas está definido por

$$e_m^t x = e_n^t y = 1 \quad y \quad x \geqq 0, \quad y \geqq 0.$$

Ahora bien, si en cada instancia del juego, I y J selec-cionan una estrategia aleatoriamente, de acuerdo a las distri-buciones de probabilidad dadas por x y y, las pérdidas espera-das para I y J son respectivamente

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i A_i^j y_j, \qquad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i B_i^j y_j;$$

o bien, en notación matricial,

$$x^t A y, \qquad x^t B y.$$

Un punto de equilibrio (de Nash) para el juego bimatri-cial $\Gamma(A,B)$, es un par de estrategias mixtas $(x_\circ, y_\circ)$, tal que para todos los pares de estrategias mixtas (x,y) se cumple que

$$x_\circ^t A y_\circ \leqq x^t A y_\circ,$$

y

$$x_o^t B y_o \leq x_o^t B y ;$$

esto es, (x_o, y_o) es el par de estrategias mixtas para el cual ambos jugadores pierden lo menos posible simultáneamente.

Nuestro objetivo es estructurar el Problema Fundamental de tal forma que, al resolverlo, encontremos un punto de equilibrio para el juego bimatricial $\Gamma(A,B)$. Para ello, los siguientes resultados nos conducen a una caracterización favorable de los puntos de equilibrio.

Sea $E = e_m e_n^t$ la matriz de m x n cuyos elementos son unos. Para todo par de estrategias mixtas (x,y) tenemos que

$$x^t E y = x^t e_m = 1,$$

o bien,

$$x^t E y = e_n^t y = 1.$$

Un par de estrategias mixtas (x_o, y_o) es punto de equilibrio de $\Gamma(A,B)$, si y sólo si es un punto de equilibrio del juego bimatricial $\Gamma(A',B')$, donde

$$A' = A + kE \ , \quad B' = B + pE \ ,$$

k y p escalares arbitrarios.

Demostraremos lo anterior. Sea (x_o, y_o) un punto de equilibrio para $\Gamma(A,B)$, entonces por definición

$$x_o^t A y_o \leqq x^t A y_o \quad \text{para toda estrategia mixta } x,$$

y

$$x_o^t B y_o \leqq x_o^t B y \quad \text{para toda estrategia mixta } y.$$

Observamos que

$$k(x_o^t E y_o) = k,$$
$$k(x^t E y_o) = k,$$
$$p(x_o^t E y_o) = p,$$
$$p(x_o^t E y\ ) = p,$$

por la definición de E y porque x_o, x, y_o y y son estrategias mixtas.

Ahora, sumamos k a ambos miembros de la primera desigualdad, y sumamos p a ambos miembros de la segunda desigualdad, - de la siguiente forma:

$$x_o^t A y_o + k(x_o^t E y_o) \leqq x^t A y_o + k(x^t E y_o),$$

$$x_o^t B y_o + p(x_o^t E y_o) \leqq x_o^t B y + p(x_o^t E y\ ).$$

Al agrupar tenemos que

$$x_o^t(A + kE)y_o \leq x^t(A + kE)y_o \;,$$

$$x_o^t(B + pE)y_o \leq x_o^t(B + pE)y \;;$$

de donde,

$$x_o^t A' y_o \leq x^t A' y_o,$$

$$x_o^t B' y_o \leq x_o^t B' y \;.$$

Así, la pareja de estrategias mixtas (x_o, y_o) es punto de equilibrio del juego bimatricial $\Gamma(A', B')$. La demostración de - la suficiencia es el procedimiento inverso.

Como k y p son escalares arbitrarios, no hay pérdida de generalidad si suponemos que $A > 0$ y $B > 0$*. Haremos esta suposición en adelante.

LEMA 2-1. La siguiente es una representación equivalente de punto de equilibrio:

$$(x_o^t A y_o)e_m \leq A y_o,$$

$$(x_o^t B y_o)e_n \leq B^t x_o. \tag{2-13}$$

Demostración. Supongamos que (x_o, y_o) es un punto de equilibrio; es decir, un par de estrategias mixtas que satisface

* es decir, $A_i^j > 0$ y $B_i^j > 0$, $\forall$ i,j .

$$x_o^t A y_o \leq x^t A y_o \quad \text{y} \quad x_o^t B y_o \leq x_o^t B y,$$

para todo par de estrategias mixtas (x,y).

Deseamos saber si este punto de equilibrio cumple que

$$(x_o^t A y_o) e_m \leq (x^t A y_o) e_m \leq A y_o$$

y (2-14)

$$(x_o^t B y_o) e_n \leq (x_o^t B y) e_n \leq B^t x_o \ .$$

Por reducción al absurdo, supongamos que existe un par de estrategias mixtas $(\bar{x},\bar{y})$ tal que

$$(\bar{x}^t A y_o) e_m > A y_o \tag{2-15}$$

$$(x_o^t B \bar{y}) e_n > B^t x_o \ . \tag{2-16}$$

Al multiplicar (2-15) por $\bar{x}$, como $0 \leq \bar{x}_i \leq 1$, $i = 1,..,m$, tenemos que

$$(\bar{x}^t A y_o) \bar{x}_i > \bar{x}_i (A y_o)_i, \quad \forall\, i \ni 0 < \bar{x}_i \leq 1,$$

$$(\bar{x}^t A y_o) \bar{x}_i = \bar{x}_i (A y_o)_i = 0, \quad \forall\, i \ni \bar{x}_i = 0 \ .$$

Al sumar sobre i resulta que

$$\sum_{i=1}^{m} (\bar{x}^t A y_\circ)\bar{x}_i > \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i (Ay_\circ)_i \; .$$

De ocurrir la igualdad, significaría que $\bar{x}_i = 0 \; \forall \; i$, y esto - es imposible ya que $\bar{x}$ es una estrategia mixta. Así,

$$(\bar{x}^t A y_\circ) \sum_{i=1}^{m} x_i > \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i (Ay_\circ)_i \; ,$$

o bien,

$$(x^t A y_\circ)\bar{x}^t e_m > \bar{x}^t A y_\circ \; .$$

Como $\bar{x}^t e_m = 1$, por ser $\bar{x}^t$ estrategia mixta, entonces

$$\bar{x}^t A y_\circ > \bar{x}^t A y_\circ \; ,$$

lo cual es una contradicción. Así, debemos tener que

$$(x^t A y_\circ) e_m \leqq A y_\circ \qquad (2\text{-}17)$$

para toda estrategia mixta x.

Análogamente, al multiplicar (2-16) por $\bar{y}$, como -------- $0 \leqq \bar{y}_j \leqq 1$, $j = 1, \ldots, n$, tenemos que

$$(x_\circ^t B\bar{y})\bar{y}_j > \bar{y}_j (B^t x_\circ)_j \; , \quad \forall \; j \ni 0 < \bar{y}_j \leqq 1 \; ,$$

$$(x_\circ^t B\bar{y})\bar{y}_j = \bar{y}_j (B^t x_\circ)_j = 0, \quad \forall \; j \ni \bar{y}_j = 0.$$

Al sumar sobre j resulta que

$$\sum_{j=1}^{n} (x_o^t B\bar{y})\bar{y}_j > \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_j (B^t x_o)_j \; .$$

De ocurrir la igualdad, significaría que $\bar{y}_j = 0 \;\; \forall\, j$, y esto es imposible, ya que $\bar{y}$ es una estrategia mixta. Así,

$$(x_o^t B\bar{y}) \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_j > \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_j (B^t x_o)_j \; ,$$

o bien,

$$(x_o^t B\bar{y})\bar{y}^t e_n > \bar{y}^t B^t x_o \; .$$

Como $\bar{y}^t e_n = 1$ por ser $\bar{y}^t$ estrategia mixta, entonces

$$x_o^t B\bar{y} > \bar{y}^t B^t x_o ,$$

lo cual es una contradicción, ya que $x_o^t B\bar{y} = y^t B^t x_o$. Así, debemos tener que

$$(x_o^t By)e_n \leqq B^t x_o \qquad (2\text{-}18)$$

para toda estrategia mixta y .

Como un punto de equilibrio satisface (2-17) y (2-18), - entonces satisface (2-14) y por lo tanto satisface la repre-- sentación equivalente de punto de equilibrio (2-13).

En forma inversa, sea (x_o, y_o) una solución del sistema - (2-13). Multiplicamos la primera desigualdad de (2-13) por x^t y la segunda por y^t. Así,

$$(x_o^t A y_o)(x^t e_m) \leqq x^t A y_o, \qquad (x_o^t B y_o)(y^t e_m) \leqq y^t B^t x_o.$$

Como $x^t e_m = y^t e_n = 1$, y $y^t B^t x_o = x_o^t B y$, tenemos que

$$x_o^t A y_o \leqq x^t A y_o \quad \text{y} \quad x_o^t B y_o \leqq x_o^t B y$$

Por lo tanto, ambas representaciones de punto de equilibrio son equivalentes.

Esta última caracterización de punto de equilibrio (2-13), incluyendo la suposición de que los elementos de A y B son positivos, nos lleva a la consideración del siguiente teorema - que relaciona el problema de punto de equilibrio con el Problema Fundamental.

TEOREMA 2-1. Para $A > 0$ y $B > 0$, si u^*, v^*, x^*, y^* es - una solución del sistema

$$u = Ay - e_m, \quad u \geqq 0, \quad y \geqq 0,$$

$$v = B^t x - e_n, \quad v \geqq 0, \quad x \geqq 0,$$

$$x^t u + y^t v = 0,$$

entonces

$$(x_\circ, y_\circ) = \left(\frac{x^*}{x^{*t}e_m}, \frac{y^*}{y^{*t}e_n} \right)$$

es un punto de equilibrio de $\Gamma(A,B)$. En forma inversa, si --- $(x_\circ, y_\circ)$ es un punto de equilibrio de $\Gamma(A,B)$, entonces

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{x_\circ}{x_\circ^t B y_\circ}, \frac{y_\circ}{x_\circ^t A y_\circ} \right)$$

es una solución del sistema anterior.

Demostración. Deseamos demostrar la equivalencia de los sistemas

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_\circ^t A y_\circ) e_m \leqq A y_\circ, \; A > 0, \\ (x_\circ^t B y_\circ) e_n \leqq B^t x_\circ, \; B > 0, \\ \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u^* = Ay^* - e_m, \; u^* \geqq 0, \; y^* \geqq 0, \\ v^* = B^t x^* - e_n, \; v^* \geqq 0, \; x^* \geqq 0, \\ x^{*t}u^* + y^{*t}v^* = 0 \end{array} \right\}.$$

Demostraremos primero la necesidad. Como por hipótesis -

$$(x_\circ^t A y_\circ) e_m \leqq A y_\circ \quad y \quad (x_\circ^t B y_\circ) e_n \leqq B^t x_\circ,$$

$$A > 0, \quad 0 \neq x_\circ \geqq 0, \quad 0 \neq y_\circ \geqq 0, \quad B > 0,$$

entonces aseguramos que $x_0^t A y_0 > 0$ y $x_0^t B y_0 > 0$; así,

$$e_m \leq \frac{Ay_0}{x_0^t A y_0} \qquad y \qquad e_n \leq \frac{B^t x_0}{x_0^t B y_0} \ .$$

Definimos los vectores u^* de m componentes y v^* de n componentes

$$u^* = A\left(\frac{y_0}{x_0^t A y_0}\right) - e_m \ , \qquad u^* \geq 0,$$

$$v^* = B^t\left(\frac{x_0}{x_0^t B y_0}\right) - e_n \ , \qquad v^* \geq 0 \ .$$

De esta forma, obtenemos el sistema

$$u^* = A\left(\frac{y_0}{x_0^t A y_0}\right) - e_m \ , \qquad u^* \geq 0, \qquad y_0 \geq 0, \qquad A > 0,$$

$$v^* = B^t\left(\frac{x_0}{x_0^t B y_0}\right) - e_n \ , \qquad v^* \geq 0, \qquad x_0 \geq 0, \qquad B > 0.$$

Al definir

$$x^* = \frac{x_0}{x_0^t B y_0} \geq 0 \qquad y \qquad y^* = \frac{y_0}{x_0^t A y_0} \geq 0 \ ,$$

podemos expresar el sistema anterior como

$$u^* = Ay^* - e_m \,, \quad u^* \geqq 0, \quad y^* \geqq 0, \quad A > 0,$$

$$v^* = B^t x^* - e_n \,, \quad v^* \geqq 0, \quad x^* \geqq 0, \quad B > 0.$$

Observemos además lo siguiente:

$$x^{*t}u^* = \left(\frac{x_o^t}{x_o^t B y_o}\right)\left(A\,\frac{y_o}{x_o^t A y_o} - e_m\right) =$$

$$= \frac{x_o^t A y_o}{(x_o^t B y_o)(x_o^t A y_o)} - \frac{x_o e_m}{x_o^t B y_o} =$$

$$= \frac{1}{x_o^t B y_o} - \frac{x_o^t e_m}{x_o^t B y_o}\,.$$

Como x_o es una estrategia mixta, $x_o^t e_m = 1$. Así,

$$x^{*t}u^* = \frac{1}{x_o^t B y_o} - \frac{1}{x_o^t B y_o} = 0.$$

De la misma forma,

$$y^{*t}v^* = \left(\frac{y_o^t}{x_o^t A y_o}\right)\left(B^t\,\frac{x_o}{x_o^t B y_o} - e_n\right) =$$

$$= \frac{y_o^t B x_o}{(x_o^t A y_o)(x_o^t B y_o)} - \frac{y_o^t e_n}{x_o^t A y_o}\,.$$

Como $y_o^t B^t x_o = x_o^t B y_o$ y y_o es una estrategia mixta, tenemos -- que

$$y^{*t} v^* = \frac{1}{x_o^t A y_o} - \frac{1}{x_o^t A y_o} = 0 \ .$$

Así, $x^{*t} u^* + y^{*t} v^* = 0$.

En resumen,

$$u^* = Ay^* - e_m \quad , \quad u^* \geq 0, \quad y^* \geq 0,$$

$$v^* = B^t x^* - e_n \quad , \quad v^* \geq 0, \quad x^* \geq 0,$$

$$x^{*t} u^* + y^{*t} v^* = 0,$$

como se deseaba.

Demostraremos ahora la suficiencia. Por hipótesis tene-- mos el sistema que acabamos de describir arriba.

Consideremos primero la ecuación

$$x^{*t}u^* + y^{*t}v^* = 0.$$

Sabemos que

$$x^* \geqq 0, \qquad u^* \geqq 0,$$

$$y^* \geqq 0, \qquad v^* \geqq 0,$$

entonces

$$x^{*t}u^* = 0 \quad \text{y} \quad y^{*t}v^* = 0.$$

Sustituyendo u^* y v^*,

$$x^{*t}Ay^* - x^{*t}e_m = 0 \quad \text{y} \quad y^{*t}B^t x^* - y^{*t}e_m = 0$$

o bien,

$$x^{*t}Ay^* = x^{*t}e_m \quad \text{y} \quad y^{*t}B^t x^* = y^{*t}e_n \ .$$

Observemos que como $x_\circ$ y $y_\circ$ son estrategias mixtas, y como -- $A > 0$ y $B > 0$, entonces $0 \neq x^* \geqq 0$ y $0 \neq y^* \geqq 0$. Así,

$$x^{*t}e_m > 0 \quad \text{y} \quad y^{*t}e_n > 0.$$

Al dividir entre estos escalares las ecuaciones anteriores, - resulta que

$$\left(\frac{x^{*t}}{x^{*t}e_m}\right)Ay^* = 1 \quad \text{y} \quad \left(\frac{y^{*t}}{y^{*t}e_n}\right)B^t x^* = 1.$$

Multipliquemos la primera igualdad por $\frac{1}{y^{*t}e_n}$ y la segunda por $\frac{1}{x^{*t}e_m}$,

$$\left(\frac{x^{*t}}{x^{*t}e_m}\right)A\left(\frac{y^*}{y^{*t}e_n}\right) = \frac{1}{y^{*t}e_n}, \qquad \left(\frac{y^{*t}}{y^{*t}e_n}\right)B^t\left(\frac{x^{*t}}{x^{*t}e_m}\right) = \frac{1}{x^{*t}e_m}.$$

Multiplicamos la primera igualdad por e_m y la segunda por e_n,

$$\left(\left(\frac{x^{*t}}{x^{*t}e_m}\right)A\left(\frac{y^*}{y^{*t}e_n}\right)\right)e_m = \frac{e_m}{y^{*t}e_n},$$

(2-19)

$$\left(\left(\frac{y^{*t}}{y^{*t}e_n}\right)B^t\left(\frac{x^*}{x^{*t}e_m}\right)\right)e_n = \frac{e_n}{x^{*t}e_m}.$$

Como u^* y v^* son variables de holgura, tenemos que

$$Ay^* \geq e_m \quad \text{y} \quad B^t x^* \geq e_n .$$

Al multiplicar estas desigualdades por $\frac{1}{y^{*t}e_n} > 0$ y $\frac{1}{x^{*t}e_m} > 0$ respectivamente,

$$A\left(\frac{y^*}{y^{*t}e_n}\right) \geq \frac{e_m}{y^{*t}e_n}, \qquad B^t\left(\frac{x^*}{x^{*t}e_m}\right) \geq \frac{e_n}{x^{*t}e_m}.$$

Utilizando (2-19),

$$\left\{\left(\frac{x^{*t}}{x^{*t}e_m}\right)A\left(\frac{y^*}{y^{*t}e_n}\right)\right\}e_m \leq A\left(\frac{y^*}{y^{*t}e_n}\right)$$

y $\qquad$ (2-20)

$$\left\{\left(\frac{y^{*t}}{y^{*t}e_n}\right)B^t\left(\frac{x^*}{x^{*t}e_m}\right)\right\}e_n \leq B^t\left(\frac{x^*}{x^{*t}e_m}\right).$$

Veamos si $\dfrac{y^*}{y^{*t}e_n}$ y $\dfrac{x^*}{x^{*t}e_m}$ son estrategias mixtas.

Sabemos que $0 \neq y^* \geqq 0$ y $0 \neq x^* \geqq 0$. Así, como ------- $y^{*t}e_n > 0$ y $x^{*t}e_m > 0$, entonces

$$\frac{y^*}{y^{*t}e_n} \geqq 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{x^*}{x^{*t}e_m} \geqq 0 \quad .$$

Por otra parte, al efectuar los productos

$$e^t\left(\frac{y^*}{y^{*t}e_n}\right) = \frac{e_n^t y^*}{y^{*t}e_n} = 1$$

y

$$e_m^t\left(\frac{x^*}{x^{*t}e_m}\right) = \frac{e_m^t x^*}{x^{*t}e_m} = 1 \ .$$

De esta forma,

$$\frac{y^*}{y^{*t}e_n} \qquad \text{y} \qquad \frac{x^*}{x^{*t}e_m}$$

son estrategias mixtas.

Definimos ahora

$$x_\circ = \frac{x^*}{x^{*t}e_m}, \qquad y_\circ = \frac{y^*}{y^{*t}e_n}. \tag{2-21}$$

Al sustituir $x_\circ$ y $y_\circ$ en (2-20) obtenemos

$$(x_\circ^t A y_\circ)e_m \leq A y_\circ,$$
$$(y_\circ^t B^t x_\circ)e_n \leq B^t x_\circ.$$

En resumen, $(x_\circ, y_\circ)$ definidas como se indica en (2-21), es un par de estrategias mixtas que satisface el sistema

$$(x_\circ^t A y_\circ)e_m \leq A y_\circ, \quad A > 0,$$
$$(x_\circ^t B y_\circ)e_n \leq B^t x_\circ, \quad B > 0.$$

Así, queda demostrado el teorema.

Empleando este resultado podemos estructurar adecuadamente el Problema Fundamental para resolver juegos bimatriciales.

Consideremos el sistema

$$u = -e_m + Ay, \quad u \geq 0, \quad y \geq 0, \quad A > 0,$$

$$v = -e_n + B^t x, \quad v \geq 0, \quad x \geq 0, \quad B > 0,$$

$$x^t u + y^t v = 0.$$

En su forma matricial,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_m \\ -e_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{matrix} A > 0, \\ B > 0, \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0.$$

Definimos

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -e_m \\ -e_n \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B^t & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \qquad (2\text{-}22)$$

De esta forma, al encontrar una solución $z^* = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ del Problema Fundamental estructurado como se indica en (2-22), aplicamos las fórmulas

$$(x_o, y_o) = \left(\frac{x^*}{x^{*t} e_m}, \frac{y^*}{y^{*t} e_n} \right),$$

donde la pareja de estrategias mixtas (x_o, y_o) es un punto de equilibrio del juego bimatricial $\Gamma(A,B)$.

REFERENCIAS

2-2.COMO ESTRUCTURAR EL PROBLEMA FUNDAMENTAL PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL PRIMAL-DUAL FACTIBLE.

{ 3, p 104 }

{ 10, p 222, pp 228-230 }

2-3.COMO ESTRUCTURAR EL PROBLEMA FUNDAMENTAL PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE PROGRAMACION CUADRATICA

{ 3, pp 105-106 }

{ 9, p 41, pp 190-194, pp 212-214 }

{ 14, pp 418-419 }

2-4.COMO ESTRUCTURAR EL PROBLEMA FUNDAMENTAL PARA RESOLVER -- JUEGOS BIMATRICIALES

{ 3, pp 106-108 }

{ 12, pp 413-415 }

CAPITULO III

EL METODO DE LEMKE PARA RESOLVER EL PROBLEMA FUNDAMENTAL

3-1. INTRODUCCION

Una vez que hemos discutido cómo es posible estructurar el Problema Fundamental para resolver otro tipo de problemas, consideraremos en este capítulo el método de Lemke para darle solución.

Partiremos en la segunda sección con un ejemplo geométrico que tiene como finalidad motivar la idea (que será demostrada posteriormente) que, buscando sobre un camino casi-complementario de puntos extremos adyacentes, lograremos encontrar una solución del Problema Fundamental. Luego, en la tercera sección, empleando resultados de Programación Lineal, describiremos la técnica para generar un camino de puntos extremos adyacentes, que conjuntamente con el teorema de Lemke que trataremos en la cuarta sección, se traducirá en la quinta sección, en un algoritmo que establece los criterios para generar un camino de puntos extremos adyacentes casi-complementarios, que nos conducirá favorablemente, a una solución complementaria factible que resuelva el Problema Fundamental.

3-2. IDEA GEOMETRICA

Antes de fundamentar teóricamente el método de Lemke, es conveniente tener una idea geométrica de las características de la región de soluciones factibles Z, que se utilizan para encontrar una solución complementaria factible. Para ello, consideraremos un ejemplo sencillo e ilustrativo.

Iniciamos con la siguiente definición:

Para i fija, el conjunto Z_i^* es el conjunto

$$Z_i^* = \{ z \mid z \in Z \quad y \quad z^t w = z_i w_i \} ;$$

esto es, Z_i^* es el conjunto de puntos de Z para los cuales $z_j w_j = 0$ para $j \neq i$.

Sea S el conjunto de todos los puntos complementarios factibles de Z,

$$S = \{ z \mid z \in Z \quad y \quad z^t w = 0 \} .$$

Observemos entonces que $S \subset Z_i^*$, para toda i, ya que en Z_i^* no se excluye la posibilidad de que $z_i w_i = 0$. Además, S es la intersección de los conjuntos Z_i^*

$$S = \bigcap_{i=1}^{m} Z_i^* ,$$

porque esta intersección está formada por todos los puntos de Z tales que

$$z_i w_i = 0, \quad i = 1,\ldots, m \, .$$

Sea

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_1^1 & M_1^2 & M_1^3 \\ M_2^1 & M_2^2 & M_2^3 \\ M_3^1 & M_3^2 & M_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right\} .$$

Supongamos que al graficar Z resulta la región convexa no-acotada que se muestra en la figura 3-2-I.

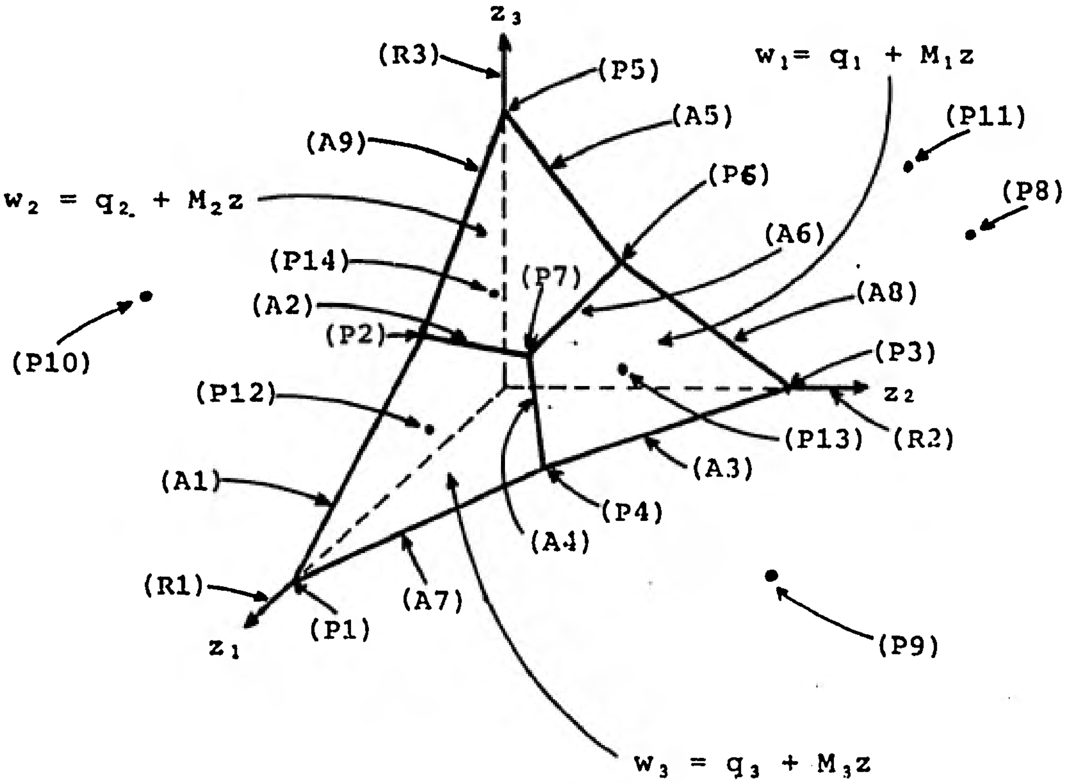


FIGURA 3-2-I

Empleando la misma forma de análisis que en la sección 1-4, obtenemos la clasificación de los diversos puntos de Z.

PUNTO $\bar{z}$	COMPONENTES z_1	w_1	z_2	w_2	z_3	w_3	CLASIFICACION (TODOS SON FACTIBLES)	$\bar{z} \in Z_i^*$
P1	>	>	0	>	0	0	CASI-COMPLEMENTARIO	1
P2	>	>	0	0	>	0	CASI-COMPLEMENTARIO	1
P3	0	0	>	>	0	>	CASI-COMPLEMENTARIO	2
P4	>	0	>	>	0	0	CASI-COMPLEMENTARIO	2
P5	0	>	0	0	>	>	CASI-COMPLEMENTARIO	3
P6	0	0	>	0	>	>	CASI-COMPLEMENTARIO	3
P7	>	0	>	0	>	0	COMPLEMENTARIO	1,2,3
P8	>	>	>	>	>	>	SOLUCION	-
P9	>	>	>	>	0	>	SOLUCION	-
P10	>	>	0	>	>	>	SOLUCION	-
P11	0	>	>	>	>	>	SOLUCION	-
P12	>	>	>	>	>	0	SOLUCION	-
P13	>	0	>	>	>	>	SOLUCION	-
P14	>	>	>	0	>	>	SOLUCION	-
ARISTA								
A1	>	>	0	>	>	0	CASI-COMPLEMENTARIA	1
A2	>	>	>	0	>	0	CASI-COMPLEMENTARIA	1
A3	>	0	>	>	0	>	CASI-COMPLEMENTARIA	2
A4	>	0	>	>	>	0	CASI-COMPLEMENTARIA	2
A5	0	>	>	0	>	>	CASI-COMPLEMENTARIA	3
A6	>	0	>	0	>	>	CASI-COMPLEMENTARIA	3

ARISTA	COMPONENTES						CLASIFICACION (TODOS SON FACTIBLES)	$\bar{z} \in Z_i^*$
	z_1	w_1	z_2	w_2	z_3	w_3		
A7	>	>	>	>	0	0	SOLUCIONES	-
A8	0	0	>	>	>	>	SOLUCIONES	-
A9	>	>	0	0	>	>	SOLUCIONES	-
RAYO								
R1	>	>	0	>	0	>	CASI-COMPLEMENTARIO	1
R2	0	>	>	>	0	>	CASI-COMPLEMENTARIO	2
R3	0	>	0	>	>	>	CASI-COMPLEMENTARIO	3

Resumiendo toda esta información,

$$S = \{ P7 \},$$

$$Z_1^* = \{ P1, P2, P7, A1, A2, R1 \},$$

$$Z_2^* = \{ P3, P4, P7, A3, A4, R2 \},$$

$$Z_3^* = \{ P5, P6, P7, A5, A6, R3 \},$$

y

$$Z_1^* \cap Z_2^* \cap Z_3^* = \{ P7 \} = S,$$

donde P7 es la única solución complementaria factible.

Graficamos a los conjuntos Z_1^*, Z_2^*, Z_3^*.

Z_1^*

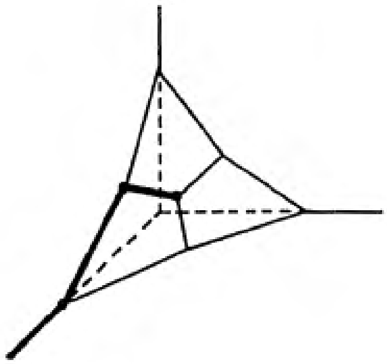


FIGURA 3-2-II

Z_2^*

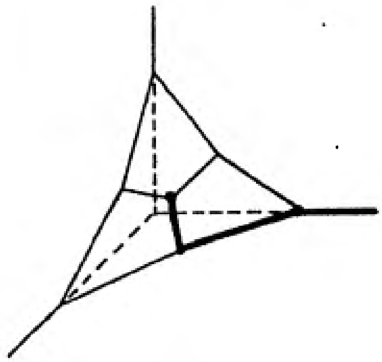


FIGURA 3-2-III

Z_3^*

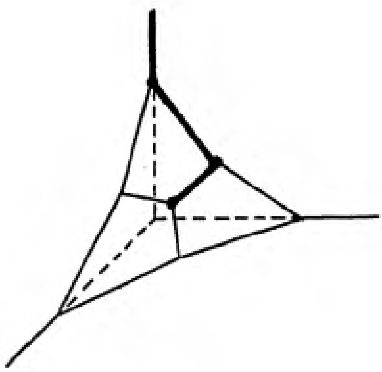


FIGURA 3-2-IV

Estas gráficas y el hecho de que $S = \bigcap_{i=1}^{3} Z_i^*$ sugieren inmediatamente, aunque se trata sólo de un ejemplo particular, que es posible encontrar una solución complementaria factible, al generar un camino de aristas y puntos extremos adyacentes casi-complementarios del conjunto Z, después de haber localizado una solución casi-complementaria perteneciente a cualquiera de los Z_i^*. De hecho, esta es la técnica que sugiere Lemke.

3-3.CAMINOS DE PUNTOS EXTREMOS ADYACENTES

Un conjunto conexo no-vacío que consiste de una clase no-vacía de aristas cerradas de Z, tal que tres aristas de la clase no se intersectan, se llama un camino de puntos extremos adyacentes.

El método de Lemke se basa en la construcción de un camino de puntos extremos adyacentes para la búsqueda de una solución complementaria factible. Es por esto, que antes de tratar el teorema que da origen a la técnica de Lemke para resolver el Problema Fundamental, consideraremos a manera de resumen, cómo es posible generar un camino de puntos extremos adyacentes empleando resultados de Programación Lineal.

Definiremos lo que es una operación de pivoteo. Supongamos que tenemos un sistema de m ecuaciones con n variables

$$
\begin{array}{lllll}
E_1: & A_1^1 x_1 + A_1^2 x_2 + \cdots + A_1^n x_n & = & b_1 \\
\vdots & & \vdots & \\
E_t: & A_t^1 x_1 + A_t^2 x_2 + \cdots + A_t^n x_n & = & b_t \\
\vdots & & \vdots & \\
E_m: & A_m^1 x_1 + A_m^2 x_2 + \cdots + A_m^n x_n & = & b_m .
\end{array}
$$

Al total de soluciones de un sistema se le denomina su conjunto solución. Si en un sistema una ecuación es combinación lineal de las demás, se dice que es redundante porque al insertarla o eliminarla del sistema, el conjunto solución de éste no se altera. Dos sistemas se llaman equivalentes, si uno puede obtenerse del otro a través de una cadena de sistemas, cada uno obtenido de su predecesor mediante una inserción o eliminación de una ecuación redundante. Sean $E_1, \ldots, E_m$ las ecuaciones que forman un sistema, y sea k un escalar diferente de cero. A las operaciones de sustituir la ecuación E_t por la ecuación redundante kE_t, o bien por la ecuación redundante $E_t + kE_i$, se les denomina operaciones elementales, y al aplicarlas a un sistema de ecuaciones, dan como resultado un sistema equivalente al original con el mismo número de ecuaciones.

Una operación de pivoteo consiste de m operaciones elementales, que reemplazan un sistema por un sistema equivalente, en el que una variable específica tiene un coeficiente de uno en una ecuación, y cero en las demás. Las operaciones de pivoteo son de suma importancia para generar un camino de puntos extremos adyacentes.

Un sistema canónico con respecto a un conjunto de m variables $x_{B,i}$,llamadas básicas, es un sistema de m ecuaciones con n variables tal que para cada i, la i-ésima variable básica -- tiene un coeficiente de 1 en la i-ésima ecuación, y tiene coeficiente cero en las demás. En $x_{B,i}$,B indica que es una variable básica, e i indica la columna de A a la cual está asociada.

El siguiente es un ejemplo de sistema canónico

SISTEMA CANONICO CON VARIABLES BASICAS

$x_{B,1}, \ldots\ldots, x_{B,m}$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_{B,1} & & & + & \bar{A}_1^{m+1} x_{N,m+1} & + \cdots\cdots + & \bar{A}_1^{n} x_{N,n} & = & \bar{b}_1 \\
& \ddots & & \vdots & & & & \vdots & \\
& & x_{B,m} & + & \bar{A}^{m+1} x_{N,m+1} & + \cdots\cdots + & \bar{A}_m^{n} x_{N,n} & = & \bar{b}_m
\end{array}
$$

m VARIABLES BASICAS	n-m VARIABLES NO-BASICAS $n \geq m$	CTES.

Cualquier valor de las n-m variables no básicas $x_{N,j}$,determina valores correspondientes para las m variables básicas $x_{B,i}$. En $x_{N,j}$,N indica que es una variable no-básica, y j indica la columna de A a la que está asociada.

La solución especial obtenida al hacer a las variables -- no-básicas igual a cero y resolviendo para las variables depen dientes es llamada una solución básica.

Una solución básica es degenerada si los valores de una o más de las variables básicas son cero.

Una solución básica es factible si sus elementos son mayores o iguales a cero.

Al aplicar una operación de pivoteo sobre una de las variables no-básicas de un sistema canónico, elegida adecuadamente (como veremos más adelante), el resultado es otro sistema canónico equivalente que tiene asociada otra solución básica si suponemos no-degeneración.

Observemos que el sistema de ecuaciones $w = q + Mz$, o bien,

SISTEMA CANONICO CON VARIABLES BASICAS

$w_{B,1}, \ldots\ldots, w_{B,m}$

$$
\begin{array}{lllll}
-M_1^1 z_{N,1} - \cdots - M_1^m z_{N,m} & + w_{B,1} & & & = q_1 \\
\vdots & & \ddots & & \vdots \\
-M_m^1 z_{N,1} - \cdots - M_m^m z_{N,m} & & & + w_{B,m} & = q_m
\end{array}
$$

m VARIABLES NO-BASICAS	m VARIABLES BASICAS	CTES.

propio del Problema Fundamental, es un sistema canónico de m ecuaciones con m variables básicas y m variables no-básicas. - La solución básica asociada a este sistema canónico es $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$, que resulta ser una solución complementaria. Si $q \geqq 0$, este es el caso trivial, porque hemos obtenido una solución complementaria factible. Por otra parte, si alguna $q_i < 0$, la solución complementaria que tratamos no es factible, por lo que no re-- suelve el Problema Fundamental. Este último es el caso que nos ocupa en este capítulo.

Observemos además, que la matriz $(-M,I)$ asociada a este - sistema canónico, es una matriz de rango completo de valor m.

Los siguientes resultados de Programación Lineal propor-- cionan la técnica para generar un camino de puntos extremos a- dyacentes.

Cada solución básica factible corresponde a un punto ex-- tremo de la región de soluciones factibles y viceversa. Además, bajo la suposición de no-degeneración, existe una corresponden cia uno-a-uno entre los puntos extremos y las soluciones básicas factibles*.

La clase de soluciones factibles generada al incrementar el valor de la variable no-básica, y ajustando los valores de

---

* (10, p 102)

las variables básicas en el cambio de una solución básica a la próxima, corresponde a un movimiento sobre una arista del conjunto Z. *

El siguiente ejemplo emplea los resultados anteriores, y pone en evidencia la necesidad de establecer ciertos criterios, para poder generar un camino de puntos extremos adyacentes.

Sea Z una región de soluciones factibles sin degeneración. Supongamos que tenemos una solución básica factible correspondiente a un punto extremo de Z, cuyo sistema canónico asociado es

VARIABLES BASICAS	VARIABLES NO-BASICAS	CTES.
$x_{B,1}, \ldots, x_{B,r}, \ldots, x_{B,m}$	$x_{N,m+1}, \ldots, x_{N,s}, \ldots, x_{N,n}$	>

$$
\begin{array}{lllllll}
x_{B,1} & + \bar{A}_1^{m+1} x_{N,m+1} & + \cdots + & \bar{A}_1^{s} x_{N,s} & + \cdots + & \bar{A}_1^{n} x_{N,n} & = \bar{b}_1 \\
\vdots & \vdots & & & & & \vdots \\
x_{B,r} & + \bar{A}_r^{m+1} x_{N,m+1} & + \cdots + & \bar{A}_r^{s} x_{N,s} & + \cdots + & \bar{A}_r^{n} x_{N,n} & = \bar{b}_r \\
\vdots & \vdots & & & & & \vdots \\
x_{B,m} & + \bar{A}_m^{m+1} x_{N,m+1} & + \cdots + & \bar{A}_m^{s} x_{N,s} & + \cdots + & \bar{A}_m^{n} x_{N,n} & = \bar{b}_m
\end{array}
$$

Tenemos a nuestra elección una de las n - m variables no-

---

* (6, p 155)

básicas, que podemos incrementar para empezar a generar un camino de puntos extremos adyacentes. Pero, ¿cómo debemos escogerla? Este es el primer criterio que debemos establecer.

De alguna forma, elegimos incrementar la variable no-básica $x_{N,s}$. La incrementamos y las demás variables no-básicas permanecen en cero. En seguida, nos movemos sobre una de las aristas de Z, y nos alejamos del hiperplano cuya variable de holgura asociada es precisamente $x_{N,s}$. Los valores de las variables básicas se modifican con este movimiento. Nos acercamos al hiperplano correspondiente a la ecuación frontera de la r-ésima restricción; así, la variable de holgura $x_{B,r}$ asociada a ésta, toma valores positivos cada vez más pequeños. Existen varios hiperplanos más allá del punto extremo de Z al que nos acercamos. Seguimos incrementando la hasta ahora variable no-básica, y llegamos al punto extremo. La variable que fue básica en el punto extremo inicial y que ha tomado el valor cero es única. Las demás variables básicas han cambiado sus valores; unas se han incrementado y otras se han decrementado, pero todas siguen siendo positivas. De continuar incrementando el valor de la variable no-básica $x_{N,s}$, la variable de holgura que tomó el valor cero se hubiera hecho negativa, y por lo tanto, nos hubiéramos salido de la región de soluciones factibles. Así, en este nuevo punto extremo que hemos generado, una variable $x_{N,s}$ que era no-básica, con valor de cero en el punto extremo anterior, ha tomado un valor positivo, y una variable $x_{B,r}$ que era básica, y que corresponde a la variable de holgura asociada al hiperplano más próximo en la trayectoria, ha tomado el valor de cero. Las otras variables básicas han cambiado su valor, siendo todavía positivas, y las no-básicas que no incrementamos desde el principio, permanecen en cero. Hubo entonces un intercambio de una variable entre el conjunto básico y el conjunto no-básico. Este resultado corresponde a una solución básica factible asociada a un punto extremo de Z, y el sistema canónico resultante es

$$
\begin{array}{llllllll}
x_{B,1} & +\bar{A}'^{r}_{1}x_{N,r}+ & & +\bar{A}'^{m+1}_{1}x_{N,m+1}+\cdots+ & 0 & +\cdots+\bar{A}'^{n}_{1}x_{N,n} & = & \bar{b}'_{1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\
 & \bar{A}'^{r}_{r}x_{N,r}+ & & +\bar{A}'^{m+1}_{r}x_{N,m+1}+\cdots+ & x_{B,s} & +\cdots+\bar{A}'^{n}_{r}x_{N,n} & = & \bar{b}'_{s} \\
 & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\
 & \bar{A}'^{r}_{m}x_{N,m}+ & \cdot+x_{B,m} & +\bar{A}'^{n}_{m}x_{N,m+1}+\cdots+ & 0 & +\cdots+\bar{A}'^{n}_{m}x_{N,n} & = & \bar{b}'_{m}
\end{array}
$$

De esta forma, suponiendo que hemos establecido el criterio para elegir a la variable no-básica $x_{N,s}$ que entrará al conjunto básico, debemos definir un segundo criterio que asegure que la variable $x_{B,r}$, que saldrá de la base, corresponda a la variable de holgura del hiperplano más cercano en sentido factible, con el propósito de que las soluciones básicas que generemos sean factibles.

Con respecto al criterio para elegir la variable no-básica $x_{N,s}$ que entrará al conjunto básico, éste está definido por la regla de complementaridad que trataremos más adelante. Recordemos que todos estos resultados proporcionarán la técnica para generar un camino de puntos extremos adyacentes, que conduzca a una solución complementaria factible, y así resolver el Problema Fundamental. Tocante al segundo criterio, éste ha sido desarrollado en Programación Lineal y permite elegir, de entre las variables básicas, aquella que dejará de serlo: suponiendo se ha elegido $x_{N,s}$ como la variable no básica que entrará al conjunto básico, $x_{B,r}$, que es la variable básica a sustituir, se determina de entre las variables $x_{B,i}$, mediante la relación

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{A}_i^s} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{A}_i^s}, \quad \bar{A}_i^s > 0 \right\} .$$

En resumen, la técnica para generar un camino de puntos extremos adyacentes es la siguiente:

Primero: nuestro sistema de m ecuaciones con n incógnitas debe estar en forma canónica con respecto a un conjunto de m variables básicas. La solución básica asociada a este sistema canónico debe ser factible, y como veremos más adelante, para nuestro problema particular, deberá ser casi-complementaria.

Segundo: aplicamos ahora un criterio para elegir, de entre las n - m variables no-básicas, cuál de ellas incrementare mos para generar una arista de la región de soluciones facti-- bles. En Programación Lineal, por ejemplo, se utiliza el crite rio de una mejor solución; aquí el criterio estará dado por la regla de complementaridad que definiremos posteriormente.

Tercero: empleamos un segundo criterio para determinar -- cuál de las variables del conjunto básico saldrá, de tal forma que al ser reemplazada por la variable no-básica determinada - por el primer criterio, el resultado sea una nueva base, y ade más, que la solución básica asociada a ésta sea factible. Este criterio como sabemos es

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{A}_r^s} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{A}_i^s}, \quad \bar{A}_i^s > 0 \right\}.$$

Cuando al emplear este criterio la variable básica a sustituir no es única, al elegir cualquiera de ellas, la solución básica factible resultante será degenerada. Así mismo, si no existe - $\bar{A}_i^s > 0$, significa que ninguna variable básica sale de la base, y al incrementar indefinidamente la variable no-básica determi nada por el primer criterio, estaremos describiendo una arista infinita de la región de soluciones factibles. Cuando este es el caso, no podremos ya generar un nuevo punto extremo y debe- mos parar.

Cuarto: damos valor cero a la nueva variable no-básica y a las n - m - 1 que no entraron a la base. Resolvemos el sistema de m ecuaciones con m incógnitas resultante mediante una operación de pivoteo. Así, hemos generado otro punto extremo, y nuestro sistema después de esta operación de pivoteo estará en forma canónica.

Quinto: al aplicar repetitivamente estos cuatro pasos, -- cuidando de que la solución básica factible que generamos no - coincida con alguna anterior, el resultado será un camino de - puntos extremos adyacentes. Debemos detenernos cuando hayamos encontrado la solución al problema, o cuando generemos un punto extremo previamente considerado, o bien, cuando generemos - una arista infinita de Z.

3-4.EL TEOREMA DE LEMKE

En la sección anterior tratamos la técnica para generar - un camino de puntos extremos adyacentes. En esta sección, bajo la suposición de no-degeneración, justificaremos en el Lema 3-1, porqué debemos buscar la solución complementaria factible - en un camino de puntos extremos adyacentes, y bajo la misma suposición, el Teorema de Lemke nos indicará cómo generar el camino de puntos extremos adyacentes apropiado, para encontrar - la solución factible complementaria que resuelve el Problema - Fundamental.

Consideremos el Problema Fundamental

$$w = q + Mz, \tag{1-1}$$

$$z \geq 0, \quad w \geq 0, \tag{1-2}$$

$$z^t w = 0. \tag{1-3}$$

Como sabemos, una solución es un vector $\bar{z}$ que satisface (1-1); esto es, satisface el sistema

$$-Mz + Iw = q, \tag{3-1}$$

donde $\bar{w} = q + M\bar{z}$. Al aplicar una operación de pivoteo al sistema (3-1), obtenemos un sistema canónico equivalente cuya solución básica asociada, $\begin{pmatrix} \bar{z} \\ \bar{w} \end{pmatrix}$, satisface el sistema original (3-1). Así, esta solución obtenida de un sistema equivalente, expresada en términos del sistema original es $\begin{pmatrix} \bar{z} \\ \bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z} \\ q + M\bar{z} \end{pmatrix}$, y corresponde a una solución $\bar{z}$.

En adelante, como trabajaremos con sistemas canónicos equivalentes, aparecerá indistintamente $\bar{z}$ o $\begin{pmatrix} \bar{z} \\ \bar{w} \end{pmatrix}$ como una solución.

LEMA 3-1. Bajo la suposición de que Z no presenta degeneración, todos los elementos del conjunto

$$Z^*_\beta = \{ z \mid z \in Z \ \ y \ \ z^t w = z_\beta w_\beta \},$$

corresponden a un punto extremo, o bien a una arista abierta - de la región de soluciones factibles.

Demostración. Sea $\begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{w} \end{bmatrix}$ una solución factible que pertenece a Z^*_β , entonces

$$\bar{z} \geq 0, \quad \bar{w} = q + M\bar{z} \geq 0, \quad \bar{z}^t\bar{w} = \bar{z}_\beta \bar{w}_\beta > 0.$$

Dado que el rango de la matriz $(-M, I)$ es m, y como estamos suponiendo no-degeneración en la región de soluciones factibles, esta solución factible $\begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{w} \end{bmatrix}$ debe tener m o más elementos positivos.

Ahora bien, como el producto $\bar{z}_i\bar{w}_i$ de cada par de variables complementarias debe ser cero, con excepción del par ----

$(\bar{z}_\beta, \bar{w}_\beta)$ cuyo producto puede ser mayor o igual a cero, entonces se debe cumplir que alguna o ambas de las variables complementarias de cada par, tome el valor de cero para $i \neq \beta$, y las correspondientes a $i = \beta$, pueden tomar valores mayores o iguales a cero. Consideremos dos casos:

Caso 1. $\bar{z}_\beta \bar{w}_\beta = 0$.

Supongamos que $\bar{z}_\beta = \bar{w}_\beta = 0$. Esto significa que la solución $\begin{pmatrix} \bar{z} \\ \bar{w} \end{pmatrix}$ debe tener distribuidos entre los $m - 1$ pares restantes, m o más elementos positivos. Pero cada par de variables complementarias admite a lo más una variable con valor positivo, si queremos que la solución pertenezca a Z^*_β. Así, es imposible tener m o más variables positivas en $m - 1$ pares complementarios y que la solución pertenezca a Z^*_β. Por lo tanto, alguna de las variables del par $i = \beta$ debe ser positiva, para dar cabida al mínimo de elementos positivos; es decir, m. De esta forma, para este caso particular se debe tener exactamente m variables positivas. Este tipo de solución queda represen tado por

z_1 w_1	z_2 w_2	. . . .	z_β w_β	. . . .	z_m w_m
$>$ 0	$>$ 0		$>$ 0		$>$ 0
ó	ó	. . . .	ó	. . . .	ó
0 $>$	0 $>$		0 $>$		0 $>$

y corresponde a una solución básica factible complementaria a-sociada a un punto extremo de Z.

Caso 2: $\bar{z}_\beta \bar{w}_\beta > 0$.

Esto significa que $\bar{z}_\beta > 0$ y $\bar{w}_\beta > 0$. Así, dos de los valores positivos, que deben ser m o más, se encuentran asociados al par de variables complementarias $i = \beta$. Sabemos que los --- $m - 1$ pares complementarios restantes admiten en conjunto, a - lo más, $m - 1$ variables con valor positivo, entonces es posi-- ble que la solución factible $\begin{pmatrix} \bar{z} \\ \bar{w} \end{pmatrix}$ tenga $m + 1$ elementos positivos como máximo. En estos términos, para este segundo caso --- existen sólo dos posibilidades: m variables positivas, o bien $m + 1$ variables positivas.

Cuando se tiene m variables positivas y $\bar{z}_\beta \bar{w}_\beta > 0$, forzosamente existe un índice $i = \gamma \neq \beta$ tal que ambas variables com-- plementarias tienen un valor cero. Las soluciones así caracterizadas quedan representadas por

z_1 w_1	z_2 w_2	. . .	z_γ w_γ	. . .	z_β w_β	. . .	z_m w_m
> 0	> 0						> 0
δ	δ	. . .	0 0	. . .	> >	. . .	δ
0 >	0 >						0 >

y corresponden a soluciones básicas factibles casi-complementarias ($i = \beta$) asociadas a puntos extremos de Z. Al par de variables complementarias (z_β, w_β) se le llama par básico, y al par (z_γ, w_γ) se le llama par no-básico.

Cuando se tiene m + 1 variables positivas y $\bar{z}_\beta \bar{w}_\beta > 0$, las soluciones de este tipo quedan representadas por

z_1 w_1	z_2 w_2	. . .	z_γ w_γ	. . .	z_β w_β	. . .	z_m w_m
> 0	> 0		> 0				> 0
δ	δ	. . .	δ	. . .	> >	. . .	δ
0 >	0 >		0 >				0 >

y corresponden a aristas abiertas de soluciones casi-complementarias de Z, generadas al incrementar una variable del par no-básico ($i = \gamma$) a partir de una solución básica factible casi-complementaria ($i = \beta$), o bien, al incrementar la variable no-básica del par complementario ($i = \beta$) a partir de una solución básica factible complementaria.

TEOREMA DE LEMKE[*]. Para β fija, si Z es no-degenerado, Z^*_β es vacío o es la unión de caminos ajenos de puntos extremos adyacentes de Z. El conjunto S de soluciones complementarias factibles de Z, es precisamente el conjunto de puntos finales de los caminos de puntos extremos adyacentes que constituyen Z^*_β.

Demostración. El lema anterior y su demostración serán empleados en la demostración de este teorema. Denotaremos por c a las soluciones básicas factibles complementarias, y por c-c a las soluciones básicas factibles casi-complementarias.

Si $\bar{z} \in Z^*_\beta$, entonces $\bar{z}_i \bar{w}_i = 0$ para $i \neq \beta$. Así, $\bar{z}$ es un punto extremo de Z o está en una arista abierta de Z.

Si $\bar{z}$ está en una arista abierta de Z, toda la arista está contenida en Z^*_β. Como estamos suponiendo no-degeneración, en un punto final de la arista sólo una variable adicional se hace cero, y éste también es un punto de Z^*_β. Por ejemplo,

---

* (13, pp 683-684)

	z_1 w_1	z_2 w_2	...	z_γ w_γ	...	z_β w_β	..	z_m w_m
ARISTA	$>$ 0	$>$ 0	...	$>$ 0	...	$>$ $>$	..	$>$ 0
PTO.FINAL	$>$ 0	$>$ 0	...	0 0	...	$>$ $>$	..	$>$ 0

.

Así, si Z_β^* es no vacío, entonces contiene al menos un punto extremo de Z.

Si $\bar{z}$ es un punto extremo de Z, sabemos que existen dos casos: caso 1, $\bar{z}_\beta \bar{w}_\beta = 0$, o caso 2, $\bar{z}_\beta \bar{w}_\beta > 0$.

En el caso 1, $\bar{z}$ es una solución complementaria factible, ya que para cada i, precisamente un valor del par $(\bar{z}_i, \bar{w}_i)$ es igual a cero. Así, la única arista que llega a $\bar{z}$ contenida en Z_β^* es aquélla cuyas soluciones, además, tienen positivo el valor asociado a la variable no-básica del par $\bar{z}_\beta$, $\bar{w}_\beta$ de $\begin{pmatrix}\bar{z}\\ \bar{w}\end{pmatrix}$. Por ejemplo,

	z_1 w_1	z_2 w_2	...	z_γ w_γ	....	z_β w_β	...	z_m w_m
ARISTA	$>$ 0	$>$ 0	...	$>$ 0	....	$>$ $>$	...	$>$ 0
C	$>$ 0	$>$ 0	...	$>$ 0	....	$>$ 0	...	$>$ 0

.

En el caso 2, sabemos que para un sólo valor de i, digamos $i = \gamma \neq \beta$, $\bar{w}_\gamma = \bar{z}_\gamma = 0$. Una arista de Z (con punto final $\bar{z}$) Sobre la cual sólo una de las variables del par $i = \gamma$ es incre mentada desde cero, está contenida en Z^*_β. Así, estas dos aristas (una por cada variable del par i = γ) son las únicas de Z con punto final $\bar{z}$ contenidas en Z^*_β. Ejemplo,

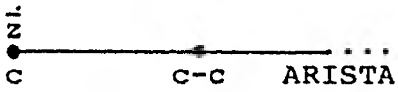
	z_1 w_1	z_2 w_2	. .	z_γ w_γ	. .	z_β w_β	. .	z_m w_m
ARISTA	> 0	> 0	. .	> 0	. .	> >	. .	> 0
C-C	> 0	> 0	. .	0 0	. .	> >	. .	> 0
ARISTA	> 0	> 0	. .	0 >	. .	> >	. .	> 0

Empleando estas características de los puntos extremos asociados a las soluciones básicas factibles complementarias -- (c), y a las casi-complementarias (c-c) de Z, analizaremos --- cómo están constituidos los caminos de puntos extremos adyacentes de Z^*_β.

Si un punto extremo $\bar{z}$ en Z^*_β es adyacente a sólo una arista de puntos de Z^*_β, esa arista es, o bien un rayo (en cuyo caso constituye el camino de adyacencia deseado, ya que $\begin{pmatrix} \bar{z} \\ \bar{w} \end{pmatrix}$ debe ser complementaria), o no lo es.

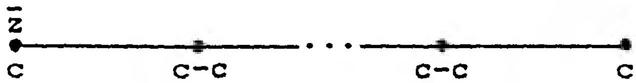
Si no lo es, el otro punto final de la arista es, o bien un -- punto complementario (en cuyo caso la arista constituye el camino deseado), o no lo es.

Si no, sólo existe otra arista de puntos de Z^*_β sobre la que podemos continuar.

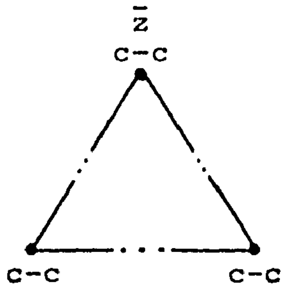


Siguiendo de esta manera, el proceso termina en un rayo o en una solución complementaria, resultando el camino deseado.

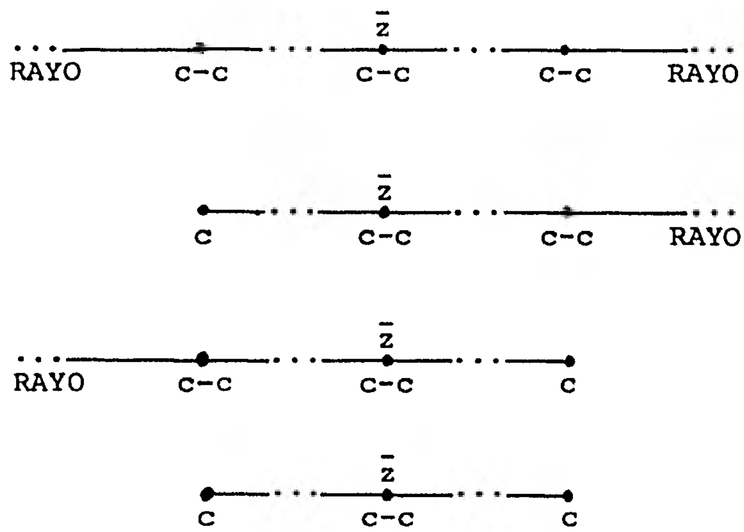
o



Si el punto extremo $\bar{z}$ en Z^*_β es adyacente a dos aristas de puntos de Z^*_β, seleccionando una de estas aristas para empezar, el resultado es un camino como el descrito anteriormente, excepto que éste puede regresar a $\bar{z}$, en cuyo caso termina.



Si esto no sucede, una parte similar del camino de adyacencia es recorrida desde la otra arista adyacente a $\bar{z}$, y las dos -- partes constituyen el camino deseado. Los siguientes son los resultados posibles:



Así, queda concluida la demostración del teorema.

Ahora podemos asegurar que, bajo la suposición de que la región de soluciones factibles Z no presenta degeneración, al generar un camino de puntos extremos adyacentes de los que --- constituyen al conjunto Z^*_β, partiendo de un punto extremo asociado a una solución básica factible casi-complementaria $(i=\beta)$, es posible encontrar una solución complementaria factible. Además, como $S = \bigcap_{i=1}^{m} Z^*_i$, si al generar todos los caminos que constituyen Z^*_β no encontramos una solución complementaria factible, el Problema Fundamental que deseamos resolver no tiene solu---

ción.

Por otra parte, cuando iniciemos nuestra búsqueda en un punto extremo casi-complementario $(i=\beta)$, que resulte ser el -- punto final de un rayo casi-complementario $(i=\beta)$, o bien una - solución complementaria factible, podemos asegurar que al generar el camino de puntos extremos adyacentes en Z^*_β no hay posibilidad de ciclo.

A los caminos de puntos extremos adyacentes de Z^*_β también los llamaremos caminos casi-complementarios $(i=\beta)$.

3-5.ALGORITMO PARA RESOLVER EL PROBLEMA FUNDAMENTAL, BASADO EN EL METODO DE LEMKE.

A partir de los resultados anteriores, proporcionados por el teorema de Lemke, el lema anterior a éste y la técnica para generar caminos de puntos extremos adyacentes, es posible describir un algoritmo que conduzca al encuentro de soluciones básicas factibles complementarias, que resuelvan el Problema Fundamental.

La idea esencial del algoritmo es que, bajo la suposición de no degeneración, a partir de un punto extremo de Z que pertenezca a algún conjunto Z_i^*, $i = 1,..., m$, recorrer el camino casi-complementario en que éste se encuentra, buscando sus puntos finales, que como sabemos, son soluciones complementarias factibles del Problema Fundamental que planteamos.

El siguiente análisis comprende los diferentes casos a los que nos podemos enfrentar en la búsqueda de los puntos finales; además, indica qué significado tiene cada caso, y qué hacer cuando se presente.

Supongamos que el punto extremo inicial es una solución básica factible casi-complementaria con $i = \beta$. Sabemos que existe un par básico $(i=\beta)$. Esta solución es de la forma:

				PAR NO BASICO		PAR BASICO		
	z_1 w_1	z_2 w_2	• •	z_γ w_γ	• •	z_β w_β	• •	z_m w_m
PUNTO EXTREMO INICIAL c-c	> 0	> 0	• •	0 0	• •	> >	• •	> 0
	ó	ó						ó
	0 >	0 >						0 >

Adyacentes a este punto extremo casi-complementario $(i=\beta)$, como ya hemos visto, existen sólo dos aristas casi-complementarias $(i=\beta)$. Estas se generan al incrementar cada una de las variables del par no-básico $(i=\gamma)$, dividiendo el camino casi-complementario en que se encuentra el punto extremo inicial, en dos partes. Llamaremos parte 1 a la porción del camino que se empieza a recorrer al incrementar la variable z_γ del par no -básico, y llamaremos parte 2 a la porción del camino que se - empieza a recorrer al incrementar la variable w_γ del par no-básico. Debemos notar que estas dos partes sólo están definidas por el punto extremo casi-complementario inicial.

En cada iteración, nos moveremos simultáneamente de un -- punto extremo de la parte 1 a su adyacente, y de un punto ex-- tremo de la parte 2 a su adyacente. De esta forma, ocurre alguno de los eventos representados en la siguiente matriz:

PORCION	INEXISTENCIA DE SOLUCION C EN EL CAMINO	EVENTOS ITERATIVOS	EVENTOS CON SOLUCION C
1 \ 2	RAYO	c-c	c
RAYO	E^1_1	E^2_1	E^3_1
c-c	E^1_2	E^2_2	E^3_2
c	E^1_3	E^2_3	E^3_3

Analizamos estos eventos en la siguiente tabla asociada:

EVENTO	PARTE 1	SOLUCION INICIAL c-c	PARTE 2	SIGNIFICADO	QUE HACER*	POSIBILIDAD DE CICLO
E_1^1	RAYO		RAYO	NO HAY SOLUCION COMPLEMENTARIA EN ESTE CAMINO	PARAR. INTENTAR OTRO PUNTO INICIAL EN OTRO CAMINO.	—
E_1^2	RAYO		c-c	NO HAY SOLUCION COMPLEMENTARIA EN LA PARTE 1.	CONTINUAR EN LA PARTE 2. IR A (7).	NO
E_2^1	c-c		RAYO	NO HAY SOLUCION COMPLEMENTARIA EN LA PARTE 2.	CONTINUAR EN LA PARTE 1. IR A (7).	NO
E_2^2	c-c		c-c	SI LOS PUNTOS EXTREMOS ACTUALES COINCIDEN, TENEMOS CICLO.	EN CASO DE CICLO, PARAR SI NO, CONTINUAR SIMULTANEAMENTE EN AMBAS -- PARTES. IR A (7).	SI
E_1^3	RAYO		c	TENEMOS SOLUCION c EN LA PARTE 2 Y NO HAY SOLUCION c EN LA PARTE 1.	PARAR.	—
E_3^1	c		RAYO	TENEMOS SOLUCION c EN LA PARTE 1 Y NO HAY SOLUCION c EN LA PARTE 2.	PARAR.	—
E_2^3	c-c		c	TENEMOS SOLUCION c EN LA PARTE 2.	SI SE DESEA, CONTINUAR EN LA PARTE 1. IR A (7).	NO
E_3^2	c		c-c	TENEMOS SOLUCION c EN LA PARTE 1.	SI SE DESEA, CONTINUAR EN LA PARTE 2. IR A (7).	NO
E_3^3	c		c	TENEMOS SOLUCION c EN LA PARTE 1 Y EN LA PARTE 2.	PARAR.	—

* Esta columna es parte del algoritmo que describiremos.

Supongamos ahora que el punto extremo inicial es una solución complementaria. A partir de esta solución inicial, que como sabemos está en la intersección de los conjuntos Z_i^*, $i = 1, .., m$, y que para cada par de variables complementarias sólo una es básica, podemos elegir cualquier variable no-básica para incrementarla, y empezar a generar un camino casi-complementario. Así, tenemos m posibles caminos casi-complementarios por recorrer, con la seguridad de que no habrá posibilidad de ciclo. En este caso, suponiendo que el punto complementario inicial constituye la parte 1 del camino, a cada iteración nos moveremos a un punto extremo adyacente en el camino casi-complementario que hayamos elegido, y los eventos posibles para este caso serán E_3^1, E_3^2, E_3^3 de la matriz de eventos para el caso anterior, en que la solución inicial es casi-complementaria.

Podemos ahora describir el algoritmo:

Paso 1. Encontrar un punto extremo de Z que esté en alguno de los conjuntos Z_i^*, $i = 1,.., m$. Sea $i=\beta$. Este punto extremo inicial puede ser una solución básica factible complementaria, o bien, una solución básica factible casi-complementaria. Si ocurre lo primero, ir a (3); si no, ir a (2).

Paso 2. Poner el sistema de m ecuaciones con 2m incógnitas en forma canónica, con respecto a las m variables básicas (las positivas). Localizar el par básico ($i=\beta$) y el par no-básico ($i=\gamma$). Empezar a generar la parte 1 del camino, introduciendo z_γ a la base. Independientemente y al mismo tiempo, empezar a generar la parte 2 del camino introduciendo w_γ a la base. Ir a (4).

Paso 3. Si se desea encontrar otra solución básica factible complementaria a partir de una previa, elegir un índice β asociado a un conjunto Z^*_β, para el que no se haya recorrido el camino casi-complementario, que tiene como punto final a la solución complementaria previa. Esta solución complementaria inicial, será el punto extremo actual para la parte 1 del camino casi-complementario que recorreremos. Incrementando el valor de la variable no-básica del par $(i=\beta)$, empezamos a recorrer la parte 2 del camino. Ir a (4).

Paso 4. Determinar cuál de las variables del conjunto básico saldrá, de tal forma , que al ser reemplazada por la variable no-básica z_γ o w_γ, el resultado sea una nueva solución básica factible de Z^*_β. Para ello, empleamos el criterio

$$\frac{\bar{q}_{r_{z\acute{o}w}}}{\bar{A}^{\gamma}_{r_{z\acute{o}w}} z\acute{o}w} = \min_i \left\{ \frac{\bar{q}_i}{\bar{A}^{\gamma}_i z\acute{o}w} \; , \quad \bar{A}^{\gamma}_i z\acute{o}w > 0 \right\} .$$

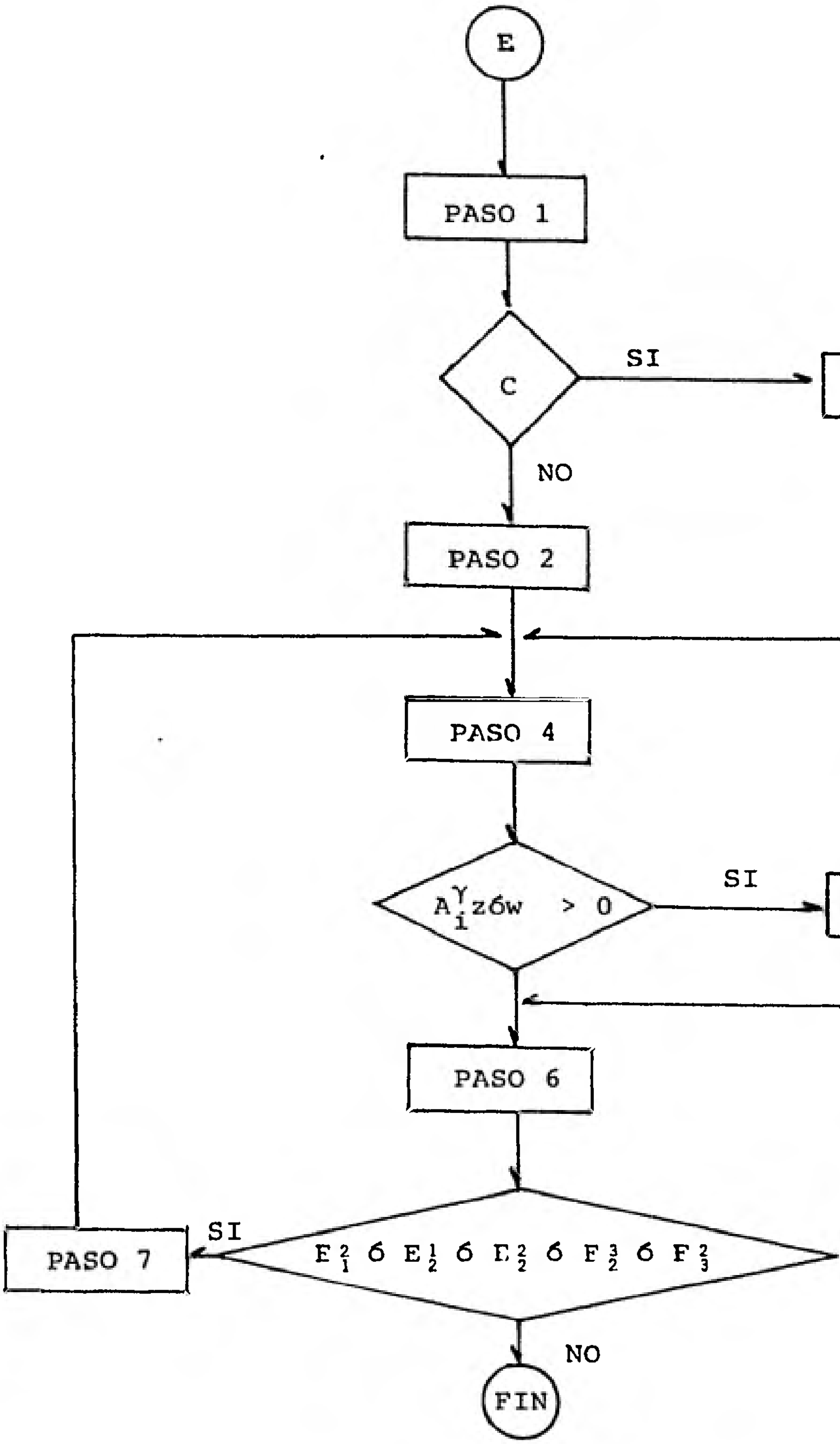
Si existe una variable básica que se hace cero con el incremento de z_γ o w_γ, el resultado es una nueva solución básica factible que puede ser complementaria o casi-complementaria. Una so lución complementaria ocurre sólo si un miembro del par básico ($i=\beta$) sale de la base. Una solución casi-complementaria se obtiene, si cualquier otra variable básica se hace cero. Cuando esto último ocurre, el nuevo par no-básico $i=\gamma$ corresponde precisamente al índice de la variable básica que salió. Ir a (5). En cambio, si no existe $\bar{\lambda}_i^{\gamma}$ zów > 0, significa que ninguna va-- riable básica sale de la base, y al incrementar indefinidamente la variable z_γ o w_γ estaremos describiendo un rayo. Ir a -- (6).

Paso 5. Resolvemos el sistema de m ecuaciones con m incógnitas resultante mediante una operación de pivoteo. Así, hemos generado otro punto extremo, y nuestro sistema estará en forma canónica. Ir a (6).

Paso 6. Vemos a que evento corresponden los puntos extremos actuales de la parte 1 y la parte 2 del camino casi-complementario en la matriz de eventos posibles, y efectuamos lo que se indica en la tabla asociada.

Paso 7. Regla de complementaridad: el complemento de la - variable que acaba de salir de la base en el nuevo par no-básico, es la próxima variable no-básica a incrementar. Ir a (4).

Diagrama de flujo:



REFERENCIAS

3-2.IDEA GEOMETRICA

{ 13, p 683 }

3-3.CAMINOS DE PUNTOS EXTREMOS ADYACENTES

{ 6, pp 69-81, p 154, p 155 }

{ 10, pp 100-104, pp 108-111 }

3-4.EL TEOREMA DE LEMKE

{ 10, p 47, p 48, pp 80-83 }

{ 13, pp 683-684 }

3-5.ALGORITMO PARA RESOLVER EL PROBLEMA FUNDAMENTAL, BASADO EN EL METODO DE LEMKE

- REFERENCIAS DE LAS SECCIONES 3-3 y 3-4

{ 3, pp 109-110 }

CAPITULO IV

EXISTENCIA DE SOLUCIONES BASICAS FACTIBLES COMPLEMENTARIAS

4-1. INTRODUCCION.

Hasta el momento sabemos que, bajo la suposición de no--degeneración del conjunto de soluciones factibles Z, es posible resolver el Problema Fundamental empleando el método de - Lemke. Pero, bajo esta misma suposición, ¿habrá algún criterio mediante el cual podamos asegurar la existencia o inexistencia de soluciones complementarias factibles? Más aún, ¿podremos modificar el Problema Fundamental para garantizar que este método nos conducirá a la solución deseada? La respuesta - es sí. En la segunda sección de este capítulo, trataremos los resultados obtenidos por R.W.Cottle y G.B.Dantzing, referentes a la existencia de soluciones de determinadas clases de - Problemas Fundamentales, al aplicar el método de Lemke al Problema Fundamental original. En la tercera sección, consideraremos una modificación al Problema Fundamental, que es una útil técnica sugerida por C.E.Lemke para la obtención de una - solución casi-complementaria inicial. En la cuarta y última - sección de este capítulo, trataremos los resultados obtenidos por R.W.Cottle y G.B.Dantzing, con respecto a la existencia -

de soluciones complementarias factibles, al aplicar el método de Lemke al Problema Fundamental modificado, donde la matriz M tiene ciertas propiedades. Los apéndices 1 y 2 de este estudio complementan los resultados de esta última sección. Además, en el apéndice 1, se consideran resultados de existencia de soluciones complementarias factibles, referentes a los Problemas Fundamentales estructurados para resolver problemas de programación lineal, problemas de programación cuadrática y juegos bimatriciales.

4-2. EXISTENCIA DE SOLUCIONES COMPLEMENTARIAS FACTIBLES AL APLICAR EL METODO DE LEMKE AL PROBLEMA FUNDAMENTAL

En esta sección trataremos los resultados referentes a la existencia de soluciones complementarias factibles, al aplicar la técnica de Lemke al Problema Fundamental sin modificación. Para ello, el siguiente lema será de gran utilidad en la demostración de estos resultados.

LEMA 4-1. Si $\begin{pmatrix}\bar{z}\\ \bar{w}\end{pmatrix}$ es una solución básica factible casi-complementaria de $w = q + Mz$, y $\begin{pmatrix}\bar{z}\\ \bar{w}\end{pmatrix}$ es adyacente a un rayo casi-complementario, existen los vectores w^h, z^h, de m componentes, tales que

$$w^h = Mz^h, \quad w^h \geq 0, \quad z^h \geq 0,$$

$z^h \neq 0$ si la variable z_γ del par no-básico genera el rayo,

$w^h \neq 0$ si la variable w_γ del par no-básico genera el rayo;

además, los puntos sobre el rayo son de la forma

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z} \\ \bar{w} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} z^h \\ w^h \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0,$$

y para toda $\lambda > 0$ se satisface que

$$(\bar{z}_i + \lambda z_i^h)(\bar{w}_i + \lambda w_i^h) = 0, \quad \text{para toda } i \neq \beta,$$
$$(\bar{z}_\beta + \lambda z_\beta^h)(\bar{w}_\beta + \lambda w_\beta^h) \neq 0.$$

Demostración. Partiremos de la obtención de una solución básica. Supondremos luego que esta es factible casi-complementaria, y generaremos un rayo casi-complementario. Caracterizaremos los puntos sobre este rayo, y definiremos a los vectores z^h, w^h que cumplen con las condiciones que establece el lema.

Consideremos el sistema de m ecuaciones con 2m variables

$$w = q + Mz;$$

en forma matricial,

$$(-M, I)\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = q \ .$$

Sea $(-M_B, I_B)$ una base formada por las columnas de la matriz - $(-M, I)$ (M_B o I_B puede ser vacía), y $(-M_N, I_N)$ la matriz formada por las columnas de $(-M, I)$ que no están en la base.

El vector,

$$\begin{pmatrix} z_B \\ w_B \end{pmatrix},$$

representará las variables básicas asociadas a las columnas - de $(-M_B, I_B)$, cuyos componentes serán denotados por $z_{B,i}$, $w_{B,i}$, donde B indica que es una variable básica, e i indica, para - z_B, la columna de M a la cual está asociada, y para w_B, la columna de I a la cual está asociada.

El vector,

$$\begin{pmatrix} z_N \\ w_N \end{pmatrix},$$

representará las variables no-básicas asociadas a las columnas de $(-M_N, I_N)$, cuyos componentes serán denotados por $z_{N,i}$, $w_{N,i}$, donde N indica que es una variable no-básica, e i indica, para z_N, la columna de M a la cual está asociada, y para w_N, la columna de I a la cual está asociada.

De esta forma, dada una base $(-M_B, I_B)$ de $(-M, I)$, nuestro sistema

$$(-M, I)\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = q,$$

se puede expresar como

$$(-M_B, I_B \mid -M_N, I_N)\begin{pmatrix} z_B \\ w_B \\ \hline z_N \\ w_N \end{pmatrix} = q;$$

o equivalentemente,

$$(-M_B, I_B)\begin{pmatrix} z_B \\ w_B \end{pmatrix} + (-M_N, I_N)\begin{pmatrix} z_N \\ w_N \end{pmatrix} = q \ .$$

Como $(-M_B, I_B)$ es una base, la inversa de ésta, $(-M_B, I_B)^{-1}$, existe, y al multiplicar nuestro sistema de ecuaciones por -- esta inversa, lo podemos expresar en forma canónica con res-- pecto a las variables básicas z_B, w_B de la siguiente forma:

$$I\begin{pmatrix} z_B \\ w_B \end{pmatrix} + (-M_B, I_B)^{-1}(-M_N, I_N)\begin{pmatrix} z_N \\ w_N \end{pmatrix} = (-M_B, I_B)^{-1}q \ .$$

La solución básica asociada es

$$\begin{pmatrix} \bar{z}_B \\ \bar{w}_B \end{pmatrix} = (-M_B, I_B)^{-1}q \ , \quad \begin{pmatrix} \bar{z}_N \\ \bar{w}_N \end{pmatrix} = 0 \ ;$$

así,

$$\begin{pmatrix} z_B \\ w_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_B \\ \bar{w}_B \end{pmatrix} + (-1)\left(-M_B, I_B\right)^{-1}\left(-M_N, I_N\right)\begin{pmatrix} z_N \\ w_N \end{pmatrix} .$$

Supongamos ahora que esta solución básica es factible --casi-complementaria, entonces se debe cumplir que

$$\begin{pmatrix} \bar{z} \\ \bar{w} \end{pmatrix} \geqq 0,$$

y también,

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} z_{B,i} w_{N,i} = 0 \\ z_{N,i} w_{B,i} = 0 \end{array} \right\} & i = 1,\ldots, m, \quad \gamma \neq i \neq \beta, \\ z_{B,\beta} w_{B,\beta} \neq 0 & i = \beta \quad \text{(par básico)} \\ z_{N,\gamma} w_{N,\gamma} = 0 & i = \gamma \quad \text{(par no-básico)} . \end{array}$$

Supongamos además que podemos generar un rayo casi-com--plementario. Sabemos que sólo existen dos posibilidades para hacerlo: o bien incrementando a la variable no-básica $z_{N,\gamma}$ o bien a su complemento, $w_{N,\gamma}$. Estos dos rayos casi-complementarios posibles están caracterizados de la siguiente forma:

Si el rayo se genera al incrementar $z_{N,\gamma}$, éste es

$$\begin{pmatrix} z_B \\ w_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_B \\ \bar{w}_B \end{pmatrix} + (-1)\left(-M_B, I_B\right)^{-1}\left(-M_N^{\gamma}\right) z_{N,\gamma} ,$$

$$z_{N,i} = 0, \qquad i \neq \gamma,$$

$$z_{N,\gamma} = \lambda, \qquad \lambda > 0, \qquad \lambda \to \infty,$$

$$w_N = 0;$$

o bien,

$$
\left[\begin{array}{c} z_B \\ w_B \\ \hline z_{N,i} \ (i \neq \gamma) \\ \cdots\cdots \\ z_{N,\gamma} \\ \cdots\cdots \\ w_N \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \bar{z}_B \\ \bar{w}_B \\ \hline \bar{z}_{N,i} \\ \cdots \\ \bar{z}_{N,\gamma} \\ \cdots \\ \bar{w}_N \end{array}\right] + \lambda \left[\begin{array}{c} (-1)\,(-M_B, I_B)^{-1}\,(-M_N^{\gamma}) \\ \hline 0 \\ \cdots\cdots \\ 1 \\ \cdots\cdots \\ 0 \end{array}\right] ,
$$

$$
\lambda > 0, \qquad \lambda \to \infty .
$$

Si el rayo casi-complementario se genera al incrementar $w_{N,\gamma}$, éste se caracteriza como

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} z_B \\ w_B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{z}_B \\ \bar{w}_B \end{pmatrix} + (-1)\,(-M_B, I_B)^{-1}\,(I_N^{\gamma})\,w_{N,\gamma} , \\
z_N &= 0, \\
w_{N,i} &= 0, \qquad i \neq \gamma , \\
w_{N,\gamma} &= \lambda, \qquad \lambda > 0, \qquad \lambda \to \infty ;
\end{aligned}
$$

o bien,

$$\left[\begin{array}{c} z_B \\ w_B \\ \hline z_N \\ \cdots\cdots \\ w_{N,i} \quad (i \neq \gamma) \\ \cdots\cdots \\ w_{N,\gamma} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \bar{z}_B \\ \bar{w}_B \\ \hline \bar{z}_N \\ \cdots \\ \bar{w}_{N,i} \\ \cdots \\ \bar{w}_{N,\gamma} \end{array}\right] + \lambda \left[\begin{array}{c} (-1)\left(-M_B, I_B\right)^{-1}\left(I_N^{\gamma}\right) \\ \hline 0 \\ \cdots\cdots \\ 0 \\ \cdots\cdots \\ 1 \end{array}\right]$$

$$\lambda > 0, \qquad \lambda \to \infty \quad .$$

Debe observarse que para asegurar que ninguna de las variables básicas se hará cero con el incremento de la variable $z_{N,\gamma}$ o $w_{N,\gamma}$, según el caso, se debe cumplir que

$$\left(-M_B, I_B\right)^{-1}\left(-M_N^{\gamma}\right) \leqq 0,$$

o

$$\left(-M_B, I_B\right)^{-1} I_N^{\gamma} \leqq 0 \quad .$$

Consideremos la siguiente definición. Sea

$$\left[\begin{array}{c} z^h \\ \hline w^h \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} z_B^h \\ z_N^h \\ \hline w_B^h \\ w_N^h \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{c} z_B^h \\ w_B^h \\ \hline z_{N,i}^h \quad (i \neq \gamma) \\ \cdots\cdots \\ z_{N,\gamma}^h \\ \cdots\cdots \\ w_N^h \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} (-1)\left(-M_B, I_B\right)^{-1}\left(-M_N^{\gamma}\right) \\ \hline 0 \\ \cdots\cdots \\ 1 \\ \cdots\cdots \\ 0 \end{array}\right]$$

cuando $z_{N,\gamma}$ genera el rayo casi-complementario; y sea

$$\begin{bmatrix} z^h \\ \hline w^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_B^h \\ z_N^h \\ \hline w_B^h \\ w_N^h \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} z_B^h \\ w_B^h \\ \hline z_N^h \\ \cdots\cdots \\ w_{N,i}^h \quad (i \neq \gamma) \\ \cdots\cdots \\ w_{N,\gamma}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\left(-M_B, I_B\right)^{-1}\left(I_N^\gamma\right) \\ \hline 0 \\ \cdots\cdots \\ 0 \\ \cdots\cdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

cuando $w_{N,\gamma}$ genera el rayo casi-complementario. Se observa inmediatamente que

$$w^h \geqq 0, \quad z^h \geqq 0$$

para ambos casos. Además, si $z_{N,\gamma}$ genera el rayo, podemos asegurar que

$$z^h \neq 0,$$

ya que $z_{N,\gamma}^h = 1$. Si $w_{N,\gamma}$ es la variable del par no-básico que lo hace, entonces

$$w^h \neq 0,$$

porque $w_{N,\gamma}^h = 1$.

Empleando este vector $\begin{pmatrix} z^h \\ w^h \end{pmatrix}$ que acabamos de definir, el rayo que generemos en cualquiera de los dos casos, se puede representar como

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z} \\ \bar{w} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} z^h \\ w^h \end{pmatrix}, \qquad \lambda > 0, \qquad \lambda \to \infty \ ,$$

y como las soluciones que lo constituyen son casi-complementarias, se cumple que para toda $\lambda > 0$,

$$(\bar{z}_i + \lambda z_i^h)(\bar{w}_i + \lambda w_i^h) = 0, \text{ para toda } i \neq \beta \ ,$$
$$(\bar{z}_\beta + \lambda z_\beta^h)(\bar{w}_\beta + \lambda w_\beta^h) \neq 0.$$

Apartir de la representación del rayo, observamos que

$$\begin{pmatrix} z^h \\ w^h \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda}\left\{\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{z} \\ \bar{w} \end{pmatrix}\right\}, \qquad \lambda > 0 \ ;$$

de donde,

$$z^h = \frac{1}{\lambda}(z - \bar{z}) \quad \text{y} \quad w^h = \frac{1}{\lambda}(w - \bar{w}), \qquad \lambda > 0 \ .$$

Además, como

$$Mz = w - q \quad \text{y} \quad M\bar{z} = \bar{w} - q,$$

tenemos para $\lambda > 0$, que

$$Mz^h = \frac{1}{\lambda}M(z - \bar{z}) = \frac{1}{\lambda}(Mz - M\bar{z}) = \frac{1}{\lambda}(w - q - \bar{w} + q) =$$

$$= \frac{1}{\lambda}(w - \bar{w}) = w^h.$$

Así, z^h y w^h son tales que

$$Mz^h = w^h.$$

Esto concluye la demostración del lema.

Cada problema Fundamental está caracterizado por sus matrices M y q. La clase a la que pertenezcan éstas, determina propiedades particulares, que pueden ser útiles para la obtención de una solución complementaria factible. El siguiente -- par de teoremas establece la existencia de soluciones complementarias, cuando $M > 0$* o M está asociada a un juego bimatricial $\Gamma(A,B)$, sin que q deba cumplir alguna condición particular. La demostración de estos resultados proporciona la técnica para iniciar el procedimiento de Lemke, en el caso particular al que el resultado se refiera.

TEOREMA 4-1. Si $M > 0$ el Problema Fundamental tiene una solución básica factible complementaria para cualquier vector q.

Demostración. Primero haremos notar que la región de so-

---

* $M_i^j > 0, \forall\ i,j$.

luciones factibles es no-acotada; de aquí la existencia de rayos. Luego, obtendremos una solución básica factible casi-complementaria que resultará adyacente a un rayo casi-complementario. Como sabemos, al aplicar el algoritmo de Lemke a partir de un punto extremo con estas características, el procedimiento termina en una solución complementaria, o bien, en un rayo casi-complementario. Supondremos que termina en este último caso, y habrá una contradicción. Así, el procedimiento debe terminar en una solución complementaria factible, con lo que el teorema quedará demostrado.

Podemos asegurar que la región de soluciones factibles

$$Z = \{ z \mid z \geqq 0, \quad w = q + Mz \geqq 0 \} ,$$

es no-acotada, ya que al incrementar indefinidamente el valor de las m variables que componen a z, como $M > 0$, también las variables $w = q + Mz$ se verán incrementadas indefinidamente, sin que por esto se pierda factibilidad.

Buscamos ahora una solución casi-complementaria para iniciar el procedimiento de Lemke. Para ello, consideremos el sistema

$$-Mz + Iw = q.$$

Como ya hemos hecho notar con anterioridad, éste está en forma canónica con respecto a las variables básicas w, y la solución básica asociada es $z = 0$, $w = q$, a la que podemos representar como

z_1 w_1	z_2 w_2	. . . .	z_m w_m
0 q_1	0 q_2	. . . .	0 q_m

Esta es una solución complementaria que resulta factible si $q > 0$, y es no-factible si alguna $q_i < 0$. En caso de que sea factible, esta solución es adyacente a m rayos casi-complementarios de la forma

$$w = q + M^{\beta} z_{\beta},$$
$$z_{\beta} = \lambda, \qquad \lambda > 0, \qquad \lambda \to \infty,$$
$$z_i = 0, \qquad i \neq \beta .$$

Si ocurre que no es factible, al incrementar indefinidamente cada una de las variables no-básicas, estaremos generando un rayo casi-complementario a partir de un valor z_{β} (variable no-básica que incrementamos), tal que

$$w = q + M^{\beta} z_{\beta} > 0,$$

donde cada $w_i = q_i + M_i^{\beta} z_{\beta} > 0$, $i = 1,.., m$, si

$$z_\beta > \frac{-q_i}{M_i^\beta}, \quad M_i^\beta > 0, \quad i = 1,.., m .$$

Así, cuando

$$z_\beta = \max_{i=1,..,m} \left\{ \frac{-q_i}{M_i} \right\} = \frac{-q_\gamma}{M_\gamma^\beta},$$

sucederá que

$$w_i > 0, \quad i \neq \gamma,$$
$$w_\gamma = 0.$$

Si $\gamma = \beta$, tendremos una solución complementaria al final de - un rayo. De otra forma, obtendremos una solución casi-complementaria al final de un rayo.

La siguiente tabla resume el procedimiento anterior.

SOLUCION	z_1	w_1	. .	z_β	w_β	. .	z_γ	w_γ	. .	z_m	w_m
SOLUCION COMPLEMENTARIA NO-FACTIBLE	0	q_1	. .	0	q_β	. .	0	q_γ	. .	0	q_m
SEGMENTO CASI-COMPLEMENT. NO-FACTIBLE	0	$\neq$	. .	>	$\neq$	. .	0	<	. .	0	$\neq$
SOLUCION CASI-COMPLEMENT. FACTIBLE	0	>	. .	$\frac{-q_\gamma}{M_\gamma^\beta}$	>	. .	0	0	. .	0	>
RAYO CASI-COMPLEMENT.	0	>	. .	>	>	. .	0	>	. .	0	>

Hemos localizado de esta forma una solución casi-complementaria que resulta ser el punto final de un rayo casi-complementario. Como sabemos, al iniciar el procedimiento de Lemke con esta solución, éste se detendrá en una solución complementaria o bien en un rayo. Demostraremos que terminar en un rayo no puede ocurrir.

Supongamos que a partir de esta solución, nos hemos movido de solución casi-complementaria en solución casi-complementaria, y hemos terminado el procedimiento en un rayo. Deseamos saber de qué rayo casi-complementario se trata.

El punto final de este rayo es una solución básica factible casi-complementaria, y por consiguiente tiene un par básico, $z_\beta = \bar{z}_\beta$ y $w_\beta = \bar{w}_\beta$, y tiene un par no-básico, $z_\gamma = 0$, ---- $w_\gamma = 0$.

Por la regla de complementaridad, el rayo en que termina el procedimiento, debe estar generado por el complemento de la variable que salió de la base, dando origen al par no-básico $(i=\gamma)$, de la solución casi-complementaria que está al final del rayo. Así, existen dos posibilidades: z_γ genera el rayo, o bien w_γ lo hace.

Supongamos primero que z_γ es la variable del par no-básico, cuyo incremento genera el rayo que deseamos identificar, entonces por el lema 4-1,

$$w^h = Mz^h, \quad 0 \neq z^h \geqq 0, \quad w^h \geqq 0,$$

y como $M > 0$, debemos tener que

$$w^h = Mz^h > 0;$$

de esta forma, las variables complementarias w son tales que

$$w_i = \bar{w}_i + \lambda w_i^h > 0 \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall i,$$

lo cual contradice el hecho de que $w_\gamma = 0$, por ser la variable del par no-básico que no genera el rayo que deseamos identificar. Así, z_γ no genera el rayo.

Supongamos ahora que w_γ es la variable del par no-básico que genera el rayo, entonces por el lema 4-1,

$$w^h = Mz^h, \quad z^h \geqq 0, \quad 0 \neq w^h \geqq 0.$$

Supongamos además que $z^h = 0$, entonces $w^h = Mz^h = 0$, lo que contradice el hecho de que $w^h \neq 0$. Así, debemos tener que

$$0 \neq z^h \geqq 0.$$

Ahora bien, como $M > 0$ y $0 \neq z^h \geqq 0$, se cumple que

$$w^h = Mz^h > 0.$$

Por casi-complementaridad de las soluciones que constituyen el rayo, para las variables complementarias

$$z_i = (\bar{z}_i + \lambda z_i^h) \quad y \quad w_i = (\bar{w}_i + \lambda w_i^h), \quad i \neq \beta,$$

se cumple que

$$z_i w_i = (\bar{z}_i + \lambda z_i^h)(\bar{w}_i + \lambda w_i^h) = 0, \quad \forall\ \lambda > 0.$$

Este producto es cero si alguna o ambas variables complementarias tienen valor cero. Observemos que $\bar{w}_i \geqq 0$ ya que --- $\bar{w} \geqq 0$ por formar parte de una solución factible; $w_i^h > 0$ porque $w^h > 0$ como hemos hecho notar anteriormente; y $\lambda > 0$. Así,

$$w_i = \bar{w}_i + \lambda w_i^h > 0, \quad \forall\ \lambda > 0, \quad \forall\ i \neq \beta,$$

y como consecuencia, el primer factor debe ser cero; esto es,

$$z_i = \bar{z}_i + \lambda z_i^h = 0, \quad \forall\ \lambda > 0, \quad \forall\ i \neq \beta.$$

Ahora, como $z_i = \bar{z}_i + \lambda z_i^h = 0$, $\bar{z}_i \geqq 0$ por ser $\bar{z} \geqq 0$ una solución factible, $z_i^h \geqq 0$ como se establece en el lema 4-1, y --- $\lambda > 0$, debemos tener que

$$\bar{z}_i = 0 \quad y \quad z_i^h = 0 \quad \forall\, i \neq \beta.$$

En resumen, el rayo casi-complementario en que supuestamente ha terminado el procedimiento está caracterizado como

$$\begin{aligned} z_i &= \bar{z}_i + \lambda z_i^h = 0, \quad \forall\, i \neq \beta, \\ z_\beta &= \bar{z}_\beta + \lambda z_\beta^h > 0, \\ w &= \bar{w} + \lambda w^h > 0, \end{aligned}$$

y el punto final casi-complementario de este rayo, es

$$\begin{aligned} z_i &= 0, \quad \forall\, i \neq \beta, \\ z_\beta &> 0, \\ w_i &> 0, \quad \forall\, i \neq \gamma, \\ w_\gamma &= 0, \end{aligned}$$

y quedan representados por

	z_1 w_1	· ·	z_β w_β	· ·	z_γ w_γ	· ·	z_m w_m
SOLUCION c-c	0 >	· ·	> >	· ·	0 0	· ·	0 >
RAYO c-c	0 >	· ·	> >	· ·	0 >	· ·	0 >

.

Este rayo casi-complementario corresponde precisamente al rayo casi-complementario (i=β) adyacente a la solución casi-complementaria inicial, lo cual es una contradicción. Para que ocurra lo anterior se debe formar un ciclo, que como sabemos, es un evento imposible cuando el algoritmo se ha iniciado en una solución casi-complementaria, que es el punto final de un rayo casi-complementario.

Así, como terminar en otro rayo es imposible, concluimos que el procedimiento iniciado como se ha descrito anteriormente, debe terminar en una solución complementaria factible.

TEOREMA 4-2. Un juego bimatricial $\Gamma(A,B)$ tiene una solución complementaria factible.

Demostración. Antes de iniciar la demostración de este teorema, que es similar a la del anterior, recordemos del capítulo II que el Problema Fundamental estructurado para resolver juegos bimatriciales, es de la forma

$$\begin{array}{llll} u = -e_m \quad\quad + Ay, & A > 0, & x \geqq 0, & u \geqq 0, \\ v = -e_n + B^t x \quad\quad , & B > 0, & y \geqq 0, & v \geqq 0, \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

donde

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -e_m \\ -e_n \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B^t & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Consideremos ahora el sistema canónico

$$-Mz + Iw = q.$$

Su solución básica asociada es $z = 0$, $w = q$. Observemos que -q < 0 porque

$$q = \begin{pmatrix} -e_m \\ -e_n \end{pmatrix},$$

donde e_m y e_n son columnas de unos. Así, esta solución básica es complementaria no-factible de la forma

x_1 u_1	x_2 u_2	. . .	x_m u_m	y_1 v_1	y_2 v_2	. . .	y_n v_n
0 -1	0 -1	. . .	0 -1	0 -1	0 -1	. . .	0 -1

,

y a partir de ella encontraremos una solución básica factible casi-complementaria, que esté al final de un rayo casi-complementario.

Sea x_β la variable no-básica que incrementaremos. La arista sobre la que nos movemos es

$$u = -e_m,$$

$$v = -e_n + (B^t)^\beta x_\beta ,$$
$$x_i = 0, \quad i = 1,.., m, \quad i \neq \beta,$$
$$x_\beta = \lambda, \quad \lambda > 0,$$
$$y = 0.$$

Observemos que las variables u no experimentan ningún -- cambio con el incremento de x_β ; otro es el caso para las variables v, que al aumentar x_β de valor, una a una de las variables que componen a este vector se hará cero, después de haber tenido un valor negativo.

Sea v_γ la última de las variables básicas que ha alcanzado el valor cero al incrementar x_β . Esto se cumple cuando

$$x_\beta = \max_{j=1,..,n} \left\{ \frac{1}{(B^t)^\beta_j} \right\} = \frac{1}{(B^t)^\beta_\gamma} .$$

Para este punto, las demás variables básicas v_j, $j \neq \gamma$, tienen ya un valor positivo. Esta solución básica es casi-complementaria no-factible, y puede representarse como

x_1 u_1	..	x_β u_β	..	x_m u_m	y_1 v_1	..	y_γ v_γ	..	y_n v_n
0 -1	..	> -1	..	0 -1	0 >	..	0 0	..	0 >

Observemos que u son las variables básicas que todavía tienen valores negativos.

Incrementemos ahora el complemento de la variable del par no-básico que salió de la base; esto es, y_γ. Nos movemos sobre la arista

$$
\begin{aligned}
&u = -e_m + A^\gamma y_\gamma = -e_m + A^\gamma \lambda, \\
&v = -e_n + (B^t)^\beta x_\beta = -e_n + (B^t)^\beta \left(\frac{1}{(B^t)^\beta_\gamma} \right), \\
&x_i = 0, \quad i = 1,.., m, \quad i \neq \beta, \\
&x_\beta = \left(\frac{1}{(B^t)^\beta_\gamma} \right), \\
&y_j = 0, \quad j = 1,.., n, \quad j \neq \gamma, \\
&y_\gamma = \lambda, \quad \lambda > 0 .
\end{aligned}
$$

Con el incremento de y_γ , y como $A > 0$, todas las variables de u aumentan su valor, mientras que las variables básicas v permanecen constantes.

Una a una de las u_i, $i = 1,.., m$, va tomando el valor cero a medida que y_γ incrementa su valor. Cuando

$$y_\gamma = \max_{i=1,..,m} \left\{ \frac{1}{A^\gamma_i} \right\} = \frac{1}{A^\gamma_\ell} ,$$

u_ℓ toma el valor cero, y es la última de las variables de u -

en hacerlo.

Si $\ell = \beta$, la solución básica que hemos obtenido es factible y complementaria. Cuando $\ell \neq \beta$, la solución será factible y casi-complementaria, con par básico $(i=\beta)$, y par no-básico $(i=\ell)$. Esta se representa como

$x_1 \; u_1$	$\cdot \; \cdot$	$x_\beta \; u_\beta$	$\cdot\cdot$	$x_\ell \; u_\ell$	$\cdot \; \cdot$	$x_m \; u_m$	$y_1 \; v_1$	$\cdot \; \cdot$	$y_\gamma \; v_\gamma$	$\cdot\cdot$	$y_n \; v_n$
$0 \; >$	$\cdot \; \cdot$	$> \; >$	$\cdot\cdot$	$0 \; 0$	$\cdot \; \cdot$	$0 \; >$	$0 \; >$	$\cdot \; \cdot$	$> \; 0$	$\cdot\cdot$	$0 \; >$

.

Debemos observar que el incremento indefinido de y_γ no origina una pérdida de factibilidad. Así, esta solución básica factible casi-complementaria está al final de un rayo casi-complementario.

En forma detallada, esta solución que será inicial para aplicar el método de Lemke es:

$$u = -e_m + A^\gamma y_\gamma = -e_m + A^\gamma \left(\frac{1}{A_\ell^\gamma} \right),$$

$$v = -e_n + (B^t)^\beta x_\beta = -e_n + (B^t)^\beta \left(\frac{1}{(B^t)_\gamma^\beta} \right),$$

$$x_i = 0, \quad i = 1,.., m, \quad i \neq \beta,$$

$$x_\beta = \left(\frac{1}{(B^t)_\gamma^\beta} \right),$$

$$y_j = 0, \quad j = 1,..,n, \quad j \neq \gamma$$

$$y_\gamma = \left\{\frac{1}{A_\ell^\gamma}\right\},$$

donde β ės un índice fijo entre 1 y m,

$$\frac{1}{(B^t)_\gamma^\beta} = \max_{j=1,..,n} \left\{\frac{1}{(B^t)_j^\beta}\right\},$$

y

$$\frac{1}{A_\ell^\gamma} = \max_{i=1,..,m} \left\{\frac{1}{A_i^\gamma}\right\}.$$

Supongamos que a partir de esta solución casi-coplementaria, que está al final del rayo casi-complementario generado por $y_\gamma > \left\{\frac{1}{A_\ell^\gamma}\right\}$ y representado como

x_1 u_1	· ·	x_β u_β	· ·	x_ℓ u_ℓ	· ·	x_m u_m	y_1 v_1	· ·	y_γ v_γ	· ·	y_n v_n
0 >	· ·	> >	· ·	0 >	· ·	0 >	0 >	· ·	> 0	· ·	0 >

,

nos hemos movido de solución casi-complementaria en solución casi-complementaria, y hemos terminado el procedimiento en un rayo. Deseamos saber de que rayo casi-complementario se trata.

El punto final de este rayo es una solución básica casi-complementaria factible, y por consiguiente tiene un par bási co, z_β, w_β, que es el mismo par básico de la solución casi---complementaria inicial, y tiene un par no-básico z_γ, w_γ. Así, existen sólo dos formas posibles de generar este rayo: incrementando z_γ o bien w_γ .

Por el lema 4-1 demostrado al principio de esta sección, sabemos que existen los vectores

$$z^h = \begin{pmatrix} x^h \\ y^h \end{pmatrix}, \qquad w^h = \begin{pmatrix} u^h \\ v^h \end{pmatrix},$$

tales que $z^h \geqq 0$, $w^h \geqq 0$, y

$$\begin{pmatrix} u^h \\ v^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^h \\ y^h \end{pmatrix} ,$$

o bien,

$$u^h = Ay^h,$$
$$v^h = B^t x^h.$$

Cuando z_γ es la variable que genera el rayo, como

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

existen dos posibilidades: que z_γ corresponda al vector x o - bien al vector y. Si corresponde a x, la variable que genera el rayo será x_γ, y por cosiguiente $x^h_\gamma = 1$, resultando que --- $x^h \neq 0$. Si corresponde a y, la variable que genera el rayo será y_γ y por cosiguiente $y^h_\gamma = 1$, resultando que $y^h \neq 0$.

Por otra parte, cuando w_γ sea la variable que genere el rayo, como

$$w = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

existen dos posibilidades: que w_γ corresponda al vector u o - bien al vector v. Si corresponde a u, la variable que genera el rayo será u_γ y por consiguiente $u^h_\gamma = 1$, resultando que --- $u^h \neq 0$. Si corresponde a v, la variable que genera el rayo será v_γ y por consiguiente $v^h_\gamma = 1$, resultando que $v^h \neq 0$.

Por el mismo lema 4-1, sabemos que los puntos que componen el rayo son de la forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \hline u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \hline \bar{u} \\ \bar{y} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} x^h \\ y^h \\ \hline u^h \\ v^h \end{bmatrix},$$

y por casi-complementaridad satisfacen que

$$(\bar{x}_i + \lambda x^h_i)(\bar{u}_i + \lambda u^h_i) = 0 \quad \forall\ i \neq \beta, \quad \forall\ \lambda > 0,$$

$$(\bar{y}_j + \lambda y_j^h)(\bar{v}_j + \lambda v_j^h) = 0, \quad \forall\, j, \quad \forall\, \lambda > 0.$$

Además, como son factibles, se cumple que

$$\begin{pmatrix} \bar{u} + \lambda u^h \\ \bar{v} + \lambda v^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_m \\ -e_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} + \lambda x^h \\ \bar{y} + \lambda y^h \end{pmatrix}, \quad \forall\, \lambda > 0,$$

y

$$\begin{pmatrix} \bar{u} + \lambda u^h \\ \bar{v} + \lambda v^h \end{pmatrix} \geqq 0, \qquad \begin{pmatrix} \bar{x} + \lambda x^h \\ \bar{y} + \lambda y^h \end{pmatrix} \geqq 0, \quad \forall\, \lambda > 0.$$

Consideremos uno a uno los casos mencionados anteriormente. Supongamos primero que el rayo casi-complementario resulta de incrementar la variable z_γ del par no-básico, y que ésta corresponde al vector x, entonces x_γ es la variable no-básica que genera el rayo.

Esto significa que

$$0 \neq x^h \geqq 0,$$

como analizamos anteriormente. Además, sabemos que

$$v^h = B^t x^h \quad y \quad B^t > 0,$$

entonces,

$$v^h > 0.$$

Ahora, por casi-complementaridad,

$$(\bar{y}_j + \lambda y_j^h)(\bar{v}_j + \lambda v_j^h) = 0, \quad \forall\ j, \quad \forall\ \lambda > 0.$$

Esto último se cumple si al menos uno de los factores es cero. Observemos que en el segundo factor $\bar{v}_j \geq 0$, $\forall$ j, ya que $\bar{v}$ es parte de una solución factible, $\lambda > 0$, $\forall\ \lambda$, y $v_j^h > 0$, $\forall$ j, porque $v^h > 0$ como ya hemos demostrado. Así,

$$\bar{v}_j + \lambda v_i^h > 0 \ , \quad \forall\ \lambda > 0,$$

y por lo tanto, el primer factor debe ser cero; esto es,

$$\bar{y}_j + \lambda y_j^h = 0, \quad \forall\ j, \quad \forall\ \lambda > 0.$$

De esta manera, tenemos que para las soluciones casi-complementarias que forman este rayo, se cumple que

$$\begin{pmatrix} \bar{u} + \lambda u^h \\ \bar{v} + \lambda v^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_m \\ -e_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} + \lambda x^h \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Esto significa que

$$\bar{u} + \lambda u^h = -e_m < 0 .$$

Este resultado contradice el hecho de que el rayo casi--

complementario que genera x_γ es factible. Así, concluimos que z_γ, que es supuestamente la variable que genera el rayo en el que ha terminado el procedimiento de Lemke, no corresponde al vector de variables x.

Debemos observar que, en general, esta contradicción ocurre cuando $x^h \neq 0$.

Supongamos ahora que z_γ corresponde al vector y. Entonces y_γ es la variable no-básica que genera el rayo. Esto significa que

$$0 \neq y^h \geqq 0,$$

como analizamos anteriormente. Además, como A > 0,

$$u^h = Ay^h > 0.$$

Para evitar que ocurra la contradicción del caso anterior, se debe cumplir que

$$x^h = 0.$$

Así,

$$v^h = B^t x^h = 0.$$

En la solución básica factible casi-complementaria, que está al final del rayo casi-complementario que tratamos de -

identificar, tenemos del par básico que

$$x_\beta = \bar{x}_\beta > 0 \quad y \quad u_\beta = \bar{u}_\beta > 0,$$

y del par no-básico,

$$y_\gamma = \bar{y}_\gamma = 0 \quad y \quad v_\gamma = \bar{v}_\gamma = 0.$$

Al incrementar el valor de la variable y_γ, como ésta genera un rayo casi-complementario ($i=\beta$), tenemos para el par básico que

$$x_\beta = \bar{x}_\beta + \lambda x_\beta^h > 0 \quad y \quad w_\beta = \bar{u}_\beta + \lambda u_\beta^h > 0;$$

y para el par no-básico,

$$y_\gamma > 0 \quad y \quad v_\gamma = \bar{v}_\gamma + \lambda v_\gamma^h = 0.$$

Por casi-complementaridad de las soluciones que constituyen el rayo, para las variables complementarias

$$x_i = \bar{x}_i + \lambda x_i^h \quad y \quad u_i = \bar{u}_i + \lambda u_i^h, \qquad \forall\, i \neq \beta,$$

se cumple que

$$x_i u_i = (\bar{x}_i + \lambda x_i^h)(\bar{u}_i + \lambda u_i^h) = 0, \qquad \forall\, \lambda > 0.$$

Este producto es cero si alguna o ambas variables complementarias tienen valor cero. Observemos que $\bar{u}_i \geqq 0$, $\forall\ i \neq \beta$, ya que $\bar{u} \geqq 0$ por ser parte de una solución casi-complementaria factible. Además, $u^h > 0$ como ya determinamos con anterioridad. Así, para $\lambda > 0$ podemos asegurar que

$$u_i = \bar{u}_i + \lambda u_i^h > 0.$$

De esta forma, el otro factor debe ser cero. Esto es,

$$x_i = \bar{x}_i + \lambda x_i^h = 0, \quad \forall\ \lambda > 0, \quad \forall\ i \neq \beta.$$

Ahora bien, por el sistema de ecuaciones que forma parte del Problema Fundamental que estamos analizando, sabemos que para las soluciones que componen el rayo, se cumple que

$$\bar{v} + \lambda v^h = -e_n + B^t(\bar{x} + \lambda x^h), \quad \forall\ \lambda > 0,$$

o bien,

$$v = -e_n + B^t x \geqq 0.$$

Como $x_i = 0$, $\forall\ i \neq \beta$,

$$v = -\ e_n + (B^t)^{\beta} x_{\beta} \geqq 0.$$

Sabemos que $v_{\gamma} = 0$, entonces

$$v_\gamma = -1 + (B^t)^\beta_\gamma x_\beta = 0;$$

de donde,

$$x_\beta = \frac{1}{(B^t)^\beta_\gamma} .$$

Sustituyendo este último valor en v,

$$v = -e_n + (B^t)^\beta \left(\frac{1}{(B^t)^\beta_\gamma} \right) ,$$

donde,

$$\begin{aligned} v_\gamma &= 0, \\ v_j &= -1 + (B^t)^\beta_j \left(\frac{1}{(B^t)^\beta_\gamma} \right) > 0, \quad \forall\ j \neq \gamma. \end{aligned}$$

Por casi-complementaridad se cumple que

$$(v_j + \lambda v_j^h)(\bar{y}_j + \lambda y_i^h) = 0, \quad \forall\ j, \quad \forall\ \lambda > 0.$$

Para $j = \gamma$, sabemos que

$$\begin{aligned} v_\gamma &= \bar{v}_\gamma + \lambda v_\gamma^h = 0, \\ y_\gamma &= \bar{y}_\gamma + \lambda y_\gamma^h > 0, \quad \forall\ \lambda > 0. \end{aligned}$$

Para $j \neq \gamma$, tenemos que

$$v_j = \bar{v}_j + \lambda v_j^h > 0, \quad \forall\ \lambda > 0 .$$

Entonces, debe suceder que el segundo factor es cero; esto es,

$$y_j = \bar{y}_j + \lambda y_j^h = 0.$$

Resumamos ahora las características de este rayo casi--- complementario generado por y_γ correspondiente a z_γ, en el -- que supuestamente termina el procedimiento de Lemke. Esto es,

$$\begin{aligned}
&u > 0, \\
&v_\gamma = 0, \\
&v_j > 0, \quad \forall\ j \neq \gamma, \\
&x_i = 0, \quad \forall\ i \neq \beta, \\
&x_\beta = \frac{1}{(B^t)_\gamma^\beta} > 0, \\
&y_j = 0, \quad \forall\ j \neq \gamma, \\
&y_\gamma = \lambda, \quad \lambda > 0,
\end{aligned}$$

o bien,

x_1 u_1	..	x_β u_β	..	x_m u_m	y_1 v_1	..	y_γ v_γ	..	y_n v_n
0 >	..	> >	..	0 >	0 >	..	> 0	..	0 >

.

Este rayo corresponde precisamente al rayo casi-comple--

mentario ($i=\beta$), adyacente a la solución casi-complementaria - inicial, lo cual es una contradicción. Para que ocurra lo anterior se debe formar un ciclo, y esto es imposible que suceda, cuando el procedimiento se ha iniciado en una solución -- casi-complementaria, que es punto final de un rayo casi-com-- plementario.

Consideremos ahora el caso en que supuestamente el rayo casi-complementario resulta de incrementar la variable w_γ del par no-básico. Como sabemos, w_γ puede corresponder al vector u o al vector v.

Supongamos primero que corresponde a u. Entonces, u_γ es la variable no-básica que genera el rayo; esto significa que

$$0 \neq u^h \geqq 0,$$

como analizamos anteriormente.

Por otra parte, sabemos que

$$u^h = Ay^h,$$

donde $A > 0$ y $y^h \geqq 0$. Supongamos que $y^h = 0$, entonces ------ $u^h = Ay^h = 0$, que contradice el hecho de que $u^h \neq 0$; así, debemos tener que

$$0 \neq y^h \geqq 0.$$

Este resultado nos conduce al análisis del caso en que - z_γ es la variable del par no-básico a incrementar, y que co-- rresponde al vector y.

Ahora, supongamos que w_γ corresponde a v. Entonces, v_γ - es la variable no-básica que genera el rayo. Esto significa - que

$$0 \neq v^h \geqq 0,$$

como analizamos anteriormente.

Sabemos que

$$v^h = B^t x^h,$$

donde $B^t > 0$ y $x^h \geqq 0$. Supongamos que $x^h = 0$, entonces ------ $v^h = B^t x^h = 0$, que contradice el hecho de que $v^h \neq 0$. Así de- bemos tener que

$$0 \neq x^h \geqq 0.$$

Este resultado nos conduce al análisis del caso en que - z_γ es la variable del par no-básico a incrementar, y que co--

rresponde al vector x.

Los cuatro casos posibles de terminar en un rayo casi---complementario han resultado contradictorios. Es por esto que podemos concluir que el procedimiento de Lemke, iniciado en -la forma descrita al principio de esta demostración, no termina en un rayo, pero sí en una solución básica factible complementaria, que resuelve el Problema Fundamental y el juego bimatricial para el que fue estructurado. Así, queda concluida la demostración de este teorema.

4-3.EL PROBLEMA FUNDAMENTAL MODIFICADO

En la sección anterior nos hemos dado cuenta de la utilidad que representa que la región de soluciones factibles sea no-acotada para encontrar, con relativa facilidad, una solu--ción básica factible casi-complementaria, adyacente a un rayo casi-complementario, donde podamos dar inicio a la técnica de Lemke. Desafortunadamente, no para todo Problema Fundamental es posible emprender, de esta forma, la búsqueda de una solución complementaria factible.

Debemos observar que, en realidad, no es necesario que -toda la matriz M sea positiva, para poder iniciar el procedimiento como se ha descrito anteriormente. Basta con que exista una sola columna de M, digamos M^{β}, cuyos elementos sean positivos, para poder hacerlo. Esto es, sea

$$M^{\beta} > 0 \quad y \quad z_i = 0, \quad \forall\, i \neq \beta,$$

entonces

$$w = q + M^{\beta} z_{\beta}.$$

Con el incremento indefinido de z_{β}, resulta que $w > 0$, dando origen a un rayo casi-complementario, cuyo punto final es --- aquél para el que

$$z_{\beta} = \max_{i=1,\ldots,m} \left(\frac{-q_i}{M_i^{\beta}} \right) = \frac{-q_{\gamma}}{M_{\gamma}^{\beta}},$$

como hemos analizado en la sección anterior. La pregunta ahora es: ¿habrá alguna forma de modificar el Problema Fundamental, de tal forma que adquiera esta propiedad?

Consideremos el Problema Fundamental

$$w = q + Mz,$$
$$z \geqq 0, \quad w \geqq 0,$$
$$z^t w = 0,$$

donde M no tiene ninguna columna positiva. Introduciremos un par de variables complementarias artificiales z_0, w_0, de tal forma que el Problema Fundamental modificado es

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_m & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix}, \quad q_0 > 0,$$

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} \geqq 0, \quad \begin{pmatrix} w_0 \\ w \end{pmatrix} \geqq 0,$$

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} w_0 \\ w \end{pmatrix} = 0.$$

La región de soluciones factibles de este Problema Fundamental modificado es el conjunto

$$Z_0 = \left\{ \begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} \geqq 0, \begin{pmatrix} w_0 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_m & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} \geqq 0, \ q_0 > 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{m+1}.$$

Debemos observar que esta región es no-acotada ya que, partiendo del origen,

z_0	w_0	z_1	w_1	z_2	w_2	. . . .	z_m	w_m
0	q_0	0	q_1	0	q_2	. . . .	0	q_m

,

al incrementar indefinidamente el valor de la variable artificial z_0, y haciendo permanecer a las variables z_i, $i = 1, \ldots, m$, en cero, generamos el rayo casi-complementario

$$z_0 = \lambda, \qquad \lambda > 0,$$

$$z_i = 0, \qquad i = 1,\ldots, m,$$

$$w_0 = q_0 > 0,$$

$$w = q + e_m z_0 = q + e_m\lambda > 0,$$

cuyo punto final es el punto extremo de Z_0 para el que

$$0 = w_\gamma = q_\gamma + e_m z_0 \quad \text{y} \quad w_i > 0, \quad i \neq \gamma;$$

esto es,

$$z_0 = -q_\gamma,$$

donde γ es tal que

$$-q_\gamma = \max_{i=1,\ldots,m} \{-q_i\} .$$

La representación del rayo casi-complementario y este --- punto extremo casi-complementario es la siguiente:

	z_0	w_0	z_1	w_1	$\cdots$	z_γ	w_γ	$\cdots$	z_m	w_m
RAYO c-c	$>$	q_0	0	$>$	$\cdots$	0	$>$	$\cdots$	0	$>$
PUNTO EXTREMO c-c	$-q_\gamma$	q_0	0	$>$	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	$>$

De esta forma, mediante la introducción del par de variables complementarias artificiales z_0, w_0, hemos modificado el Problema Fundamental, para obtener fácilmente una solución básica factible casi-complementaria, donde iniciemos la búsqueda de una solución complementaria factible.

Observemos que el par básico del camino casi-complementario que generaremos corresponde al índice $i = \beta = 0$. Así, obtendremos una solución complementaria cuando z_0 o w_0 salga de la base. Pero w_0 nunca saldrá de la base, ya que para cualquier solución $\begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{z} \end{pmatrix} \in Z_0$, $w_0 = q_0 > 0$. Esto significa que forzosamente z_0 debe salir de la base, para obtener una solución del Problema Fundamental modificado.

Existe la posibilidad de que el camino casi-complementario así iniciado, termine en un rayo. En la siguiente sección de este capítulo, serán considerados varios casos en los que es posible o imposible que esto ocurra.

Supongamos que al aplicar el método de Lemke hemos obtenido una solución del Problema Fundamental aumentado; esto es, z_0 ha salido de la base. Sea $(\bar{z}_0, \bar{z}^t, \bar{w}_0, \bar{w}^t)^t$ esta solución. Su representación es

z_0 w_0	z_1 w_1	z_2 w_2	. . . .	z_m w_m
	$>$ 0	$>$ 0		$>$ 0
0 q_0	ó	ó	. . . .	ó
	0 $>$	0 $>$		0 $>$

,

y satisface,

$$\begin{pmatrix}\bar{w}_0\\ \bar{w}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}q_0\\ q\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ e_m & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{z}_0\\ z\end{pmatrix}, \qquad q_0 > 0,$$

$$\begin{pmatrix}\bar{z}_0\\ \bar{z}\end{pmatrix} \geqq 0, \qquad \begin{pmatrix}\bar{w}_0\\ \bar{w}\end{pmatrix} \geqq 0,$$

$$\begin{pmatrix}\bar{z}_0\\ \bar{z}\end{pmatrix}^t \begin{pmatrix}\bar{w}_0\\ \bar{w}\end{pmatrix} = 0 .$$

Como $\bar{z}_0 = 0$, tenemos que

$$\bar{w}_0 = q_0 > 0,$$
$$\bar{w} = q + M\bar{z},$$
$$\bar{z}_0 = 0, \qquad \bar{w}_0 > 0,$$
$$\bar{z} \geqq 0, \qquad \bar{w} \geqq 0,$$
$$\bar{z}^t\bar{w} = 0.$$

Así, sin considerar los valores de las variables artificiales z_0, w_0, la solución $\begin{pmatrix}\bar{z}\\ \bar{w}\end{pmatrix}$ es solución del Problema Fundamental original; esto es,

$$\bar{w} = q + M\bar{z},$$
$$\bar{z} \geqq 0, \qquad \bar{w} \geqq 0,$$
$$\bar{z}^t\bar{w} = 0.$$

Debemos observar que considerar a la variable artificial

w_0 en la modificación, no representa ninguna utilidad. Esta variable puede ser eliminada para simplificar la modificación del Problema Fundamental. Al no considerar w_0, la variable z_0 hará el papel del par no-básico, y al salir de la base, obtendremos una solución del Problema Fundamental modificado, y del Problema Fundamental original.

Así, el Problema Fundamental modificado es

$$w = q + e_m z_0 + Mz,$$
$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} \geq 0, \quad w \geq 0,$$
$$z^t w = 0.$$

4-4. EXISTENCIA DE SOLUCIONES COMPLEMENTARIAS AL APLICAR EL MÉTODO DE LEMKE AL PROBLEMA FUNDAMENTAL MODIFICADO

Hasta el momento, para cualquier clase de Problema Fundamental, hemos resuelto el problema de cómo encontrar una solución casi-complementaria factible, para iniciar la búsqueda de una solución complementaria empleando el método de Lemke. Tres son los casos que hemos discutido: cuando M es apropiada para resolver juegos bimatriciales, cuando M tiene al menos una columna $M^\beta > 0$, y cuando M es cualquiera. Para el primer caso y cuando $M > 0$, los resultados sobre la existencia de soluciones al aplicar el método, ya han sido tratados. Resta mostrar los resultados que R.W.Cottle y G.B.Dantzing han obtenido, para el caso en que es necesario modificar el Problema Fundamental antes de aplicar el método de Lemke. Esto último es el objetivo de esta sección.

Aquí serán considerados tres tipos de Problemas Fundamentales: cuando M es copositiva-plus, cuando M es estrictamente copositiva, y cuando M tiene menores principales positivos. Los dos primeros tipos de matrices, y otros resultados importantes acerca de la existencia de soluciones complementarias para Problemas Fundamentales con esta clase de matrices, son considerados en el apéndice 1 de este estudio. El apéndice 2 trata con detalle a las matrices con menores principales positivos. Es conveniente hechar un vistazo a estos apéndices, con el propósito de tener una idea clara de cómo están caracterizadas las matrices que trataremos en esta sección.

En general, al aplicar el método de Lemke a un Problema Fundamental que ha sido modificado, tenemos los siguientes dos resultados. El primero se establece en el lema 4-2, y el segundo en el teorema 4-3.

LEMA 4-2. Si $(\bar{z}_0,\bar{z}^t,\bar{w}^t)^t$ es una solución básica factible casi-complementaria de $w = q + e_m z_0 + Mz$, y $(\bar{z}_0,\bar{z}^t,\bar{w}^t)^t$ es --

adyacente a un rayo casi-complementario, existen los vectores $\begin{pmatrix} z_0^h \\ z^h \end{pmatrix}$, w^h, de m+1 componentes el primero, y de m componentes - el segundo, tales que

$$w^h = e_m z_0^h + Mz^h, \quad z_0^h \geq 0, \quad z^h \geq 0, \quad w^h \geq 0,$$

$z^h \neq 0$ si la variable z_γ del par no-básico genera el rayo,

$w^h \neq 0$ si la variable w_γ del par no-básico genera el rayo;

además, los puntos sobre el rayo son de la forma

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{z} \\ \bar{w} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} z_0^h \\ z^h \\ w^h \end{pmatrix}, \qquad \lambda > 0,$$

y para toda $\lambda > 0$ se satisface que

$$(\bar{z}_i + \lambda z_i^h)(\bar{w}_i + \lambda w_i^h) = 0, \quad i = 1,.., m.$$

Demostración. Partiremos de la obtención de una solución básica factible casi-complementaria, y generaremos un rayo -- casi-complementario. Caracterizaremos a los puntos sobre el - rayo, y definiremos a los vectores $\begin{pmatrix} z_0^h \\ z^h \end{pmatrix}$, w^h que cumplen con - las condiciones que establece el lema.

Consideremos el sistema de m ecuaciones con 2m+1 variables

$$w = q + e_m z_0 + Mz,$$

o bien, en forma matricial,

$$(-e_m, -M, I) \begin{pmatrix} z_0 \\ z \\ w \end{pmatrix} = q .$$

Sea $(-e_m, -M_B, I_B)$ una base formada por las columnas de la matriz $(-e_m, -M, I)$. M_B o I_B puede ser vacía, pero $-e_m$ deberá estar presente en la base para satisfacer la condición de casi-complementaridad; esto es, $z_0 > 0$. Sea $(-M_N, I_N)$ la matriz formada por las columnas de $(-e_m, -M, I)$ que no están en la base.

El vector,

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_B \\ w_B \end{pmatrix},$$

representará a las m variables asociadas a las columnas de $(-e_m, -M_B, I_B)$, cuyos componentes serán denotados por z_0, $z_{B,i}$, $w_{B,i}$, donde B indica que es una variable básica, e i indica, para z_B, la columna de M a la cual está asociada, y para w_B, la columna de I a la cual está asociada.

El vector,

$$\begin{pmatrix} z_N \\ w_N \end{pmatrix},$$

representará a las m+1 variables no-básicas asociadas a las columnas de $(-M_N, I_N)$, cuyos componentes serán denotados por $z_{N,i}$, $w_{N,i}$, donde N indica que es una variable no-básica, e i indica, para z_N, la columna de M a la cual está asociada, y para w_N, la columna de I a la cual está asociada.

De esta forma, dada una base $(-e_m, -M_B, I_B)$ de $(-e_m, M, I)$, nuestro sistema

$$(-e_m, -M, I)\begin{pmatrix} z_0 \\ z \\ w \end{pmatrix} = q$$

se puede expresar como

$$(-e_m, -M_B, I_B \mid -M_N, I_N)\begin{pmatrix} z_0 \\ z_B \\ w_B \\ \hline z_N \\ w_N \end{pmatrix} = q;$$

o equivalentemente,

$$(-e_m, -M_B, I_B)\begin{pmatrix} z_0 \\ z_B \\ w_B \end{pmatrix} + (-M_N, I_N)\begin{pmatrix} z_N \\ w_N \end{pmatrix} = q.$$

Como $(-e_m, -M_B, I_B)$ es una base, la inversa de ésta, $(-e_m, -M_B, I_B)^{-1}$, existe. Así, al multiplicar nuestro sistema de ecuaciones por la inversa de la base, lo podemos expresar en forma canónica con respecto a las variables básicas z_0, z_B, w_B, de la siguiente forma:

$$I\begin{pmatrix} z_0 \\ z_B \\ w_B \end{pmatrix} + (-e_m, -M_B, I_B)^{-1}(-M_N, I_N)\begin{pmatrix} z_N \\ w_N \end{pmatrix} = (-e_m, -M_B, I_B)^{-1}q \ .$$

La solución básica asociada es

$$\begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{z}_B \\ \bar{w}_B \end{pmatrix} = (-e_m, -M_B, I_B)^{-1}q, \qquad \begin{pmatrix} \bar{z}_N \\ \bar{w}_N \end{pmatrix} = 0.$$

Así,

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_B \\ w_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{z}_B \\ \bar{w}_B \end{pmatrix} + (-1)(-e_m, -M_B, I_B)^{-1}(-M_N, I_N)\begin{pmatrix} z_N \\ w_N \end{pmatrix} \ .$$

Para que esta solución básica sea factible casi-complementaria, se debe cumplir que

$$\begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{z} \\ \bar{w} \end{pmatrix} \geq 0 \ ,$$

y también,

$$z_0 \neq 0$$

$$\left\{\begin{matrix} z_{B,i} w_{N,i} = 0 \\ \text{ó} \\ z_{N,i} w_{B,i} = 0 \end{matrix}\right\} \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad i \neq \gamma,$$

$$z_{N,\gamma} w_{N,\gamma} = 0, \qquad i = \gamma \quad \text{(par no-básico)}.$$

Supongamos que podemos generar un rayo casi-complementario. Sabemos que existen sólo dos posibilidades para hacerlo: o bien incrementando la variable no-básica $z_{N,\gamma}$, o bien su complemento $w_{N,\gamma}$. Estos dos rayos casi-complementarios posibles están caracterizados de la siguiente forma:

Si el rayo se genera al incrementar $z_{N,\gamma}$, éste queda caracterizado por

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_B \\ w_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{z}_B \\ \bar{w}_B \end{pmatrix} + (-1)\left(-e_m, -M_B, I_B\right)^{-1}\left(-M_N^{\gamma}\right) z_{N,\gamma} \,,$$

$$z_{N,i} = 0, \qquad i \neq \gamma,$$

$$z_{N,\gamma} = \lambda, \qquad \lambda > 0, \qquad \lambda \to \infty,$$

$$w_N = 0:$$

o bien,

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_B \\ w_B \\ \hline z_{N,i} \ (i \neq \gamma) \\ \cdots\cdots \\ z_{N,\gamma} \\ \cdots\cdots \\ w_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{z}_B \\ \bar{w}_B \\ \hline \bar{z}_{N,i} \\ \cdots \\ \bar{z}_{N,\gamma} \\ \cdots \\ \bar{w}_N \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} (-1)\left(-e_m,-M_B,I_B\right)^{-1}\left(-M_N^{\gamma}\right) \\ \hline 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda > 0, \quad \lambda \to \infty .$$

Si el rayo casi-complementario se genera al incrementar $w_{N,\gamma}$, éste se caracteriza como

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_B \\ w_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{z}_B \\ \bar{w}_B \end{pmatrix} + (-1)\left(-e_m,-M_B,I_B\right)^{-1} I_N^{\gamma}\, w_{N,\gamma} ,$$

$$z_N = 0,$$

$$w_{N,i} = 0, \quad i \neq \gamma,$$

$$w_{N,\gamma} = \lambda, \quad \lambda > 0, \quad \lambda \to \infty;$$

o bien,

$$\left[\begin{array}{c} z_0 \\ z_B \\ w_B \\ \hline z_N \\ \cdots\cdots \\ w_{N,i} \quad (i \neq \gamma) \\ \cdots\cdots \\ w_{N,\gamma} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \bar{z}_0 \\ \bar{z}_B \\ \bar{w}_B \\ \hline \bar{z}_N \\ \cdots \\ \bar{w}_{N,i} \\ \cdots \\ \bar{w}_{N,\gamma} \end{array}\right] + \lambda \left[\begin{array}{c} (-1)\left(-e_m,-M_B,I_B\right)^{-1} I_N^{\gamma} \\ \\ \hline 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1 \end{array}\right].$$

$$\lambda > 0, \qquad \lambda \to \infty .$$

Debe observarse que para asegurar que ninguna de las variables se hará cero con el incremento de la variable $z_{N,\gamma}$ o $w_{N,\gamma}$, según el caso, se debe cumplir que

$$\left(-e_m,-M_B,I_B\right)^{-1}\left(-M_N\right) \leqq 0,$$

o

$$\left(-e_m,-M_B,I_B\right)^{-1} I_N \leqq 0 .$$

Consideremos la siguiente definición. Sea

$$\begin{pmatrix} z_0^h \\ z^h \\ \hline w^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0^h \\ z_B^h \\ z_N^h \\ \hline w_B^h \\ w_N^h \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} z_0^h \\ z_B^h \\ w_B^h \\ \hline z_{N,i}^h \quad (i \neq \gamma) \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_{N,\gamma}^h \\ \cdots\cdots\cdots \\ w_N^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\left(-e_m, -M_B, I_B\right)^{-1}\left(-M_N^{\gamma}\right) \\ \hline 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuando $z_{N,\gamma}$ genera el rayo casi-complementario; y sea

$$\begin{pmatrix} z_0^h \\ z^h \\ \hline w^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0^h \\ z_B^h \\ z_N^h \\ \hline w_B^h \\ w_N^h \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} z_0^h \\ z_B^h \\ w_B^h \\ \hline z_N^h \\ \cdots\cdots\cdots \\ w_{N,i}^h \quad (i \neq \gamma) \\ \cdots\cdots\cdots \\ w_{N,\gamma}^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\left(-M_B, I_B\right)^{-1} I_N^{\gamma} \\ \hline 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

cuando $w_{N,\gamma}$ genera el rayo casi-coplementario. Se observa inmediatamente que

$$z_0^h \geqq 0, \quad z^h \geqq 0, \quad w^h \geqq 0,$$

para ambos casos. Además, si $z_{N,\gamma}$ genera el rayo, podemos ase gurar que

$$z^h \neq 0,$$

ya que

$$z^h_{N,\gamma} = 1 \ .$$

Si $w_{N,\gamma}$ es la variable del par básico que lo hace, entonces

$$w^h \neq 0,$$

ya que

$$w^h_{N,\gamma} = 1 \ .$$

Empleando este vector que acabamos de definir, el rayo - casi-complementario que generemos en cualquiera de los dos casos, se puede representar como

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{z} \\ \bar{w} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} z_0^h \\ z^h \\ w^h \end{pmatrix}, \qquad \lambda > 0, \qquad \lambda \to \infty;$$

y por casi-complementaridad de las soluciones que lo forman, se cumple que

$$(\bar{z}_i + \lambda z_i^h)(\bar{w}_i + \lambda w_i^h) = 0, \qquad \forall\, \lambda > 0, \qquad i = 1,.., m.$$

A partir de la representación anterior de un rayo, observemos que

$$\begin{pmatrix} z_0^h \\ z^h \\ w^h \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda}\left\{\begin{pmatrix} z_0 \\ z \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{z} \\ \bar{w} \end{pmatrix}\right\} \qquad \lambda > 0 \ ;$$

de donde

$$\begin{pmatrix} z_0^h \\ z^h \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda}\left\{\begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{z} \end{pmatrix}\right\}, \qquad \lambda > 0 \ ,$$

y

$$w^h = \frac{1}{\lambda}(w - \bar{w}), \qquad \lambda > 0 \ .$$

Como

$$(e_m, M)\begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} = w - q$$

y

$$(e_m, M)\begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \bar{w} - q \ ,$$

tenemos para $\lambda > 0$, que

$$(e_m, M)\begin{pmatrix} z_0^h \\ z^h \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda}(e_m, M)\left\{\begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{z} \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left\{(e_m, M)\begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} - (e_m, M)\begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{z} \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}(w - q - \bar{w} + q) = \frac{1}{\lambda}(w - \bar{w}) = w^h \ .$$

Así, $\begin{pmatrix} z_0^h \\ z^h \end{pmatrix}$ y w^h son tales que

$$(e_m, M)\begin{pmatrix} z_0^h \\ z^h \end{pmatrix} = w^h,$$

o bien,

$$e_m z_0^h + Mz^h = w^h .$$

Esto concluye la demostración del lema.

Ahora, estamos en posibilidad de considerar el segundo - resultado, que se establece en el siguiente teorema.

TEOREMA 4-3. Terminar en un rayo implica la existencia - de un vector z^h no-cero, no-negativo tal que

$$z_i^h(Mz^h)_i \leqq 0, \quad i = 1,..., m .$$

Demostración. Primero demostraremos que $0 \neq z^h \geqq 0$.

Supongamos que hemos iniciado la búsqueda de la solución complementaria, tal y como se indica en la sección anterior, para el Problema Fundamental modificado. Supongamos además -- que después de movernos de solución casi-complementaria en solución casi-complementaria, hemos terminado en un punto extremo casi-complementario, que resulta ser punto final de un rayo casi-complementario. Por el lema 4-2, existen los vectores

$\begin{pmatrix} z_0^h \\ z^h \end{pmatrix}$, w^h, de m+1 componentes el primero y de m componentes el segundo, tales que

$$w^h = e_m z_0^h + Mz^h, \quad z_0^h \geqq 0, \quad z^h \geqq 0, \quad w^h \geqq 0 .$$

Supongamos que $z^h = 0$, entonces

$$w^h = e_m z_0^h + Mz^h = e_m z_0^h .$$

Supongamos además que $z_0^h = 0$, entonces

$$w^h = e_m z_0^h = 0.$$

Así, $z_0^h = 0$, $z^h = 0$, $w^h = 0$, y $\forall \lambda > 0$,

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{z} \\ \bar{w} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} z_0^h \\ z^h \\ w^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{z} \\ \bar{w} \end{pmatrix},$$

lo cual no tiene sentido, porque no estamos generando un rayo casi-complementario como hemos supuesto. De esta forma, debemos tener que

$$z_0^h > 0,$$

y como consecuencia

$$w^h = e_m z_0^h > 0 .$$

Ahora bien, por casi-complementaridad de las soluciones que forman el rayo,

$$(\bar{w}_i + \lambda w_i^h)(\bar{z}_i + \lambda z_i^h) = 0, \quad \forall \lambda > 0, \quad i = 1,.., m .$$

Observemos que $w_i^h > 0$ porque $w^h > 0$, y $z_i^h = 0$ porque $z^h = 0$.- Entonces debemos tener para $\lambda > 0$, que

$$w_i = \bar{w}_i + \lambda w_i^h > 0, \quad i = 1,.., m ,$$

y

$$z_i = \bar{z}_i + \lambda z_i^h = \bar{z}_i = 0, \quad i = 1,.., m.$$

Además,

$$z_0 = \bar{z}_0 + \lambda z_0^h > 0 ,$$

porque las soluciones son casi-complementarias. La representación de este rayo es

z_0	z_1	w_1	z_2	w_2	. . . .	z_m	w_m
>	0	>	0	>	. . . .	0	>

,

que es precisamente el rayo inicial, lo cual es una contradicción.

Concluimos que no puede suceder que $z^h = 0$. Así, -------
$0 \neq z^h \geqq 0$, y además $z_0^h \geqq 0$ y $w^h \geqq 0$.

Pasemos a demostrar que $z_i^h(Mz^h)_i \leqq 0$, $i = 1,.., m$.

Por casi-complementaridad de las soluciones que forman - el rayo, tenemos que

$$(\bar{w}_i + \lambda w_i^h)(\bar{z}_i + \lambda z_i^h) = 0, \quad i = 1,.., m.$$

Al efectuar el producto, resulta que

$$\bar{w}_i\bar{z}_i + \lambda\bar{w}_i z_i^h + \lambda w_i^h\bar{z}_i + \lambda^2 w_i^h z_i^h = 0, \quad i = 1,.., m.$$

Como $\bar{w} \geqq 0$, $\bar{z} \geqq 0$, $z^h \geqq 0$. $w^h \geqq 0$, y $\lambda > 0$, entonces debemos tener que

$$\bar{w}_i\bar{z}_i = \bar{w}_i z_i^h = w_i^h\bar{z}_i = w_i^h z_i^h = 0, \quad i = 1,.., m.$$

Ahora, las ecuaciones que componen el sistema

$$w^h = e_m z_0^h + Mz^h,$$

son de la forma

$$w_i^h = z_0 + (Mz^h)_i, \quad i = 1,.., m.$$

Multiplicando las ecuaciones anteriores por z_i^h y considerando que $z_i^h w_i^h = 0$, tenemos que

$$0 = z_i^h w_i^h = z_i^h z_0^h + z_i^h (Mz^h)_i \,, \qquad i = 1,.., m.$$

Como $z_i^h \geqq 0$ y $z_0^h \geqq 0$, el producto $z_i^h z_0^h \geqq 0$, $i = 1,.., m$. Así,

$$z_i^h (Mz^h)_i \leqq 0, \qquad i = 1,.., m,$$

como se quería demostrar.

Los resultados que se han probado en el teorema y lema - anteriores, serán de gran utilidad para la demostración de -- los siguientes resultados, referentes a los Problemas Funda-- mentales con matrices de clases copositiva-plus y estrictamente copositiva. Recordemos que en el apéndice 1 de este estudio, se trata con detalle estos tipos de matrices.

TEOREMA 4-4. Sea M copositiva-plus. Si el procedimiento iterativo de Lemke aplicado al Problema Fundamental modificado termina en un rayo, entonces el sistema

$$w = q + Mz, \quad w \geqq 0, \quad z \geqq 0,$$

es inconsistente; es decir, no existe una sola solución factible para el Problema Fundamental que intentamos resolver.

Notas preliminares a la demostración. Una matriz M es co positiva-plus si satisface las siguientes dos condiciones

(1) $z^tMz \geqq 0, \quad \forall\, z \geqq 0,$ (copositiva)

(2) si $z^tMz = 0$ y $z \geqq 0 \Rightarrow (M + M^t)z = 0,$

donde $(M + M^t)$ es simétrica y copositiva.

En la demostración emplearemos el siguiente resultado*: El sistema

$$w = q + Mz, \quad w \geqq 0, \quad z \geqq 0,$$

no tiene solución si existe un vector v tal que

$$v^tM \leqq 0, \quad v^tq < 0, \quad v \geqq 0,$$

ya que, al suponer que existe v y una solución factible $\bar{z}$, -- obtenemos que

$$0 \leqq v^t\bar{w} = v^tq + v^tM\bar{z} < 0,$$

lo cual es una contradicción.

---

* R.W.Cottle y G.B.Dantzing indican en [3, p 110] que el he cho de que el sistema $w = q + Mz, \quad w \geqq 0, \quad z \geqq 0$ no tenga so- lución si y sólo si existe una solución de $v^tM \leqq 0$, $v^tq < 0$, $v \geqq 0$, es consecuencia del teorema de J.Farkas.

La idea para la demostración de este teorema es suponer que el procedimiento termina en un rayo. Luego, existe un vector z^h con las propiedades establecidas en el teorema 4-3 y el lema 4-2. Como M es copositiva-plus, descubriremos que z^h es precisamente el vector v del resultado que acabamos de discutir. Así, el Problema Fundamental con M copositiva-plus, no tiene soluciones factibles cuando el procedimiento de Lemke termina en un rayo.

Demostración. Supongamos que al aplicar el método de Lemke hemos terminado en un rayo casi-complementario, cuyo punto final es la solución básica factible casi-complementaria $(\bar{z}, \bar{z}^t, \bar{w}^t)^t$. Sabemos que existe el vector $\begin{pmatrix} z_0^h \\ z^h \end{pmatrix}$ y el vector w^h tales que

$$z_0^h \geqq 0, \quad 0 \neq z^h \geqq 0, \quad w^h \geqq 0,$$

y por casi-complementaridad se cumple que

$$0 = (z^h)^t w^h = (z^h)^t e_m z_0^h + (z^h)^t M z^h .$$

Como M es copositiva y $z^h \geqq 0$, entonces $(z^h)^t M z^h \geqq 0$. Además, como $e_m > 0$, $0 \neq z^h \geqq 0$ y $z_0^h \geqq 0$, entonces $(z^h)^t e_m z_0^h \geqq 0$.

Así, debemos tener que

$$(z^h)^t e_m z_0^h = 0 \quad y \quad (z^h)^t M z^h = 0,$$

para que $(z^h)^t w^h = 0$. Pero $(z^h)^t e_m > 0$ porque $0 \neq z^h \geqq 0$ y $e_m > 0$, entonces

$$z_0^h = 0,$$

para que $(z^h)^t e_m z_0^h = 0$.

En resumen,

$$z_0^h = 0, \quad 0 \neq z^h \geqq 0, \quad w^h \geqq 0, \quad (z^h)^t M z^h = 0 .$$

Como M es copositiva-plus y tenemos que $(z^h)^t M z^h = 0$ y $z^h \geqq 0$, entonces

$$(M + M^t) z^h = 0,$$

o bien,

$$M z^h = -M^t z^h.$$

Ahora, como $z_0^h = 0$ y $w^h \geqq 0$, entonces

$$w^h = e_m z_0^h + M z^h = M z^h \geqq 0.$$

Así,

$$M z^h = -M^t z^h \geqq 0,$$

y

$$M^t z^h \leqq 0.$$

Así, $v = z^h$ es una solución al sistema

$$v^t M \leqq 0, \quad v^t q < 0, \quad v \geqq 0 .$$

Concluimos que el Problema Fundamental, con M copositiva-plus, no tiene soluciones factibles cuando, al modificarlo y al aplicarle el método de Lemke, éste termina en un rayo.

En el siguiente corolario discutiremos el caso en que el Problema Fundamental es tal que M es estrictamente copositiva (C*).

COROLARIO 4-1. Si M es estrictamente copositiva, el proceso termina en una solución básica factible complementaria del Problema Fundamental modificado.

Nota. Una matriz M es estrictamente copositiva si $z^t M z > 0$ cuando $0 \neq z \geqq 0$.

Demostración. Supongamos que al aplicar el método de Lemke al Problema Fundamental modificado hemos terminado en un rayo casi-complementario. Sabemos que existen los vectores $\begin{pmatrix} z_0^h \\ z^h \end{pmatrix}$ y w^h tales que

$$z_0^h \geqq 0, \quad 0 \neq z^h \geqq 0, \quad w^h \geqq 0.$$

Además, por casi-complementaridad de las soluciones que constituyen el rayo, se cumple que

$$0 = (z^h)^t w^h = (z^h)^t e_m z_0^h + (z^h)^t M z^h .$$

Como M es estrictamente copositiva y $0 \neq z^h \geqq 0$, tenemos que

$$(z^h)^t M z^h > 0,$$

y también

$$(z^h)^t e_m z_0^h \geqq 0$$

porque $0 \neq z^h \geqq 0$, $e_m > 0$ y $z_0^h \geqq 0$. De esta forma, se debe cumplir que

$$(z^h)^t e_m z_0^h = 0,$$

y

$$(z^h)^t M z^h = 0$$

para que $(z^h)^t w^h = 0$. Esto es contradictorio porque como M es estrictamente copositiva, $(z^h)^t M z^h > 0$ ya que $0 \neq z^h \geqq 0$.

Así, no es posible que el procedimiento termine en un rayo; entonces, termina en una solución básica factible complementaria.

Para las matrices con menores principales positivos (ver apéndice 2) tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 4-5. Si M tiene menores principales positivos, el procedimiento de Lemke aplicado al Problema Fundamental modificado, termina en una solución básica factible complementaria.

La prueba de este teorema se basa en el siguiente resultado*[1]:

"... Sea A una matriz de n x n, $x = (\xi_i)$ un vector columna, y sea $y = (\eta_i) = Ax$, entonces se dice que A voltea el signo de x si $\xi_i \eta_i \leqq 0$ para toda i.

TEOREMA. A es P-matriz (A con todos sus menores principales positivos) si y sólo si para todo vector $x \neq 0$ A no le voltea el signo."

Es decir, A tiene todos sus menores principales positivos si y sólo si, para todo vector x diferente de cero, existe al menos un índice i = k tal que

$$x_k y_k = x_k (Ax)_k > 0.$$ *[2]

Demostración del teorema 4-5. Supongamos que M tiene sus menores principales positivos, y que el procedimiento aplica-

---

*[1] (8,p 83)

*[2] Fiedler y Pták (7,p 385) dieron de esta forma el mismo resultado.

do al Problema Fundamental modificado termina en un rayo.

Esto, como sabemos, implica la existencia de un vector - z^h tal que

$$0 \neq z^h \geqq 0,$$

y además,

$$z_i^h (Mz^h)_i \leqq 0, \quad i = 1,.., m .$$

Como M tiene sus menores principales positivos, por el - resultado que acabamos de mencionar, tenemos que para toda -- $z \neq 0$ existe un índice $i = k$ tal que

$$z_k (Mz)_k > 0 .$$

En particular, como $z^h \neq 0$, existe un índice de z^h, $i = k$, -- tal que

$$z_k^h (Mz^h)_k > 0,$$

contradiciendo el hecho de que

$$z_i^h (Mz^h)_i \leqq 0, \quad i = 1,.., k,.., m.$$

Así, no es posible que el procedimiento termine en un ra yo; es decir, termina en una solución básica factible complementaria.

REFERENCIAS

4-2.EXISTENCIA DE SOLUCIONES COMPLEMENTARIAS FACTIBLES AL --- APLICAR EL METODO DE LEMKE AL PROBLEMA FUNDAMENTAL

{ 3, pp 112-114 }

4-3.EL PROBLEMA FUNDAMENTAL MODIFICADO

{ 3, pp 114-115 }

{ 13, pp 685-686 }

4-4.EXISTENCIA DE SOLUCIONES COMPLEMENTARIAS AL APLICAR EL -- METODO DE LEMKE AL PROBLEMA FUNDAMENTAL MODIFICADO

{ 3, pp 115-116, pp 118-119 }

{ 7, p 385 }

{ 8, p 83 }

{ 13, pp 686-688 }

APENDICE 1

A1-1.INTRODUCCION

Este apéndice tiene como objetivo establecer la relación que existe entre las matrices: copositivas, estrictamente copositivas, copositivas-plus, positivas definidas, positivas - semidefinidas, y las matrices propias para resolver juegos bimatriciales, y los problemas de programación lineal y cuadrática mediante el Problema Fundamental. De esta relación y de los resultados establecidos en los teoremas del capítulo IV, se podrá obtener más información acerca de la existencia y -- obtención de soluciones complementarias que resuelven el Problema Fundamental.

A1-2.SUBCLASES DE LAS MATRICES COPOSITIVAS

Consideremos las siguientes definiciones y notaciones:

M es:	DENOTADA POR:	SI Y SOLO SI
COPOSITIVA	$M \in C$	$\forall\ z \geqq 0,\quad z^tMz \geqq 0$
ESTRICTAMENTE COPOSITIVA	$M \in C^*$	$\forall\ 0 \neq z \geqq 0,\quad z^tMz > 0$

M es:	DENOTADA POR:	SI Y SOLO SI
COPOSITIVA PLUS	$M \in C^+$	$M \in C$; $\forall\ z \geq 0$, si $z^t Mz = 0 \Rightarrow (M+M^t)z = 0$
POSITIVA DEFINIDA	$M \in P^*$	$\forall\ z \neq 0,\ z^t Mz > 0.$
POSITIVA SEMIDEFINIDA	$M \in P^+$	$\forall\ z,\ z^t Mz \geq 0$

Recordemos de la sección 2-3 de este estudio que las formas - cuadráticas $z^t Mz$ y $\frac{1}{2}z^t Mz$, donde $M' = (M + M^t)$, son equivalentes.

Analicemos ahora cómo están relacionadas estas clases de matrices.

Inmediatamente, por la definición de la clase copositiva plus (C^+), sabemos que su relación con respecto a la clase copositiva (C) es

$$C^+ \subset C .$$

La clase de matrices copositiva, pero no copositiva-plus $(C - C^+)$ es:

$$C - C^{+} = \{ M \in C \mid \exists\, z \geq 0 \ni z^{t}Mz = 0 \text{ y } (M + M^{t})z \neq 0 \}$$

Demostraremos que la clase de matrices estrictamente copositiva (C^*) está contenida en la clase de matrices copositiva-plus (C^+); es decir,

$$C^* \subset C^{+} .$$

Sea $M \in C^*$, entonces para toda $0 \neq z \geq 0$, tenemos que $z^{t}Mz > 0$. Así, $z^{t}Mz = 0$ sólo puede ocurrir cuando $z = 0$, y esto implica que $(M + M^{t})z = 0$. Por lo tanto, $M \in C^{+}$, con lo que queda demostrada la contención.

La clase de matrices copositiva-plus, pero no estrictamente copositiva ($C^{+} - C^*$) es

$$C^{+} - C^* = \{ M \in C^{+} \mid \exists\, 0 \neq z \geq 0 \ni z^{t}Mz = 0 \} .$$

Analicemos ahora cuál es la relación existente entre la clase de matrices positiva definida (P^*) y la clase de matrices estrictamente copositiva (C^*).

Sea M una matriz positiva definida ($M \in P^*$). Así, para toda $z \neq 0$, $z^{t}Mz > 0$, y en particular, para toda $0 \neq z \geq 0$, $z^{t}Mz > 0$. De esta forma, M también pertenece a la clase de matrices estrictamente copositiva (C^*); es decir, $M \in C^*$. Su relación es entonces

$$P^* \subset C^* .$$

La clase de matrices estrictamente copositiva pero no positiva definida $(C^* - P^*)$ es

$$(C^* - P^*) = \{ M \in C^* \mid \exists\ z \geqq 0 \ni z^t M z \leqq 0 \} .$$

Con respecto a la clase de matrices positiva semidefinida (P^+), demostraremos que ésta está contenida en la clase copositiva (C).

Sea M una matriz positiva semidefinida $(M \in P^+)$; es decir, para toda z, $z^t M z \geqq 0$. En particular, este tipo de matrices cumple que para toda $z \geqq 0$, $z^t M z \geqq 0$. Así, M pertenece a la clase copositiva (C). Concluimos que

$$P^+ \subset C.$$

La clase de matrices copositiva, pero no positiva semidefinida $(C - P^+)$ es

$$(C - P^+) = \{ M \in C \mid \exists\ z < 0 \ni z^t M z < 0 \}.$$

Demostraremos ahora que la clase de matrices positiva definida (P^*) está contenida en la clase de matrices positiva semidefinida (P^+); es decir,

$$z^t Mz > 0.$$

Así, una matriz M positiva pertenece a la clase de matrices - estrictamente copositiva.

Empleando los resultados del cuarto capítulo y las relaciones entre las subclases de las matrices copositivas que hemos demostrado en este apéndice, podemos asegurar lo siguiente:

- Cuando M es positiva ($M > 0$), podemos modificar o no - el Problema Fundamental, y de cualquier forma, al aplicar el método de Lemke obtendremos una solución complementaria factible. Esto es consecuencia del teorema 4-1, del corolario 4-1, y de que toda matriz positiva es estrictamente copositiva --- (C^*).

- Para la clase de matrices $C^* - \{ M \mid M > 0 \}$, es conveniente modificar el Problema Fundamental, ya que de esta forma, al aplicar el método de Lemke, estaremos seguros que obtendremos una solución complementaria factible. El corolario 4-1 y el hecho de que la clase de matrices de la que hablamos es estrictamente copositiva, fundamentan esta observación.

- Cuando M pertenece a la clase copositiva-plus pero no estrictamente copositiva, ($C^+ - C^*$), al modificar el Problema

Fundamental y al aplicar el método de Lemke, de no terminar - en una solución básica factible complementaria, es decir, al terminar en un rayo, el Problema Fundamental que deseamos resolver es inconsistente. El teorema 4-4 fundamenta lo anterior.

A1-3. LA MATRIZ M DEL PROBLEMA FUNDAMENTAL ESTRUCTURADO PARA RESOLVER JUEGOS BIMATRICIALES

Ubicaremos ahora, dentro de este contexto, a las matrices M del Problema Fundamental estructuradas para resolver -- juegos bimatriciales. Como sabemos, éstas son de la forma

$$M = \begin{bmatrix} 0_{mxm} & A_{mxn} \\ B^t_{nxm} & 0_{nxn} \end{bmatrix} ,$$

donde $A > 0$ y $B > 0$. Observemos que $M \geqq 0$.

Para demostrar que esta clase de matrices es copositiva, basta comprobar que las matrices no-negativas ($M \geqq 0$) lo son.

Sea

$$M \geqq 0.$$

Al multiplicarla por un vector $z \geqq 0$, tenemos que

$$Mz \geqq 0,$$

y finalmente,

$$z^t Mz \geqq 0 .$$

Así, $M \geqq 0$ es copositiva, y por lo tanto, las matrices del Problema Fundamental estructurado para resolver juegos bimatriciales también lo son.

Demostraremos ahora que estas matrices no pertenecen a la clase copositiva-plus.

Empecemos por analizar cómo es la forma cuadrática $z^t Mz$ para este caso especial. Sea

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

donde

$$z_1 = \begin{pmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{1m} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad z_2 = \begin{pmatrix} z_{21} \\ \vdots \\ z_{2n} \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces que

$$z^t Mz = (z_1^t, z_2^t) \begin{pmatrix} 0_{mxm} & A_{mxn} \\ B^t_{nxm} & 0_{nxn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(z_2^t B^t, z_1^t A\right) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} =$$

$$= z_2^t B^t z_1 + z_1^t A z_2 = z_1^t B z_2 + z_1^t A z_2 =$$

$$= z_1^t (A + B) z_2 \ .$$

Ahora analícemos cómo es la forma $(M + M^t)z$. Dado que

$$M = \begin{pmatrix} 0_{mxm} & A_{mxn} \\ B^t_{nxm} & 0_{nxn} \end{pmatrix}, \quad M^t = \begin{pmatrix} 0_{mxm} & B_{mxn} \\ A^t_{nxm} & 0_{nxn} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} A > 0, \\ B > 0, \end{matrix}$$

la matriz $(M + M^t)$ es

$$(M + M^t) = \begin{pmatrix} 0_{mxm} & (A + B)_{mxn} \\ (A + B)^t_{nxm} & 0_{nxn} \end{pmatrix}, \quad A + B > 0 \ .$$

De esta forma,

$$(M + M^t)z = \begin{pmatrix} 0_{mxm} & (A + B)_{mxn} \\ (A + B)^t_{nxm} & 0_{nxn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A + B)z_2 \\ (A + B)^t z_1 \end{pmatrix} \ .$$

Para que M sea copositiva-plus (C^+), debe cumplir que

$$M \in C,$$

y que

$$\forall\ z \geqq 0, \quad \text{si } z^t M z = 0 \ \Rightarrow\ (M + M^t) z = 0,$$

o bien,

$$\forall \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \geqq 0, \text{ si } z_1^t (A + B) z_2 = 0 \ \Rightarrow\ \begin{pmatrix} (A + B) z_2 \\ (A + B)^t z_1 \end{pmatrix} = 0. \quad \text{(A1-1)}$$

Sabemos que $M \in C$. Veamos si M cumple (A1-1).

Para verificar que $(M + M^t) z = 0$ para todos los casos en que $z^t M z = 0$, debemos considerar que $z = 0$ o bien $0 \neq z \geqq 0$.

Cuando ocurre lo primero ($z = 0$), la condición (A1-1) sí se cumple porque

$$z_1^t (A + B) z_2 = 0 \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} (A + B) z_2 \\ (A + B)^t z_1 \end{pmatrix} = 0 .$$

Ahora bien, cuando ocurre lo segundo ($0 \neq z \geqq 0$), como $A + B > 0$, para que $z_1^t (A + B) z_2 = 0$, existen sólo dos posibilidades: que $0 \neq z_1 \geqq 0$ y $z_2 = 0$, o bien, $z_1 = 0$ y $0 \neq z_2 \geqq 0$.

Para la primera posibilidad, tenemos que

$$z_1^t (A + B) z_2 = 0 \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} (A + B) z_2 \\ (A + B)^t z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (A + B)^t z_1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad .$$

Para la segunda posibilidad, resulta que

$$z_1^t(A + B)z_2 = 0 \qquad y \qquad \begin{pmatrix} (A + B)z_2 \\ (A + B)^t z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A + B)z_2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \ .$$

Observemos que para el caso

$$0 \neq z_1 \geqq 0 \qquad y \qquad 0 \neq z_2 \geqq 0,$$

ocurre que

$$z_1^t(A + B)z_2 > 0.$$

Concluimos que la matriz M del Problema Fundamental, estructurado para resolver juegos bimatriciales, no es copositiva-plus. Esto significa que este tipo de matrices pertenece a la clase $C - C^+$.

Así, la única información que tenemos hasta el momento - sobre este tipo de matrices, proviene del teorema 4-2, e indica que al aplicar el método de Lemke al Problema Fundamental original, iniciado como se sugiere en la demostración, el procedimiento terminará en una solución complementaria factible. Sin embargo, como veremos a continuación, al aplicar el método de Lemke al Problema Fundamental modificado y estructurado para resolver juegos bimatriciales, éste termina en un rayo - después de sólo una iteración.

Observemos que para la clase $C - C^+$ no podemos asegurar que al terminar el procedimiento en un rayo, el Problema Fundamental es inconsistente.

El Problema Fundamental modificado y estructurado para resolver el juego bimatricial $\Gamma(A,B)$ es

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_m \\ -e_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_m \\ e_n \end{pmatrix} z_o + \begin{pmatrix} 0 & A \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geqq 0, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geqq 0, \quad z_o \geqq 0,$$

$$(x^t, y^t) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 .$$

Iniciemos la búsqueda de una solución básica factible casi-complementaria, partiendo del origen; esto es,

$$z_o = 0, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

Así,

$$u = -e_m \quad y \quad v = -e_n,$$

dando como resultado la siguiente solución básica complementaria no-factible

z_o	x_1 u_1	. . . . .	x_m u_m	y_1 v_1	. . . . . .	y_n v_n
0	0 -1	. . . . .	0 -1	0 -1	. . . . . .	0 -1

Incrementamos z_o de tal forma que generamos un rayo de - soluciones factibles casi-complementarias puesto que $z_o > 0$; esto es,

$$z_o = \lambda, \qquad \lambda \to \infty,$$

$$x = 0,$$

$$y = 0,$$

$$u = -e_m + e_m z_o,$$

$$v = -e_n + e_n z_o.$$

Cuando $z_o > 1$ estaremos generando el rayo casi-complementario

z_o	x_1 u_1	. . . . .	x_m u_m	y_1 v_1	. . . . .	y_n v_n
>	0 >	. . . . . .	0 >	0 >	. . . . . .	0 >

Decrementamos z_o para encontrar una solución básica factible casi-complementaria (puesto que $z_o > 0$). Con el propósito de retener factibilidad, reducimos hasta

$$\min \{z_o | \; u \geqq 0, \quad v \geqq 0, \quad x \geqq 0, \quad y \geqq 0 \} = 1 .$$

de esta forma,

$$u = -e_m + e_m = 0,$$
$$v = -e_n + e_n = 0,$$

y obtenemos la solución básica factible complementaria degenerada:

z_o	x_1 u_1	· · · · · ·	x_m u_m	y_1 v_1	· · · · · ·	y_n v_n
1	0 0	· · · · · ·	0 0	0 0	· · · · · ·	0 0
	↑		↑	↑		↑

La regla de complementaridad indica que, del par no-básico, incrementemos el complemento de la variable que acaba de salir de la base (la variable marcada con ↑). En este caso degenerado, para el que no está diseñado el método, tenemos m+n elecciones posibles.

Supongamos que incrementamos x_γ; es decir, x_γ entrará a la base. Tenemos entonces que

$$z_o = 1,$$
$$x_\gamma = \lambda, \qquad \lambda > 0,$$
$$x_i = 0, \qquad i \neq \gamma,$$
$$y = 0,$$
$$u = Ay = 0,$$
$$v = (B^t)^\gamma x \; .$$

Como $B > 0$,

$$v = (B^t)^{\gamma} x_{\gamma} > 0$$

y

$$v \to \infty \quad \text{cuando} \quad x_{\gamma} \to \infty \, .$$

Así, hemos generado el rayo casi-complementario degenerado:

z_o	x_1 u_1	$\cdot\ \cdot$	x_{γ} u_{γ}	$\cdot\ \cdot$	x_m u_m	y_1 v_1	$\cdot\ \cdot$	y_{γ} v_{γ}	$\cdot\ \cdot$	y_n v_n
1	0 0	$\cdot\ \cdot$	> 0	$\cdot\ \cdot$	0 0	0 >	$\cdot\ \cdot$	0 >	$\cdot\ \cdot$	0 >

.

De la misma forma, supongamos que incrementamos y_{γ}. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} z_o &= 1 \\ x &= 0, \\ y_{\gamma} &= \lambda, \qquad \lambda > 0, \\ y_j &= 0, \qquad j \neq \gamma, \\ u &= Ay = A^{\gamma} y_{\gamma}, \\ v &= B^t x = 0 \, . \end{aligned}$$

Como $A > 0$,

$$u = A^{\gamma} y_{\gamma} > 0,$$

y

$$u \to \infty \quad \text{cuando} \quad y_{\gamma} \to \infty \, .$$

Hemos generado de esta forma el rayo casi-complementario dege nerado:

z_0	x_1 u_1	. .	x_γ u_γ	. .	x_m u_m	y_1 v_1	. .	y_γ v_γ	. .	y_n v_n
1	0 >	. .	0 >	. .	0 >	0 0	. .	> 0	. .	0 0

En base al resultado anterior y al que establece el teorema 4-2, concluimos que tratándose del Problema Fundamental estructurado para resolver el juego bimatricial $\Gamma(A,B)$, es -- inútil modificarlo y aplicar el método de Lemke para encontrar una solución complementaria factible. Lo indicado para - obtener tal solución, es iniciar el procedimiento de búsqueda tal y como se indica en la demostración del teorema 4-2.

A1-4.LA MATRIZ M DEL PROBLEMA FUNDAMENTAL ESTRUCTURADO PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL Y CUADRATICA

Ahora investiguemos a qué clase pertenecen las matrices asociadas al Problema Fundamental, estructurado para resolver problemas de programación lineal y cuadrática. Así, podremos aplicar resultados que ya conocemos a estos tipos particulares de Problemas.

Dos son los resultados útiles que demostraremos para este fin. El primero establece que si M_1 y M_2 son matrices que pertenecen a la clase copositiva-plus (C^+), entonces la matriz diagonal de bloque también pertenece a esta clase. El segundo indica que si M es una matriz que pertenece a la clase copositiva-plus (C^+) y S es una matriz anti-simétrica del orden de M , entonces M + S también pertenece a la clase copositiva-plus (C^+).

Demostraremos el primero. Por hipótesis, M_i, i = 1,2, son copositivas-plus (C^+); esto es,

$$\forall\ z_i \geqq 0, \quad z_i^t M z_i \geqq 0,$$

y

$$\forall\ z_i \geqq 0, \text{ si } z_i^t M_i z_i = 0 \Rightarrow (M_i + M_i^t) z_i = 0 .$$

Sea

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}.$$

Demostraremos que M es copositiva.

Observemos que $z \geqq 0$ si y sólo si $z_1 \geqq 0$ y $z_2 \geqq 0$. Además, para toda $z \geqq 0$, la forma cuadrática $z^t M z$ es

$$z^t M z = (z_1^t, z_2^t) \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(z_1^t M_1 , z_2^t M_2\right) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} =$$

$$= z_1^t M_1 z_1 + z_2^t M_2 z_2 \geq 0,$$

ya que por hipótesis M_1 y M_2 son copositivas; es decir,

$$\forall\ z_i \geq 0, \quad z_i^t M_i z_i \geq 0, \quad i = 1,2.$$

En particular,

$$z^t M z = z_1^t M_1 z_1 + z_2^t M_2 z_2 = 0$$

si y sólo si

$$z_1^t M_1 z_1 = 0 \quad \text{y} \quad z_2^t M_2 z_2 = 0 .$$

Cuando esto ocurre,

$$(M + M^t) z = \left[\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_1^t & 0 \\ 0 & M_2^t \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} M_1 + M_1^t & 0 \\ 0 & M_2 + M_2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (M_1 + M_1^t) z_1 \\ (M_2 + M_2^t) z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

ya que por hipótesis,

$$\forall\ z_i \geq 0,\ \text{si}\ z_i^t M_i z_i = 0 \ \Rightarrow \ (M_i + M_i^t) z_i = 0, \quad i = 1,2\ .$$

De esta forma, una matriz M tal que

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix},$$

donde M_1 y M_2 son copositivas-plus, es copositiva-plus (C^+).

Demostraremos ahora el segundo resultado. Sea M una matriz copositiva-plus (C^+) y S una matriz anti-simétrica del orden de M; es decir, M es tal que

$$\forall\ z \geq 0, \quad z^t M z \geq 0,$$

y

$$\forall\ z \geq 0,\ \text{si}\ z^t M z = 0 \ = \ (M + M^t) z = 0,$$

y S es tal que

$$S^t = -S, \quad \text{o bien}, \quad S = -S^t\ .$$

Debemos demostrar que M + S cumple las condiciones

$$\forall\ z \geq 0, \quad z^t (M + S) z \geq 0, \tag{A2-2}$$

y

$$\forall\ z \geqq 0,\ \text{si}\ z^t(M + S)z = 0 \Rightarrow \left((M + S) + (M + S)^t\right)z = 0.\ *$$

De la sección 2-3 de este estudio, sabemos que considerar la forma cuadrática z^tMz es equivalente a considerar la forma cuadrática $\frac{1}{2}z^t(M + M^t)z$.

Analicemos cómo es la forma cuadrática

$$z^tSz,$$

o bien,

$$\tfrac{1}{2}z^t(S + S^t)z.$$

Por hipótesis, $S = -S^t$ o $S + S^t = 0$. Entonces,

$$\tfrac{1}{2}z^t(S + S^t)z = 0, \quad \forall\ z,$$

o

$$z^t(S + S^t)z = 0, \quad \forall\ z.$$

Así, S cumple la definición de la clase positiva semidefinida (P^+); es decir,

$$\forall\ z, \quad z^t(S + S^t)z \geqq 0.$$

---

* (A2-3)

En particular,

$$\forall\ z \geqq 0, \quad z^t(S + S^t)z \geqq 0.$$

Esto significa que S es copositiva.

Observemos que

$$z^t(M + S)z = z^tMz + z^tSz,$$

donde ambas matrices, M y S, son copositivas. De esta forma,

$$\forall\ z \geqq 0, \quad z^tMz \geqq 0 \quad \text{y} \quad z^tSz \geqq 0,$$

resultando que

$$\forall\ z \geqq 0, \quad z^t(M + S)z = z^tMz + z^tSz \geqq 0;$$

esto es, (M + S) es copositiva.

Demostraremos ahora que (M + S) cumple la condición ---- (A2-3). Para ello, sabemos que M es tal que

$$\forall\ z \geqq 0, \text{ si } z^t(M + M^t)z = 0 \Rightarrow (M + M^t)z = 0.$$

Al sumar

$$0 = z^t(S + S^t)z$$

a la condición anterior, tenemos que

$$\forall\ z \geqq 0, \quad \text{si } z^t(M + M^t)z + z^t(S + S^t)z = 0 \quad \Rightarrow$$
$$(M + M^t)z + (S + S^t)z = 0,$$

o bien,

$$\forall\ z \geqq 0, \quad \text{si } z^t\big((M + S) + (M^t + S^t)\big)z = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\big((M + S) + (M^t + S^t)\big)z = 0,$$

o

$$\forall\ z \geqq 0, \quad \text{si } z^t\big((M + S) + (M + S)^t\big)z = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\big((M + S) + (M + S)^t\big)z = 0.$$

Así, $(M + S)$ satisface (A1-2) y (A1-3); es decir, ------ $(M + S)$ es copositiva-plus (C^+).

Veamos ahora cómo estos dos últimos resultados, son útiles para clasificar a las matrices propias para resolver el - problema de programación lineal, y a las matrices propias para resolver el problema de programación cuadrática.

Como ya discutimos en el segundo capítulo, la matriz estucturada para resolver el problema de programación lineal es de la forma

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -A^t \\ A & 0 \end{bmatrix}, \qquad A \text{ de } mxn,$$

y la matriz estructurada para resolver el problema de programación cuadrática, es de la forma

$$M = \begin{bmatrix} D & -A^t \\ A & 0 \end{bmatrix}, \qquad D \text{ de } nxn.$$

Consideremos el primer caso. Observemos que la matriz

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es copositiva-plus (C^+), y la matriz

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -A^t \\ A & 0 \end{bmatrix}$$

es anti-simétrica, ya que

$$S^t = \begin{bmatrix} 0 & -A^t \\ A & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 0 & A^t \\ -A & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -A^t \\ A & 0 \end{bmatrix} = -S$$

Así, M es la suma de una matriz copositiva-plus y una matriz anti-simétrica; esto es,

$$0 + S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -A^t \\ A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -A^t \\ A & 0 \end{bmatrix} = M.$$

Por el segundo resultado, podemos asegurar que M es copositiva-plus (C^+).

Para el caso en que M es propia para resolver el problema de programación cuadrática; esto es

$$M = \begin{pmatrix} D & -A^t \\ A & 0 \end{pmatrix},$$

inmediatamente observamos que la matriz D es la que determina si M es copositiva-plus (C^+) o no lo es; es decir, $M \in C^+$ --- cuando $D \in C^+$.

REFERENCIAS

A1-2.SUBCLASES DE MATRICES COPOSITIVAS

{ 3, pp 116-117 }

{ 4, pp 295-296 }

{ 9, pp 41 }

{ 14, pp 418-419 }

A1-3.LA MATRIZ M DEL PROBLEMA FUNDAMENTAL ESTRUCTURADO PARA RESOLVER JUEGOS BIMATRICIALES

{ 3, pp 107-108, pp 113-114, pp 116-117 }

{ 4, pp 295-296 }

A1-4.LA MATRIZ M DEL PROBLEMA FUNDAMENTAL ESTRUCTURADO PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL Y CUADRATICA

{ 3, pp 116-117 }

{ 4, pp 295-296 }

{ 11, pp 225 }

APENDICE 2

A2-1.INTRODUCCION

El objetivo de este apéndice es el de complementar el -- teorema 4-5, dando una definición detallada de lo que son las matrices con menores principales positivos, y mostrando que - esta clase de matrices, si bien incluye un subconjunto de matrices copositivas, también se extiende sobre la clase no-copositiva, incrementando de esta forma la clase de matrices, - para las que sabemos que el Problema Fundamental tiene solu-- ción complementaria factible.

A2-2.MATRICES CON MENORES PRINCIPALES POSITIVOS

Sea M una matriz de m x m. Una submatriz de M resulta - de eliminar un conjunto de sus columnas y un conjunto de sus renglones (ambos conjuntos pueden ser vacíos). Una submatriz principal de M resulta de eliminar un conjunto de sus columnas y respectivos renglones (este conjunto puede ser vacío). Así, una submatriz principal siempre es cuadrada. Por ejem-- plo, la matriz

$$M = \begin{pmatrix} M_1^1 & M_1^2 & M_1^3 \\ M_2^1 & M_2^2 & M_2^3 \\ M_3^1 & M_3^2 & M_3^3 \end{pmatrix}$$

tiene las siguientes submatrices principales:

$$\begin{pmatrix} M_1^1 & M_1^2 & M_1^3 \\ M_2^1 & M_2^2 & M_2^3 \\ M_3^1 & M_3^2 & M_3^3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} M_1^1 & M_1^2 & \cancel{M_1^3} \\ M_2^1 & M_2^2 & \cancel{M_2^3} \\ \cancel{M_3^1} & \cancel{M_3^2} & \cancel{M_3^3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} M_1^1 & \cancel{M_1^2} & M_1^3 \\ \cancel{M_2^1} & \cancel{M_2^2} & \cancel{M_2^3} \\ M_3^1 & \cancel{M_3^2} & M_3^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cancel{M_1^1} & \cancel{M_1^2} & \cancel{M_1^3} \\ M_2^1 & M_2^2 & \cancel{M_2^3} \\ M_3^1 & M_3^2 & \cancel{M_3^3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} M_1^1 & \cancel{M_1^2} & \cancel{M_1^3} \\ \cancel{M_2^1} & \cancel{M_2^2} & \cancel{M_2^3} \\ \cancel{M_3^1} & \cancel{M_3^2} & \cancel{M_3^3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cancel{M_1^1} & \cancel{M_1^2} & \cancel{M_1^3} \\ \cancel{M_2^1} & M_2^2 & \cancel{M_2^3} \\ \cancel{M_3^1} & \cancel{M_3^2} & \cancel{M_3^3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cancel{M_1^1} & \cancel{M_1^2} & \cancel{M_1^3} \\ \cancel{M_2^1} & \cancel{M_2^2} & \cancel{M_2^3} \\ \cancel{M_3^1} & \cancel{M_3^2} & M_3^3 \end{pmatrix}.$$

En general, podemos eliminar 0, 1, 2,.., hasta m - 1 renglones y sus respectivas columnas. Al suprimir m renglones y sus respectivas columnas, eliminaremos a toda la matriz y obtendremos 0 submatrices principales, lo cual no tiene utilidad.

Cuando la cardinalidad de los renglones y sus respectivas columnas a eliminar es cero, entonces tenemos a la matriz original; esto es, 1 submatriz principal. Cuando la cardinalidad es uno, obtenemos una matriz por cada renglón y respectiva columna que eliminemos; es decir, tenemos $\binom{m}{1}$ = m submatrices principales de m - 1 renglones por m - 1 columnas. Cuando eliminemos dos renglones y sus respectivas columnas, tenemos $\binom{m}{2}$ posibles matrices de m - 2 renglones por m - 2 columnas. Cuando sea 3, tenemos $\binom{m}{3}$ posibles submatrices de (m - 3) x - (m - 3). Así sucesivamente, hasta que eliminemos (m - 1) renglones y sus respectivas columnas para obtener $\binom{m}{m-1}$ posibles matrices, que son los elementos de la diagonal. De esta forma, el número de submatrices principales (NSP), de una matriz cuadrada M de m x m, es la suma de las submatrices principales - posibles para cada caso; es decir,

$$\mathrm{NSP} = 1 + m + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \cdots + \binom{m}{j} + \cdots + \binom{m}{m-1}.$$

Observemos que

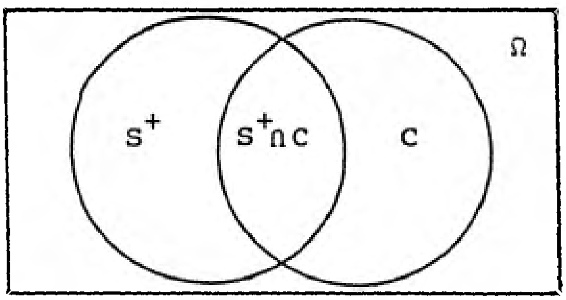
$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0!\ m!} = 1, \quad \text{porque } 0! = 1.$$

Así, el número de submatrices principales (NSP) de una matriz M de m x m es

$$\mathrm{NSP} = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j}.$$

Dada una submatriz principal de una matriz M, al determinante de ésta se le conoce como menor principal. Así, M tiene tantos menores principales como submatrices principales. Cuando todos los menores principales de una matriz M son positivos, se dice que ésta pertenece a la clase matrices con menores principales positivos, que denotaremos por S^+.

La relación entre la clase matrices con menores principales positivos (S^+) y la clase copositiva (C) es



;

es decir,

$$(S^+ - C) = \{ M \mid M \in S^+ \text{ y } M \notin C \} \neq \phi$$
$$S^+ \cap C = \{ M \mid M \in S^+ \text{ y } M \in C \} \neq \phi$$
$$(C - S^+) = \{ M \mid M \in C \text{ y } M \notin S^+ \} \neq \phi$$

Para comprobar que lo anterior es cierto, mostraremos un elemento de cada conjunto:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in (S^+ - C),$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S^+ \cap C,$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in (C - S^+)$$

De esta forma, el resultado que establece el teorema 4-5, no redunda sobre la misma clase de matrices, para las que ya existe información sobre la existencia y obtención de soluciones básicas factibles complementarias, sino que incrementa a esta última por lo menos en

$$(S^+ - C) .$$

REFERENCIAS

A2-2.MATRICES CON MENORES PRINCIPALES POSITIVOS

{ 2, p 148 }

{ 3, p 117 }

{ 7, p 383 }

CONCLUSIONES

El Problema de Complementaridad Lineal es el de encontrar solución al sistema·

$$z \geqq 0, \quad q + Mz \geqq 0, \quad \langle z, q + Mz \rangle = 0;$$

es decir, se desea encontrar un vector z no-negativo, cuya --- imagen F(z) bajo el mapeo sea no-negativa y ortogonal a él. -- (ver secciones 1-2 y 1-3).

Al definir el vector de holguras

$$w = q + Mz, \quad w \geqq 0,$$

el Problema de Complementaridad Lineal se transforma en el siguiente problema equivalente denominado Problema Fundamental:

$$w = q + Mz,$$
$$w \geqq 0, \quad z \geqq 0,$$
$$z^t w = 0.$$

(ver sección 1-3).

Este Problema Fundamental es posible estructurarlo para -

resolver otro tipo de problemas. Cuando se desea resolver el problema de programación lineal primal-dual factible mediante el Problema Fundamental, este último debe estructurarse de la siguiente forma:

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & A^t \\ -A & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(ver sección 2-2).

Cuando se desea resolver el problema de programación cuadrática, el Problema Fundamental debe estructurarse como :

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -D' & A^t \\ -A & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$$

(ver sección 2-3).

Para encontrar puntos de equilibrio de juegos bimatriciales, el Problema Fundamental se estructura así:

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -e_m \\ -e_n \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B^t & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Además, un punto de equilibrio del juego bimatricial para el que fue estructurado el Problema Fundamental es una pareja

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{x^*}{x^{*t} e_m}, \frac{y^*}{y^{*t} e_n} \right) ,$$

donde (x^*,y^*) es una solución que resuelve el Problema Fundamental estructurado como se indicó anteriormente (ver sección 2-4).

El Problema Fundamental se puede resolver empleando el método de Lemke cuando la región de soluciones factibles

$$Z = \{ z \mid z \geq 0, \quad q + Mz \geq 0 \} ,$$

no presenta degeneración. Sólo cuando esta suposición de no-degeneración se cumple, podemos asegurar que todas las soluciones complementarias factibles corresponden a puntos extremos de Z, y que las soluciones casi-complementarias factibles corresponden a puntos extremos y aristas abiertas de Z (ver lema 3-1 sección 3-4). Además, las soluciones complementarias factibles, bajo esta misma suposición, corresponden a puntos finales de caminos de puntos extremos adyacentes casi-complementarios . Así, el método de Lemke consiste en la búsqueda de puntos finales de caminos de adyacencia casi-complementarios, a partir de una solución casi-complementaria factible (ver teorema de Lemke sección 3-4).

En la siguiente tabla se resume para diferentes tipos de Problemas Fundamentales los resultados referentes a la obtención de la solución básica factible casi-complementaria inicial, y a la existencia de soluciones complementarias factibles al aplicar el método de Lemke a partir de esta solución inicial.

TIPO DE PROBLEMA FUNDAMENTAL	OBTENCION DE LA SOLUCION CASI-COMPLEMENTARIA FACTIBLE INICIAL	EXISTENCIA DE SOLUCIONES COMPLEMENTARIAS FACTIBLES
CON M > 0	VER TEOREMA 4-1 SECCION 4-2.	LA BUSQUEDA INICIADA COMO SE INDICA EN - EL TEOREMA 4-1, TERMINA EN UNA SOLUCION COMPLEMENTARIA FACTIBLE.
ESTRUCTURADO PARA RESOL-VER JUEGOS BIMATRICIA-LES.	VER TEOREMA 4-2 SECCION 4-2.	LA BUSQUEDA INICIADA COMO SE INDICA EN - EL TEOREMA 4-2,TERMINA EN UNA SOLUCION COMPLEMENTARIA FACTIBLE.
-CON M COPOSITIVA-PLUS -ESTRUCTURADO PARA RE-SOLVER PROBLEMAS DE PRO-GRAMACION LINEAL. VER SECCION A1-4. -ESTRUCTURADO PARA RE-SOLVER PROBLEMAS DE PRO-GRAMACION CUADRATICA CON MATRIZ D $\in$ C^+. VER SECCION A1-4.	MODIFICAR EL PROBLEMA FUNDAMENTAL. VER SECCION 4-3.	SI LA BUSQUEDA TERMINA EN UN RAYO, EL PROBLEMA FUNDAMENTAL ES INCONSISTENTE; DE OTRA FORMA, TERMINA EN UNA SOLUCION COMPLEMENTARIA FACTIBLE. VER TEOREMA 4-4 SECCION 4-4.
CON M ESTRICTAMENTE CO-POSITIVA (C*).	MODIFICAR EL PROBLEMA FUNDAMENTAL. VER SECCION 4-3.	LA BUSQUEDA TERMINA EN UNA SOLUCION COM-PLEMENTARIA FACTIBLE. VER COROLARIO 4-1, SECCION 4-4.
CON M QUE TIENE MENORES PRINCIPALES POSITIVOS. VER SECCION A2-2.	MODIFICAR EL PROBLEMA FUNDAMENTAL. VER SECCION 4-3.	LA BUSQUEDA TERMINA EN UNA SOLUCION COM-PLEMENTARIA FACTIBLE. VER TEOREMA 4-5, SECCION 4-4.

Los estudios de C.E.Lemke y G.B.Dantzing que fueron tratados en este trabajo, han servido como referencia para estudios realizados por otros investigadores referentes al Problema de Complementaridad Lineal. A continuación se presenta una lista de algunos artículos y su relación de precedencia con los dos artículos fuentes* de este trabajo, con objeto de orientar y ubicar al lector interesado en prolongar este estudio.

(a) C.E.Lemke and J.T.Howson Jr., "Equilibrium Points and Bimatrix Games", J. Soc. Indust. Appl. Math. 12(1964), 413-422.

(b) C.E.Lemke, "Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming", Management Science 11(1965), 681-689.

(c) R.W.Cottle and G.B.Dantzing, "Complementary Pivot Theory of Mathematical Programming", Linear Algebra and its Applications 3(1970), 295-310.

(d) R.W.Cottle, "Solution Rays for a Class of Complementary Problems", Mathematical Programming Study 1 (1974), 59-70.

(e) R.W.Cottle and G.B.Dantzing, "A Generalization of the Linear Complementarity Problem", Journal of Combinatorial Theory -- 8(1970), 79-90.

---

* En esta lista corresponden a (b) y (c).

(f) B.Curtis, "The Linear Complementary Problem", Management -- Science, vol 17, n_o9(may 1971), pp 612-634.

(g) R.W.Sargent, "An Efficient Implementation of the Lemke Algoritm and its Extension to deal with Upper and Lower Bounds", Mathematical Programming Study 7 (1978), pp 36-54.

(h) O.L.Mangasarian, "Linear Complementary Problems Solvable by a Single Linear Program", Mathematical Programming 10(1976) 263-270.

(i) O.L.Mangasarian, "Solution of Linear Complementary Problems by Linear Programming", in: G.W.Watson, ed., Numerical Analysis Dundee 1975, Lecture Notes in Mathematics N_o506 (Sprin-- ger Berlin, 1976) pp 166-175.

(j) R.W.Cottle, J.S.Pang, "On Solving Linear Complementary Pro-- blems as Linear Programs", Mathematical Programming Study 7 (1978), pp 88-107.

(k) O.L.Mangasarian, "Characterization of Linear Complementary - Problems as Linear Programs", Mathematical Programming Study 7 (1978), pp 74-87.

(l) C.E.Lemke, "Some Pivot Shemes for the Linear Complementary - Problem", Mathematical Programming Study 7 (1978), pp 15-35.

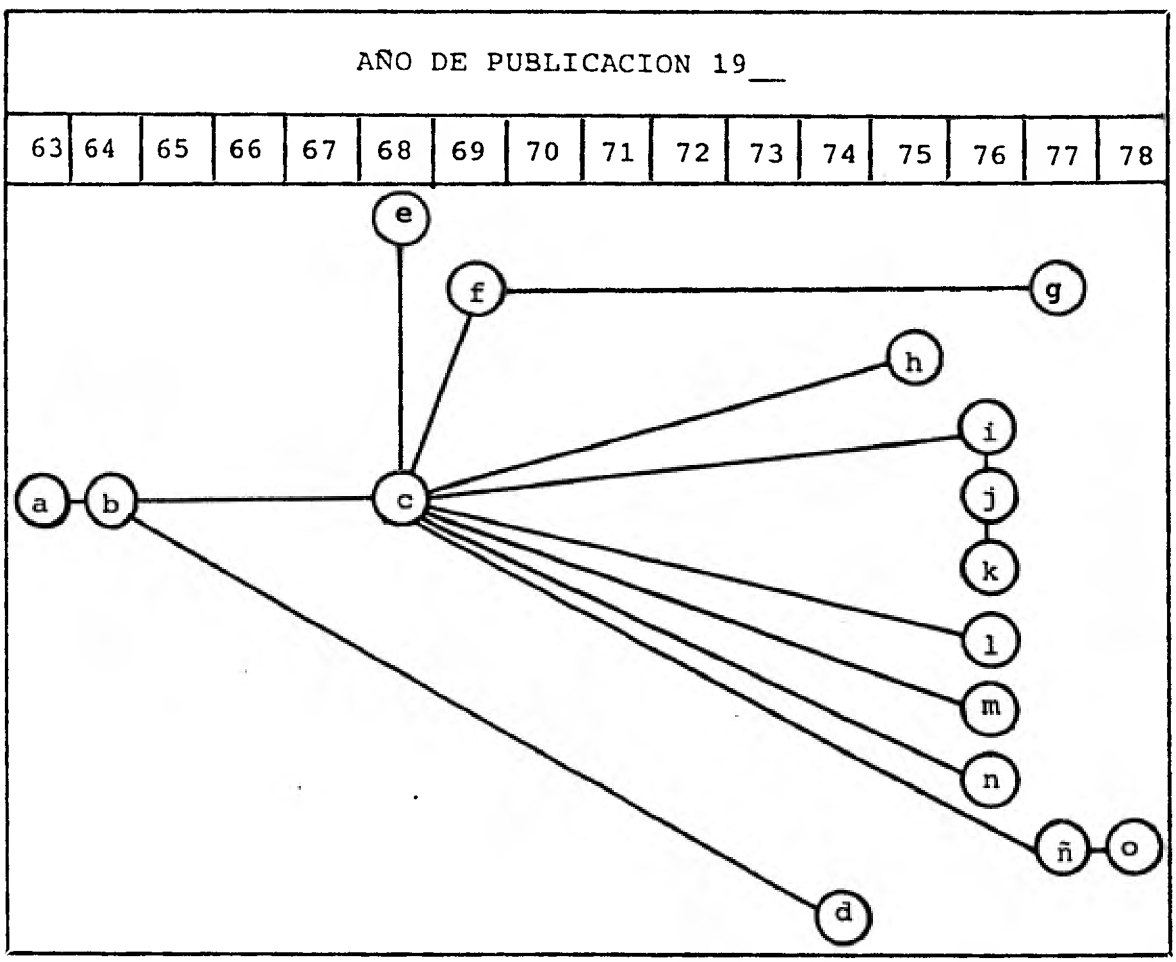
(m) J.A.Tomlin, "Robust Implementation of Lemke's Method for the Linear Complementary Problem", Mathematical Programming Study 7 (1978), pp 55-60.

(n) K.G.Murty, "Computational Complexity of Complementary Pivot Methods", Mathematical Programming Study 7 (1978), pp 61-73.

(ñ) R.W.Cottle, R.S.Sacher, "On the Solution of Large Structured Linear Complementary Problems: The Tridiagonal Case", Applied Mathematics and Optimization, vol. 3, N$_o$4(1977), pp 321-340.

(o) R.W.Cottle, G.H.Colub, R.S.Sacher, "On the Solution of Large, Structured Linear Complementary Problems: The Block Partitioned Case", Appl. Math. Optim. 4(1978), pp 347-363.

Relación de precedencia:



BIBLIOGRAFIA

1 M.L.Balinski and R.W.Cottle, Complementary and Fixed ---- Point Problems, Mathematical Programming Study 7, North-- Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.

2 R.W.Cottle, "Nonlinear Programs with Positively Bounded - Jacobians", J. Soc. Indust. Appl. Math. 14(1966), 147-158.

3 R.W.Cottle and G.B.Dantzing, "Complementary Pivot Theory of Mathematical Programming", Linear Algebra and its ---- Applications 1(1968), 103-125.

4 R.W.Cottle, G.J.Habetler and C.E.Lemke, "On Classes of -- Copositive Matrices", Linear Algebra and its Applications 3(1970), 295-310.

5 R.W.Cottle, "Complementary and Variational Problems", --- Symposia Mathematica, Academic Press, London and New York, 1976, pp 177-208.

6 G.B.Dantzing. Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, sixth printing, 1974.

7 M.Fiedler and Pták, "On Matrices with Non-positive Off---diagonal Elements and Positive Principal Minors", Czech. Math. Journal 12(1962), 382-400.

8 D.Gale and H.Nikaido, "The Jacobian Matrix and Global Univalence of Mappings", Math. Ann. 159(1965), 81-93.

9 G.Hadley, Nonlinear and Dynamic Programming, Addison-Wesley, second printing, 1972.

10 G.Hadley, Linear Programming, Adisson-Wesley, tenth printing, 1978.

11 S.Lang, Algebra Lineal, Fondo Educativo Interamericano, -1976.

12 C.E.Lemke and J.T.Howson Jr., "Equilibrium Points of Bimatrix Games", J. Soc. Indust. Appl. Math. 12(1964), 413-422.

13 C.E.Lemke, "Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming", Management Science 11(1965), 681-689.

14 B.Noble and J.W.Daniel, Applied Linear Algebra, Prentice Hall, second edition.