1 ejemplar
N-26

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

METODOLOGIA PARA EL ANALISIS DE INVERSIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

FERNANDO SALINAS GONZALEZ

MEXICO, D. F. 1979

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

En nuestro país existe la necesidad de disponer de proyectos de inversión en número y calidad adecuados. Los buenos proyectos que hay en los diversos sectores, son muy pocos, y por lo general presentan varias deficiencias, en cuanto a su preparación y presentación, lo que impide analizar y evaluar de manera eficaz y adecuada los proyectos. La forma de solucionar estos problemas, es aportando información sistemática relativa al contenido de los proyectos en su etapa de formulación, en la cual, se aplicarán las técnicas cuantitativas en su análisis, con el fin de optimizar las decisiones financieras que se pueden presentar en una empresa para distintas situaciones y en diferentes etapas de su desarrollo.

Considerando las deficiencias que hay en los proyectos y la fórma de como solucionarlas, he elaborado el presente trabajo que comprende tres partes, en las que analizo la parte técnica y analítica, que me permiten indicar las condiciones en que las reglas de decisión son eficaces y las condiciones en que su eficacia es limitada. La primera parte contempla los planes de desarrollo y los estudios que deben hacerse en un proyecto de factibilidad. La segunda parte contiene los modelos de programación matemática que en su aplicación implica la asignación óptima de los recursos limitados. En la tercera parte, se desarrollan los criterios que se usan en la toma de decisiones; también hay una aplicación de programación lineal con enteros y otra con programación dinámica; finalmente, se tiene la toma de decisiones por medio de árboles de decisión.

Fernando Salinas González.

I. FORMULACION DE PROYECTOS DE DESARROLLO ECONOMICO Y SOCIAL

1. Los planes de desarrollo

La formulación y evaluación de proyectos de inversión representa hoy en día, la posibilidad real y concreta de estructurar un medio apropiado para que las inversiones tanto públicas como privadas, se canalicen en forma óptima, y con ello los resultados contribuyan al desarrollo económico de los países en desarrollo. Sin embargo, los proyectos no deben ser aislados independientes, sino que deben formar parte de un esquema de desarrollo que los enmarque y los origine. Consecuentemente, ésto conduce al análisis de los planes de desarrollo económico y social.

Normalmente, se tiende a concebir a cualquier acción del gobierno en materia de inversiones como un plan; no obstante, éste se define como "el esquema de desarrollo que comprende todo el territorio nacional y todos los sectores; y además, preve no sólo las inversiones públicas sino también las privadas, y su objetivo general es el de incrementar la renta nacional"[1].

Las fases de la planificación, indispensables para formular un plan global de inversiones son las siguientes:

a) Establecer los objetivos generales del desarrollo económico y social.

b) Realizar un diagnóstico de la situación actual, del comportamiento de las variables económicas que afecten en el futuro al sistema económico.

c) Determinar los objetivos y metas del plan y sus interrelaciones.

d) Programar sectorialmente, o sea establecer los objetivos de producción de cada sector como el agrícola, el ganadero, el industrial, etc.

e) Programar regionalmente, es decir, localizar las -- nuevas inversiones.

f) Elaborar el programa específico de inversiones públicas y definir y establecer la política económica del Estado, tendiente a influir sobre las inversiones privadas y finalmente

g) Realizar la prueba de coherencia del plan.

La parte más importante del plan la constituye el programa de inversiones públicas, el cual debe asegurar el aumento de producción, capaz de satisfacer la demanda de bienes y servicios, final y derivada, pública y privada, interna y externa, prevista para cada sector durante el período del plan[2]

1.1 Los programas de inversión: esquemas de desarrollo parcial

En la realidad vienen llamándose planes, a todos - los programas de inversión, cualquiera que sea el campo cubier tos por ellos como regionales, sectoriales, de inversiones públicas, etc. A éstos debe llamárseles simplemente "programas" de inversión, siendo esquemas de desarrollo parcial, los cuales pueden adaptar las siguientes variantes:

a) Agregativos. Cuando solamente dan indicaciones sobre las inversiones públicas que se realizan en grandes sectores como el del acero y en ciertas regiones de un país donde existen grandes recursos naturales sujetos a explotación.

b) Nacionales públicos. Los presupuestos públicos, y se refieren a la orientación que se les da a los recursos monetarios del país.

c) Sectoriales. Su objetivo principal es el de desarrollar específicamente aquel sector de la economía en el que estén interesados, tanto los inversionistas privados como el gobierno. Tal es el caso, por ejemplo, de las inversiones que se realizan en la agricultura, minería, industria, etc.

d) Regionales. Se formulan cuando la acción del Estado se limita al desarrollo de ciertas regiones que pueden abarcar uno, dos o más Estados o zonas.

e) Individuales. Estos se refieren específicamente a proyectos de inversión pública con mayor o menor participación privada, los que pueden ser --

aislados o ligados entre sí.

Cualquiera de estos esquemas de desarrollo parcial, sólo pueden obtener el óptimo de la utilización de los recursos disponibles en el ámbito del programa mismo.[3] Por lo tanto, sus alcances son limitados. No obstante, no existe ningún impedimento para que en estas circunstancias y a falta de las condiciones sociales, políticas y económicas adecuadas para formular un plan, sea posible proceder a una programación racional.

1.2 El proyecto como un caso de programación parcial*

De entre los tipos de programación parcial más importantes, se encuentra el más microeconómico, o sea, el proyecto específico de inversión.[4]

1.3 El proyecto y sus etapas de desarrollo

Definición del concepto proyecto. El proyecto es el plan prospectivo de una unidad de acción capaz de materializar algún aspecto del desarrollo económico y social.[5] Esto implica, desde un punto de vista económico, proponer la producción de algún bien o la prestación de algún servicio, con el empleo de una cierta técnica y con miras a obtener un determi-

---

* La diferencia que existe entre programa y proyecto, es que el primero comprende una serie de proyectos específicos, en cambio el otro se refiere a una inversión concreta.

nado resultado o ventaja económica y social. Como plan de -- acción, el proyecto supone también la indicación de los medios necesarios para su realización y la adecuación de esos medios a los resultados que se desean.

El planteamiento y la ejecución de cualquier inversión pública o privada puede ser realizada a base de proyectos, que atendiendo a la división de la economía en sectores de producción, éstos se clasifican en:

a) Proyectos agropecuarios. Abarcan todo el campo de la producción animal y vegetal. Las actividades forestales y pesqueras, se consideran a veces como agropecuarias y otras, como industriales. Los proyectos de riego, colonización reforma agraria, extensión y crédito agrícola y ganadero, mecanización de faenas y abono sistemático suelen incluirse en los proyectos complejos de esta categoría, aunque individualmente pudieran clasificarse como proyectos de infraestructura o servicios.

b) Proyectos industriales. Comprenden toda la actividad manufacturera, la industria extractiva y el procedimiento de los productos extractivos, de la pesca, de la agricultura y de la actividad pecuaria.

c) Proyectos de infraestructura social. Tienen la función de atender necesidades básicas de la población como salud, educación, abastecimiento de agua, redes de alcantarillado, vivienda y ordenamiento espacial urbano y rural.

d) Proyectos de infraestructura económica. Incluyen los proyectos de unidades directa o indirectamente productivas que proporcionan a la actividad económica ciertos insumos, bienes o servicios, de utilidad general, tales como energía eléctrica, transporte y comunicaciones. Esta categoría comprende los proyectos de construcción, ampliación y mantenimiento de carreteras, ferrocarriles, aerovías, puertos y navegación, centrales eléctricas con sus líneas, redes de transmisión y distribución, sistemas de telecomunicaciones y sistema de información.

e) Proyectos de servicios. Son aquellos cuyo propósito no es producir bienes materiales, sino prestar servicios de caracter personal, material o técnico, ya sea mediante el ejercicio profesional o a través de instituciones. Incluyéndose entre ellos los trabajos de investigación tecnológica o científica, la comercialización de los productos de otras actividades y los servicios sociales que no estén incluidos en la infraestructura social.

Etapas anteriores a la presentación del proyecto. En esta parte de la formulación de proyectos, tenemos como propósito, plantear únicamente los problemas de la formulación de un proyecto en la etapa final de su preparación, cuando corresponde adoptar la decisión de aceptar o rechazar la inversión respectiva. Sin embargo, haremos una breve descripción de sus etapas previas.

La finalidad del proyecto, es aportar elementos de juicio para tomar decisiones sobre su ejecución o sobre el apoyo que debiera prestar a su realización. Por lo que deben analizarse problemas técnicos, económicos, financieros, administrativos e institucionales. Estos diversos aspectos se relacionan en cada estudio parcial que compone la justificación del proyecto. En la etapa de anteproyecto definitivo, todos esos problemas deben haberse aclarado de manera que se pueda tomar con seguridad la decisión de aceptar o no la inversión implicada en la idea original del proyecto. Para ésto, es necesario haber pasado por dos etapas previas.

La primera corresponde a la posibilidad de realizar el proyecto. Se trata de identificar, apoyándose en la información existente, e inmediatamente disponible, si existen problemas significativos para no realizar el proyecto. En caso de que no existan, se continua con el análisis, especificando los estudios de la etapa siguiente. Para ello, en esta primera etapa, se define y delínea la idea de proyecto, identifi--

cando sus posibles soluciones y alternativas, técnicas y eco-nómicas.

La segunda etapa, se refiere al anteproyecto preliminar o estudio previo de factibilidad. Consiste en verificar que al menos una de las alternativas de solución es rentable, además de ser técnica y económicamente viable. Esta etapa requiere de datos más precisos sobre las distintas alternativas planteadas, para caracterizar su rentabilidad y su viabilidad.

Al seleccionar por lo menos una solucion, puede justificarse la decisión de profundizar los estudios, lo que implica mayores gastos, cuya recuperación depende de la efectiva realización del proyecto. Esta última parte corresponde al anteproyecto definitivo, que también se conoce con el nombre de estudio de factibilidad, y trata de ordenar las alternativas de solución para el proyecto, según ciertos criterios elegidos para asegurar la optimización en el uso de los recursos empleados, tanto desde un punto de vista del empresario público o privado.

La combinación adecuada de estos criterios, permite ordenar las alternativas de solución técnica, económica y financiera de cada proyecto.

En esta etapa de la elaboración de proyectos, se llega a recomendar la alternativa de solución considerada como la mejor, dados los recursos disponibles y las restricciones a su empleo.

Los estudios comprendidos en esta parte, deberán realizarse con todo rigor científico requerido para presentar el documento a una institución u organismo financiero, que será la encargada de tomar la decisión de llevar adelante el proyecto, mediante el otorgamiento de los fondos necesarios para su construcción.

Posteriormente, una vez aceptada la decisión de realizar el proyecto, se completará el proyecto de ejecución o ingeniería en el que se especifiquen, con máximo detalle, las condiciones y características técnicas que debe cumplir en la realidad la futura empresa.

CONTENIDO DEL PROYECTO

El contenido de un proyecto que abarca los aspectos más importantes de los problemas que deben resolverse antes de decidir la inversión son: estudio de mercado, estudio técnico, estudio financiero, evaluación económica y plan de ejecución; los cuales se analizan individualmente considerando sus interrelaciones.

2. Estudio de Mercado

El objetivo del estudio de mercado en un proyecto - consiste en determinar la conveniencia de que se produzca un - bien o un servicio para atender a una necesidad, que puede manifestarse, a) en el mercado por la disposición de la comunidad de pagar los precios fijados al producto del proyecto, b) a través de presiones sociales por mecanismos ajenos al mercado.

El planteamiento del estudio de mercado[6], se hace en base a los siguientes cinco puntos: 1) identificar los usos -- que pueden tener los bienes que se pretende producir y las posibilidades de sustitución por otros bienes existentes; 2) caracterizar el mercado para el cual se produce, en base a elementos como el tamaño de la población, el área geográfica considerada, el sistema de comercialización, y factores institucionales; 3) analizar las tendencias históricas de la demanda actual y proyectada, en base a las características del consumo de productos similares a los que se pretende producir; 4) analizar la - tendencia histórica y las características de la oferta de los bienes que se pretende producir y de sus posibles sustitutos; 5) determinar las posibilidades del proyecto en el mercado, tomando en cuenta los precios existentes y los costos a que se - podrá producir los bienes o servicios.

El desarrollo del estudio de mercado se hace de -- acuerdo al esquema siguiente.

1) El producto en el mercado

Se examinarán las características de los bienes o servicios que forman la línea de producción del proyecto, con el fin de definir el mercado a que corresponden y su coeficiente de sustitución entre los bienes que compiten en tal mercado.

1.1) Producto principal y sub-productos. Se reúnen los datos necesarios para identificar el producto principal y los sub-productos, especificando sí se trata de productos para exportación, sí son tradicionales o constituyen una nueva línea de comercio.

1.2) Productos sustitutivos o similares. Se indica la existencia y características de otros productos considerados como sustitutivos o similares a los del proyecto y que puedan competir con ellos en el mercado.

1.3) Productos complementarios. Se indica sí el uso o consumo de los bienes o servicios del proyecto, está condicionado por la disponibilidad de otros bienes o servicios. En el caso de que lo estén, se determinan estos productos complementarios, destacando las relaciones que existen entre ellos y los productos del proyecto, para que sean considerados en el análisis de mercado.

2) El área del mercado

El análisis de la oferta y de la demanda, se aplicará a un área económica bien definida, que debe quedar caracterizada por el número probable de comsumidores o usuarios del bien o servicio que el proyecto producirá y por las características de las limitantes del mercado del proyecto.

2.1) Población. Se estima el universo de probables consumidores o usuarios, para determinar la parte de la población que podría ser beneficiada por el proyecto. Con respecto a este universo se presentan los datos que definen:

- Contingente actual y tasa de crecimiento
- Estructura y sus cambios: distribución espacial de la población por grupos de edad, sexo, etc.

2.2) Ingreso. Se caracteriza la capacidad de pago de los consumidores o usuarios, indicando los siguientes datos

- Nivel actual y tasa media de crecimiento del ingreso
- Estratos actuales y cambios en la distribución

2.3) Factores limitativos de la comercialización. Se indican las limitantes que puedan afectar la comercialización o distribución de los porudctos del proyecto, las cuales pueden ser de naturaleza económica, social, institucional o física.

3) Comportamiento de la demanda

En los proyectos económicos, se justifica la ne sidad de establecer la nueva unidad de producción, por el poder de compra de la comunidad interesada y se manifiesta como una demanda del mercado, en cambio en los proyectos sociales esta necesidad se tendrá que cuantificar. El estudio comprende la determinación de la demanda o necesidad, tal como se presenta actualmente, y un análisis de ciertas características que sirven para explicar su probable comportamiento futuro.

3.1) Situación actual. Se estima cuantitativamente el volumen actual de uso y consumo de bienes o servicios producidos, para productos principales o sub-productos, sustitutivos, similares y complementarios, presentando la información siguiente:

3.1.1) Series estadísticas básicas. Reunir las series que permitan calcular la evolución del uso o consumo del producto.

3.1.2) Estimación de la demanda actual. Calificar la estimación resultante del análisis de las series estadísticas.

3.1.3) Distribución espacial y tipología de los consumidores. Caracterizar la demanda, presentando datos de su concentración o dispersión en el espacio y la variedad de los consumidores.

3.2) Características teóricas de la demanda. En base a los datos estadísticos anteriores, se emplean los concep tos teóricos corrientes para calcular los índices y coeficientes, los cuales se presentan como:

3.2.1) Coeficientes de crecimiento histórico. Cálculo de la tasa anual y sus variaciones en el período considerado.

3.2.2) Indices básicos. Cálculo de los coeficientes de elasticidades,precio e ingreso de la demanda, elasticidad de sustitución y coeficientes técnicos.

3.3) Situación futura: Proyección de la demanda. Se estima la demanda futura para toda la vida útil del proyecto, utilizando datos conocidos que contengan los factores resultantes de las causas que actuaron en el pasado y los introducidos por el desarrollo al promover cambios en las estructuras sociales y económicas. De acuerdo al esquema siguiente:

3.3.1) Extrapolación de la tendencia histórica Se aplican métodos estadísticos para estimar los valores futuros de los datos analizados.

3.3.2) Análisis de los factores condicionantes de la demanda futura. Se consideran los factores que resultan de la evolución estructural del sistema económico; del aumento de la población, del ingreso y de los cambios en su distribución; de los cambios en el nivel general de precios, y en el -

sistema de precios relativos; de los cambios en la preferencia de los consumidores causados por nuevas funciones de producción, etc.

3.3.3) Previsión corregida y calificada de la demanda futura. Se califican las extrapolaciones realizadas y se presenta la proyección final de la demanda.

4) Comportamiento de la oferta

En este punto se estudiará el comportamiento de la oferta y las cantidades de bienes o servicios que producirá el proyecto. Este examen se limita al producto principal y sus sub-productos. El análisis se referirá a las situaciones actual y futura, y deberá presentar las bases para prever las posibilidades del proyecto en las condiciones de competencia existentes.

4.1) Situación actual. Para caracterizar la evolución de la oferta, se presenta y analiza un conjunto suficiente de datos estadísticos referentes a varios períodos. De acuerdo al esquema siguiente:

4.1.1) Series estadísticas básicas. Se recopilan series de producción e importación para un proyecto de producción de bienes y en el caso de un proyecto de prestación de servicios, se hacen estimaciones análogas.

4.1.2) Estimación de la oferta actual. Se cuantifica el volumen de bienes o servicios que existe en el mercado.

4.1.3) Inventario crítico de los proveedores principales. De las principales empresas proveedoras, se obtiene información y análisis de las condiciones en que realizan la producción: volumen producido; participación en el mercado; capacidad instalada y utilizada; capacidad técnica y administrativa; localización con respecto al área de consumo; características tales como precio, estructuras de costo de producción actua calidad y presentación de los productos; sistemas de comercialización, etc.

4.2) Análisis del régimen de mercado. Se identifica el régimen de mercado y se caracteriza en su estructura como de competencia perfecta o monopólica.

4.3) Situación futura. Evolución previsible de la oferta. Se estima la evolución previsible de la oferta actual formulando hipótesis sobre los factores que condicionarán la participación del proyecto en la oferta futura, destacando los puntos siguientes:

- Utilización de la capacidad ociosa
- Planes y proyectos de ampliación de la capacidad instalada
- Análisis de los factores condicionantes de evolución previsible

- Estimación corregida y calificada de la oferta futura.

5) Determinación de los precios del producto

El supuesto de la fijación y posibles variaciones de precios del producto presenta grandes dificultades, que pueden reducirse haciendo estimaciones de valores máximos y mínimos de los precios y analizando por medio del método de elasticidad-precio o de la correspondiente curva de demanda, como se reflejan estos valores en la demanda futura.

5.1) Mecanismos de formación de los precios del producto. Teniendo en cuenta las características del producto y del tipo de mercado donde se ubica el proyecto, se elije y justifica la forma de fijación de precios entre las posibilidades siguientes:

- Precio existente en el mercado interno
- Precios fijados por el sector público
- Precio dado por similares importados
- Precio estimado en función del costo de producción
- Precio estimado en función de la demanda
- Precio del mercado internacional
- Precios regionales

5.2) Acotamiento del precio probable y su efecto sobre la demanda. Se fijan los valores máximos y mínimos probables del precio unitario de venta del producto y se analiza la repercusión de estos valores en la demanda.

6) Posibilidades del proyecto.

En base a los análisis hechos en este estudio, se prevé la evolución de la oferta y la demanda, y se estima con hipótesis formuladas sobre las condiciones de competencia, las posibilidades de participación del proyecto en la oferta global del producto.

6.1) Condiciones de competencia del proyecto. Se hace la programación de la utilización progresiva de la capacidad instalada del proyecto, en términos del volumen de producción y en función de condiciones ajenas al mercado como disponibilidad de insumos o financiamiento. Se comparan los resultados de esta programación con la demanda calculada, para estimar la parte del mercado que el proyecto pretende cubrir, en base a los proveedores actuales y del régimen del mercado vigente.

6.2) Demanda potencial del proyecto. Se cuantifica la demanda que se estima que el proyecto cubrirá durante su vida útil.

7) Conclusiones

- Demanda actual del producto y su proyección

- Oferta actual y futura
- Fracción de la demanda que atenderá el proyecto

3. Estudio Técnico

El estudio técnico consiste en demostrar la viabilidad técnica del proyecto y justificar, cuál es la alternativa técnica que mejor se ajusta a los criterios de optimización que corresponde aplicar al proyecto.

La estructura del estudio técnico comprende dos conjuntos de elementos y un análisis de costos: un conjunto de elementos básicos que reune los resultados relativos, al tamaño del proyecto, su proceso de producción y su localización; y otro conjunto de elementos complementarios, que describe las obras físicas necesarias, la organización para la producción, el calendario de realizaciones del proyecto y finalmente el análisis de costos.

El desarrollo del estudio técnico se hace en base al esquema siguiente:

A. Estudio básico

. Tamaño

Los problemas del tamaño se presentan desde dos puntos de vista: la capacidad del proyecto considerando sus factores condicionantes, y la justificación del tamaño con respecto al proceso y a la localización que se han elegido.

1) Capacidad del proyecto.

En este punto se debe expresar la cantidad de producto en unidad de tiempo. En el caso de proyectos de ampliación de unidades existentes, se indica por separado la capacidad de las instalaciones existentes y la correspondiente a la ampliación.

1.1) Definición del tamaño. Se entiende por tamaño la medida, en la unidad de tiempo, de la producción normal del conjunto de equipos instalados.

1.2) Capacidad diseñada. Se indica la capacidad diseñada de las diferentes unidades del proyecto y se determina la capacidad resultante de la unión de los diferentes procesos unitarios de producción.

1.3) Márgenes de capacidad utilizables. En Base a la diferencia de la capacidad diseñada y la que será normalmente utilizada, se presentan los aspectos siguientes:

1.3.1) Recursos. Se indica la reserva de capacidad que permita parar temporalmente ciertas partes del aparato productivo para su revisión periódica o para su mantenimiento.

1.3.2) Sobrecarga posible. Se indica la sobrecarga permitida a los equipos e instalaciones de los dis tintos procesos unitarios.

1.3.3) Fraccionamiento. Se señalan las alternativas posibles de utilización parcial de los equipos o instalaciones de producción.

2) Factores condicionantes del tamaño

2.1) Tamaño del mercado. Se analiza el tamaño elegido con el comportamiento de la demanda, pero prever períodos en que habrá capacidad ociosa y cuando se utilizarán completamente los equipos.

2.2) Capacidad financiera. Se describen los problemas de capacidad financiera que limitan el tamaño del proyecto.

2.3) Disponibilidad de insumos materiales y humanos. Se indica si la disponibilidad de insumos materiales y humanos limita el tamaño del proyecto.

2.4) Problemas de transporte. Se señala si la capacidad de producción ha sido condicionada por problemas de transporte con respecto a la obtención de insumos o la entrega de los productos.

2.5) Problemas institucionales. Se indican los elementos de legislación, política económica, estrategias de desarrollo, planes y programas que ponen una restricción adicional al tamaño definido en función de los demás factores condicionantes.

2.6) Capacidad administrativa. Se señala si este factor limita el tamaño del proyecto.

3) Justificación del tamaño frente al proceso y la localización adoptados. Se indican las condiciones impuestas al tamaño del proyecto por el proceso y la localización que se han elegido.

Proceso

Por proceso se entienden las transformaciones que realizará el aparato productivo creado por el proyecto para convertir insumos en productos.

a) Descripción de las unidades de transformación.

1) Descripción del proceso de transformación.

Se describe sistemáticamente la secuencia de operaciones que se aplican a los insumos en su estado inicial para obtener los productos en su estado final.

Las unidades de transformación existentes y las nuevas, se describen separadamente como se indica a continua ción:

1.1) Insumos principales y secundarios. Se señalan cuáles son los insumos principales y secundarios que se usan en el proceso de transformación.

1.2) Insumos alternativos y efectos de su empleo Se indican los insumos alternativos, principales o secundarios, señalando los efectos de su empleo sobre la cantidad de los productos, subproductos y residuos, sobre su calidad y sobre el costo de transformación.

1.3) Productos principales, subproductos y productos intermedios. Se indican sus siguientes características una vez que han sido identificados: descripción; unidad de medida; cantidad; calidad; y costo directo.

1.4) Residuos. Se identifican los residuos, se indica si tienen un valor económico o social y si su eliminación acarrearía efectos sociales negativos.

1.5) Identificación y descripción de las etapas intermedias. Se describe detalladamente el proceso con la identificación de las etapas intermedias de transformación; descripción de estos procesos unitarios; y caracterización de los objetos resultantes.

1.6) Flujograma del proceso total. Se presenta un diagrama de bloques donde se identifican los procesos unitarios y sus interrelaciones.

2) Descripción de las instalaciones, equipos y personal.

Se hará una descripción por separado según se trate de unidades nuevas o ampliación de unidades existentes seleccionando las indicaciones apropiadas a la naturaleza e importancia del proyecto con el propósito de identificar: tipo, origen, año de diseño y fabricante, capacidad diseñada; vida útil, años de uso, consumo de energía o combustible; número de personas necesarias para su operación; capacitación de los operadores, distribución espacial y funcional de las unidades. Esta identificación se presentará por separado para las instalaciones, equipos y personal:

- Del proceso de transformación
- De los sistemas complementarios

b) Calificación de las unidades existentes

1) Calificación del diseño (proceso de transformación e instalaciones). Se hace una crítica de la calidad del diseño del proceso y de las instalaciones existentes, con el propósito de justificar suutilización en las unidades nuevas o determinar su cambio. La crítica se basa en los puntos siguientes:

1.1) Problemas de adecuación. Se indica si el di seño del proceso utilizado es adecuado para la operación con respecto: al tipo de insumos materiales disponibles; a las personas disponibles al nivel técnico del medio; a la calidad y costo de los productos finales, etc.

1.2) Problemas de escala de producción. Se indica para la operación global y para cada proceso unitario: tamaño óptimo para el tipo de proceso usado en las instalaciones existentes; tamaño actual en funcionamiento; y diferencia de costo entre los tamaños óptimo y actual.

2) Calificación de la operación

El objetivo es investigar cuáles son los problemas técnicos que afectan la operación de las unidades existentes, causando distorsiones en el volumen, calidad y costo de la producción, para eso se analizan los puntos siguientes:

2.1) Insumos. Se revisa la calidad, su sistema de control y continuidad de suministro.

2.2) Instalaciones. Se examina la calidad, el grado de utilización y el sistema de mantenimiento.

2.3) Producto. Se analiza el funcionamiento de los sistemas de: programación de la producción; control de productos; gestión de inventarios y eliminación de residuos.

seño del proceso utilizado es adecuado para la operación con respecto: al tipo de insumos materiales disponibles; a las personas disponibles al nivel técnico del medio; a la calidad y costo de los productos finales, etc.

1.2) Problemas de escala de producción. Se indica para la operación global y para cada proceso unitario: tamaño óptimo para el tipo de proceso usado en las instalaciones existentes; tamaño actual en funcionamiento; y diferencia de costo entre los tamaños óptimo y actual.

2) Calificación de la operación

El objetivo es investigar cuáles son los problemas técnicos que afectan la operación de las unidades existentes, causando distorsiones en el volumen, calidad y costo de la producción, para eso se analizan los puntos siguientes:

2.1) Insumos. Se revisa la calidad, su sistema de control y continuidad de suministro.

2.2) Instalaciones. Se examina la calidad, el grado de utilización y el sistema de mantenimiento.

2.3) Producto. Se analiza el funcionamiento de los sistemas de: programación de la producción; control de productos; gestión de inventarios y eliminación de residuos.

2.4) Mano de obra. Se revisa la adecuación de su número y de su preparación.

2.5) Economías externas. Se indican las existentes y se analiza su influencia en la producción.

3) Posibilidades de expansión de la capacidad utilizada

Se analiza y determina si los objetivos del proyecto se pueden realizar con las instalaciones, equipos y personal existentes, con un costo marginal reducido, mediante los supuestos siguientes:

3.1) Capacidad ociosa. Se hace un examen de las posibilidades de multiplicar los turnos de trabajo; incrementar los índices de utilización de los equipos ó emplear otros medios para acrecentar la producción sin nuevas inversiones fijas.

3.2) Instalaciones incompletas. Se indica si existen y pueden unirse al proceso productivo mediante inversiones adicionales pequeñas.

3.3) Expansión por cambios tecnológicos. Se examina la tecnología del proceso y se indica si es posible cambiarla sin inversiones adicionales elevadas, con aumento en producción.

c) Justificación de las unidades nuevas.

1) Justificación técnica del proceso de transformación.

1.1) Condiciones iniciales. Se especifican los antecedentes que han permitido seleccionar un tipo de insumos y el nivel de elaboración con que entran al proceso de transformación, demostrando que la condición inicial seleccionada permite tener mejor calidad, cantidad y costo. El tipo de insumos puede ser:

Insumos importados. Proporcionar información de la disponibilidad y seguridad de suministro en las fuentes internacionales de abastecimiento, precio, disponibilidad de divisas; normas institucionales vigentes sobre uso de divisas, condiciones de los contratos internacionales de suministro por último disponibilidad y adecuación de los medios de transporte.

Insumos nacionales disponibles en el mercado. Aportar datos del volumen disponible y seguridad de suministro, precios comparados con los del mercado internacional, adecuación de los canales de comercialización y condiciones de los contratos de suministro.

Insumos nacionales cuya producción se desarrollará. Presentar información complementaria de los insumos disponibles en el mercado, como monto de inversión necesaria, costos, plazos de desarrollo y posible mercado adicional, en el caso que la producción desarrollada excediera las necesidades del proyecto bajo estudio.

1.2) Inventario crítico de los procesos existentes. Se especifican los procesos alternativos existentes que interesen al proyecto, tomando en cuenta los siguientes campos: procesos ya probados industrialmente; procesos probados experimentalmente en escala reducida en plantas piloto; procesos probados en laboratorio.

1.3) Criterios de selección de alternativas y orden de su aplicación. Se hace una lista de las alternativas resultantes de las restricciones anteriores, indicando el orden de importancia en que se deben aplicar, teniendo en cuenta criterios como rentabilidad; intensidad de la mano de obra; uso de divisas; y desarrollo regional.

2) Justificación de las instalaciones, equipos y personal.

La elección de cada uno de los elementos con los que se realiza el proceso, se justifica por sus características que dependen de la naturaleza e importancia del proyecto, tales como: especificación, capacidad diseñada, capacidad de sobrecarga, versatilidad en el tipo de producción, vida útil del equipo y de partes especiales, consumo de energía, dimensiones y peso del equipo total, requisitos técnicos de instalación, gastos de montaje, garantias ofrecidas sobre capacidad, calidad del producto y plazo de entrega; personal capacitado y asistencia técnica.

La presentación de estas características se -- hara por separado para las instalaciones, equipo y personal.

- Del proceso de transformación
- De los sistemas complementarios

3) Capacidad de expansión de las instalaciones

Se demuestra si la distribución espacial de las instalaciones y equipos tiene posibilidades de expansión futura racional.

4) Justificación del proceso frente al tamaño y la localización.

Se demuestra si el proceso es o no compatible - con el tamaño y la localización que se han elegido.

Localización

a) Descripción

Se describirá en forma separada la ubicación de las unidades nuevas y de las existentes.

1) Microlocalización

La macrolocalización física presentada en la descripción del proyecto, sirve de marco, para que se describa las alternativas de la microlocalización.

Para un proyecto ubicado en zona rural o en zona urbana, se indica la delimitación de la zona y se definen dentro de ella las áreas que contienen los terrenos por elegir.

2) Integración en el medio

Las áreas definidas que contienen los terrenos por elegir, se describen en relación con el medio, tomando en cuenta los puntos siguientes:

2.1) Condicionantes naturales. Se muestran las características geográficas y físicas de cada área de interés para el proyecto, tanto para su implantación como operación (topografía, clima, suelo, regimen de aguas, etc.)

2.2) Economías externas. Identficar y presentar los principales elementos de cada área definida que sirven al proyecto en términos de economías externas: infraestructura para transportar materiales de construcción, equipos, insumos y productos; servicios de asistencia técnica y adiestramiento de mano de obra; medios de comunicación; urbanización; capacidad de soporte de la población, como vivienda, sanidad, educación; existencia en el área de empresas complementarias, talleres de operación y mantenimiento, servicios financieros, y otros servicios públicos y privados de interés para el proyecto.

2.3) Condiciones institucionales. Indicar las normas legales actuales que pueden afectar al proyecto en su implantación y operación en las áreas definidas, como reglamentaciones sobre el derecho de propiedad y uso del terreno, preservar el medio ambiente, conservación de recursos naturales.

3) Ordenamiento espacial interno. Para cada uno de los terrenos contenidos en las áreas definidas, se presentan los aspectos siguientes:

3.1) Dimensiones y características técnicas del terreno. Se especifican las dimensiones y forma del terreno, con sus características técnicas principales que sean de interés para el proyecto, tanto en su implantación como operación.

3.2) Distribución de las instalaciones en el terreno. Para cada terreno, se presenta un plano, en el que se indica la parte que ocuparán las instalaciones.

3.3) Flujograma espacial. En el plano del terreno considerando las instalaciones productivas, presente gráficamente el flujo de proceso en términos de espacio.

b) Calificación y/o justificación

Si la ubicación no es la misma de las unidades nuevas y las existentes, se tratarán por separado.

1) En relación con el medio para proyectos de ampliación, se califica la localización de unidades existentes, considerando que las unidades nuevas van a ocupar el mismo terreno, en caso de unidad nueva, se justifica su adecuación en relación con el medio. En el primer caso, se indican los problemas que presenta la actual localización; para unidades nuevas, se expresan las razones que se han tenido para elegir las alternativas propuestas, ésto es:

- Razones de geografía física
- Economías externas
- Razones institucionales

2) En relación con las características del terreno. Las características del terreno se deben analizar en base a la actividad productiva que se desarrolla o se va a desarrollar.

2.1) El proceso productivo. Se analiza si las características físicas del terreno son adecuadas al proceso productivo elegido y a sus alternativas.

2.2) El programa de expansión. Se examina la adecuación de las dimensiones y la forma del terreno, para determinar las posibilidades de utilizar los terrenos contiguos.

3) Distancias y costos de transporte. Se indica la localización de la unidad existente y cada una de las

localizaciones alternativas, expresando las distancias y el costo de transporte hasta y desde el proyecto, para los insumos y productos.

4) Posibilidades de conexión de las unidades nuevas con las existentes. Con el objeto de reducir el costo de las inversiones adicionales, se analizan las posibilidades de conexión orgánica y funcional de las unidades existentes con las nuevas. Este planteamiento debe hacerse:

- En la solución de los problemas actuales de localización.
- En la expansión de las instalaciones actuales.

5) Justificación de la localización frente al tamaño y al proceso. Se presentan elementos de juicio para probar que la localización es compatible con el tamaño y el proceso elegidos.

B. Estudio complementario

Obras físicas

En esta sección, se describe la parte de la inversión referente a obras civiles, que comprenden los edificios caminos, líneas de transmisión, tuberías, etc., o sea, la base material de las unidades de producción de bienes o de prestación de servicios que constituyen el proyecto.

1) Inventario

Para cada una de las obras civiles que forman unidades independientes, se indican los aspectos siguientes:

1.1) Relación y especificación de las obras - que se realizarán. Se muestra una relación de todas las obras por realizar y se especifican de acuerdo a las normas técnicas vigentes.

1.2) Clasificación funcional y característi-- cas específicas de las obras. Se clasifican y especifican -- las obras civiles en principales y auxiliares, indicando sus características principales.

2) Dimensiones de las obras

2.1) Exigencias en terrenos. Para cada obra, se indica el requerimiento de terreno.

2.2) Dimensiones. Para especificar las dimensiones de las obras, se emplean unidades técnicas de medida - normalizada para cada caso particular

3) Requisitos de las obras

Se indican los requisitos básicos necesarios para la construcción de las obras físicas, en el orden siguiente:

3.1) Materiales que se emplearán. Se presenta una relación de materiales más importantes que se utilizan en la construcción por su calidad y cantidad.

3.2) Mano de obra necesaria. Se indica la mano de obra necesaria para la construcción, expresándola en número y en capacitación.

3.3) Equipos, maquinaria, herramientas e instalaciones. Se hace y presenta una relación de los equipos, maquinaria, herramientas e instalaciones que se van a emplear en la fase de construcción, señalando su vida útil probable.

4) Problemas específicos

4.1) Resultantes de condiciones geográficas y físicas. Se indican los problemas que se tengan por el clima, suelo, topografía, regimen de lluvias y otros.

4.2) Resultantes de problemas institucionales. Se señalan los problemas sociales e institucionales del área que puedan surgir como derecho de vía sobre terrenos vecinos, reglamentación para preservar el medio ambiente, etc.

5) Costos

Se hace una descripción y análisis general, para identificar los diferentes tipos de trabajos de construc ción por realizar y sus costos.

5.1) Costos unitarios de los elementos de obra. Se presenta un cuadro de costos con las unidades elementales de construcción y sus correspondientes holguras.

5.2) Costos totales de las obras. Se presenta el presupuesto de las obras.

Organización

La organización que se presenta deberá considerar las etapas de ejecución y operación del proyecto.

1) Organización para la ejecución

1.1) Entidad ejecutora. Se identifica la empresa responsable que ejecutará el proyecto.

1.2) Tipos de contratos de ejecución. Se formulan y justifican los tipos de contratos y las modalidades de licitación en cuanto a firmas particulares o consultores especializados.

1.3) Administración y control de ejecución. Se especifica la manera de cómo la empresa responsable administrará y controlará la ejecución.

2) Organización para la operación

2.1) Implantación progesiva de la organización. Se formula e indica la secuencia cómo se implantarán y ampliarán los órganos administrativos y técnicos de la empresa, según se vayan necesitando.

2.2) Planteamiento de la organización jurídico-administrativa. Se define la estructura jurídica de la empresa, las normas jurídicas que le corresponden, y el sistema de relaciones con el sector público.

2.3) Planteamiento de la organización técnica funcional. Se presenta la información necesaria para caracterizar las líneas de acción y de asesoramiento; las funciones y su organización como finanzas, producción, ingeniería, ventas, etc.

2.4) Planteamiento del sistema de control. Se especifican las características generales de los sistemas que se implantarán para controlar la calidad del producto las cantidades producidas, los tiempos y movimientos, los costos, las finanzas y la coordinación general.

2.5) Organigrama general. Se muestra el organigrama general de la empresa y los flujogramas necesarios para comprender su funcionamiento.

Calendario

El calendario que se presente se debe referir a la secuencia que va desde la aceptación o aprobación del anteproyecto hasta la operación normal de la unidad proyectada.

1) Conclusión del proyecto

Se debe estimar la duración y coordinar los plazos de las tareas que faltan para la conclusión del proyecto. La presentación se hará de acuerdo al esquema siguiente:

- Revisión del anteproyecto
- Contactos finales con proveedores
- Diseño definitivo y de detalles

2) Negociación del proyecto

Las tareas de negociación del proyecto, se pueden presentar de acuerdo a su naturaleza, importancia y a las circunstancias que concurran en cada caso. Es conveniente estimar los períodos de tiempo que pasarán hasta asegurar:

- La consecución del financiamiento del proyecto.
- La obtención de las autorizaciones legales pertinentes y de los incentivos necesarios

- La contratación de la firma que ejecutará el proyecto.

3) Ejecución del proyecto

Las tareas de ejecución del proyecto se -- muestran como sigue y deben ser compatibles con los plazos previstos para la realización de todas las etapas:

- Construcción de las obras físicas
- Adquisición de máquinas y equipos y/o su fabricación o entrega
- Montaje de maquinaria y equipos
- Contratación y capacitación del personal
- Organización e instalación de la empresa

4) Operación del proyecto

Las fechas de operación se clasifican en:

- Plazo para operación experimental y puesta en marcha
- Período para llegar a la operación nor-- mal prevista

C. Análisis de costos

El análisis de costos del estudio técnico comprende la determinación y distribución de los costos totales y unitarios de la inversión física y de la operación.

1) Costo total de la inversión física.

1.1) Costo total de la construcción de obras físicas. Se muestra la parte de la inversión referente a la adquisición de terrenos o derechos de ocupación y construcción de todas las obras de ingeniería civil que sirven de base material para el establecimiento del proyecto.

1.2) Costos de equipos y máquinas. Se presenta la parte de la inversión destinada a la adquisición, transporte y montaje de equipos, máquinas, aparatos e instrumentos, requeridos por el proyecto.

1.3) Existencias. Se hace el cálculo de los gastos de acumulación y mantenimiento de las existencias normales de materias primas, otros materiales, productos semiacabados y acabados, que son necesarios en el ciclo de producción de la empresa.

2) Costo total de la operación.

Para los tres niveles de producción estimados como máximo, mínimo y normal de la operación de la empresa, se calculan los elementos siguientes:

2.1) Costo de mano de obra. Se muestra el cálculo de los gastos de la mano de obra en la unidad de tiempo apropiado, dividiéndola en fija y variable y por categorías de capacitación.

2.2) Costo de materiales. Se indican los gastos en adquisición y manejo de materiales del proceso de producción, clasificándolos en materias primas y otros materiales.

2.3) Costos de los servicios. Se indican por separado los gastos de prestación de servicios de la producción, tales como energía eléctrica, asistencia técnica u otros.

2.4) Depreciación. Se muestra el cómputo y el método utilizado para determinar la depreciación de los activos fijos empleados en la producción.

3) Costos unitarios

Se presenta el cálculo de los costos unitarios para cada uno de los tres niveles de producción estimados (máximo, mínimo y normal), desglosados en los mismos conceptos en que se ha distribuido el costo total.

3.1) Costos unitarios básicos. Son los que resultan al dividir el costo total entre la cantidad de producción que se considera normal. Para este nivel de producción, se presenta la estructura del costo mostrando las proporciones de cada una de sus partes en la composición del costo unitario.

3.2) Costos unitarios alternativos. Para los tres niveles de producción, se presentan los costos de producción unitarios.

3.3) Clasificación de los rubros de costos en fijos y variables. Se examinan los costos de producción con respecto a la capacidad utilizada clasificándolos en fijos y variables.

4) Conclusiones:

- Capacidad instalada del proyecto
- Insumos críticos
- Tecnología adoptada
- Localización del proyecto
- Obras físicas principales
- Características principales de la empresa
- Fechas principales de la realización del proyecto
- Costos de producción y proceso en funcionamiento normal.

4. Estudio financiero

El estudio financiero consiste en demostrar que el proyecto puede realizarse con los recursos financieros disponibles, después de evaluar la posibilidad de comprometer esos recursos financieros en otros proyectos.

El estudio financiero comprende la inversión, la proyección de los ingresos y de los gastos y las formas de financiamiento que se preven para todo el período de su ejecución y de su operación.

La presentación del estudio financiero se debe organizar según el esquema siguiente, que concluye con la evaluación financiera del proyecto:

1) Recursos financieros para la inversión

1.1) Necesidades totales de capital. Se presenta el cómputo de todos los costos correspondientes a la inversión fija y al capital de giro necesario para la instalación y operación del proyecto, separando los gastos en moneda nacional de los gastos en divisas.

1.1.1) Para cubrir la inversión fija

a) Especificación y clasificación de los rubros

Los elementos que se requieren para la implantación del proyecto (capital fijo) se especifican y clasifican a continuación; gastos de estudios, investigaciones preliminares, adquisición de derechos de patentes y conocimientos técnicos, organización de la empresa, pago de permisos y licencias; compra de terrenos y recursos naturales; gastos de construcción de obras físicas; compra de maquinaria y equipo incluyendo gastos de transporte y montaje; costo de la puesta en marcha del proyecto; pago de intereses durante la etapa de construcción; imprevistos.

b) Estimación en términos físicos y valoración.

Para estimar el valor de los elementos componentes de capital fijo, se usan los datos suministrados por el estudio técnico. Además se calculan en valores monetarios a precios de mercado los gastos requeridos para obtener e implantar los elementos de la inversión fija. Si ésta tiene componente importado, se presenta por separado los valores en divisas y los correspondientes en moneda nacional.

1.1.2) Para cubrir las necesidades de capital de giro que también se conoce con el nombre de capital circulante o capital de trabajo, que necesitan las empresas, para atender las operaciones de producción y distribución de bienes y servicios. Se justifican las necesidades de mantenimiento de existencias que determinan el capital de trabajo en función de la duración y rotación del proceso, naturaleza de las materias primas, distancias, seguridad y continuidad de los transportes, localización de la unidad productiva, políticas de comercialización, etc. Se indican los datos básicos del estudio técnico que se utilizan y se estima el margen de liquidez que se preve en los períodos más críticos.

1.1.3) Calendario de las inversiones. Se prepara un calendario de inversiones, tanto en moneda nacional como en divisas, en base al estudio técnico en el que se demuestra la compatibilidad de las condiciones del financiamiento y el plan de ejecución. Además debe contener todos los pasos y etapas de realización posteriores a la negociación o aprobación del proyecto.

a) Distribución por etapas

Se formula un cronograma de los gastos correspondientes a cada rubro presentado en el inventario, de la manera siguiente: etapa de anteproyecto, etapa de proyecto completo, fase de negociación, fase de construcción y montaje, y fase de operación.

b) Confrontación con el plantamiento técnico

Se demuestra la compatibilidad de los plazos técnicos de ejecución de la construcción y montaje del proyecto con la distribución temporal de las inversiones.

c) Compatibilidad con el plan de ejecución

Se demuestra la compatibilidad del calendario de inversiones con el plan de ejecución.

1.2) Capital disponible. Se elabora y presenta una relación de los aportes de capital propio que harán los realizadores del proyecto de acuerdo a la división siguiente:

1.2.1) Capital realizado a corto plazo. Se indican los aportes que se realizarán durante la fase de ejecución del proyecto.

1.2.2) Capital realizado a mediano y largo plazo. Se indican los aportes no incluidos en el rubro anterior y en caso de proyectos del sector público, se hace la distinción entre aportes de recursos presupuestarios, y aportes de fondos especiales.

1.2.3) Aportes en bienes de capital e intangibles. Si una parte de las inversiones de los realizadores del proyecto se hace en forma de equipos, maquinarias, terrenos u otros recursos no financieros, se elabora y presenta una relación de la forma siguiente:

a) Bienes de capital

Terrenos, edificios, equipos, máquinas u otros.

b) Valores intangibles

Derechos, patentes, capacitación técnica u otros.

1.3) Capacidad de inversión de la empresa. Se demuestra si la capacidad financiera de los realizadores del proyecto es suficiente para integrar el capital necesario, en base a los datos de los estudios anteriores en especial del calendario de inversiones, considerando además los aportes complementarios previstos de créditos externos a la empresa y una previsión de ingresos compatibles con las indicaciones de los estudios de mercado y técnico.

2) Análisis y proyecciones financieras

En este punto se trata de proyectar y comparar los ingresos totales con los gastos de ejecución y de operación del proyecto, para mostrar el movimiento de caja que resultará de las operaciones financieras.

2.1) Proyección de los gastos. A partir de la fase de ejecución del proyecto, se presentan los gastos previstos en base al calendario de las inversiones y las previsiones para los sucesivos períodos de la vida útil, de los cuales los gastos de operación y otros se comportan aproximadamente constantes. Estos gastos se clasifican en:

2.1.1) Gastos de inversión. Se presentan los gastos anuales de la inversión, construcción y montaje previstos en el calendario de inversiones para cada uno de sus distintos rubros, situándolos en sus años respectivos.

2.1.2) Gastos de operación. En base a los datos del estudio de mercado que permiten estimar la utilización de la capacidad instalada en los años sucesivos, y las estimaciones respectivas de costos contenidas en el estudio técnico, se hace la previsión de los gastos de operación para cada año de la proyección financiera.

2.2) Proyección de los ingresos. En base a las fases sucesivas de ejecución y operación del proyecto, se calcula y presenta la estimación de los ingresos de la empresa, los cuales se desglosan en:

2.2.1) Ingresos de capital. Para la primera fase, se indican las entradas de capital propio y las de otras fuentes de ingresos, y se calculan y presentan las sumas anuales correspondientes.

2.2.2) Ingresos de operación y otros. Para la fase de operación, se presentan las estimaciones anuales de los ingresos de ventas y las de otro tipo de entrada.

2.2.3) Ingresos totales anuales. Se calcula y presenta la suma anual de estos ingresos.

2.3) Financiamiento adicional. Se presenta el resultado de la diferencia entre los ingresos y gastos previstos para cada año de la proyección y se computan las necesidades de financiamiento adicional si procede, para la inversión fija y la operación del proyecto.

2.4) Punto de nivelación o equilibrio. Se determina y presenta el cálculo del volumen de producción cuando se igualan los ingresos y los gastos de la empresa. Para eso, se clasifican los gastos en fijos y variables, con los cuales se determina la proporción en que entran en la composición del costo total de producción, estableciendo la ley de su variació con la cantidad producida. Después se comparan los costos y los ingresos en función del volumen de producción y se determina el valor de éste en el punto donde se igualan, que es conocido como punto de nivelación o equilibrio. (ver anexo 1)

3) Programa de financiamiento

Con los datos del análisis y proyecciones financieras, se formula el programa de financiamiento, que considera las fuentes externas e internas de recursos financieros que se tienen para el proyecto. Se indican y presentan por separado los aportes de recursos que se esperan obtener del capital propio, de otras formas de participación en la inversión y de créditos o aportes de entidades externas a la empresa.

3.1) Estructura y fuentes de financiamiento. Se determina el origen, la cronología y las formas de participación previstas en el financiamiento total del proyecto, en los puntos siguientes:

3.1.1) Orígenes del financiamiento. Se indican las fuentes de financiamiento para el capital fijo y el capital de trabajo, clasificándolas en: capital propio o créditos de otras entidades (públicas o privadas) de aportes retornables o no retornables.

3.1.2) Distribución en el tiempo. Se indican las fechas de las etapas del financiamiento.

3.1.3) Formación del capital propio. La participación del capital propio se caracteriza indicando: la fecha de disponibilidad, el monto respectivo; derechos y obligaciones financieras.

3.1.4) Modalidades del crédito. Para cada línea de crédito, se especifican las siguientes formas crediti cias: entidad, monto; tasa de interés; períodos de amortización fecha de contratación; condiciones de amortización; garantías oficiales y condiciones especiales.

3.2) Cuadro de fuentes y usos de fondos. Por medio de un resumen, se destacan y clasifican en categorías adecuadas las fuentes y usos de fondos, de todos los recursos financieros correspondientes a las etapas de ejecución y operación del proyecto. También se indican las disponibilidades anuales, especificando las asignaciones que se pueden hacer a servicios de préstamos, pago de dividendos y constitución de reservas que dependen de la política financiera de la empresa responsable del proyecto. Para preparar el resumen, se define por línea, uno de los distintos conceptos de las fuentes y usos de los fondos, ubicando en columnas sucesivas los valores relativos a cada período financiero. (ver anexo 2)

3.2.1) Origen y cronología de recaudación de los fondos. Se señala el origen y las fechas en que podrá disponerse de los recursos, separando su valor en: capital propio o fondos úblicos; préstamos e ingresos de operación.

3.2.2) Aplicación de los fondos y su cronología. Se presenta la asignación de los fondos, clasificándolos en: inversión; costo de producción; impuestos; servicio de deuda; constitución de reservas; pago de dividendos y otros. También se indican sus fechas y valores, ubicándolos en columnas adecuadas.

3.2.3) Cronología de las disponibilidades.

Las fechas y valores de las disponibilidades que resultan de la recaudación y la aplicación de los fondos, se indican anotándolas en sus columnas correspondientes.

3.2.4) Políticas financieras alternativas.

Se analiza el movimiento de caja mostrado en el cuadro de fuentes y usos de fondos, y se determinan las alternativas posibles en cuanto a utilización de las disponibilidades en: servicios de préstamos, constitución de reservas, pago de dividendos, y otras asignaciones.

4) Evaluación financiera

El análisis del cuadro de fuentes y usos de fondos, permite calcular los coeficientes e indicadores característicos de los resultados financieros del proyecto. Para hacer el cálculo de los indicadores más importantes, el dato fundamental es la sucesión de valores anuales de ingresos y gastos totales, cuyas diferencias constituyen el ingreso neto anual del proyecto. En base a este dato, se calcula la tasa interna de retorno del proyecto o impuesta una tasa de actualización adecuada, se calcula el valor neto actualizado de sus ingresos. Con cualquiera de estos dos indicadores, se tiene un dato sintético, de toda la vida financiera del proyecto, que toma en cuenta la cronología del movimiento de caja y considera una escala de preferencia con relación al tiempo.

4.1) Tasa interna de retorno. Se calcula y presenta el valor de la tasa de actualización que iguala los valores actualizados de los ingresos y de los costos. (ver anexo 3).

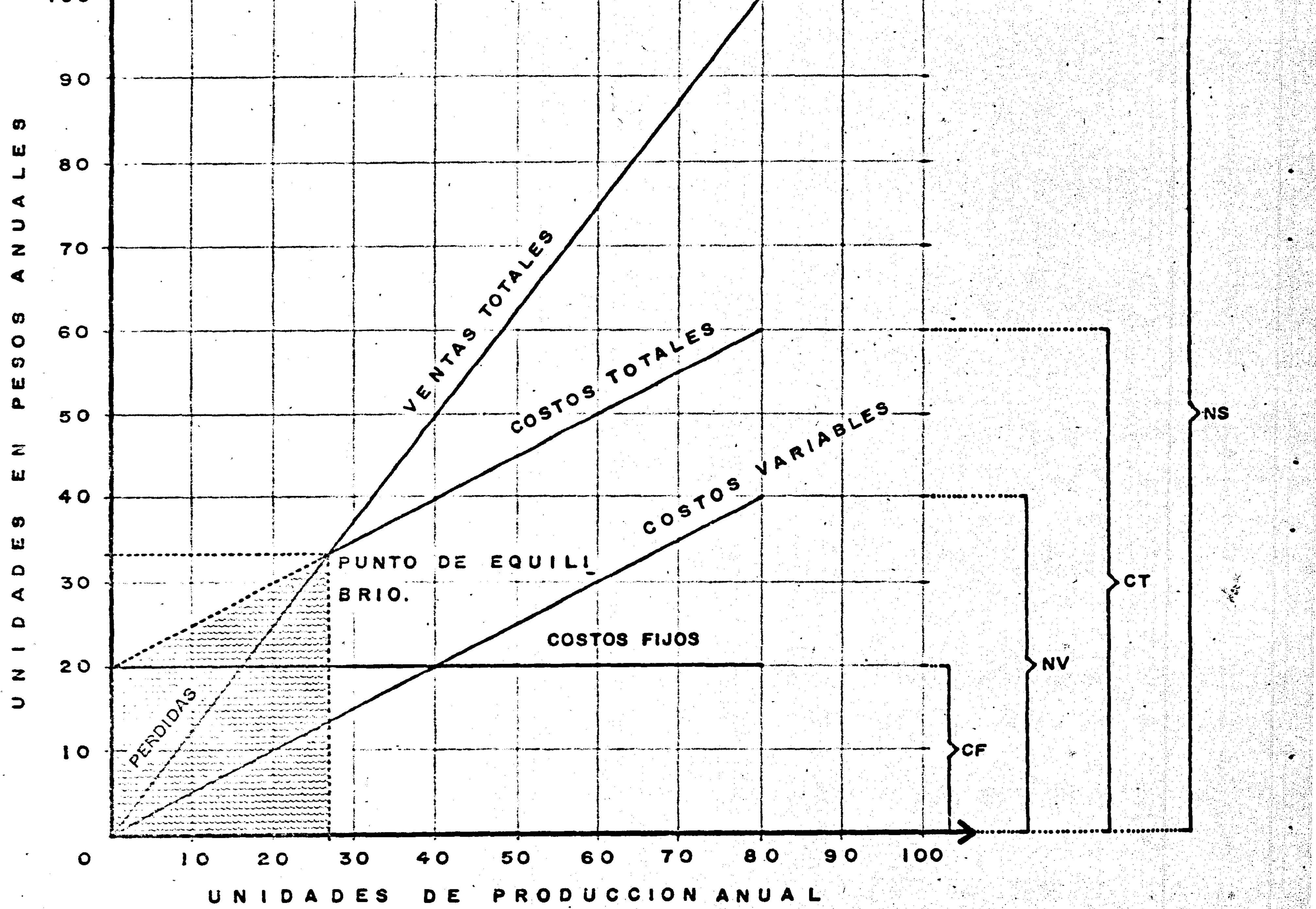
4.2) Valor neto actualizado de los ingresos. -- Después de que se elige y justifica la tasa de actualización, se aplica a la corriente temporal de ingresos y gastos para obtener el cálculo del valor actual a la fecha inicial del proyecto de los ingresos netos de toda la vida útil. (ver anexo 3)

4.3) Indicadores financieros básicos. Dependiendo de la naturaleza del proyecto, se presenta una o más de las relación siguientes:

a) Utilidades por unidad de capital
b) Rentabilidad del capital propio
c) Cociente de ventas a costos
d) Período de recuperación de la inversión

4.4) Conclusiones del estudio financiero. Se -- presenta una síntesis del estudio en donde se demuestra sí la empresa o entidad está en condiciones financieras de realizar el proyecto.

a) Necesidades totales de capital
b) Ingresos y gastos en funcionamiento normal,
c) Punto de nivelación
d) Capital propio y créditos



MODELO SIMPLIFICADO DE PUNTO DE NIVELACION.

ANEXO 1.

Modelo de punto de nivelación (simplificado)

Hipótesis:

Sea	V	Costo unitario de producción
	Cf	Costo fijo por año
	Ct	Costo total por año
	N	Producción en unidades

$$Ct = NV + Cf$$

1.- V es constante, en donde NV es linealmente dependiente de la producción

2.- Los costos fijos Cf son independientes de la producción

3.- No hay costos de financiamiento

4.- No hay ingresos extras, solo producto de la operación

5.- Todas las unidades son vendidas al mismo precio

6.- Todas las unidades producidas son vendidas

Sea S Las ventas por unidad

Zg La utilidad bruta

$$Zg = NS - Ct = NS - (NV + Cf) \quad --- \quad (1)$$

Sea Zt Utilidad neta después de impuestos, t tasa de impuesto.

$$Zt = Zg\ (1 - t)$$

El punto de equilibrio es aquel volumen de producción para el cual se cumple que $Zg = 0$.

$$0 = NS - NV - Cf = N\ (S - V) - Cf$$

$$N\ (\text{punto de equilibrio}) = \frac{Cf}{S - V}$$

ANEXO 2.

Cuadro de fuentes y usos de fondos

	Instalación	Funcionamiento Progresivo	Funcionamiento Normal
Años	1 2 3 4 5	6 7 8 9 10	11 12 13 14 15
I. Fuentes			
1. Capital propio			
2. Préstamos a largo y mediano plazo			
3. Préstamos a corto plazo			
a) bancos			
b) Proveedores			
4. Ventas			
5. Saldo del año anterior			
A Total de fuentes			
II. Usos			
6. Inversión fija			
7. Activo en cuenta corriente			
i) Aumento de inventario			
ii) Aumento de cuentas por cobrar			
8. Costos de producción (excluidos depreciación e intereses por préstamos a largo plazo e incluidos impuestos territorial e [illegible] a corto plazo)			

ANEXO 2.

Cuadro de fuentes y usos de fondos

	Instalación					Funcionamiento Progresivo					Funcionamiento Normal				
Años	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
9. Pago crédito a corto plazo															
10. Impuesto a la renta															
B Total de usos															
11. Disponibilidad para pago de dividendos, servicios de créditos y formación de reservas (A-B)															
a) Pago de dividendos															
b) Servicio de créditos a largo y mediano plazo															
c) Saldo para el año siguiente															
i) Depreciación y otras reservas															
ii) Disponibilidad neta															

ANEXO 3.

1.- Tasa interna de retorno

Es aquella tasa que, aplicada a la actualización de la inversión y de los ingresos netos de cada período de la vida útil del proyecto, iguala a las sumas de los valores actualizados

$$\sum_{t=o}^{t=n} (It - Gt)\ (1 + r)^{-t} - \sum_{t=o}^{t=n} Kt\ (1 + r)^{-t} = 0$$

donde:

It = Ingresos en el período t

Gt = Gastos en el período t

Kt = Monto de la inversión en el período t

n = Vida útil del proyecto

r = Tasa interna de retorno

2.- Valor neto actualizado de los ingresos

El valor neto actualizado es la diferencia positiva o negativa entre los ingresos y los gastos actualizados.

$$V.A.N. = \sum_{t=o}^{t=n} (It - Gt)\ (1 + i)^{-t} - \sum_{t=o}^{t=n} Kt\ (1 + i)^{-t}$$

3.- Período de recuperación

Se define como el tiempo en que la suma de los ingresos netos, sin actualizar, cubren el monto de la inversión.

$$\sum_{t=1}^{s} (It - Gt) = K$$

s es el número de períodos necesarios para alcanzar la igualdad con K

5. Evaluación económica

La evaluación económica consiste en determinar si el aporte del proyecto a los objetivos del desarrollo económico y social justifica su realización, considerando los usos alternativos que pueden tener los mismos recursos.

Para desarrollar la evaluación económica, se deben tomar en cuenta las orientaciones siguientes: en base a los estudios parciales de mercado, técnico y financiero se determinarán los razonamientos y coeficientes utilizables para evaluar el proyecto; el tratamiento dado a la evaluación debe ajustarse al carácter (proyecto económico o social), a la categoría (proyecto de producción, de infraestructura o de servicios) y a la importancia del proyecto. Como una apreciación formal y final del proyecto debe presentarse la evaluación económica, indicando su relación con las conclusiones a que se haya llegado en los estudios de mercado, técnico y financiero.

La presentación de la evaluación económica, se hace según las instrucciones dadas a continuación.

1) El sistema económico como marco actual del proyecto

Con el fin de formar una idea de las dimensiones de la economía, del sector y del área en que el proyecto se -

inserta y de su evolución previsible, se caracteriza el sistema en términos macroeconómicos generales a través de un reducido conjunto de indicadores.

1.1) Indicadores básicos generales: de la economía como un todo; del sector del proyecto;y del área económica de interés para el proyecto.

Estos indicadores son del tipo, nivel del producto interno; ingreso por habitante; monto de exportaciones e importaciones; coeficiente de inversión; y otros índices macroeconómicos.

1.2) Naturaleza y ritmo de desarrollo de la economía

Para caracterizar el dinamismo de la economía del país o región, se requiere presentar un conjunto de datos que se refieran a su evolución pasada, a los cambios en marcha, a los aspectos sociales y a las relaciones con el exterior, este conjunto se organiza de la manera como se sugiere a continuación:

1.2.1) Evolución histórica

Población: contingente actual y tasa de crecimiento total, urbana y rural.

Ocupación: datos sobre la tasa de --

crecimiento del empleo en la economía, así como en el sector y los referentes a la desocupación.

Producción: monto actual y tasa de crecimiento total y sectorial (agropecuaria, industrial y de servicios e infraestructura).

Productividad: evolución de la productividad por persona y estimación actual, para la total y sectorial.

Exportación: tasa de crecimiento, destacando la participación de los bienes manufacturados.

Importación: evolución, especificando los rubros más importantes.

1.2.2) Cambios estructurales

En la estructura sectorial: Por sector indicar la evolución de la distribución porcentual de ocupación, producto interno y productividad.

En la participación del sector público: evolución de la participación del sector público en la actividad económica.

En el coeficiente inversión-producto: series estadísticas de valores de esta relación, calculadas para la economía en su conjunto y si es posible para los sectores.

En la distribución de la inversión: datos sobre la estructura de la inversión por tipo de bienes de capital (construcciones, maquinaria y equipos), entre los sectores públicos y privados.

En las estructuras de la exportación y de la importación, sus destinos y orígenes: datos sobre la evolución del comercio exterior pertenecientes a un período que se considere como condicionante de las tendencias actuales.

1.2.3) Aspectos sociales

Población: datos de la población actual y su evolución, por sexo y por grupos de edad y otros datos de caracter demográfico, según sea de interés para la evaluación del proyecto.

Niveles de consumo: estimaciones realizadas en el ámbito de la contabilidad social del país.

Niveles de nutrición: datos actuales sobre consumo de alimentos en términos de calorías, proteínas animales, hidratos de carbono y otros indicadores usuales.

Estado de salud: datos actuales sobre morbilidad, mortalidad, atención médica y hospitalaria, así como otros indicadores usuales.

Educación: datos actuales sobre la enseñanza (a nivel primario, secundario y superior) técnica, científica y humanística.

Niveles de vivienda: datos actuales sobre el valor de la vivienda, superficie por habitantes, existencia de servicios básicos y otros indicadores usuales.

1.2.4) Relaciones con el exterior

Intercambio y saldos del comercio exterior: series estadísticas de estos indicadores y tasas anuales de evolución.

Variación de las relaciones de intercambio: datos sobre la evolución de los bienes exportados e importados.

Poder de compra de las exportaciones: datos de los productos exportados referentes a volúmenes y precios en el mercado internacional.

Desequilibrio y financiamiento externo: datos de la evolución de la capacidad de financiamiento interno de las inversiones y gastos corrientes, así como los correspondientes a la financiación externa.

Servicios de amortización e interés del capital extranjero: series estadísticas del monto de estos servicios y tasas de crecimiento anual.

Acumulación de la inversión directa extranjera y su incidencia en la formación de capital: series estadísticas de estos datos y análisis global de su distribución por sectores.

2) Factores condicionantes del sistema sobre el cálculo económico del proyecto.

Para describir este punto se necesita presentar un análisis microeconómico del proyecto para empresas nuevas y en el caso de empresas existentes que desean ampliar sus actividades, este mismo análisis se aplicará y se complementará con la prueba del efecto del proyecto sobre los parámetros económicos de la empresa.

Los elementos integrantes del análisis microeconómico corresponden:

2.1) Cálculo económico del proyecto

Inversiones y su costo: determinación y análisis del costo de capital como parte del costo de producción; fijación del costo total de la inversión utilizando precios corregidos; estimación de los costos indirectos de la inversión que se suman a los correspondientes del estudio financiero.

Costos e ingresos de operación: su determinación, ubicación en el tiempo y análisis, basados en las concl siones de los estudios de mercado, técnico y financiero; revisarlos utilizando precios corregidos; exponer los costos e ingresos generados indirectamente por el proyecto y sumarlos a los resultantes del estudio financiero.

Rentabilidad del proyecto (con ingresos y gastos actualizados)

Cálculo del valor neto actualizado: utilización de las corrientes temporales de ingresos y costos (considerando dentro de los costos el monto de inversiones) y su actualización para determinar este parámetro del proyecto; identificar los precios utilizados y justificarlos.

Tasa interna de retorno: utilización de los ingresos y de los costos para calcular la tasa de actualización que hace nulo el valor neto actualizado.

Relación beneficio-costo: cálculo basado en la determinación, ubicación en el tiempo y cuantificación de los beneficios y costos directos e indirectos del proyecto, en su actualización a la tasa de descuento definida por el sistema económico; cómputo del coeficiente que define la relación beneficio-costo.

Análisis de sensibilidad económica: presentación de datos que definan los límites para las hipótesis y los supuestos básicos dentro de los cuales, los parámetros eco nómicos del proyecto proporcionan resultados satisfactorios.

2.2) El proyecto en el cálculo económico de la empresa.

Existen dos maneras de cómo se puede concebir un proyecto: en la primera se considera como una proposición para realizar una inversión totalmente nueva, que trae como consecuencia la formación de una nueva empresa u organización; la segunda se trata de la inversión para ampliación de las empresas preexistentes. En esta última manera, la evaluación del proyecto deberá hacerse teniendo en cuenta no sólo el cálculo económico de los resultados previstos del proyecto, sino analizando la futura trayectoria que tendría la organización o empresa con y sin la nueva inversión y el nuevo programa de producción que el proyecto propone. Se compararán los indicadores económicos de la actividad empresarial con y sin el proyecto; se determina el aporte y los costos adicionales que implica el proyecto, así como su rentabilidad, en el orden siguiente:

. El aporte del proyecto a la empresa: ingreso generado por la nueva actividad.

El costo del proyecto como costo adicional de la empresa: costos directos y prorrateo de costos indirectos con las actividades existentes.

La rentabilidad marginal del proyecto: relació entre aporte y costos adicionales; comparación con la rentabi_ lidad actual de la empresa.

2.3) Calificación y cuantificación de los factores condicionantes

En esta parte se identifican y analizan los - factores que limitan o promueven las actividades proyectadas_ o modifican las variables en que se basa la evaluación económica.

Se estima el efecto de cada uno de los factores condicionantes siguientes sobre el tamaño y localización_ del proyecto, la utilización de su capacidad instalada, sus - costos de producción, utilidades, rentabilidad, etc.:

Resultantes de las características del mercado.

Resultantes de la disponibilidad limitada de_ recursos financieros.

Resultantes de la disponibilidad limitada de_ divisas.

Resultantes de la disponibilidad limitada de_ insumos físicos: transporte, energía, materias primas y otros materiales.

Resultantes de limitaciones técnicas: de mano de obra especializada, tecnológicas y otras.

Resultantes de limitaciones derivadas de la -

planificación: restricciones al uso de factores, objetivos conflictivos con los del proyecto, etc.

Resultantes de limitaciones institucionales: de legislación, de política económica, problemas culturales, institucionales, etc.

2.4) Factores condicionantes no removibles

Se señalan cuáles de los factores identificados son irremovibles y se consideran como datos de los problemas que deben resolverse.

2.5) Proposiciones de política económica para ajustar al proyecto determinados factores condicionantes.

Definir las proposiciones que modifican los factores condicionantes perjudiciales al proyecto, para hacerlo viable o más rentable. Las proposiciones hechas deben justificarse, demostrando el interés colectivo implícito en el proyecto o en el mejoramiento de su viabilidad o rentabilidad.

3) Evaluación de los efectos del proyecto sobre variables del sistema económico.

En esta parte de la evaluación, se trata de presen tar los efectos del proyecto sobre el sistema, distinguiendo las fases sucesivas de implantación y operación. Los efectos que son de interés determinar en esta parte de la evaluación son sobre todo los que tienen que ver con los objetivos del desarrollo económico y social, tal como se definen en los planes y políticas vigentes.

3.1) Efectos del proyecto como inversión

Sobre la capacidad de producción del sistema.

En el estudio técnico se define la capacidad instalada del proyecto que es comparada con la de la respectiva rama de producción de bienes y servicios.

Sobre el balance de pagos. Se indican los gastos y las entradas generadas por el proyecto en términos de divisas, utilizando coeficientes que indiquen la importancia relativa de ese efecto en función del balance del comercio exterior del país.

Sobre el empleo de mano de obra. En base a los datos del estudio técnico, se calcula la cantidad demandada de recursos humanos en los trabajos de construcción y montaje del proyecto. Este valor se compara con los índices de ocupación en los sectores de la construcción y de la producción de bienes de capital para determinar en qué medida contribuye el proyecto a la solución de problemas de empleo en esos secto res.

Sobre la utilización de otros factores de producción. De los insumos principales de la inversión se identifican los usos alternativos más importantes para justificar su utilización en el proyecto.

Sobre el mercado de capitales y el mecanismo financiero. La relación que existe entre el monto de los aportes de capital requeridos y los volúmenes de transacciones normales del mercado de capital, se debe analizar con respecto a los distintos rubros del financiamiento de la inversión fija. Se especifica el mecanismo de captación de recursos externos que se utilizará para complementar el financiamiento del proyecto.

Sobre la estructura de la inversión. Se indica la medida en que la inversión afecta la distribución porcentual de las inversiones en el sector y en la economía y hasta qué punto las modificaciones implican un cambio favorable de estructura.

Sobre las economías externas de otras empresas. Las economías externas que genera la inversión para empresas existentes o potenciales, se analizan y cuantifican.

Sobre el nivel tecnológico, se indica la influencia de la tecnología del proyecto sobre el nivel tecnológico del medio.

Sobre el desarrollo regional y el ambiente humano. Se identifica el efecto del proyecto sobre los planes y políticas de desarrollo regional y sobre las disposiciones de protección al ambiente. Se evalúa en términos económicos la parte de la inversión destinada a conservar o mejorar el ambiente.

3.2) Efectos del proyecto como programa de producción.

Efecto sobre el ingreso. Se calcula y analiza el valor agregado que el proyecto generará durante su vida útil y se examina su aporte a la distribución del ingreso sectorial y nacional. Se estima igualmente los valores agregados que se generarán adicionalmente en las actividades inducidas por el proyecto a través de su demanda de insumos y oferta de productos.

Efecto sobre el balance de pagos. Se presenta el valor de las divisas requeridas, ganadas o ahorradas en el proceso de producción y se señala la importancia relativa de este efecto sobre el balance de pagos del país. Se incluye por separado, los pagos por servicios de conocimientos técnicos, patentes, regalías, etc.

Efecto sobre el empleo de mano de obra. En base a los datos del estudio técnico, se calcula la mano de obra requerida para la producción, clasificándola según su grado de capacitación. Se compara la relación de mano de obra a capital en el proyecto con los promedios sectorial, regional y nacional determinando la contribución del programa de producción del proyecto a la solución de los problemas de empleo existente.

Efectos sobre la utilización de otros factores productivos. De los insumos principales del proceso de producción, se identifican los usos alternativos más importantes para justificar su utilización en el proyecto.

Efecto sobre los mecanismos de financiamiento a corto plazo. Se analizan los mecanismos existentes de financiamiento a corto plazo y se determina si el proyecto se ajusta a ellos o se requiere de nuevas modalidades crediticias cuya creación representa ventajas para la economía o el sector.

Efecto sobre la estructura del consumo. Se presentan las estimaciones realizadas sobre el efecto que la producción del proyecto tendrá sobre la estructura de consumo futura a través de coeficientes que señalen los cambios esperados en el compartimiento del consumidor, sea por aumento del ingreso o por el incremento directo de la oferta de bienes finales.

Efectos sobre las economías externas de otras empresas. Las economías externas que eventualmente genera el programa de producción, se examinan y cuantifican.

Efectos sobre el nivel tecnológico. Se señala cuáles son las mejoras en el nivel tecnológico del medio que el proyecto introducirá a través de su proceso de producción, analizando por separado la capacitación de personal, la utilización de maquinaria, equipos y aparatos modernos, y la difusión de su producto.

3.3) Enfoque integrado de los efectos del proyecto como inversión y como programa de producción.

Consolidación de los efectos en cuanto a su alcance:

- Directos
- Indirectos
- Secundarios

Consolidación de los efectos en cuanto a su naturaleza: se integran las estimaciones de los efectos realizados en los puntos 3.1) y 3.2) en una visión conjunta en que se suman algebraicamente o se hagan compatibles en cuanto a los dos enfoques: inversión y programa de producción.

4) Conclusiones de la evaluación económica

4.1) Principales relaciones del proyecto con la economía: describir los efectos principales que se esperan del proyecto sobre la naturaleza y el ritmo del desarrollo nacional, regional, etc., expresados en relación con los objetivos de la política de desarrollo social y económico y con las metas cuantificadas de los planes y programas vigentes.

4.2) Criterios adoptados: presentar los criterios de evaluación con que se justifica económicamente el proyecto y que permite asignarle prioridad en el uso de los recursos disponibles.

4.3) Principales indicadores y coeficientes utilizados: presentar las estimaciones de los indicadores y coeficientes que resultan de los estudios parciales del proyecto y que sirven para aplicarlos a los criterios de evaluación utilizados.

4.4) Síntesis de las conclusiones de la evaluación: presentar las conclusiones que justifican desde el punto de vista económico y social la realización del proyecto.

6. Plan de ejecución

La fase de ejecución del proyecto comprende desde la terminación del diseño de ingeniería hasta la puesta en marcha, en ella se realiza la mayor parte de la inversión y de las operaciones de financiamiento, por lo que debe contener una relación de las actividades que se llevarán a cabo, examinar los tiempos de su realización, sus requisitos materiales, humanos y financieros, y plantear las alternativas de ejecución. Los datos que sirven de base al plan de ejecución, se obtienen de los estudios de proceso y obra física.

1) Inventario y especificación de las actividades

Se definen y presentan sistemáticamente todas las tareas o actividades de ejecución del proyecto, formando grupos según su naturaleza y su función.

1.1) Adquisiciones a terceros. Conforme sean necesarios, se especifican las adquisiciones para la construcción, montaje y operación del proyecto que son de bienes, como compra de terrenos, edificios, máquinas, equipos, aparatos y otros; de derechos, en la obtención de los permisos, patentes, contratos de financiamiento y otros; de servicios, con su clasificación en institucionales y personales o profesionales.

1.2) Aprovechamiento. Se relacionan las tareas de este tipo, que suelen ser de transporte interno y externo, que consiste en cuantificar los volúmenes y distancias que caracterizan esta tarea; de almacenamiento, distribución interna y vigilancia, que implica cuantificar las necesidades de espacio de los canales de distribución y los requisitos del sistema de seguridad; y finalmente, movilización y entrenamiento de mano de obra, que requiere cuantificar los contingentes de personal que se emplearán por categorías, y programación de su capacitación.

1.3) Construcción y montaje. Se requiere presentar una relación de las tareas de construcción y montaje del plan de ejecución, que esté clasificada en edificios y servicios complementarios, que comprende la estimación de los volúmenes y tipos de construcción contenidos en la descripción de las obras físicas; finalmente, máquinas, equipos y aparatos, que se requieren según las tareas de montaje, cuyos datos se obtienen del estudio del proceso y de las normas de los proveedores.

1.4) Puesta en marcha. Especificar las condiciones de funcionamiento del proyecto que abarca el período determinado por la conclusión del montaje de sus partes componentes y el funcionamiento normal y completo, apoyándose en verificación y ajuste, que consiste en hacer una relación de las tareas de comprobación del funcionamiento y rendimiento de las máquinas, equipos y aparatos; utilización experimental, que se refiere a la programación del funcionamiento parcial, con caracter experimental, de las unidades de producción; y por último, la inspección y aprobación, que se refiere a la verificación final de las condiciones de funcionamiento de todos los procesos unitarios que integran la operación del proyecto.

2) Estudio de tiempo.

Se presenta a través de un esquema coordinado el encadenamiento (expresado en red o grafo) de las distintas secuencias de tareas que deben realizarse para completar la ejecución del proyecto. La descripción y análisis de esta coordinación de tareas se hace por el método del camino crítico, en una de sus variantes (CPM, PERT) que sea más apropiada al tipo de proyecto y al respectivo plan de ejecución.

2.1) Estimación de la duración probable de cada actividad. Al plan de ejecución, se anexa una relación general de las tareas que lo componen, y estime sus duraciones más probables o esperadas.

2.2) Análisis de las secuencias de actividades. En base a la relación indicada en 2.1), indique las dependencias inmediatas entre la iniciación de cada tarea y la terminación de otras.

2.3) Presentación de la red de actividades. Se -- presenta por medio de gráfica la red de actividades derivada de las condiciones definidas en la relación a que se refieren 2.1) y 2.2).

2.4) Cálculo de la fecha y otras magnitudes. Presentar en un cuadro el resultado del cálculo de las fechas características (más temprana posible y más tardía posible) para iniciación y terminación de cada tarea, las holguras de -- los eventos y las márgenes o excesos de tiempo de las actividades no críticas.

2.5) Identificación de los caminos críticos y confección del calendario. Identificar los caminos críticos entre las secuencias de actividades y presentar las fechas ca-- racterísticas del plan de ejecución ordenadas en forma de calendario.

3) Esquema indicativo de los requisitos necesarios de cada actividad

Se presenta una estimación cuantitativa de los requisitos principales de cada tarea o actividad, con el fin de poder plantear alternativas del plan de ejecución orientadas a optimizar la utilización de los recursos respectivos en el proyecto.

3.1) Materiales. Se seleccionan los rubros principales para el volúmen empleado y por su valor económico, y se estiman las cantidades necesarias para cada tarea.

3.2) Mano de obra. Tomando en cuenta unidades de medida y una clasificación por categorías adecuadas, se indican las necesidades de mano de obra de cada actividad.

3.3) Servicios de terceros. Se cuantifican en valor, por categorías, refiriendo solamente los significativos en el costo total del proyecto.

3.4) Financiamiento. De acuerdo con los costos unitarios y los volúmenes físicos de las tareas, se cuantifican los gastos requeridos para realizar cada una de ellas.

4) Planteamiento de alternativas tecnológicas de ejecución: variación en la duración del proyecto

Se presentan los esquemas de planes alternativos de ejecución del proyecto que impliquen cambios en su duración total. Estas alternativas resultan de aprovechar los márgenes de tiempos de las actividades no críticas y de transferir a las tareas críticas recursos técnicos asignados a estas actividades en el plan de ejecución trazado, u otros recursos, con el fin de acortar su duración. En estos casos hay que presentar el efecto de estos cambios sobre los costos directos e indirectos de la ejecución del proyecto y su repercusión final - sobre el costo total.

B I B L I O G R A F I A

1. Guía para la presentación de proyectos, Ilpes, Siglo veintiuno editores, S.A., México 20, D.F. Tercera edición 1975.

2. Naciones Unidas. Manual de proyectos de desarrollo económico, México 1958

3. Marrama Vittorio. Problemas y técnicas de programación económica, Ediciones Aguilar 1970

Notas de la primera parte

1. Marrama Vittorio. Problemas y técnicas de programación económica. P.8.
2. Op. cit. p.108
3. Op. cit. p.9
4. Guía para la presentación de proyectos, Ilpes. p.12
5. Op. cit. p.15
6. Idem. p.84
   Manual de proyectos de desarrollo económico. p.18
7. Guía para la presentación de proyectos, Ilpes. p.92
8. Manual de proyectos de desarrollo económico. p.64
   Guía para la presentación de proyectos, Ilpes. p.100
9. Op. cit. p.121
10. Manual de proyectos de desarrollo económico. p.124
    Guía para la presentación de proyectos, Ilpes. p.129
11. Guía para la presentación de proyectos, Ilpes. p.137
12. Op. cit. p.158
    Manual de proyectos de desarrollo económico. p. 209
13. Guía para la presentación de proyectos, Ilpes. p.173

II. PROGRAMACION MATEMATICA

1. Modelo de decisión financiera

El propósito de esta parte, es presentar las principales técnicas cuantitativas modernas utilizadas para optimizar las decisiones financieras que afronta una empresa en distintas situaciones y en diferentes etapas de su desarrollo. Puesto que estas técnicas están fundamentadas en los modelos matemáticos y estadísticos, ésto hace que sólo analicemos los aspectos de la teoría de finanzas que pueden estudiarse en términos cuantitativos. Con ésto no queremos decir, que en la práctica todas las decisiones financieras se resuelven cuantitativamente, si sabemos de antemano que existen factores cualitativos que el empresario debe considerar para tomar decisiones financieras fundadas. De cualquier manera, el enfoque cuantitativo es indispensable porque muchas decisiones importantes son cuantitativas. Aún más, para aquellos casos en que las decisiones principales son cualitativas, el análisis cuantitativo puede ser útil para medir los factores mensurables, y reducir el rango de decisión que depende de una base subjetiva.

El análisis del enfoque cuantitativo implicará el empleo de modelos matemáticos, para representar los aspectos de la realidad que se relacionan con el proceso de decisión. Algunos de los modelos matemáticos expuestos en este trabajo tendrán caracter determinista, es decir, podemos conocer con c tidumbre los elementos considerados en ellos, y otros serán pro bilistas cuyos elementos sólo pueden estimarse.

Un modelo matemático de decisión financiera, puede definirse como un sistema de relaciones funcionales entre un conjunto de variables financieras[1] Estas variables pueden clasificarse en variables exógenas y endógenas, en las primeras sus valores se consideran dados y en las segundas son determinados por el modelo mismo. Al mismo tiempo, las variables exógenas pueden dividirse entre las que están sujetas al control de la administración y las que están fuera de éste. Conocidos los valores asignados a las variables exógenas, los correspondientes a las variables endógenas, están determinados por el sistema de relaciones en el marco del modelo matemático.

En las relaciones definidas por el modelo, podemos determinar cómo y en qué medida las variables endógenas dependen de los cambios de las variables exógenas ocasionados por nuevas decisiones financieras. Si además existe una función objetivo, que indica el bienestar de la empresa en los cambios de cada variable, entonces se pueden formular juicios de valor acerca de las distintas políticas, y seleccionar el curso de acción que determina los mejores resultados.

Otra distinción entre las variables de un modelo matemático, son las aleatorias y deterministas. Las variables aleatorias son aquellas, cuyos valores no se pueden predecir con certidumbre cuando se toma una decisión. Un modelo que contiene este tipo de variables, recibe el nombre de modelo probabilista.

Un caso ilustrativo de un modelo matemático aplicado a los planes de expansión de una empresa X, se tiene representado gráficamente por la figura 1, en ella están expresadas algunas variables exógenas controlables y otras incontrolables, -- que serán analizadas y procesadas conjuntamente en el modelo, generando un conjunto de soluciones, encontrándose entre ellas la óptima conforme a los objetivos de la empresa. Esto es, supongamos que la empresa sabe con certidumbre que la expansión tiene un costo de C pesos, un aumento de los flujos netos de - fondos en A_i pesos para el año i con $i = 1,2,...,n$ por lo tanto, puede utilizarse la siguiente fórmula para determinar la - tasa interna de rentabilidad $r^•$, de la inversión propuesta:

$$C = \frac{A_1}{(1+r^•)} + \frac{A_2}{(1+r^•)^2} + \dots + \frac{A_n}{(1+r^•)^n}$$

que es un ejemplo de un modelo matemático, donde la variable - endógena $r^•$ está relacionada funcionalmente con las variables exógenas C y las A_i. Esta relación puede ampliarse hasta constituir un modelo de decisiones de inversión, incluyendo una -- nueva ecuación que iguala el costo de capital K, de la empresa a cierta constante K_0, $(K = K_0)$ y un conjunto de reglas de decisión, de manera que la inversión es una relación entre $r^•$ y K_0, tal como se especifica en la figura 1.

Variables exógenas controlables o variables de decisión

necesidades totales de capital y el tipo de activos que se adquirirán;

selección de la localización del proyecto;

fuentes de financiamiento para cubrir la inversion;

condiciones restrictivas definitivas en el convenio financiero; etc.

Variables exógenas incontrolables

demanda y oferta que afronta la industria en conjunto, tanto a largo como a corto plazo;

enfoque de la política monetaria y fiscal;

procesos políticos internacionales;

número de competidores, su producción y políticas de precios probables; etc.

M O D E L O   M A T E M A T I C O

$$C = \frac{A_1}{(1+r^\bullet)} + \frac{A_2}{(1+r^\bullet)^2} + \dots + \frac{A_n}{(1+r^\bullet)^n}$$

$$K = K_0$$

Regla de decisión

1. si $r^\bullet \geq K_0$, invertir
2. si $r^\bullet < K_0$, no invertir

Alternativa seleccionada

Figura 1.

2. La programación lineal

La programación lineal es una técnica matemática, para obtener la solución óptima de problemas que pueden plantearse tanto a la investigación de operaciones como a la administración financiera. En este último campo, se ha comprobado la utilidad de esta técnica en las decisiones financieras; también puede emplearse para resolver problemas relacionados con el presupuesto y el planteamiento financiero, es decir, determinar qué capital fijo y circulante, requerirá la empresa para satisfacer de la mejor manera estas necesidades; otra de sus aplicaciones son ciertos problemas del análisis del equilibrio, este caso consiste en determinar el índice de producción que la empresa necesita para cubrir sus costos fijos y variables de explotación; también se ha usado para evaluar los convenios restrictivos observados en los bonos certificados y los acuerdos de préstamos; para optimizar decisiones financieras a corto plazo de una empresa en donde los flujos de fondos soportan acentuadas fluctuaciones estacionales; para incorporar las restricciones de distribución del capital y de interdependencia de los proyectos en los problemas de presupuesto de capital.

Algunas de estas aplicaciones serán analizadas en los temas correspondientes a decisiones de inversión. Existen otros campos de aplicación, de los cuales citaremos algunos con el fin de dar una idea de la flexibilidad y éxito del modelo de programación lineal[2] Las aplicaciones que se describen no serán analizadas en este trabajo, pero los modelos matemáticos que se presentan, pueden emplearse indistintamente a cualquier campo.

Del conjunto de aplicaciones del modelo de programación lineal, podemos considerar las agrícolas que se dividen en dos categorías, economía agrícola que analiza la macroeconomía agrícola relacionada con la economía de una nación o región, y administración agrícola que se enfóca a los problemas de las granjas individuales; las industriales entre las cuales podemos contar con la industria química que se ha dirigido a los campos de producción y control de inventarios; la industria de comunicaciones en los campos específicos de diseño y utilización óptima de redes de comunicaciones, la industria del hierro y del acero donde se ha usado para la planeación de la producción, la industria papelera donde se ha destinado para resolver problemas de transporte y corte de la pulpa y papel, y a la industria petrolera que en este campo se ha orientado a múltiples usos; al análisis económico que no sólo se ha limitado al modelo interindustrial de Leontief, sino se ha extendido a la interpretación de la teoría de la empresa, a la selección de un portafolio de inversiones, a la preparación de dietas, y a la solución de varios problemas del análisis de mercado; a estrategias militares; líneas aéreas comerciales en la solución de problemas de asignación de aviones a rutas y administración de las mismas; asignación de personal; diseño estructural; análisis de tráfico relacionado con la sincronización de los semáforos; problemas de --

transporte y teoría de redes; en el problema del agente viajero; en varias áreas teóricas de las matemáticas como en la teoría estadística, análisis combinatorio, entre otras, la utilidad de la técnica en estas áreas ha sido en la solución de problemas.

En los problemas de programación lineal se analiza el uso eficiente o la asignación de recursos limitados para alcanzar los objetivos planteados. La característica de estos problemas, es que un gran número de soluciones satisfacen las condiciones fundamentales de cada problema. La selección de la solución óptima a un problema dependerá de la meta u objetivo global implícito en el planteamiento del mismo. Una solución óptima, es la que satisface las condiciones del problema y a la función objetivo la optimiza.

El planteamiento matemático de un problema de programación lineal, se basa en un conjunto de ecuaciones lineales, que representan las condiciones del problema, y una función lineal que expresa el objetivo del mismo, en forma explícita se describe por:

Maximizar (o minimizar) la función objetivo

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n \qquad (1)$$

sujeta a las condiciones

$$x_i \geq \quad ; \; i = 1,2,\dots,j,\dots,n \qquad (2)$$

y

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \text{ para } i = 1,\ldots,m \qquad (3)$$

donde las c_j para $j = 1,2,\ldots,n$; b_i para $i = 1,2,\ldots,m$; y las a_{ij} son todas constantes, y $m < n$.[3]

O, dados los vectores

$$P_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} \quad ; \quad P_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

El problema se formula así:

Maximizar (o minimizar) la función objetivo

$$z = x_1c_1 + x_2c_2 + \ldots + x_nc_n = \sum_{j=1}^{n} x_jc_j$$

sujeta a las condiciones

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

y

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_nP_n = \sum_{j=1}^{n} x_jP_j = P_0$$ [4]

Podemos resumir que el resultado de todos los problemas de programación lineal, están comprendidos en los tres grupos siguientes:

a) Hay una solución no negativa con un valor infinito - para la función objetivo.
b) Hay una solución no negativa con un valor finito -- para la función objetivo.
c) No hay solución en términos de valores no negativos de las variables.

Antes de exponer los métodos para encontrar una solución óptima al problema de programación lineal, es conveniente indicar las consideraciones siguientes:

1) Una solución posible* al problema de programación lineal, es un vector $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, que satisface las restricciones (2) y (3).
2) Una solución básica para (3), se obtiene al hacer n-m variables igual a cero y resolver para las m variables restantes, siempre que el determinante de los coeficientes de estas m variables sea diferente de cero. Las m variables reciben el nombre de variables básicas.
3) Una solución posible básica, nos indica que todas las vatiables básicas son no negativas o sea una solución básica que también satisface (2).
4) Una solución posible básica no degenerada, es una solución posible básica con exactamente m variables x_i positivas.
5) Una solución posible óptima es una solución posible que optimiza (1)

Hay un teorema que nos asegura que el conjunto de todas las soluciones posibles al problema de programación lineal es un conjunto convexo, es decir, que contiene todos los segmentos de línea que unen dos puntos cualesquiera en el conjunto.

* En lo sucesivo, se entenderá que una solución posible, significa lo mismo que una solución factible.

Existe otro teorema en la teoría de la programación - lineal que nos informa, si la función objetivo (1) alcanza su -- (valor máximo o mínimo) sería en un punto extremo del conjunto - convexo K, generado por el conjunto de soluciones posibles al -- problema de programación lineal. Si alcanza este óptimo en más de un punto extremo, entonces toma el mismo valor para toda combinación convexa de estos puntos particulares.

Por punto extremo entendemos un punto V en un conjunto convexo K, donde V no puede ser expresado como una combina--- ción lineal convexa de cualesquiera otros dos puntos distintos - de K.

Por lo tanto, únicamente necesitamos analizar las soluciones de punto extremo, y sólo aquellas soluciones posibles - generadas por m vectores linealmente independientes. Como el -- número máximo de soluciones posibles al problema es $\binom{n}{m}$ que es - el número de los conjuntos de m vectores linealmente independientes para el conjunto dado de n. Si n y m toman valores grandes, el número posible de soluciones también es grande, lo cual sería imposible valorizar a todas y seleccionar una que optimice la -- función objetivo. En este caso lo que necesitamos, es un sistema de cómputo que seleccione, en una forma ordenada, un subcon-- junto de las soluciones posibles que contenga la solución óptima, el sistema que satisface estos requisitos es El Procedimiento -- Simplex que lo analizaremos más adelante, junto con otros sistemas de cómputo.

2.1 El método simplex

Los problemas generales de programación lineal se resuelven por medio del método simplex, el cual puede usarse también en la determinación de programas óptimos, que consideran la introducción de nuevas restricciones en el enunciado del problema o cambios en los datos del problema. Es conveniente hacer un análisis de estos cambios y restricciones con el fin de tener una base para poder contestar a problemas tales como:

1. Introducción de nuevos turnos de trabajo
2. Exceso de tiempo en un centro mientras escasea en otro.
3. Introducción de más máquinas (aumento disponible en el tiempo).
4. Introducción de nuevas máquinas, herramientas especiales, o mejoras (reducción en las tasas de producción unitarias).
5. Cambios en los precios para poder enfrentarse con la competencia.
6. Dirección del esfuerzo de ventas.
7. Distribución óptima de los productos.

Para ilustrar el procedimiento simplex analizaremos el ejemplo que se enuncia a continuación:

La compañía XYZ tiene una pequeña fábrica situada en los alrededores de una gran ciudad. Su producción se -

limita a dos productos industriales A y B. El departamento de contabilidad de la empresa ha calculado las contribuciones de cada producto en \$ 10 para el producto A y \$ 12 para el B. Cada producto pasa por tres departamentos de la fábrica. Los requerimientos de tiempo para cada producto y el total de tiempo disponible en cada departamento son los siguientes:

DEPARTAMENTO	HORAS REQUERIDAS PRODUCTO A	PRODUCTO B	HORAS DISPONIBLES ESTE MES
1	2.0	3.0	1 500
2	3.0	2.0	1 500
3	1.0	1.0	600

Determinar las unidades que se deben producir de cada uno de los productos, de manera que la contribución sea máxima.

Al expresar el problema en forma matemática, tenemos la formulación siguiente:

Maximizar $Z = 10x_1 + 12x_2$ Contribución total

sujeta a las condiciones

$2x_1 + 3x_2 \leq 1\,500$ Departamento 1

$3x_1 + 2x_2 \leq 1\,500$ Departamento 2

$x_1 + x_2 \leq 600$ Departamento 3

y

$x_1, x_2 \geq 0$

donde, x_1 nos indica el número de unidades del producto A a producir, x_2 nos indica el número de unidades del producto B a producir.

Estas restricciones indican que la suma de las horas requeridas para la fabricación de los productos A y B en cada departamento no debe exceder a las horas disponibles en el mes por departamento.

Para aplicar el método simplex, es necesario convertir las inecuaciones en ecuaciones, agregando las variables de holgura x_3, x_4 y x_5. En cada ecuación deben aparecer las variables de holgura con los coeficientes 1 para la variable que mide la diferencia del tiempo disponible y el real, y cero para las variables restantes; en la función objetivo también aparecerán estas variables pero con coeficiente cero, la nueva formulación del problema es

$$\text{Maximizar} \quad Z = 10x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

sujeta a las condiciones

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 1\,500$$
$$3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 1\,500$$
$$x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 600$$

y

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots,5)$$

Esta nueva estructuración permite identificar al vector P_j como la columna de coeficientes de X_j ($j=1,2,\ldots,5$) y el vector P_0 como la columna derecha del sistema de ecuaciones.

Con ésto, podemos reformular nuestro problema de programación lineal utilizando los vectores P_j de la forma siguiente: Encontrar los valores de un conjunto de x_j no negativos -

(donde $j=1,2,...,5$) que haga máxima la función lineal•

$$z = 10x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

sujeta a las condiciones

$$\sum_{j=1}^{5} x_j P_j = P_0$$

Formulando el problema de esta forma, podemos encontrar la solución por medio del método simplex. El primer paso consiste en expresar la columna de vectores P_j en una forma -- sistemática como se hace en la tabla siguiente

TABLA 1. PASO INICIAL

	Base	c_j / c_i	P_0	+10 P_1	+12 P_2	0 P_3	0 P_4	0 P_5
1	P_3	0	1500	2	$\underline{3}$	1	0	0
2	P_4	0	1500	3	2	0	1	0
3	P_5	0	600	1	1	0	0	1
4	z_j		0	0	0	0	0	0
5	z_j-c_j			-10	-12	0	0	0

Hay que observar que la matriz cuadrada formada por los vectores P_3, P_4 y P_5 es una matriz unitaria o idéntica.

• Se supone que el beneficio correspondiente a cada variable de holgura x_3, x_4 y x_5 es igual a cero.

Los vectores unitarios constituyen la base* unitaria del espacio que nos interesa, que en nuestro ejemplo es un espacio de 3 dimensiones. La c_j se definen como los coeficientes de las x_j correspondientes a la función objetivo. c_i son los coeficientes de los vectores que están en la base. La expresión z se escribe de la forma

$$z = \sum_{j=1}^{5} c_j x_j$$

z_j es una fila de números, donde j denota la columna correspondiente. Estas z_j se calculan (incluyendo z_0) por

$$z_j = \sum_{i} c_i x_{ij}$$

donde x_{ij} es el elemento de la fila i y de la columna j de la tabla. El número de filas es progresivo. . Finalmente tenemos la fila $z_j - c_j$.

Esto completa el proceso inicial y es el primer conjunto completo de cálculos, en el que se tiene una solución factible del problema dado por el vector columna P_0 en función de los vectores base P_3, P_4 y P_5 o sea

$$x_3 = 1\,500 \;; \quad x_4 = 1\,500 \;; \quad x_5 = 600$$

Es decir, el programa factible inicial consiste en no

---

* En este ejemplo los vectores de holgura forman la base unitaria. En ciertos problemas en que algunas de las restricciones se expresan en términos de igualdades o desigualdades que imponen límites mínimos, es necesario introducir los vectores artificiales para formar una base unitaria.

utilizar nada de tiempo disponible en ninguno de los departamentos, ésto es, no hacer nada, teniendo como beneficio neto $z = 0$

Criterio para la solución óptima. Después de obtener un programa factible, deseamos saber si existe otro programa -- que aporte más beneficios. Para ésto, se tendrán que considerar las siguientes posibilidades mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivas:

a) Máximo de $z = \infty$ y se ha obtenido por medio del -- programa presente

b) El máximo de z es finito y se ha obtenido por medio del presente programa.

c) No se ha alcanzado un programa óptimo y puede haber un valor de z más alto.

El método simplex nos indica que las posibilidades a) o b) deben alcanzarse en un número finito de pasos. Además el método debe ser tal que, para una tabla dada:

1. Si existe algún $z_j - c_j < 0$, se cumple a) o c)
   1.1) Si todas las $x_{ij} \leq 0$ en esa columna (para la que $z_j - c_j < 0$) es cierto a).
   1.2) Si alguna $x_{ij} > 0$, son necesarios nuevos -- cálculos, ésto es, se cumple c).
2. Si todas las $z_j - c_j \geq 0$, se ha obtenido un máximo - de z (b).

Procedimiento iterativo para llegar a una solución óptima. En la tabla 1, Paso Inicial $z_1-c_1 < 0$ y $z_2-c_2 < 0$; como los coeficientes bajo P_1 son mayores que cero, la condición 1.2) implica nuevos cálculos (o sea se cumple la condición c).

Para obtener nuevas soluciones se aplica el procedimiento siguiente. Entre todas las $z_j-c_j < 0$, se elige la que tenga el valor negativo más grande, (en nuestro caso es $z_2-c_2= -12$). Esto corresponde a un vector P_j (que es, P_2) que se introducirá en la columna llamada base en la tabla 1, enseguida para determinar el vector que debe sustituirse por el vector P_j, dividimos cada una de las x_{i0} de la columna P_0 por la correspondiente x_{ij} positivas situada en la misma fila debajo de P_j•. El menor de estos cocientes nos dá el vector que hay que sustituir. En nuestro ejemplo P_2 va a reemplazar a uno de los vectores P_3, P_4 y P_5 . El mínimo de $\frac{x_{i0}}{x_{ij}}$ para $x_{ij} > 0$ es 1500/3, que corresponde al vector P_3, que es el que hay que sustituir por P_2, la nueva base que se forma tiene a los vectores P_2, P_4 y P_5.

Si hacemos que

el subíndice k expresa la entrada

el subíndice r, la salida

• Como los componentes de P_0 deben ser todos positivos, estos cocientes han de ser no negativos.

x'_{ij} expresa los elementos de la nueva matriz y

$$\theta = \min_i \frac{x_{i0}}{x_{ik}}, x_{ik} > 0$$

Los elementos de la nueva matriz (x'_{ij}) se calculan de la forma siguiente. Para los elementos de la fila correspondiente al vector P_k.

$$x'_{kj} = \frac{x_{rj}}{x_{rk}}$$

mientras que los otros elementos (x'_{ij}) de la nueva matriz se calculan por

$$x'_{ij} = x_{ij} - \left(\frac{x_{rj}}{x_{rk}} \right) x_{ik}$$

aplicándose también esta ecuación a las x'_{i0} situadas bajo P_0 y a las $z_j - c_j$ de toda la fila inferior (pero no a las z_j de la penúltima fila). El nuevo valor de la función objetivo está dado por

$$z'_0 = z_0 - \theta (z_k - c_k)$$

Como $c_0 = 0$, por

$$(z_0 - c_0)' = (z_0 - c_0) - \theta (z_k - c_k)$$

por ejemplo, a partir del paso inicial para llegar al segundo paso de la tabla 1, el valor mínimo de $z_j - c_j = z_2 - c_2 = -12$, luego $k = 2$ que corresponde a P_2 y el valor de

$$\theta = \min_i \frac{x_{i0}}{x_{i2}} \quad \text{para todas las } x_{i2} > 0$$

$$\theta = \min_i (1500/3 \ ; \ 1500/2 \ ; \ 600/1) = 1500/3 = 500,$$ que corresponde a $r = 3$ o sea el vector P_3

Por consiguiente, P_2 reemplazará a P_3; en nuestras ecuaciones $k = 2$ y $r = 3$.

Entonces, los elementos de la fila P_2 de la tabla 1 segundo paso, se calculan por

$$x'_{2j} = \frac{x_{3j}}{x_{32}} = \left(\frac{x_{3j}}{3}\right)$$

luego

$$x'_{20} = \frac{x_{30}}{x_{32}} = \left(\frac{1500}{3}\right) = 500$$

$$x'_{21} = \frac{x_{31}}{x_{32}} = \left(\frac{2}{3}\right) = 0.666, \text{ etc.}$$

para los elementos de las otras filas

$$x'_{ij} = x_{ij} - \left(\frac{x_{3j}}{x_{32}}\right) x_{i2}$$

luego

$$x'_{40} = x_{40} - \left(\frac{x_{30}}{x_{32}}\right) x_{42} = 1500 - \left(\frac{1500}{3}\right) (2)$$

$$= 1500 - 1000 = 500$$

y

$$(z_1-c_1)' = (z_1-c_1) - \left(\frac{x_{31}}{x_{32}}\right) (z_2-c_2)$$

$$= (-10) - (\tfrac{2}{3}) \quad (-12)$$

$$= -10 + 8 = -2$$

Por último, el nuevo valor de la función objetivo está dado por

$$(z_0-c_0)' = (z_0-c_0) - \theta\,(z_2-c_2) = 0 - 500\,(-12)$$

$$= 6000$$

Este proceso se expone en la tabla 1, segundo paso, el procedimiento se repite hasta que se cumpla a) o b). En nuestro ejemplo se llega a la solución en dos iteraciones. La tabla 1 en el tercer paso, nos dá la solución óptima• con un valor de la función objetivo

$$z = 12\ (300) + 10\ (300) = 6,600$$

De lo anterior, se deriva que es necesario producir 300 unidades del producto A y 300 unidades del producto B para tener una utilidad de \$ 6 600.

2.2 Interpretación geométrica del problema de programación lineal

En esta parte, presentamos la interpretación geométrica del problema de programación lineal, por medio del ejemplo que acabamos de resolver.

Para representar en forma gráfica las inecuaciones del problema, el número de unidades del producto A se mostrará en el eje x_1, y las del producto B en el eje x_2. Cualquiera de las tres inecuaciones puede mostrarse en la gráfica, localizando sus dos puntos terminales en el eje x_1 y en el eje x_2 y uniéndolos con una línea recta. Para la primera inecuación $2x_1 + 3x_2 \leq 1500$, los dos puntos se encuentran

---

• Si existiera alguna otra solución óptima, vendrían indicadas por $z_j - c_j = 0$ para las j distintas que aparecen en la base. En nuestro caso no hay otra solución óptima.

TABLA 1. S E G U N D O P A S O

	Base	C_j / C_i	P_0	+10 P_1	+12 P_2	0 P_3	0 P_4	0 P_5
1	P_2	+12	500	2/3	1	1/3	0	0
2	P_4	0	500	1 2/3	0	-2/3	1	0
3	P_5	0	100	1/3	0	-1/3	0	1
4			6000	8	12	4	0	0
5	z_j-c_j			-2	0	+4	0	0

TABLA 1. T E R C E R P A S O

	Base	C_j / C_i	P_0	+10 P_1	+12 P_2	0 P_3	0 P_4	0 P_5
1	P_2	+12	300	0	1	1	0	-2
2	P_4	0	0	0	0	1	1	-5
3	P_1	+10	300	1	0	-1	0	3
4			6600	10	12	2	0	6
5	z_j-c_j			0	0	+2	0	+6

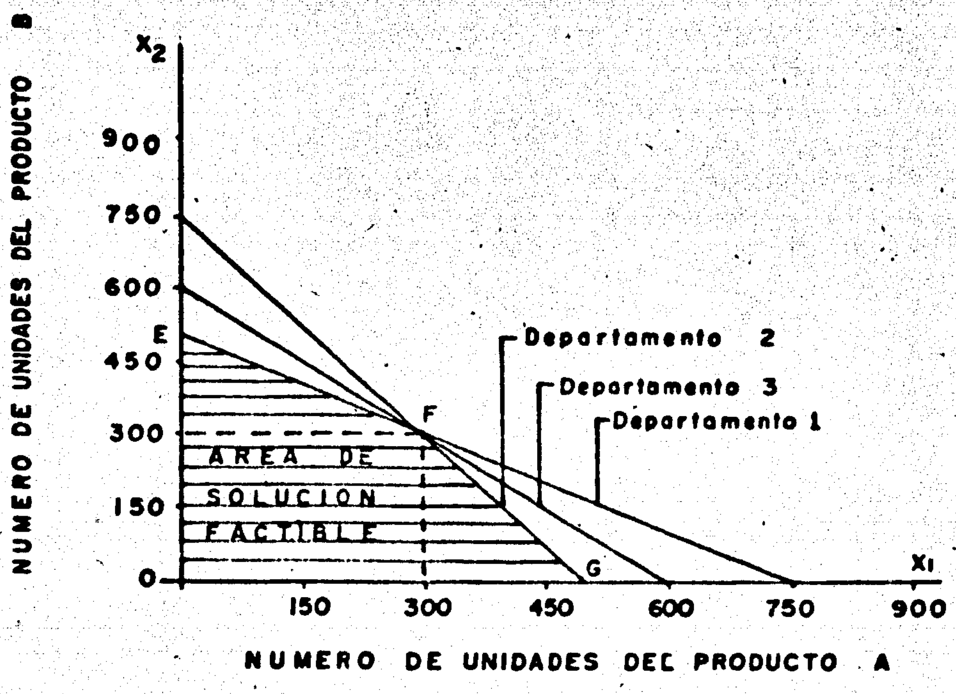


Fig. 2

	X_1 , X_2	X_1 , X_2
$Z = 10x_1 + 12x_2$		
$0 = 10x_1 + 12x_2$;	(0 , 0)	
$1200 = 10x_1 + 12x_2$;	(120, 0)	(0 , 100)
$3600 = 10x_1 + 12x_2$:	(360, 0)	(0 , 300)
$6600 = 10x_1 + 12x_2$:	(660, 0)	(0 , 550)
$8400 = 10x_1 + 12x_2$;	(840, 0)	(0 , 700)

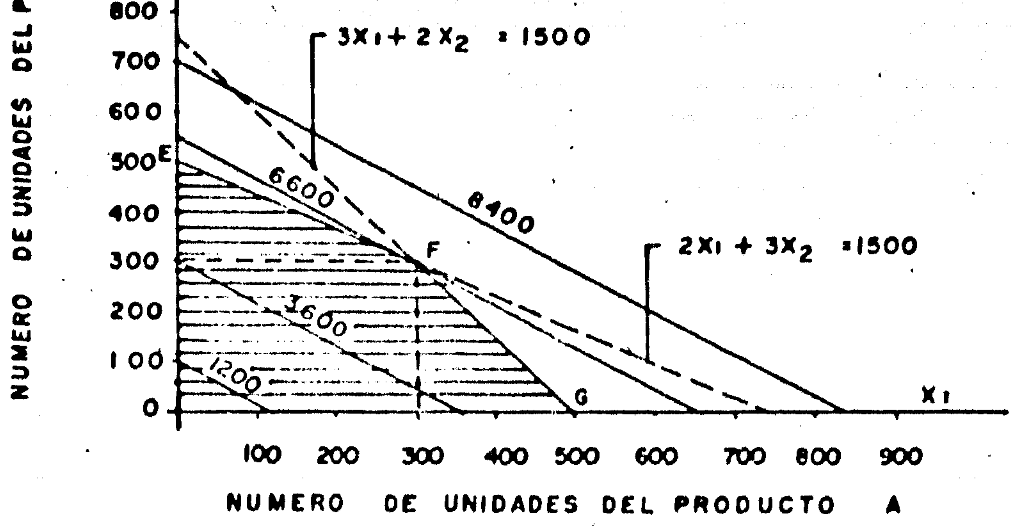


Fig. 3

del modo siguiente. Si todo el tiempo del departamento 1 se emplea para fabricar el producto A, y si no se fabrica ninguna unidad del producto B, entonces pueden fabricarse 750 unidades del producto A. Esto es:

$$2x_1 + 3\,(0) \leq 1500$$
$$2x_1 \leq 1500$$
$$x_1 \leq 750$$

El primer punto se refiere a (750,0). Después de localizar los dos puntos se unen por una línea recta. Por un procedimiento similar determinamos las rectas correspondientes a las dos inecuaciones restantes que están trazadas en la figura 2. El sistema de inecuaciones lineales que representa las restricciones, está expresado gráficamente por el conjunto convexo de puntos formado por el polígono OEFG de la figura 2. Cualquier punto situado sobre ese polígono, o dentro de él, satisface el sistema de inecuaciones por consiguiente el número de soluciones de ese sistema es infinito. El problema de la programación lineal consiste en elegir, entre ese número infinito de puntos, aquellos que hacen máxima la función $z = 10x_1 + 12x_2$. Esta función constituye una familia de rectas con pendiente $-5/6$, de manera que z aumenta en la medida que la línea se aleja del origen. El problema consiste en determinar la línea de la familia más alejada del origen, pero que tiene al menos un punto en el polígono OEFG.

La figura 3 muestra la relación de algunos miembros de la familia $z = 10x_1 + 12x_2$ con el polígono OEFG. También indica que la solución corresponde a las coordenadas del punto F intersección con $2x_1 + 3x_2 = 1500$ y $3x_1 + 2x_2 = 1500$. F está determinado por (300, 300) y a su vez z máx $= 10(300) + 12(300) = 6\ 600$.

Para poder presentar gráficamente la resolución del problema por la técnica de simplex, damos en los tres pasos de la tabla 1 (inicial , segundo y tercero) la solución del ejemplo de la figura 3. En estas tablas, vemos que la solución pasa del punto ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) al punto ($x_1 = 0$, $x_2 = 500$) y al punto ($x_1 = 300$, $x_2 = 300$) es decir, pasa del punto O (origen) al punto E y F.

De manera más general, los puntos vértices O, E, F y G son los puntos extremos del polígono OEFG, la solución óptima del problema de la programación lineal estará entre tales puntos extremos y para alcanzar ese punto óptimo hay que pasar de un punto extremo a otro. En nuestro caso la solución pasaba del punto extremo O al punto extremo E y finalmente al punto extremo F.

Las coordenadas de los puntos terminales para cada uno de los departamentos son:

Departamento 1	(x_1 x_2)
	(750,0)
	(0,500)
Departamento 2	(500,0)
	(0,750)
Departamento 3	(600,0)
	(0,600)

2.3 El problema dual de la programación lineal

Asociado con cada problema de programación linea existe un problema de optimización llamado problema dual, el - problema original recibe el nombre de primal. La solución ópt ma de cualquiera de los dos problemas, contiene cierta informa ción de la solución óptima del otro. En el caso que la tabla simplex inicial contiene una matriz unitaria de m x m, la solu ción de cualquiera de los problemas por el procedimiento sim-- plex, proporciona una solución explícita para el otro. El anál sis de los problemas duales, lo hacemos por medio de los probl mas primal-dual simétrico y primal-dual asimétrico.

2.3.1 El problema primal-dual asimétrico

El problema primal. Encontrar un vector column $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que minimice la función lineal

$$f(X) = CX$$

sujeta a las condiciones

$$AX = b$$

y

$$X \geq 0$$

Para este enunciado consideramos, que el número de renglones m de **A** es menor que el número de columnas n de **A**.

El problema dual. Encontrar un vector renglón $W = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ que maximice la función lineal

$$g(w) = Wb$$

sujeta a las condiciones

$$WA \leq C$$

para el problema dual, las variables w_i no están restringidas a ser no negativas. En los dos problemas se tiene que $C = (c_1, c_2,...,c_n)$ es un vector renglón, $b = (b_1, b_2,...,b_m)$ es un vector columna y $A = (A_{ij})$ es la matriz de coeficientes.

2.3.2 El modelo primal-dual simétrico

El problema primal. Encontrar un vector $X = (x_1, x_2,...,x_n)$ que minimice la función lineal

$$f(X) = CX$$

sujeta a las condiciones

$$AX \geq b$$

y

$$X \geq 0$$

El problema dual. Encontrar un vector $W = (w_1, w_2,...,w_m)$ que maximice la función lineal

$$g(W) = Wb$$

sujeta a las condiciones

$$WA \leq C$$

y

$$W \geq 0$$

En los problemas primal-dual simétrico, las restricciones son desigualdades y las variables están restringidas a ser no negativas.

Después de indicar la menra de como formular el problema dual, veremos como puede utilizarse la solución de un problema de -- programación lineal para obtener la solución de un problema -- dual, basándonos en el ejemplo que hemos resuelto, o sea:

$$\text{maximizar} \quad z = 10x_1 + 12x_2$$

sujeta a las condiciones

$$2x_1 + 3x_2 \leq 1500$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 1500$$
$$x_1 + x_2 \leq 600$$

y

$$x_1, x_2 \geq 0$$

como las restricciones son desigualdades y las variables están restringidas a ser no negativas, se trata de un problema pri-- mal-dual simétrico.

El problema dual• se formula:

$$\text{Minimizar} \ g = 1500\, w_1 + 1500\, w_2 + 600\, w_3$$

sujeta a las condiciones

$$2w_1 + 3w_2 + w_3 \geq 10$$
$$3w_1 + 2w_2 + w_3 \geq 12$$

• La desigualdades $\geq$ se convierten en igualdades restando las variables de holgura no negativas. Como -1 no puede entrar en una base, pueden sumarse variables artificiales hasta suministrar la base. Así $2w_1 + 3w_2 + w_3 \geq 10$ se convierte primero en $2w_1 + 3w_2 + w_3 - w_4 = 10$. Después se agrega la variable artificial w_6 para tener $2w_1 + 3w_2 + w_3 - w_4 + w_6 = 10$, se hace lo mismo para la siguiente inecuación. Después de haber convertido las inecuaciones en ecuaciones, se está en posibilidad de - aplicar el procedimiento simplex. Tomando en cuenta que las - variables artificiales en la función objetivo tendrán un valor cero o un valor muy grande (instrumento de cálculo que se usa para que estas variables no tengan valor en la solución final)

Si aplicamos la solución simplex como se expone en la tabla 1 y su tercer paso, tenemos los siguientes resultados:

El máximo valor de $z = 6\ 600$

y

$$\begin{array}{llll} x_1 = 300, & z_1-c_1 = 0 & \\ x_2 = 300, & z_2-c_2 = 0 & \\ x_3 = 0, & z_3-c_3 = 2 & (1) \\ x_4 = 0, & z_4-c_4 = 0 & \\ x_5 = 0, & z_5-c_5 = 6 & \end{array}$$

ahora x_3, x_4 y x_5• corresponden a los variables de holgura, enseguida si empezamos con la primera variable de holgura y volvemos a numerar las z_j-c_j, denominándolos $z'_j-c'_j$, obtenemos

$z'_1-c'_1 = 2$ (corresponde al anterior z_3-c_3)

$z'_2-c'_2 = 0$ (corresponde al anterior z_4-c_4)

$z'_3-c'_3 = 6$ (corresponde al anterior z_5-c_5)

$z'_4-c'_4 = 0$ (corresponde al anterior z_1-c_1)

$z'_6-c'_6 = 0$ (corresponde al anterior z_2-c_2)

si hacemos $w_j = z'_j-c'_j$, tenemos resuelto el problema de minimización dual. Esto es, si el problema de minimización se resolviera por el método simplex tabla 2, se obtendrían los siguientes resultados:

• x_5 es una variable de holgura en el primal, en cambio en el dual es una variable artificial, por consiguiente se calculará $z'_6-c'_6$ en lugar de $z'_5-c'_5$

TABLA* 2. P A S O I N I C I A L

	Base	b_j / b_i	P_0	1500 P_1	1500 P_2	600 P_3	0 P_4	M P_5	0 P_6	M P_7
1	P_5	M	10	2	3	1	-1	1	0	0
2	P_7	M	12	3	2	1	0	0	-1	1
3	g_j		22M	5M	5M	2M	-M	M	-M	M
4	$g_j - b_j$			-1500 +5M	-1500 +5M	-600 +2M	-M	0	-M	0

TABLA 2. S E G U N D O P A S O

	Base	b_j / b_i	P_0	1500 P_1	1500 P_2	600 P_3	0 P_4	M P_5	0 P_6	M P_7
1	P_5	M	2	0	1 2/3	1/3	-1	1	2/3	-2/3
2	P_1	1500	4	1	2/3	1/3	0	0	-1/3	1/3
3	g'_j		2M +6000	1500	1000 +1 2/3M	500 +1/3M	-M	M	-500 +2/3M	500 -2/3M
4	$g'_j - b_j$			0	-500 +1 2/3M	-100 +1/3M	-M	0	-500 +2/3M	+500 -5/3M

* Como en este caso, se trata de minimizar la función objetivo g. Entonces, se debe tomar el mayor valor positivo de las $g_j - b_j$, en lugar de su valor menor negativo (que es para minimizar la función objetivo).

TABLA 2. T E R C E R P A S O

	Base	b_j / b_i	P_0	1500 P_1	1500 P_2	600 P_3	0 P_4	M P_5	0 P_6	M P_7
1	P_2	1500	1.20	0	1	0.2	-0.6	0.6	0.4	-0.4
2	P_1	1500	3.20	1	0	0.2	0.4	-0.4	-0.6	0.6
3	g''_j		6600	1500	1500	600	-300	300	-300	300
4	$g''_j - b_j$			0	0	0	-300	300-M	-300	300-M

TABLA 2. TERCER PASO MODIFICADO

	Base	b_j / b_i	P_0	1500 P_1	1500 P_2	600 P_3	0 P_4	M P_5	0 P_6	M P_7
1	P_3	600	6	0	5	1	-3	3	2	-2
2	P_1	1500	2	1	-1	0	1	-1	-1	1
3	g''_j		6600	1500	1500	600	-300	300	-300	300
4	$g''_j - b_j$			0	0	0	-300	300-M	-300	300-M

El mínimo valor de $g = 6\ 600$

y

$$w_1 = 2, \quad -(g_1-b_1) = 0$$
$$w_2 = 0, \quad -(g_2-b_2) = 0$$
$$w_3 = 6, \quad -(g_3-b_3) = 0 \qquad (2)$$
$$w_4 = 0, \quad -(g_4-b_4) = 300$$
$$w_6 = 0, \quad -(g_6-b_6) = 300$$

donde b_j son los coeficientes correspondientes a las w_j de la función cuyo mínimo buscamos.

Recíprocamente, dada la solución del problema de minimización (esto es, dada la ecuación (2)), podemos determinar la solución del problema de maximización dual empezando con la primera variable de holgura, w_4, y reconstruyendo ordenadamente las $-(g_j-b_j)$, para obtener la solución (1).

En la tabla 2 tercer paso, encontramos la solución óptima del problema dual, que no es única, ya que $g''_3-c_3 = 0$ y el vector P_3 no está en la base, por consiguiente, para encontrar otra solución óptima, se aplica el procedimiento simplex al programa óptimo, pero en este caso el vector que se introducirá en la base, es aquel que le corresponde $g_j-b_j = 0$ y no está en la base. El vector que será eliminado de la base, se determina por las fórmulas antes expuestas.

Cuando existen dos o más soluciones óptimas, cualquier combinación convexa de ellas, es también una solución óptima.

2.3. El modelo de programación de metas.

Dentro de la programación lineal existen ciertas variaciones, entre ellas se tiene la programación de metas que está orientada a encontrar una solución satisfactoria en lugar de óptima.

El análisis que presentamos de la programación de metas, está dirigido a explicar su naturaleza y relación con la programación lineal. La distinción que existe entre los términos metas y restricciones, es que en el primero, se refiere a los deseos de la administración, y el restante a las condiciones ambientales en que la administración adopta sus decisiones. En la programación lineal, sólo una meta se considera en la función objetivo que debe maximizarse o minimizarse. Si la administración tiene varias metas, las no consideradas en la función objetivo se tratan como restricciones del problema. Después el procedimiento de cálculo elige del conjunto de todas las soluciones que satisfacen las restricciones la(s) que optimiza(n) la función objetivo. En este caso el comportamiento de la empresa es optimizar, puesto que procura obtener el más elevado valor de la función objetivo.

En la programación de metas, todas las metas, ya sea una o varias, se incorporan a la función objetivo y sólo a las condiciones ambientales se tratan como restricciones. Mas aún, para cada meta se fija un valor que a juicio de la administración es satisfactorio, aunque no sea el mejor que se puede obtener. Entonces el procedimiento de cálculo selecciona entre el conjunto de todas las soluciones que satisfacen las restricciones la(s) que mejor satisface(n) los propósitos de la administración, puesto que el deseo que se persigue es obtener resultados satisfactorios y no los mejores resultados posibles, se dice que el comportamiento de la empresa es de satisfacción.

Para la formulación de un problema de programación de metas, es necesario incorporar el objetivo determinado por la administración a un modelo de programación de metas, definiendo primero la variable del excedente y^+ y la variable de holgura y^- de la siguiente manera:

$$y^+ \times y^- = 0$$

$$y^+ , y^- \geq 0$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n - M = y^+ - y^-$$

(M objetivo definido por la administración)

que nos indican: 1) que ambas variables o una de éstas es igual a cero; 2) las dos variables son no negativas; y 3) la expresión $y^+ - y^-$ es una medida de divergencia entre la ganancia realizable $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ y el objetivo definido por la administración M.

De acuerdo con la ecuación $y^+ \times y^- = 0$, por lo menos una de las y debe ser cero. Por lo tanto, $y^+ - y^- = 0$ implica que ambas variables la del excedente y la holgura son iguales a cero. Si $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n > M$, tenemos que $y^+ - y^- > 0$. Como una de las y debe ser cero, la otra y tiene que ser cero o positiva, si es cero no satisface $y^+ - y^- > 0$, nos queda que $y^- = 0$ e $y^+ > 0$, que es la variable que mide la magnitud en que la ganancia realizable excede a la ganancia que se fijó como objetivo, y esta es la razón del signo + en y^+. Asímismo si $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n < M$, se obtiene que $y^+ - y^- < 0$, de donde se deduce que $y^+ = 0$ con $y^- > 0$, que es la variable que mide la magnitud en que la ganancia realizable es inferior a la que se había fijado, y esa es la razón del signo - en y^-.

Una vez definidas las variables y^+, y^- estamos en condiciones de formular el problema que tiene la estructura siguiente:

Minimizar $f = y^+ + y^-$

sujeta a las condiciones

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad - y^+ + y^- = M \end{array}$$

y

$$x_i;\ y^+;\ y^- \geq 0 \quad \text{para } i = 1,2,\ldots,n$$

De esta formulación derivamos tres observaciones, en la primera el objetivo es minimizar $y^+ + y^-$; en la segunda, aparecen ambas variables y^+ e y^- en la función objetivo, lo que significa que la administración desea que las dos variables tengan valor cero, que es la realización exacta de la ganancia fijada como meta. Es decir, al estar igualmente ponderadas y^+, y^- significa que a la administración le da lo mismo aceptar una desviación positiva o negativa, con el fin de aproximarse todo lo posible al blanco, si no cabe realizarlo exactamente; en la tercera $y^+ \times y^- = 0$ no aparece como una restricción en esta formulación, sin embargo, la solución simplex garantiza que por lo menos una de las dos variables será cero.

Para ilustrar la técnica de la programación de metas, desarrollaremos el siguiente ejemplo:

Cierta empresa se dedica a la producción de aparatos de radio y televisión, cada radio cuesta a la empresa \$ 0.50 en salarios y \$ 0.50 en materiales; cada televisor cuesta a la empresa \$ 2.50 en salarios y \$ 1.50 en materiales. La empresa vende los dos productos concediendo crédito por un período, pero debe pagar al contado la mano de obra y los gastos de material. El precio de venta es \$ 2.00 por radio y \$ 6.00 por televisor. En vista de que está asegurada la demanda de estos productos, se supone que la empresa puede vender a los precios corrientes todas las unidades que pueda elaborar, sin embargo, la capacidad de producción de la firma está limitada por dos con deraciones: en primer lugar, al comienzo del período 1 de su horizonte de planeación, la empresa tiene un saldo inicial - de \$ 12.00 en recursos líquidos (activos de caja, más crédito, más existencia menos dividendos, planta y equipo). Como no hay ventas al contado ni un requerimiento mínimo de efectivo, este saldo inicial de \$ 12.00 es la cantidad utiliza-- ble para satisfacer los gastos de mano de obra y material en el primer período. En segundo lugar, la empresa dispone en cada período de 10 horas de tiempo de máquina y 4 horas de - tiempo de montaje. La producción de cada radio exige 3 - - horas de tiempo de máquina y 1 hora de montaje. En cambio - la producción de cada televisor exige 1 hora de máquina y 1 hora de montaje, por lo tanto, dadas las restricciones financieras y de producción, ¿cuántos radios y televisores debe - producir la empresa para maximizar sus ganancias totales?. - En este problema analizaremos el primer período del horizonte de planeación de la empresa, aplicando los procedimientos simplex usual y programación de metas.

Además de los costos variables, la empresa tiene -- \$ 1.00 en gastos fijos en efectivo y \$ 1.00 por depreciación para cada período.

La tabla 5, resume las restricciones físicas y los datos básicos sobre los costos y el precio.

Se supone que todos los créditos pueden cobrarse al vencimiento, que la empresa no traspasa un saldo de caja de un período al siguiente, además gasta \$ 0.50 en dividendos, \$ 0.50 en la planta y equipo para cada período, lo que hace que la empresa tenga un máximo de \$ 12.00 disponibles para financiar su actividad durante el primer período. Ya que la firma vende todo lo que produce, y sigue una política de compras precarias, su cuenta de inventario exhibe un saldo cero.

Como en este caso, el objetivo de la empresa es maximizar las ganancias, se trata de un problema de programación lineal que formulamos como sigue. Sean x_1 y x_2 las unidades de radios y televisores a producir respectivamente en el primer período y deseamos encontrar los valores de x_1 y x_2 que maximizan la función objetivo y satisfacen las siguientes restricciones:

Maximizar $Z = 1x_1 + 2x_2$

sujeta a las condiciones

$x_1 + x_2 \leq 4$ (restricción de capacidad)

$3x_1 + x_2 \leq 10$ (restricción de capacidad)

$x_1 + 4x_2 \leq 12$ (restricción financiera)

y

$x_i \geq 0$; $i = 1,2$

La aplicación del método simplex a este problema, proporciona como solución óptima a $x_1 = 4/3$, $x_2 = 8/3$ y Z con un valor de \$ 6.67, es decir, produciendo 4/3 unidades de radio y

TABLA 5. DATOS PARA LA PRODUCCION DE RADIOS Y TELEVISORES.

Requerimientos	Producción		Disponibilidad
C o n c e p t o	Radio	Televisión	
Tiempo de las máquinas	3 hrs.	1 hr.	10 Hrs.por período.
Tiempo de montaje	1 hr.	1 hr.	4 hrs. por período.
	Financieros		
Precio de venta	$ 2	$ 6	
Gastos de mano de obra y material	$ 1	$ 4	
Utilidad por unidad vendida.	$ 1	$ 2	
Gastos fijos de caja por período	-	$ 1 •	
Depreciación por período	-	$ 1 •	

• Gastos generales.

El balance de la empresa al final del período cero se expone a continuación:

Balance del fabricante de radios y televisores al final del periodo 0

Activos de caja	$ 5	Préstamos bancarios	$ 6
Créditos	$ 8	Bonos a largo plazo	$ 4
Existencias	0.		
Planta y equipo	$ 7	Capital propio	$10
	$20		$20

8/3 unidades de televisores, la empresa puede obtener una utilidad máxima de $ 6.67 en el primer período.

Programación de metas

Supongamos luego que al final del primer período, el director de la empresa aprueba un plan para vender una nueva emisión de acciones ordinarias en el segundo período, y por consiguiente ordena al presidente que formule el plan de operación de la firma,de modo que las acciones reciban la mejor aceptación posible de los inversionistas. En base a la experiencia, el presidente cree que si se quiere que la nueva emisión tenga un precio atractivo en el período 2 es imperativo que: 1) la empresa obtenga una ganancia satisfactoria en el período 1, y 2) la empresa continue realizando sus pagos regulares de un dividendo de $ 0.50 sobre todas las acciones. Aunque no puede definir con exactitud una ganancia satisfactoria, el presidente cree que en general los inversionistas considerán que $ 2.00 de ganancia neta será satisfactoria para la empresa. Como los gastos fijos suman $ 2.00, este objetivo de ganancia neta es equivalente a $ 4.00 de contribuciones a la ganancia antes de deducir los gastos fijos. Afirma ahora que su empresa aplica la política de mantener un saldo mínimo de caja de $ 4.00 al final de los períodos, y que la emisión de bonos exige que la firma mantenga un capital en giro neto de por lo menos $ 6.00 al final de los períodos.

Con la información anterior, ¿qué plan operativo para el primer período podríamos aconsejar al presidente?.

Entonces el problema es hallar los valores de x_1 y x_2 que minimizan la función objetivo y satisfacen las restricciones:

Minimizar $f = y^+ + y^-$ (función objetivo)

sujeta a las condiciones

$x_1 + x_2 \leq 4$ (restricción de capacidad)

$3x_1 + x_2 \leq 10$ (restricción de capacidad)

$x_1 + 2x_2 \geq 1$ (restricción de capital en giro)

$x_1 + 4x_2 \leq 7$ (restricción de saldo de caja)

$x_1 + 2x_2 - y^+ + y^- = 4$ (meta de ganancia)

y

$x_i \ , y^+ \ , y^- \geq 0 \ ; \quad i = 1,2$ (condiciones de no negatividad)

Las primeras dos inecuaciones tiene como restricción la disponibilidad de tiempo de las máquinas y de tiempo de armado. La tercera inecuación se deriva considerando que la empresa tiene un capital neto en giro de \$ 7.00 al comienzo del período 1, mismo que disminuye durante ese período a causa de los gastos fijos de caja y depreciación que suman \$ 2.00 y aumenta por las contribuciones a la ganancia que son $x_1 + 2x_2$. Como el contrato de émisión de bonos especifica que el capital neto final en giro es por lo menos \$ 6.00, entonces $7 - 2 + x_1 + 2x_2 \geq 6$ que es lo mismo $x_1 + 2x_2 \geq 1$.

La cuarta ecuación, se determina sumando al saldo inicial de caja (período 1) de \$ 5.00, la recaudación durante ese período de \$ 8.00 en créditos; disminuye por el pago de dividendos (\$ 0.50), gastos de capital (\$ 0.50), gastos de depreciación (\$ 1.00) y los gastos de mano de obra y material, que ascienden $2 + x_1 + 4x_2$. Por lo tanto, la política de la administración de mantener un saldo mínimo de caja de \$ 4.00 implica que $5 + 8 - 2 - x_1 - 4x_2 \geq 4$ de donde $x_1 + 4x_2 \leq 7$.

La quinta ecuación afirma que la expresión $- y^+ + y^-$ mide la divergencia entre la ganancia realizable y la meta de ganancia de la empresa que es de \$ 4.00. Al minimizar $y^+ + y^-$ la ganancia realizable se aproxima tanto como sea posible a la ganancia deseada de \$ 4.00.

Para encontrar la solución de este problema de programación de metas, convertimos las desigualdades del planteamiento del problema en un sistema de igualdades al agregar las variables de holgura con signo más x_3, x_4, x_7, la variable de holgura con signo menos x_5 y la varialbe artificial x_6. La nueva forma del planteamiento del problema es

Minimizar $f = y^+ + y^-$

sujeta a las condiciones

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
3x_1 + x_2 + x_4 &= 10 \\
x_1 + 2x_2 - x_5 + x_6 &= 1 \\
x_1 + 4x_2 + x_7 &= 7 \\
x_1 + 2x_2 - y^+ + y^- &= 4
\end{aligned}$$

y

$$x_i \;,\; y^+ \;,\; y^- \geq 0; \quad i = 1,2,3,4,5,6,7$$

La finalidad de la variable artificial es suministrar inicialmente una solución viable básica, y para lograr que no aparezca en la solución final, se le asigna un valor demasiado grande.

Con los datos del probjema construimos la tabla 6, a - la que se aplicará el método simplex como si fuera un proble ma de programación lineal.

En el paso inicial de la tabla 6, se comprueba que - - esta solución inicial es $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$, $x_4 = 10$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$, $x_7 = 7$, $y^+ = 0$, $y^- = 4$ y el valor de la función objetivo $f = Mx_6 = M(1) = M$.

Para eliminar al vector artificial P_6 de nuestras soluciones futuras sustituimos $y^+ + y^-$ en la función objetivo por Mx_6, donde M es un número positivo muy grande. El segundo -- paso, muestra que P_2 reemplaza a P_6 en la nueva solución bási ca y que después de haber eliminado P_6 de la solución, volvemos a minimizar la función objetivo original.

TABLA 6. P A S O I N I C I A L

	Base	C		0	0	0	0	0	M	0	0	0
			P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	y^+	y^-
1	P_3	0	4	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	P_4	0	10	3	1	0	1	0	0	0	0	0
3	P_6	M	1	1	2	0	0	-1	1	0	0	0
4	P_7	0	7	1	4	0	0	0	0	1	0	0
5	y^-	0	4	1	2	0	0	0	0	0	-1	1
6	z_j-c_j		M	M	2M	0	0	-M	0	0	0	0

TABLA 6. S E G U N D O P A S O

	Base	C		0	0	0	0	0	–	0	1	1
			P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	y^+	y^-
1	P_3	0	3 1/2	1/2	0	1	0	1/2	–	0	0	0
2	P_4	0	9 1/2	2 1/2	0	0	1	1/2	–	0	0	0
3	P_2	0	1/2	1/2	1	0	0	-1/2	–	0	0	0
4	P_7	0	5	-1	0	0	0	2	–	1	0	0
5	y^-	1	3	0	0	0	0	1	–	0	-1	1
6	z_j-c_j		3	0	0	0	0	1	–	0	-2	0

Por lo tanto, el valor de la nueva función objetivo es: $f = y^{+} + y^{-} = 3$; ya que la solución no es óptima porque existe un valor positivo (1) en el renglón 6 (sin considerar el 3 que es el valor de la función objetivo), de nuevo aplicamos el procedimiento.

TABLA 6. T E R C E R P A S O

	Base	C	P_0	0 P_1	0 P_2	0 P_3	0 P_4	0 P_5	– P_6	0 P_7	1 y^{+}	1 y^{-}
1	P_3	0	2 1/4	3/4	0	1	0	0	–	–1/4	0	0
2	P_4	0	8 1/4	2 3/4	0	0	1	0	–	–1/4	0	0
3	P_2	0	1 3/4	1/4	1	0	0	0	–	1/4	0	0
4	P_5	0	2 1/2	–1/2	0	0	0	1	–	1/2	0	0
5	y^{-}	1	1/2	1/2	0	0	0	0	–	–1/2	–1	1
6	$z_j - c_j$		1/2	1/2	0	0	0	0	–	–1/2	–2	0

En este caso el valor de la nueva función objetivo es $f = C\,P_0 = y^{+} + y^{-} = 1/2$ y la nueva solución no es óptima, puesto que en el renglón 6 se tiene un elemento positivo (1/2) que pertenece al vector columna P_1. Antes de encontrar la próxima solución, observamos que el vector que será eliminado de la base es y^{-} que es sustituido por P_1. El procedimiento se aplica de igual forma sin tener ningún cambio, el resultado que se obtiene está asentado en el cuarto paso.

TABLA 6. CUARTO PASO

i	Base	C	P_0	0 P_1	0 P_2	0 P_3	0 P_4	0 P_5	- P_6	0 P_7	1 y^+	1 y^-
1	P_3	0	1 1/2	0	0	1	0	0	-	1/2	3/2	-3
2	P_4	0	5 1/2	0	0	0	1	0	-	2 1/2	5 1/2	-5 1
3	P_2	0	1 1/2	0	1	0	0	0	-	1/2	1/2	-1
4	P_5	0	3	0	0	0	0	1	-	0	-1	1
5	P_1	0	1	1	0	0	0	0	-	-1	-2	2
6	z_j-c_j		0	0	0	0	0	0	-	0	-1	-1

La solución encontrada en este paso es óptima, puesto que en el renglón 6 las z_j-c_j son menores o iguales a cero, don de $x_1 = 1$, $x_2 = 1\ 1/2$, $x_3 = 1\ 1/2$, $x_4 = 5\ 1/2$, $x_5 = 3$ $x_7 = 0$, y $= 0$, $y^- = 0$. El valor de la función objetivo $f = C\ P_0 = y^+ = y$ $= 0$. Al sustituir los valores de las variables de la solución óptima en el sistema de ecuaciones, vemos que las restricciones de capacidad y de capital en giro se satisfacen ampliamente, la de caja exactamente y la ganancia total es de \$ 4.00.

Como la empresa aplica una técnica de satisfacción más bien que de optimización, es conveniente,buscar otras solucio-- nes óptimas, para ésto se analizan las z_j-c_j en el renglón 6 de cuarto paso, si sólo las diferencias correspondientes a los vec res básicos tienen valores de cero, la solución óptima es única, pero si existe $z_j - c_j = 0$ para algún vector que no está en la base, ese vector puede reemplazar a uno de los vectores de la base sin modificar el valor de la función objetivo. Si vemos el cuarto paso, el vector P_7 sustituye al vector P_4 y al aplicar el procedimiento de eliminación, obtenemos el cuarto paso modificado.

TABLA 6. C U A R T O P A S O - V A R I A C I O N

	Base	C	P_0	0 P_1	0 P_2	0 P_3	0 P_4	0 P_5	0 P_6	0 P_7	1 y^+	1 y^-
1	P_3	0	2/5	0	0	1	-1/2	0	-	0	2/5	-2/5
2	P_7	0	2 1/5	0	0	0	2/5	0	-	1	11/5	-11/5
3	P_2	0	2/5	0	1	0	-1/5	0	-	0	-6/10	6/10
4	P_5	0	3	0	0	0	0	1	-	0	-1	1
5	P_1	0	3 1/5	1	0	0	2/5	0	-	0	1/5	-1/5
6	z_j-c_j		0	0	0	0	0	0	-	0	-1	-1

La nueva solución óptima tiene $x_1 = 3\ 1/5$, $x_2 = 2/5$, $x_3 = 2/5$, $x_4 = 0$, $x_5 = 3$, $x_7 = 2\ 1/5$, $y^+ = 0$, $y^- = 0$, y el valor de la función objetivo $f = y^+ + y^- = 0$. Como las ventas totales se determinan por la ecuación $2x_1 + 6x_2$, y el efectivo al final del período es igual al saldo en caja mas la ganancia. - - --
Con esta información hacemos un análisis de las dos soluciones óptimas: en la primera, la empresa tendrá ventas por $ 11.00, -

concluirá el período 1 con \$ 4.00 en efectivo y \$ 11.00 en créditos. Con el óptimo actual, la empresa tendrá \$ 8.80 en ventas, concluirá con \$ 6.20 efectivo y \$ 8.80 en créditos. Por supuesto, ambas soluciones producen a la empresa una ganancia neta idéntica de \$ 2.00.

Es más, considerando que las soluciones que se obtienen mediante el algoritmo simplex son todas soluciones básicas. Existe un teorema de la programación lineal donde se afirma, que si un problema tiene más de una solución factible básica óptima, cualquier combinación convexa• de estas soluciones es también una solución óptima.

Demostración. Suponemos que existen cuando menos dos soluciones X_1 y X_2. Entonces $AX_1 = b$ para $X_1 \geq 0$; $AX_2 = b$ para $X_2 \geq 0$. Sea $X = aX_1 + (1-a) X_2$ cualquier combinación convexa de X_1 y X_2 con $0 \leq a \leq 1$. Observamos que todos los elementos del vector X son no negativos; es decir, $X \geq 0$ y al multiplicarlo por A tenemos $AX = A\left[aX_1 + (1-a) X_2\right] = a AX_1 + (1-a) AX_2 = ab + b - ab = b$, lo que implica que X es también una solución posible.

• Una combinación convexa de los puntos $U_1, U_2, \ldots, U_n$ es un punto

$U = e_1 U_1 + e_2 U_2 + \ldots + e_n U_n$

donde las e_i son escalares, $e_i \geq 0$, y $\sum_i e_i = 1$

Por consiguiente, considerando un promedio aritmético de las dos soluciones óptimas, tenemos:

$U = e_1 U_1 + e_2 U_2$ donde $e_1 = 0.5$ y $e_2 = (1-e_1) = 0.5$

$U = 0.5\ (x_1 = 1,\ x_2 = 1.5,\ x_3 = 1.5,\ x_4 = 5.5,\ x_5 = 3,$
$x_7 = 0)$

$+ 0.5\ (x_1 = 16/5,\ x_2 = 2/5,\ x_3 = 2/5,\ x_4 = 0,\ x_5 = 3,$
$x_7 = 11/5)$

$U = (x_1 = 21/10,\ x_2 = 9.5/10,\ x_3 = 9.5/10,\ x_4 = 5.5/2,$
$x_5 = 3,\ x_7 = 11/10)$

Esta nueva solución es un ejemplo de una combinación convexa de las dos soluciones originales, además es óptima. Si hacemos variar las ponderaciones, podemos generar un número infinito de soluciones óptimas.

En el problema que hemos resuelto, observamos que la programación lineal y la programación de metas, se han aplicado al período 1. Para saber ¿en qué situaciones la programación de metas es más eficaz que la programación lineal? es necesario hacer el siguiente análisis. En primer lugar, la programación de metas es aplicable para promover la coordinación de actividades en una empresa, es decir, cuando la empresa fija un objetivo, los diferentes departamentos pueden planear coordinadamente sus actividades. En segundo lugar, la programación de metas es particularmente útil, en aquellos casos en que el gerente de una empresa procura encontrar a los problemas, soluciones satisfactorias en lugar de óptimas, por ejemplo, un gerente de ventas, que ha obtenido durante muchos años el 50% de las ventas de la industria, puede considerar que la diferencia entre el 48 y el 50 por ciento, es considerablemente más significativa que la diferencia entre el 58 y el 60 por ciento. En lugar de esforzarse por cubrir una parte cada vez mayor del mercado, es posible que este gerente de ventas, quiera mantener la que ahora controla, y que le parece una solución bastante satisfactoria. En tercer lugar, incluso cuando el propósito general de la firma es maximizar la ganancia, la programación de metas continúa siendo preferible si hay metas múltiples.

Como se indicó antes, cuando la administración se propone varias metas, la programación lineal incorpora sólo una de ellas a la función objetivo y trata como restricciones las restantes. Puesto que la solución óptima debe satisfacer todas las restricciones, esta estructuración del problema implica que 1) las diferentes metas dentro de las ecuaciones de restricción tienen la misma importancia para la administración y 2) estas metas tienen prioridad absoluta sobre la meta incorporada a la función objetivo. Ahora si la administración desea incorporar varias metas a la función objetivo, aún más si asigna prioridades entre ellas, encontramos que este tipo de problemas no se puede resolver por la programación lineal, mientras que la programación de metas está en condiciones de hacerlo. Esta flexi bilidad de la programación de metas en el tratamiento de varias metas, es importante sobre todo en situaciones en que las metas de la administración se contradicen y por lo tanto, no se pueden satisfacer todas plenamente.

2.3.1 Metas múltiples compatibles

En esta parte, presentamos cómo la programación de metas, incorpora varias metas en la función objetivo, que tienen prioridad absoluta unas sobre otras. Sin embargo, en la programación lineal corriente, se puede incorporar en la función objetivo varias metas sólo cuando éstas tienen prioridad relativa y ninguna con prioridad absoluta. Para eso, analizaremos una situación en la cual todas las metas múltiples de una empresa son realizables, ésto es, suponiendo que el fabricante de radios y televisores fije su meta de ganancia en \$ 3.50. En el examen anterior, se consideró el objetivo de ganancias como una meta administrativa y los requerimientos de liquidez como restricciones ambientales, lo que implica que los requerimientos de liquidez deben satisfacerse antes de alcanzar el objetivo de ganancias. Ahora tanto la liquidez como la rentabilidad serán tratadas como metas de la administración; además, la administración considera la realización de su objetivo de ganancias como un resultado mucho más importante que la realización de sus objetivos de liquidez.

El problema modificado, se puede formular de la siguiente manera: hallar el valor de x_1 y x_2 que satisface las restricciones que indicaremos y al mismo tiempo minimiza_ el valor de la función objetivo.

$$\text{Minimizar } My_3^- + 0y_3^+ + Ny_2^- + Ny_2^+ + 2Ny_1^- + 0y_1^+$$

sujeta a las condiciones

$$x_1 + x_2 \leq 4 \text{ (restricción de capacidad)}$$
$$3x_1 + x_2 \leq 10 \text{ (restricción de capacidad)}$$
$$x_1 + 2x_2 - y_1^+ + y_1^- = 1 \text{ (restricción de capital en gir}$$
$$x_1 + 4x_2 - y_2^+ + y_2^- = 7 \text{ (restricción de saldo de caja)}$$
$$x_1 + 2x_2 - y_3^+ + y_3^- = 3.5 \text{ (meta de ganancia)}$$

y

$$x_1, x_2, y_i^+, y_i^- \geq 0; \text{ para } i = 1,2,3$$

donde M y N son constantes y $M \gg N$ significa que M es tan ma_ yor que N, de manera que no existe un número k, tal que $kN \geq M$.

En la función objetivo, las variables que tienen coefi_ ciente cero, que son y_3^+, y_1^+ significa que la administración es_ indiferente a los valores asumidos por estas variables de exce_ dentes. El registro de y_2^+ e y_2^- en la función objetivo, signif_ ca que la administración considera que tanto un excedente como_ un déficit de caja son igualmente indeseables. Al asignar el coeficiente M a y_3^- la administración concede prioridad absolut_ a su meta de ganancia. Al asignar N a y_2^-, y_2^+ y 2N a y_1^- la adm_ nistración nos dice, que una vez satisfecha su meta de gananci_ las restantes metas de liquidez deben realizarse tomando en cu_ ta que la restricción del capital neto en giro tiene doble importancia que la restricción del saldo de caja.

Para resolver este problema, aplicamos el procedimiento simplex, en este caso sin detallar el cálculo, exponemos las siguientes soluciones viables básicas óptimas: solución 1. -- $x_1 = 0$, $x_2 = 1.75$, $x_3 = 2.25$, $x_4 = 8.25$; $y_1^+ = 2.5$, $y_1^- = 0$, $y_2^+ = 0$, $y_2^- = 0$, $y_3^+ = 0$, $y_3^- = 0$. Al sustituir estas variables en el sistema de inecuaciones, encontramos que las restricciones de capacidad están ampliamente satisfechas, los objetivos de capital neto en giro se han superado, el objetivo de saldo en caja se ha realizado exactamente, y la meta de ganancia se ha alcanzado exactamente.

Solución 2. $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 4$, $y_1^+ = 4$, $y_1^- = 0$, $y_2^+ = 0$, $y_2^- = 0$, $y_3^+ = 1.5$, $y_3^- = 0$. de la misma manera que en la solución anterior, tenemos que las restricciones de capacidad se han cumplido exactamente, se alcanzó con exceso el capital neto en giro, se realizó exactamente el objetivo de saldo de caja, y se sobrepasó el objetivo de ganancias.

Puesto que existen dos soluciones viables básicas óptimas, entonces cualquier combinación convexa de estas dos soluciones es también una solución óptima, por lo que podemos deducir, que hay un número infinito de soluciones óptimas.

2.3.2 Metas múltiples incompatibles.

Modificando nuestro problema de ejemplo. Supongamos que el fabricante de radios y televisores, desea obtener una ganancia superior a \$ 3.50, que puede ser una ganancia que se aproxime todo lo posible a \$ 6.00. La manera como la administración clasifica a sus diferentes metas, consiste en asignar prioridad absoluta a su meta de ganancia de \$ 6.00. Satisfecho este objetivo, la administración desea tener un saldo de caja de \$ 4.00 y un capital neto en giro de \$ 6.00. Además, desea que su saldo de caja se acerque todo lo posible a su objetivo, considera que es aceptable sobrepasar su objetivo del capital neto en giro, y estima que la restricción del capital en giro tiene doble importancia que la restricción de saldo de caja.

La formulación matemática del nuevo problema es:

$$\text{Minimizar } My_3^- + My_3^+ + Ny_2^- + Ny_2^+ + 2Ny_1^-$$

sujeta a las condiciones

$$\begin{array}{lll} x_1 + x_2 & \leq 4 & \text{(Capacidad)} \\ 3x_1 + x_2 & \leq 10 & \text{(Capacidad)} \\ x_1 + 2x_2 - y_1^+ + y_1^- & = 1 & \text{(Capital de giro)} \\ x_1 + 4x_2 - y_2^+ + y_2^- & = 7 & \text{(Saldo de caja)} \\ x_1 + 2x_2 - y_3^+ + y_3^- & = 6 & \text{(Meta de ganancia)} \end{array}$$

y

$$x_1,\ x_2,\ y_i^+,\ y_i^- \geq 0, \quad i = 1,2,3$$

resolviendo este problema modificado mediante el método simplex, obtenemos la siguiente solución óptima única: $x_1 =$

2, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $y_1^+ = 5$, $y_1^- = 0$, $y_2^+ = 3$, $y_2^- = 0$, $y_3^+ = 0$, $y_3^- = 0$. Al sustituir estos valores en las ecuaciones comprobamos que la restricción de tiempo de armado se alcanza exactamente, la del tiempo de las máquinas se satisface ampliamente, se alcanza con exceso el objetivo del capital neto en giro, no se satisface totalmente el objetivo del saldo de caja, y se realiza exactamente el objetivo de ganancias.

Desde luego, existe un número infinito de combinaciones de x_1 y x_2 que aportarán la ganancia deseada de $ 6.00. Tomando en cuenta que sólo los valores indicados en la solución son óptimos, ya que cualquier otra solución que tenga $ 6.00 de ganancia no cumplirá las restricciones físicas o determinará una desviación mayor respecto al objetivo del saldo de caja.

Existen dos observaciones fundamentales que se derivan de ese problema: en la primera, la meta de ganancias y la meta del saldo mínimo de caja son incompatibles, porque no se pueden satisfacer simultáneamente. Puesto que la meta de ganancias tiene prioridad absoluta, nunca puede realizarse la meta de saldo de caja. Para la segunda, si el problema se hubiera formulado como un problema de programación lineal, considerando los objetivos del capital neto en giro y del saldo de caja como restricciones, la solución óptima aportaría una ganancia de $ 5.00, que es $ 1.00 inferior a la meta fijada por la empresa. Por otra parte, si la meta de ganancias y la meta de saldo mínimo de caja se hubieran considerado como restricciones, sin impor--

tar cual fuese la función objetivo, no podría haber solución.

2.4 El método simplex dual

En este punto deseamos desarrollar un procedimiento de cómputo para el dual que proporcione una solución maximizante y por los teoremas de dualidad una solución minimizante en el primal. Este procedimiento deberá determinar una nueva base para la cual:

- Las desigualdades del dual continuarán cumpliéndose
- El valor de la función objetivo del dual aumentará o permanecerá igual hasta obtener la solución máxima o ilimitada.

De esta manera se conserva la optimalidad del primal y, en un número finito de pasos, se obtiene una solución posible y óptima primal.

Para analizar el procedimiento general, expresamos nuestro problema en la forma siguiente:

Minimizar CX

sujeta a las condiciones

$AX = b$

$X \geq 0$

con su problema dual

Maximizar Wb

sujeta a las condiciones

$$WA \leq C$$

supongamos que hemos seleccionado una base $B = (P_1, P_2, \ldots P_m)$ - tal, que al menos un elemento de $B^{-1}b$ sea negativo y $C^0B^{-1}P_j \leq C_j$ para todas las j. Una solución a las restricciones del dual está dada por $W^0 = C^0B^{-1}$ siendo el correspondiente valor de la función objetivo $C^0B^{-1}b$

Si expresamos los renglones de B^{-1} por B_i, tenemos - que las m componentes de la solución no posible del primal, se presentan por $x_{i0} = B_ib$ para $i = 1,2,\ldots,m$. La selección del vector que será eliminado de la base, se hace tomando el mínimo de las x_{i0} negativas, ésto es, sea $X_{l0} = B_lb = \min_i \{B_ib\} < 0$ que corresponde al vector P_l. Para los vectores que no se encuentran en la base, que son aquellos que satisfacen $W^0P_j < C_j$, computamos los elementos $x_{lj} = B_lP_j$ y suponemos que al menos - uno es negativo $x_{lj} < 0$. Ahora la elección del vector que reemplazará a P_l, se obtiene del conjunto de elementos $x_{lj} < 0$, - estableciendo las relaciones $(z_j - c_j)/x_{lj}$ y escogiendo la mínima de ellas, es decir, $\theta = \min\limits_{x_{lj} < 0} \frac{z_j - c_j}{x_{lj}} = \frac{z_k - c_k}{x_{lk}} > 0$ (1)

que corresponde al vector P_k, por lo tanto, la nueva base proveerá una solución a las restricciones del dual, que tiene como vectores componentes a

$$\bar{B} = (P_1 \ldots P_{l-1} P_k \; P_{l+1} \ldots P_m)$$

y la inversa $\bar{B}^{-1}$ se obtiene al aplicar las fórmulas de eliminación sobre la inversa B^{-1}. La nueva solución a las restricciones del dual se representa

$$\bar{W} = W^0 - \theta B_1 \qquad (2)$$

y el valor que toma la función objetivo es

$$\bar{W}b = W^0 b - \theta X_{10} \qquad (3)$$

El cálculo de la nueva solución a las restricciones de primal se hace aplicando las fórmulas de eliminación usuales, directamente por $\bar{X} = \bar{B}^{-1}b$. Si todas las $\bar{X}$ son no negativas - $\bar{X} \geq 0$ la solución posible al primal que se obtiene es óptima. En caso de no ser así, al menos $\bar{X}_{10} = \bar{B}_1 b < 0$ que nos indica repetir el proceso simplex dual anterior, hasta encontrar una base que resuelve el dual y también es una base admisible para el primal, o bien, hasta determinar que el dual tiene una solución ilimitada, entonces para el primal no existen soluciones posibles. Este último caso se presenta, al calcular los elementos $x_{1j} = B_1 P_j$, todos ellos son no negativos $x_{1j} \geq 0$. Al ocurrir ésto, se puede construir una solución a las restricciones del dual para cualquier $\theta > 0$ a través de (1) y (2), puesto que

$$(W^0 - \theta B_1)\, P_j = W^0 P_j - \theta B_1 P_j \leq W^0 P_j < C_j$$

por (3) el valor correspondiente de la función objetivo, puede hacerse tan grande como sea posible, puesto que $x_{10} < 0$. Este estado se puede ver en la tabla del primal, donde todos los $x \geq 0$, $x_{10} < 0$, con la inferencia que la 1-ésima ecuación, ha sido transformada a una suma no negativa de variables no negativas, y que es igual a un número negativo. Las aplicaciones del procedimiento dual simplex pueden considerarse como una variación del procedimiento simplex original o del procedimiento revisado por utilizar la información contenida en sus respectivas tablas.

Ejemplo del método dual, sea el siguiente problema

$$\text{Minimizar} \quad x_3 + x_4 + x_5$$

sujeta a las condiciones

$$x_1 - x_3 + x_4 - x_5 = -2$$

$$x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1$$

y

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,3,4,5)$$

el problema dual es

$$\text{Maximizar} \quad -2w_1 + w_2$$

con las restricciones

$$W_1 \leq 0$$

$$W_2 \leq 0$$

$$-W_1 - W_2 \leq 1$$

$$W_1 - W_2 \leq 1$$

$$-W_1 + W_2 \leq 1$$

Al expresar el primal en la tabla simplex usual tenemos

i	Base	C	P_0	$\overset{0}{P_1}$	$\overset{0}{P_2}$	$\overset{1}{P_3}$	$\overset{1}{P_4}$	$\overset{1}{P_5}$
1	P_1	0	-2	1	0	-1	1	-1
2	P_2	0	1	0	1	-1	-1	1
3	$z_j - c_j$		0	0	0	-1	-1	-1

Los vectores P_1 y P_2 forman una base inicial

$$B = (P_1 P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como todos los elementos $z_j - c_j$ son no positivos, la base B es una base posible para el dual, pero no posible para el primal. La solución para el problema dual se calcula

$$W^0 = C^0 B^{-1} b = (0,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,0)$$

y el valor de la función objetivo es

$$W^0 b = C^0 B^{-1} b = (0,0) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

continuando con el procedimiento, el vector que se elimina - de la base es

$$x_{10} = \min_i \; B_i b < 0$$

$x_{10} = -2$ que corresponde al vector P_1; y el vector que se introduce a la base, se obtiene calculando para el conjunto de $x_{1j} < 0$

$$0 = \min_{x_{1j} < 0} \frac{z_j - c_j}{x_{1j}}; \left[\frac{z_3 - c_3}{x_{13}} , \frac{z_5 - c_5}{x_{15}} \right] = \left[\frac{-1}{-1} , \frac{-1}{-1} \right] = (1,1)$$

puesto que existe empate entre el vector P_3 y el P_5, seleccionamos el que tiene el índice menor P_3, entonces el elemento pivote es -1 que se encuentra en la intersección del vector renglón P_1 y el vector columna P_3, y al aplicar el procedimiento de eliminación, nos proporciona la nueva tabla

	Base	C	P_0	0 P_1	0 P_2	1 P_3	1 P_4	1 P_5
1	P_3	1	2	-1	0	1	-1	1
2	P_2	0	3	-1	1	0	-2	2
3	z_j-c_j		2	-1	0	0	-2	0

Como todas las $x_{i0} \geq 0$ y las $z_j-c_j \leq 0$, la base que se encontró, es una base admisible óptima para el primal y para el dual formado por los vectores P_2 y P_3. La solución óptima al primal es $x_3 = 2$ y $x_2 = 3$ y la del dual $w_1 = -1$ y $w_2 = 0$, con un valor óptimo común de 2 para la función objetivo. Como la solución y restricciones del dual corresponden a los vectores de la base, podemos comprobar que la primera y cuarta restricción se satisfacen ampliamente, mientras que en la segunda, tercera y quinta, se cumple la igualdad.

2.5 Programación lineal de enteros

Desde su introducción como una herramienta de la matemática aplicada, el más importante y notable problema de cómputo de la programación lineal, ha sido el de encontrar una solución óptima expresada en números enteros para un programa lineal. Esto es a consecuencia del gran número de problemas surgidos del campo del análisis combinatorio y en áreas, tales como programación y producción, donde todo ésto, ha sido formulado por medio de modelos de programación lineal.

Como en la mayoría de los casos, existen diferencias significativas entre los métodos de programación lineal y programación entera, cuando éstos se aplican para la resolución del mismo problema, por lo que, es conveniente que de acuerdo a las características del problema, se asigne el método más indicado para encontrar la solución óptima, por lo tanto, presentamos el problema general de programación entera y uno de los algoritmos más eficientes, desarrollado por Gomory para resolver este tipo de problemas.

El problema de programación entera, es encontrar un vector X que minimice la función objetivo CX, sujeta a AX=b con X $\geq$ 0, y la condición adicional (no lineal) de que los valores del vector solución óptima sean enteros.

El algoritmo de Gomory supone que el problema --

está dado en enteros y que se transforma mediante un algoritmo simplex modificado, el que conserva las características de valores enteros de la tabla completa para todas las iteraciones.

El algoritmo se inicia con una solución factible para el dual, pero no para el primal. Esto es, sea $P_1, P_2, \ldots, P_m$ una base factible para el problema dual; que está expresada en la tabla 7 para un problema de minimización. En esta tabla, el valor de la función objetivo está representado por - - x_{00}; la solución no es factible para el primal si existen algunas $x_{i0} < 0$ para $i \geq 1$; pero lo es para el dual si se cumple que $x_{0j} = z_j - c_j \leq 0$ para $j \geq 1$; y un conjunto adicional de n-m restricciones $x'_j - x_j = 0$ para $j = m+1, \ldots, n$ con -- $x'_j \geq 0$ y $c'_j - c_j$ ha sido agregada a la tabla. Con este conjunto de restricciones, podemos determinar una solución básica factible que contenga n variables no negativas en lugar de las m que son las usuales.

Ahora introducimos nuevas variables a la solución, de manera que se conserven las características enteras - de la tabla y permita acercarnos a la solución óptima entera - que se localiza en el conjunto convexo definido por las ecuaciones de la tabla 7. Esto lo haremos determinando los hiperplanos de corte definidos como desigualdades en términos de --

TABLA 7.

	Base	C	P_0	c_1 P_1	c_2 P_2	...	c_l P_l	...	c_m P_m	c_{m+1} P_{m+1}	...	c_n P_n	c_{m+1} P'_{m+1}	...	c_n P'_n	P_{n+s}
0			x_{00}	0	0	.	.	.	0	$x_{0,m+1}$	...	$x_{0,n}$	0	...	0	
1	P_1	c_1	x_{10}	1	0	...	0	...	0	$x_{1,m+1}$	...	$x_{1,n}$	0	...	0	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮			⋮		⋮	
l	P_l	c_l	x_{l0}	0	0	...	1	...	0	$x_{l,m+1}$	...	$x_{l,n}$	0	...	0	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮			⋮		⋮	
m	P_m	c_m	x_{m0}	0	0	...	0	...	1	$x_{m,m+1}$	...	$x_{m,n}$	0	...	0	
m+1	P'_{m+1}	c_{m+1}	0	0	0	...	0	...	0	−1	...	0	1	...	0	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮			⋮		⋮	
n	P'_n	c_n	0	0	0	...	0	...	0	0	...	−1	0	...	1	
n+1			....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....

las variables no básicas y de un nuevo vector de holgura. Cuando se introduce un nuevo vector de holgura en la base con un -- elemento pivote de -1, se conserva la tabla de enteros y el punto de solución se aproxima al punto óptimo entero. Al aplicar un número finito de estas nuevas restricciones encontramos la - solución óptima entera.

Se ha hablado de hiperplano de corte, o restricción de corte pero se desconoce su forma, para solventar ésto, seleccionamos cualquier ecuación de la Tabla 7 que corresponda a una -- $x_{i0} < 0$, que puede ser la ecuación 1-ésima que presentamos como

$$x_{10} = x_1 + x_{1,m+1}x_{m+1} + x_{1,m+2}x_{m+2} + \dots + x_{1n}x_n \qquad (1)$$

en donde $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ son variables no básicas.

Ahora cada coeficiente de la expresión (1) lo escribimos como un múltiplo de un entero y un residuo, o sea, en la forma $b_{1j}m + r_{1j}$ en donde b_{1j} es un entero, r_{1j} es un residuo y m es un número positivo por determinar, entonces los coeficientes - se pueden expresar como

$$x_{1j} = b_{1j}m + r_{1j} = \left[\frac{x_{1j}}{m}\right] m + r_{1j} \quad \text{para toda } j$$

$$1 = \left[\frac{1}{m}\right] m + r \qquad (2)$$

$$0 \leq r_{1j} < m, \ 0 \leq r < m, \ 0 < m$$

en donde los paréntesis cuadrados indican la parte entera de.

En el caso que $x_{1j}/m < 0$, tenemos $\left[x_{1j}/m\right] = b_{1j} < 0$ puesto que $b_{1j}m + r_{1j} = x_{1j}$ cuando $m > 1$ tenemos $\left[1/m\right] = 0$

Si sustituimos (2) en (1) tenemos

$$\left[\frac{x_{10}}{m}\right]m + r_{10} = \left(\left[\frac{1}{m}\right] m + r\right)x_1 + \left(\left[\frac{x_{1,m+1}}{m}\right] m + r_{1,m+1}\right)x_{m+1} + \left(\left[\frac{x_{1,m+2}}{m}\right] m + r_{1,m+2}\right)x_{m+2} + \cdots + \left(\left[\frac{x_{1n}}{m}\right] m + r_{1n}\right) x_n$$

Al aplicar la ley distributiva y asociar en el primer miembro todos los términos que contienen la parte entera de, con sus respectivas variables no básicas y el término r_{10}, nos queda

$$r_{10} + m\left(\left[\frac{x_{10}}{m}\right] - \left[\frac{x_{1,m+1}}{m}\right]x_{m+1} - \left[\frac{x_{1,m+2}}{m}\right] x_{m+2} - \cdots - \left[\frac{x_{1n}}{m}\right]x_n - \left[\frac{1}{m}\right] x_1\right) = r_{1,m+1}\, x_{m+1} + r_{1,m+2}\, x_{m+2} + \cdots + r_{1n}\, x_n + r x_1 \quad (3)$$

Si analizamos el segundo miembro de (3) encontramos que es un número no negativo, ya que, cualquier valor entero no negativo de las variables que satisfacen la ecuación (1), satisfacerá también la ecuación (3).

La cantidad que tenemos entre llaves la denotamos por x_{n+s} y al expresarla como suma nos queda

$$x_{n+s} = \left[\frac{x_{10}}{m}\right] - \sum_{j \neq \text{base}} \left[\frac{x_{1j}}{m}\right] x_j - \left[\frac{1}{m}\right] x_1$$

En donde x_{n+s} debe ser un entero no negativo. La primera parte se cumple, porque todos los variables y cantidades entre paréntesis cuadrados son enteros. En la segunda parte sabemos que $r_{10} < m$ y, si x_{n+s} fuera entero negativo, esto implica, que el primer miembro en (3) sería negativo, el cual, contradice el enunciado de que el segundo miembro es no negativo. Este entero no negativo x_{n+s} es el que se introduce como una nueva variable del problema.

Si restringimos a que $m > 1$, la expresión x_{n+s} se convierte en

$$x_{n+s} = \left[\frac{x_{10}}{m}\right] - \left[\frac{x_{1,m+1}}{m}\right] x_{m+1} - \left[\frac{x_{1,m+2}}{m}\right] x_{m+2} - \cdots - \left[\frac{x_{1n}}{m}\right] x_n$$

o bien

$$x_{n+s} = b_{10} - b_{1,m+1} x_{m+1} - b_{1,m+2} x_{m+2} - \cdots - b_{1n} x_n$$

al ordenar los términos tenemos

$$b_{10} = b_{1,m+1} x_{m+1} + b_{1,m+2} x_{m+2} + \cdots + b_{1n} x_n + x_{n+s} \tag{4}$$

Para cualquier $m > 1$, la ecuación (4) es una restricción que debe satisfacerse para cualquier solución entera al problema original de programación lineal. Después de seleccio nar adecuadamente m, la ecuación (4) puede ser utilizada como una restricción de corte.

Conocemos que $b_{10} < 0$, al suponer que $x_{10} < 0$. Como el método simplex dual es el que se está aplicando, existen - algunas $x_{ij} < 0$ para j que no está en la base, en caso contrario el problema no es factible. Si seleccionamos una m suficientemente grande, todas $\left[x_{1j}/m\right]$ para $x_{1j} < 0$ dan una $b_{1j} = -1$; significa que existe un elemento pivote -1 que permite -- conservar a la tabla entera. Sin embargo, por las transformaciones del simplex dual, sabemos que una m pequeña produce un mayor incremento en la función objetivo que una m grande, - - puesto que este cambio está en función directa de $b_{10} = \left[x_{10}/m\right] < 0$; ésto es, el nuevo valor de la función objetivo -- está dado por

$$x_{00} - \frac{x_{0k}}{-1} b_{10} = x_{00} + x_{0k}b_{10} = x_{00} + (z_k - c_k)\left[x_{10}/m\right]$$

en donde P_k, la columna pivote, debe ser tal que

$$\theta = \min_{x_{1j} < 0} \frac{x_{0j}}{-1} = \frac{z_k - c_k}{-1}$$

(cuando $z_k - c_k = 0$ indica que el problema dual es degenerado)

Para seleccionar m de una manera precisa, analizaremos lo siguiente: como m debe ser seleccionada de manera que $b_{1k} = \left[x_{1k}/m\right] = -1$, tenemos que

$$\theta = \min_{x_{1j} < 0} \frac{z_j - c_j}{x_{1j}} = \frac{z_k - c_k}{x_{1k}} > 0$$

de donde

$$\frac{z_k-c_k}{\left[x_{1k}/m\right]} = \frac{z_k-c_k}{-1} \leq \frac{z_j-c_j}{\left[x_{1j}/m\right]} = \frac{z_j-c_j}{b_{1j}} \text{ para } x_{1j} < 0$$

o

$$\frac{z_k-c_k}{-1} \leq \frac{z_j-c_j}{b_{1j}}$$

Si tomamos a n_j como el entero máximo para el cual

$$\frac{z_k-c_k}{-1} \leq \frac{z_j-c_j}{-n_j}$$

entonces

$$-\ b_{1j} = -\left[\frac{x_{1j}}{m}\right] \leq n_j \text{ para } x_{1j} < 0 \qquad (5)$$

por lo tanto, para cada j, la m más pequeña que satisface (5) y hace que P_k se convierta en la columna pivote, es decir, -- tiene un elemento pivote $b_{1k} = -1$, se calcula por $m_j = -(x_{1j}/n_j)$. Pero la m mínima admisible debe ser por lo menos -- tan grande como la m_j mayor, por lo que $m_{mín} = \max\limits_{x_{1j}<0} m_j$

En el caso que $m_{mín} = m_k = -x_{1k} = 1$, resulta que el elemento pivote es un -1, por lo cual construimos una restricción de corte adecuada, considerando únicamente las variables no básicas de la ecuación, lo que nos permite seleccionar una $m > 1$.

m se definió como un número positivo por determinar, pero no está restringida a ser un entero, y para P_k tenemos -que $m_k = 1$, con $m_k = -x_{1k}$, por lo tanto, $m_{mín} \geqq m_k$; de donde, $b_{1k} = \left[x_{1k}/m_{mín}\right] = -1$.

2.6 Programación dinámica.

Uno de los métodos más eficaces para encontrar el óptimo de una función objetivo asignada a un fenómeno económico, fué desarrollado por el matemático Richard Bellman. Su aplicación no se limita al campo de la economía, sino puede extenderse con resultados igualmente valiosos para la investigación en la física o en las matemáticas puras. El método se fundamenta en un "principio de optimidad", que nosotros llamaremos Teorema. La importancia de este principio y la eficacia de los métodos de optimización secuenciales a los que ha dado origen, se evidencían cuando se conoce que numerosos problemas económicos son de tipo secuencial. Nuestro análisis se limita a los problemas que implican variables discretas.

Optimización secuencial

Función separable en fases. Sea F una función de N+1 variables, definida por la regla de correspondencia

$$F\ (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = v_1(x_0, x_1) + v_2(x_1, x_2) + \ldots + v_N(x_{N-1}, x_N)$$

que es por hipótesis, separable en una suma de N funciones elementales.

$$v_n(x_{n-1}, x_n)\ ,\ \text{para } n = 1, 2, \ldots, N$$

Deseamos ahora encontrar el valor máximo (o mínimo) de la función F, conociendo que cada magnitud x_n puede variar entre límites que sólo dependen de x_0 y x_{n+1} sea cual sea n entre 1 y N.

Por la regla de correspondencia de F, y los límites de variación de las variables, podemos considerar un sistema de N fases, en el que, $v_n(x_{n-1},x_n)$ para $n=1,2,\ldots,N$ sería la función objetivo asignada a cada fase y F la función objetivo asignada al conjunto de todas las fases.

Sea un sistema que puede cambiar de estado en cada fase por una decisión, siendo el número de estados en cada fase k ($k=0,1,2,\ldots,N$) finito o no, pero numerable. Llamaremos política una cierta sucesión de decisiones de $k=0$ a $k=N$, o sea un conjunto de N+1 valores como x_0, x_1, $x_2,\ldots,x_N$. Denominamos subpolítica una serie de decisiones unitivas que forman parte de una política, o sea un conjunto de valores particulares como x_j, x_{j+1}, $x_{j+2},\ldots,x_k$ con $0 \leq j \leq k \leq N$. Entonces, si asignamos una función objetivo relativa a los cambios de estado, y si nos proponemos optimizar esta función,el teorema siguiente es válido; "Una política óptima sólo puede estar formada por subpolíticas óptimas", que es el teorema de optimidad.

En algunos problemas la separación en fases puede hacerse de cualquier manera, denominando a estos sistemas "no ordenados". En caso contrario, el sistema será "ordenado", si se presenta bajo una forma secuencial. Este último caso es el que vamos a analizar.

Para encontrar el valor máximo (o mínimo) de F utilizaremos el teorema de optimidad•, que es válido tanto para el

---

• El teorema de optimidad lo enunció Bellman bajo la forma de un principio general: "Una política es óptima si en un período (fase) dado, cualquiera que sean las decisiones precedentes, las decisiones que queden por tomar constituyen una política óptima, teniendo en cuenta los resultados de las decisiones precedentes".

caso de variables discretas como para las contínuas en un inter-
valo.

Consideremos un sistema de N fases, y tomemos las fases 1 y 2 en conjunto, y denominamos $f_{0,2}(x_0,x_2)$ el valor óptimo de la suma

$$v_1(x_0,x_1) + v_2(x_1,x_2)$$

cuando x_1 varía en su dominio, que está definido por x_0 y x_2. Tomando en cuenta que deseamos encontrar el valor máximo (el procedimiento que indicamos también es válido para encontrar el valor mínimo), tenemos que:

$$f_{0,2}(x_0,x_2) = \max_{x_1 \in X_1(x_0,x_2)} \left[v_1(x_0,x_1) + v_2(x_1,x_2)\right]$$

donde $x_1 \in X_1(x_0,x_2)$ significa que x_1 pertenece a un conjunto de valores X_1 que tiene como elementos a x_0 y x_2. El valor o los valores de x_1 que optimicen

$$v_1(x_0,x_1) + v_2(x_1,x_2)$$

definirán la(s) política(s) óptima(s) para las fases 1 y 2, y para las variables x_0 y x_2 consideradas.

Analicemos ahora las tres primeras fases juntas (1, 2,3) y llamenos $f_{0,3}(x_0,x_3)$ al valor óptimo de la suma

$$v_1(x_0,x_1) + v_2(x_1,x_2) + v_3(x_2,x_3)$$

cuando varía x_1 y x_2 en sus dominios respectivos. Por el teorema de optimidad tenemos

Por la regla de correspondencia de F, y los límites de variación de las variables, podemos considerar un sistema de N fases, en el que, $v_n(x_{n-1},x_n)$ para $n=1,2,\ldots,N$ sería la función objetivo asignada a cada fase y F la función objetivo asignada al conjunto de todas las fases.

Sea un sistema que puede cambiar de estado en cada fase por una decisión, siendo el número de estados en cada fase k ($k=0,1,2,\ldots,N$) finito o no, pero numerable. Llamaremos política una cierta sucesión de decisiones de $k=0$ a $k=N$, o sea un conjunto de N+1 valores como $x_0, x_1, x_2,\ldots,x_N$. Denominamos subpolítica una serie de decisiones unitivas que forman parte de una política, o sea un conjunto de valores particulares como $x_j, x_{j+1}, x_{j+2},\ldots,x_k$ con $0 \leq j \leq k \leq N$. Entonces, si asignamos una función objetivo relativa a los cambios de estado, y si nos proponemos optimizar esta función, el teorema siguiente es válido; "Una política óptima sólo puede estar formada por subpolíticas óptimas", que es el teorema de optimidad.

En algunos problemas la separación en fases puede hacerse de cualquier manera, denominando a estos sistemas "no ordenados". En caso contrario, el sistema será "ordenado", si se presenta bajo una forma secuencial. Este último caso es el que vamos a analizar.

Para encontrar el valor máximo (o mínimo) de F utilizaremos el teorema de optimidad•, que es válido tanto para el

---

• El teorema de optimidad lo enunció Bellman bajo la forma de un principio general: "Una política es óptima si en un período (fase) dado, cualquiera que sean las decisiones precedentes, las decisiones que queden por tomar constituyen una política óptima, teniendo en cuenta los resultados de las decisiones precedentes".

caso de variables discretas como para las continuas en un intervalo.

Consideremos un sistema de N fases, y tomemos las fases 1 y 2 en conjunto, y denominamos $f_{0,2}(x_0,x_2)$ el valor óptimo de la suma

$$v_1(x_0,x_1) + v_2(x_1,x_2)$$

cuando x_1 varía en su dominio, que está definido por x_0 y x_2. Tomando en cuenta que deseamos encontrar el valor máximo (el procedimiento que indicamos también es válido para encontrar el valor mínimo), tenemos que:

$$f_{0,2}(x_0,x_2) = \max_{x_1 \in X_1(x_0,x_2)} \left[v_1(x_0,x_1) + v_2(x_1,x_2) \right]$$

donde $x_1 \in X_1(x_0,x_2)$ significa que x_1 pertenece a un conjunto de valores X_1 que tiene como elementos a x_0 y x_2. El valor o los valores de x_1 que optimicen

$$v_1(x_0,x_1) + v_2(x_1,x_2)$$

definirán la(s) política(s) óptima(s) para las fases 1 y 2, y para las variables x_0 y x_2 consideradas.

Analicemos ahora las tres primeras fases juntas (1, 2,3) y llamenos $f_{0,3}(x_0,x_3)$ al valor óptimo de la suma

$$v_1(x_0,x_1) + v_2(x_1,x_2) + v_3(x_2,x_3)$$

cuando varía x_1 y x_2 en sus dominios respectivos. Por el teorema de optimidad tenemos

$$f_{0,3}(x_0,x_3) = \max_{x_2 \in X_2(x_0,x_3)} \left[f_{0,2}(x_0,x_1) + v_3(x_2,x_3) \right]$$

donde $x_2 \in X_2(x_0,x_3)$ tiene significado similar al antes indicado. El o los valores de x_1 ya obtenidos, y el valor de x_2 que optimice

$$f_{0,2}(x_0,x_2) + v_3(x_2,x_3)$$

definirán la(s) política(s) óptima(s) para los valores x_0 y x_3.

Generalizando para las N fases juntas, tenemos

$$f_{0,m}(x_0,x_n) = \max_{x_{n-1} \in X_{n-1}(x_0,x_n)} \left[f_{0,n-1}(x_0,x_{n-1}) + v_n(x_{n-1},x_n) \right]$$

con

$$f_{0,1}(x_0,x_1) = v_1(x_0,x_1)$$

lo que nos permite calcular las subpolíticas óptimas sucesivas para las fases 1 y 2 juntas, enseguida 1,2 y 3,..., enseguida - las fases 1,2,3,...,N-1,N en conjunto; es decir la(s) política (s) óptima(s)

$$F^{\bullet}(x_0,x_N) = \max_{x_{N-1} \in X_{N-1}(x_0,x_N)} \left[f_{0,N-1}(x_0,x_{N-1}) + v_N(x_{N-1},x_N) \right]$$

La optimización se efectuó en el sentido n=0 a n=N; en sentido contrario también podría efectuarse.

Para el caso en que x_N no sea dado, y sólo se conozcan sus límites de variación, tenemos que calcular

$$F^{*}(x_0) = \max_{x_N \in X_N} F^{*}(x_0, x_N)$$

que es el máximo de todos los valores factibles de x_N. De manera similar si x_0 es no conocida, se calcula

$$F^{*}(x_N) = \max_{x_0 \in X_0} F^{*}(x_0, x_N)$$

finalmente, puede presentarse el caso de que x_0 y x_N sean no conocidas, entonces calculamos

$$F^{*} = \max_{\substack{x_0 \in X_0 \\ x_N \in X_N}} F^{*}(x_0, x_N)$$

2.7 Arboles de decisión

Los árboles de decisión son resultados de considerar explícitamente las opciones por elegir en el futuro, - los resultados posibles y las decisiones que puedan derivarse de una decisión inicial o actual. A través de ellos, se puede formular una decisión inicial que implique tomar explícitamente en cuenta el riesgo y la repercusión del futuro.

El nombre de árboles de decision, se debe a la forma que tiene su representación gráfica, que se asemeja a la de un árbol, cuyas ramas se obtienen de cada opción factible - para cada resultado posible que se deriva de cada opción selectiva. Para describir el concepto y la metodología del análisis de los árboles en los casos de certeza e incertidumbre, lo haremos por medio de los ejemplos siguientes.

Ejemplo determinista. En la representación -- gráfica de un árbol de decisión, se muestran las ramas de cada opción factible que ha de arrojar un sólo resultado, que es -- cuando se dá por conocida la certidumbre. Esto lo podemos - - ilustrar en un problema de reposición, cuya gráfica se localiza en la figura 4. La manera como se muestra el problema, - - prueba que la decisión respecto sí ha de reponerse o no la máquina vieja por la nueva, no se trata de una decisión que se - tome una sola vez, sino que periódicamente se repite. Esto es, si la decisión es conservar la máquina vieja en el instante -- t=1, posteriormente en el instante t=2 habrá que elegir nuevamente. De modo similar, si la máquina vieja es escogida en el instante t=2, de nuevo habrá que elegir en el instante t=3. - Para cada instante, se indica su ingreso y costo de la inversión.

En este problema el interés inicial radica en la elección de la alternativa en el instante t=1, la cual debe tomar en cuenta las opciones posteriores y las decisiones que se deriven de ellas. En consecuencia, el procedimiento para analizar este tipo de problemas, es empezar en el punto más alejado de la decisión, determinar cual es la mejor opción selectiva y el resultado cuantitativo de esa opción y luego ir hacia atrás a cada instante sucesivo, repitiendo el procedimiento -- hasta que finalmente se determine la elección en el instante - inicial para tomar la decisión, donde se consideren las opciones selectivas y las decisiones previstas en el futuro.

Los cálculos necesarios y las decisiones por tomar en cada instante, están asentados en la tabla 3. Un análisis de dicha tabla nos indica que la mejor opción selectiva en el instante t=3 (corresponde a la máquina vieja con un ingreso neto de $7,000.00) forma parte del resultado para la opción en favor de la máquina vieja en el instante t=2. De manera similar, la mejor opción en el instante t=2 (es la elección de una máquina nueva que genera $24,000.00 de ingresos netos) forma - parte del resultado para la opción de la máquina vieja en el - instante t=1.

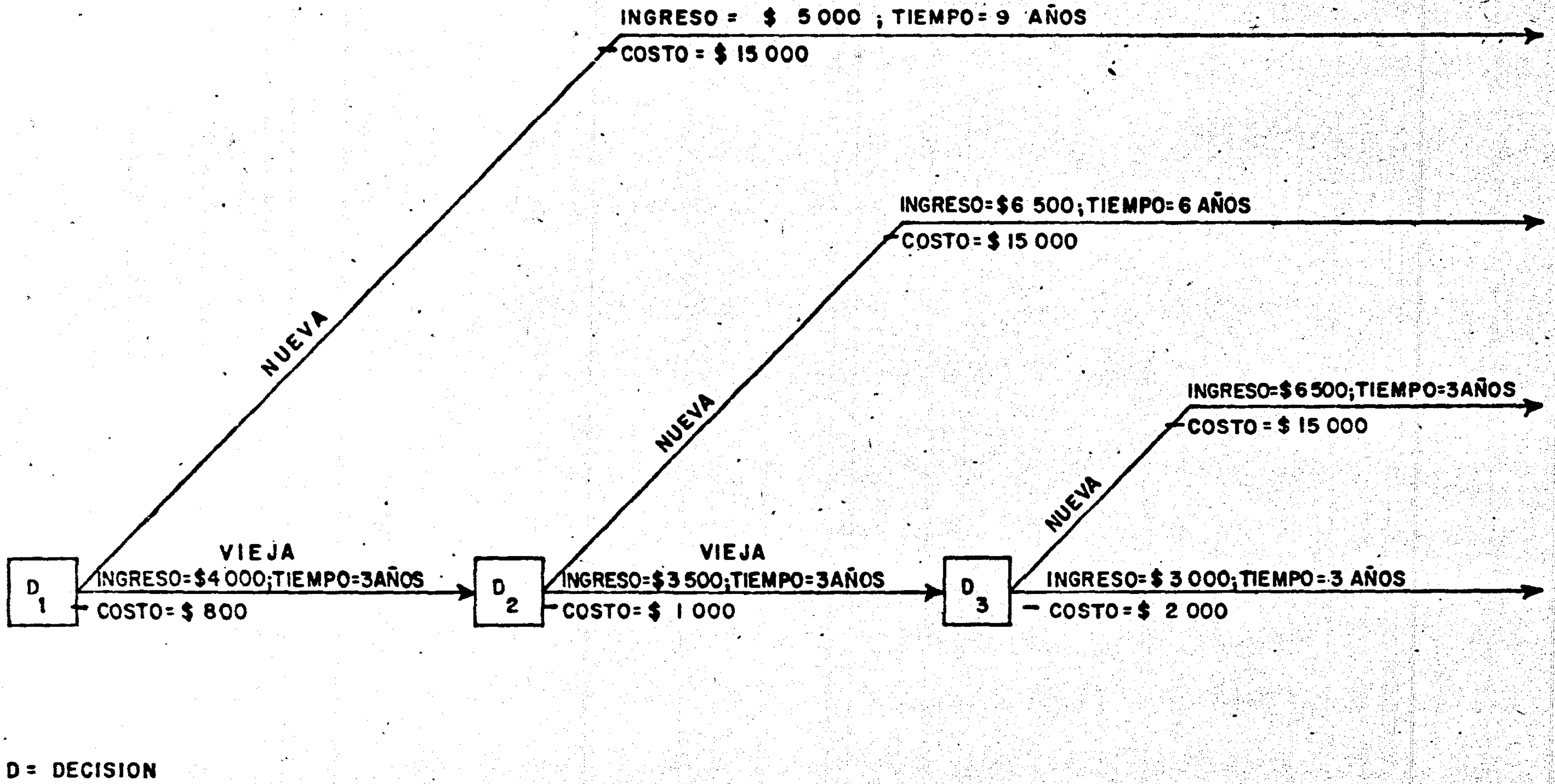


FIGURA 4.- EJEMPLO DE ELECCION DETERMINISTA

Continuando con el análisis de la tabla 3, encontramos que la solución es usar la máquina vieja durante 3 años y al final de este período sustituirla por una máquina nueva.

Tabla 3. Cálculo de los ingresos netos y decisiones en cada instante.

Instante	Alternativa	Ingresos netos		Elección
3	vieja	3000 (3) - 2000	= 7000	vieja
	nueva	6500 (3) - 15000	= 4500	
2	vieja	7000 + 3500 (3) - 1000	= 16500	
	nueva	6500 (6) - 15000	= 24000	nueva
1	vieja	24000 + 4000 (3) - 800	= 35200	vieja
	nueva	5000 (9) - 15000	= 30000	

Ejemplo probabilista. En el caso anterior de reposición determinista, no se consideraron los resultados variables a los cuales pueden asignarse probabilidades de realización. Supongamos que para cada opción hay dos resultados posibles, según sea la demanda elevada o baja. Entonces el problema de árboles de decisión de la figura 4, se modificaría como se muestra en la figura 4.1. Donde cada opción de la figura 4.1 tiene un círculo del cual parten flechas que representa cada evento posible o estado de la naturaleza que puede presentarse, como una demanda elevada o baja.

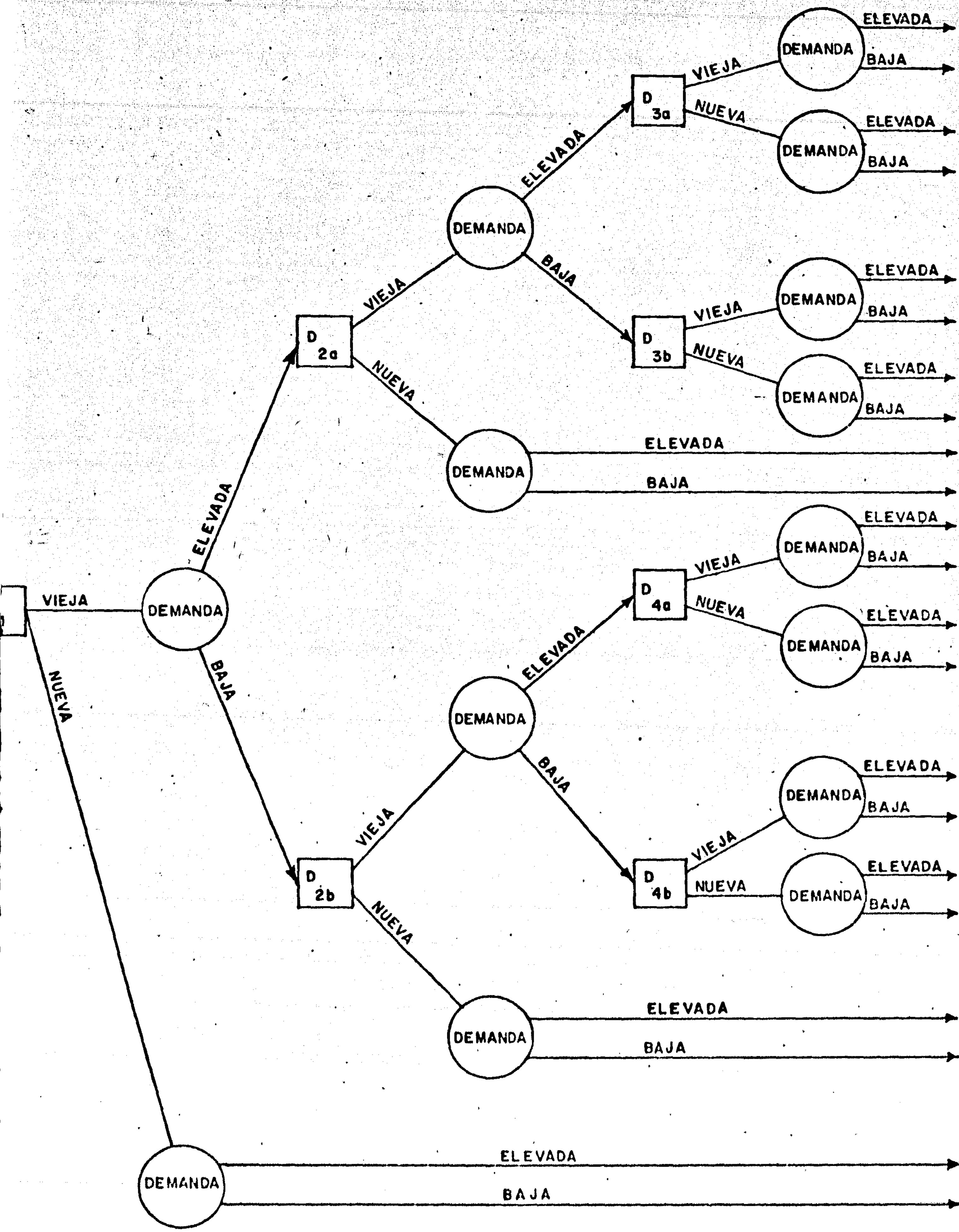


FIGURA 4-1. EJEMPLO DE ELECCION PROBABILISTICA

Para resolver este problema (o sea, determinar cual es la mejor alternativa en cada instante t) es necesario determinar primero el resultado (expresado por lo general en unidades monetarias) y la probabilidad de que se realice para cada evento fortuito. Entonces puede decidirse la norma para la elección como puede ser el valor neto de los ingresos, y la solución se computa por el mismo procedimiento anterior; ésto es, los resultados de la norma y de las decisiones se determinan primero para los instantes t más distantes y luego se repite sucesivamente el procedimiento, moviéndose hacia atrás en los diferentes instantes hasta llegar al punto t=1.

Para calcular la probabilidad en cada evento fortuito, aplicaremos el teorema de Bayes. Este teorema puede ser usado para reformular un conjunto de probabilidades previas, llamadas probabilidades a priori, para un conjunto de nuevas probabilidades, llamadas probabilidades a posteriori. La reformulación está basada en información adicional, la cual puede ser obtenida de registros pasados de una empresa o de muestras.

El teorema de Bayes es una ampliación de la teoría de probabilidades conjuntas y condicionales

$$p(A,B) = p(A) \quad p(B/A)$$

en que $p(A,B)$ = Probabilidad de que dos eventos ocurran juntos

$p(A/B)$ = Probabilidad que ocurra A sabiendo que B ha ocurrido

$p(B)$ = Probabilidad de que B ocurra.

Sean A_1 y A_2 dos eventos mutuamente excluyentes (los dos eventos no pueden ocurrir al mismo tiempo) y exhaustivos - (la combinación de los dos eventos es el experimento entero) y B un evento simple, que intersecta cada uno de los eventos A. Entonces la probabilidad del evento A_1, dado el evento B, es•

$p(A_1|B) = \frac{p(A_1,B)}{p(B)}$; similarmente, la probabilidad del evento A_2, dado B, es

$$p(A_2|B) = \frac{p(A_2,B)}{p(B)}$$

donde

$$p(B) = p(A_1,B) + p(A_2,B),$$
$$p(A_1,B) = p(A_1)p(B|A_1), \text{ y}$$
$$p(A_2,B) = p(A_2)p(B|A_2)$$

En general, si hay n resultados posibles en total -- que se excluyen entre sí $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y los resultados de - un estudio adicional (que puede ser de muestreo) es X, de manera que esta X es discreta y $p(X) \neq 0$ y si las posibilidades - previas $p(A_i)$ han sido determinadas, el teorema de Bayes para el caso discreto puede expresarse

$$p(A_i|X) = \frac{p(A_i)p(X|A_i)}{p(X)}$$

• $p(A_1,B) = p(B,A_1) = p(B)p(A_1|B)$. por lo tanto,

$$p(A_1|B) = \frac{p(A1,B)}{p(B)}$$

La probabilidad posterior $p(A_i|X)$ es la probabilidad del resultado A_i conociendo que ha ocurrido X. Si ocurre la probabilidad de X y A_i, entonces la $p(A_i)\ p(X|A_i)$ es la probabilidad conjunta de X y A_i. La suma de todas las probabilidades conjuntas es igual a la probabilidad de X. Entonces la ecuación inmediata anterior puede expresarse

$$p(A_i|X) = \frac{p(X_i)p(X|A_i)}{\sum_i p(A_i)p(X|A_i)}$$

B I B L I O G R A F I A

1.- Mao. James. C.T., Análisis financiero, Universidad de Columbia Británica, Vancouver. (traducción) El Ateneo, Pedro García, S.A. Buenos Aires, Argentina. Segunda edición 1975.

2.- Gass, Saul, I. Programación lineal. Métodos y aplicacion Editorial Continental, S.A. México 1972.

3.- Thierauf Robert J. y Grosse Richard A. Toma de decisiones por medio de la investigación de operaciones. Editorial Limusa, S.A. México 1975.

4.- Churchman, Ackoff y Arnoff. Introducción a la investigación operativa. Editorial Aguilar, S.A. Madrid 1971.

5.- A. Kaufmann. Métodos y modelos de la investigación de operaciones (Tomo II). Editorial Continental, S.A. México 1974.

6.- R. Canada John. Técnicas de análisis económico para administradores e ingenieros. Editorial Diana. México 1979.

Notas de la segunda parte.

1.- Mao. James. C.T. Análisis financiero. P.9

2.- Gass, Saul, I Programación lineal. P.28.

3.- Idem P.73.

4.- Churchman, Ackoff y Arnoff. Introducción a la investigaci operativa. P.320.

III. DECISIONES DE INVERSION

1. Decisiones de inversión en condiciones de certeza I.

La programación matemática que hemos presentado, se ha aplicado a la administración financiera para optimizar las decisiones operativas a corto plazo, dentro de las restricciones de la capacidad física y los recursos financieros. Los métodos presentados, se basan en el supuesto de que la administración ya decidió la magnitud del presupuesto de erogaciones de capital, las inversiones en activos corrientes, y sus respectivos métodos para financiarlos. A través de los métodos nos proponemos formular el programa de operación a corto plazo que ajuste de la manera más conveniente los objetivos contradictorios de liquidez y rentabilidad.

Consideramos dentro del análisis tres aspectos principales acerca de las decisiones de inversión y financiación adoptados por la empresa. El primero, ¿qué criterio debe utilizar la administración financiera para medir la rentabilidad de las inversiones cuando planea la magnitud y la composición de su presupuesto de erogaciones de capital?. El criterio elegido afectará las decisiones acerca de la magnitud de la planta, la compra o la renta de la planta y el equipo, la conveniencia de la expansión, el reembolso de la deuda y el pago de dividendos en efectivo. El segundo, ¿qué principios deben regir la magnitud y la composición de las inversiones de una empresa de capital en giro?. Como la sociedad anónima típica invierte del 25 al 50 por ciento de sus recursos totales en efectivo, cuentas por cobrar e inventarios. La administración del capital en giro constituye una decisión fundamental de los ejecutivos financieros de la firma. Para el tercero, ¿qué fuentes de fondos debe utilizar la empresa para financiar sus inversiones en la planta, el equipo y el capital de giro?. En una sociedad anónima las fuentes posibles de fondos son el crédito a corto plazo, los bonos a largo plazo, las acciones preferidas y las acciones ordinarias.

Analizaremos los diferentes criterios de apreciación de los proyectos de inversión; el grado de concordancia de estos criterios; el efecto de la indivisibilidad, la interdependencia y el racionamiento del capital sobre las decisiones de inversión.

1.1 Criterios de rentabilidad en las decisiones de inversión.

Consideramos los siguientes supuestos iniciales, antes de analizar los dos criterios más importantes en la toma de decisiones, que son: el criterio del valor actual neto y el criterio de la tasa interna de rentabilidad.

En el análisis se considerará dado el costo del capital, la divisibilidad de las inversiones, la independencia de los proyectos, un mercado de capital perfecto, y total -

certeza acerca de los resultados de inversión.

La divisibilidad perfecta de las inversiones significa que la magnitud de cualquier proyecto puede variar en un incremento a un decremento tan pequeño como uno lo desee. Esto es, la administración puede comprometer cualquier suma, por reducida que sea, en cualquier proyecto, sin necesidad de adoptar decisiones de inversión sobre la base del agregado o la eliminación de proyectos enteros. Un conjunto de proyectos independientes entre sí, significa que la rentabilidad de cualquiera no se encuentra afectada significativamente por la aceptación o el rechazo de otros proyectos del conjunto. Es decir, no permite la existencia de proyectos que se excluyen mutuamente, los que por definición son dependientes.

En un mercado perfecto de capital cada comprador o vendedor de valores negocia con cantidades tan reducidas (comparadas con el mercado total) que ninguna ejerce un efecto significativo sobre los precios de los valores. Finalmente, la certidumbre total significa que tanto las empresas como los compradores de valores, conocen exactamente los flujos de fondos actuales y futuros asociados con cualquier proyecto.

Los supuestos anteriores describen lo que puede denominarse la situación ideal, muy distinta de la situación real, pero en la medida que avancemos en el análisis, se eliminarán estos supuestos y trataremos situaciones realistas.

1.1.1 El criterio del valor actual neto

Conforme al criterio del valor actual neto (VAN), todos los proyectos de inversión que generen su valor actual neto positivo, deben ser aceptados por la firma y en caso contrario serán rechazados. Cuando hay más de un proyecto de inversión, a todos y cada uno de los proyectos, se aplicará la prueba individualmente. Posteriormente, dependiendo del número de proyectos que se aceptan, se determina el presupuesto total de capital.

Sea un proyecto que genera ingresos de fondos (antes de los pagos de capital) de b_0, b_1, $b_2, \ldots, b_n$ al final de los años 0, 1, 2,...,n. Si el costo de capital k es constante, entonces el valor actual de los ingresos, B, está dado por la expresión

$$B = \sum_{t=0}^{n} \frac{b_t}{(1+k)^t}$$

Los pagos en efectivo (incluido el desembolso inicial) asociados con el proyecto son c_0, c_1, $c_2, \ldots,$ c_n al final de los años 0, 1, 2,...,n por lo que su valor actual C está dado por la expresión

$$C = \sum_{t=0}^{n} \frac{c_t}{(1+k)^t}$$

El VAN de un proyecto, se define como la contribución al valor neto actual de una empresa, y es la diferencia entre B y C.

$$\mathrm{VAN} = \sum_{t=0}^{n} \frac{b_t - c_t}{(1+k)^t} = \sum_{t=0}^{n} \frac{a_t}{(1+k)^t} \qquad (1)$$

donde a_t representa el flujo neto de fondos al final del año t. El criterio del valor actual neto afirma que la empresa debe iniciar un proyecto únicamente si el valor VAN es mayor que cero.

Con el siguiente ejemplo ilustraremos al criterio del valor actual neto. La litografía kkk adquiere una impresora de $ 4,100.00 con el siguiente flujo de fondos:

Fin del año	0	1	2	3	4	5
Flujo de fondos	-4100	+ 1000	+ 1000	+ 1000	+ 1000	+ 1000

Si el costo del capital k es 10%, ¿esta inversión será rentable para la empresa?. En este ejemplo a_0 = $4 100 a_t = $ 1 000 para t = 1,2,...,5. Al sustituir estos valores en (1), encontramos que el VAN, es una función monótonamente decreciente respecto al costo del capital para la firma. Como se muestra enseguida en la tabla 8.

TABLA 8. Valor Actual neto (VAN) de la máquina impresora como función del costo del capital (k)

k	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%
VAN	229.48	112.36	0	-107.29	-210.35	-309.21	-404.10	-495.22

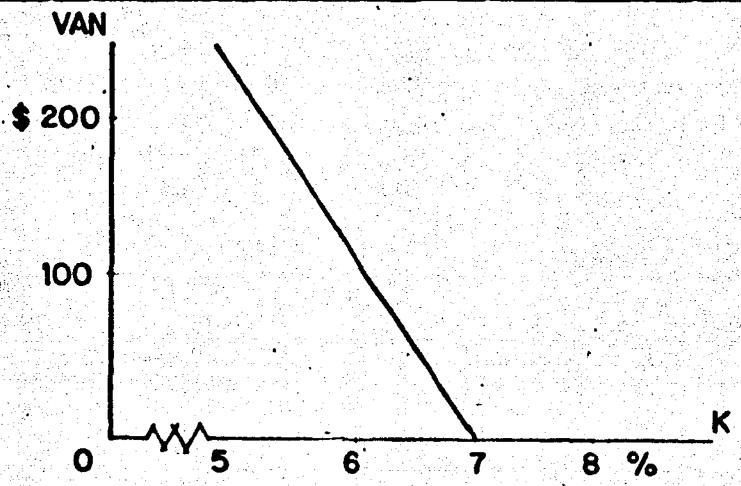


Fig. 5

La inversión tiene un VAN positivo para un costo de capital inferior al 7%, y un VAN negativo cuando el costo del capital es mayor del 7%. Para el 10% el VAN = - $ 309.21, significa que la empresa debe rechazar el proyecto.

En cambio, si el costo del capital para la empresa es del 6% el proyecto tiene un VAN $ 112.36 implica que la empresa debe aceptar el proyecto. La cantidad $ 112.36 es la utilidad inmediata para la firma después de la aceptación del proyecto. En la tabla 9, se demuestra que el flujo de fondos de $1000.00 por año durante 5 años,es la cantidad que la empresa necesita para amortizar un préstamo de $4,212.36 al 6% de interés anual.

Esto es, si la empresa obtiene un capital de \$ 4,212.36 pero - invierte \$ 4,100.00 en la impresora, tendrá una ganancia neta_ de \$ 112.36.

TABLA 9. Programa de Amortización

Año	Importe del - préstamo pen- diente	Flujo anual de fondos	Intereses sobre el préstamo	Reembolso del capital
1	4 212.36	1 000.00	252.74	747.26
2	3 465.10	1 000.00	207.91	792.09
3	2 673.01	1 000.00	160.38	839.62
4	1 833.39	1 000.00	110.00	890.00
5	943.39	1 000.00	56.61	943.39
Total		5 000.00	787.64	4 212.36

1.1.2 El criterio de la tasa interna de rentabilidad.

Según el criterio de la tasa interna de rentabilidad (TIR), debe aceptarse una inversión, siempre que su_ TIR sea superior al costo de capital de la empresa. Cuando hay más de un proyecto de inversión, para cada proyecto se calcula su TIR, y se clasifican los proyectos conforme a su rentabilidad. Posteriormente, se considera al costo de capital como un punto límite del programa de inversión de la empresa.

La tasa interna de rentabilidad de una inversión se define como la tasa de descuento que iguala a cero el valor actual de toda la serie de flujos de fondos asociados con el proyecto. Si a_t representa el flujo neto de fondos a fines del año t para $t = 0,1,...,n$. La TIR del proyecto, $r^\bullet$, se define a través

$$\sum_{t=0}^{n} \frac{a_t}{(1+r^\bullet)^t} = 0 \tag{2}$$

En el caso de que $a_0 < 0$ y $a_t > 0$ para $t = 1,2, ...,n$ la ecuación (2) puede expresarse como

$$- a_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t}{(1+r^\bullet)^t} \tag{3}$$

La TIR se convierte entonces en la tasa de descuento que iguala al costo del proyecto el valor actual de los futuros ingresos netos.

Otra manera alternativa de definir la TIR de un proyecto, es la tasa de descuento que iguala a cero el valor futuro de toda la serie de flujos de fondos, ésto se expresa por

$$\sum_{t=0}^{n} a_t \quad (1+r^\bullet)^{n-t} = 0 \tag{4}$$

Utilizaremos los datos del ejemplo anterior de la máquina impresora para el cálculo de la TIR. Para esta inversión

$a_0 = - \$ \ 4{,}100.00$, $a_t = \$ \ 1{,}000.00$ con $t = 1,2,\ldots,5$. Al sustituir estos valores en (2), tenemos

$$- \frac{4\ 100}{(1+r^*)^0} + \frac{1\ 000}{(1+r^*)^1} + \frac{1\ 000}{(1+r^*)^2} + \frac{1\ 000}{(1+r^*)^3} + \frac{1\ 000}{(1+r^*)^4} +$$

$$\frac{1\ 000}{(1+r^*)^5} = 0$$

La solución a la ecuación tiene un valor para r^* igual al 7%. Significa que la inversión realizada genera efectivo suficiente para pagarse ella misma en 5 años, y también para aportar al propietario una rentabilidad del 7% sobre su capital invertido. Es conveniente aclarar que la TIR de una inversión y la rentabilidad de la inversión no es la misma cosa. Por definición la TIR de una inversión, es la tasa de rentabilidad calculada antes de deducir el costo de los fondos utilizados. Por consiguiente la TIR es una tasa de rentabilidad bruta, y la inversión es lucrativa sólo cuando su TIR es superior al costo del capital para la empresa.

1.1.3 Equivalencia de los criterios VAN y TIR

Al analizar la relación entre los criterios VAN y TIR debemos diferenciar las inversiones simples y no simples. La primera se distingue en que su flujo neto de fondos, se compone por un desembolso inicial, seguido únicamente por ingresos en efectivo. La inversión no simple, se caracteriza por tener desembolsos netos en efectivo en varios períodos, que se intercalen con flujos netos de fondos durante toda la vida del proyecto.

Sea una inversión simple que genera flujos netos de fondos a_0, $a_1, \ldots, a_n$ al final de los años $0, 1, \ldots, n$ respectivamente. Por ser una inversión simple, $a_0 < 0$ y $a_t > 0$ para $t = 1, 2, \ldots, n$. El criterio VAN nos dice que un proyecto debe aceptarse únicamente si su VAN es positivo. Por otra parte el criterio TIR nos indica que debe aceptarse un proyecto únicamente si la TIR, $r^{\bullet}$ del proyecto supera al costo del capital k.

Al restar la fórmula del criterio TIR de la correspondiente al criterio VAN, el primer término se elimina por ser iguales, mientras que las n restantes quedan expresadas por

$$\text{VAN} = \sum_{t=1}^{n} \left[\frac{a_t}{(1+k)^t} - \frac{a_t}{(1+r^{\bullet})^t} \right] \tag{5}$$

Como a_t, k y $r^{\bullet}$ son todos positivos, entonces el segundo miembro de (5) (y el VAN) es positivo si $r^{\bullet}$ es mayor que k, cero si $r^{\bullet} = k$ y negativo si $r^{\bullet} < k$. Todo ésto, nos indica la equivalencia de los criterios VAN y TIR para las decisiones de aceptación o rechazo, cuando sean solamente inversiones simples.

Una ilustración de la equivalencia de los criterios

VAN y TIR, la encontramos en el ejemplo de la máquina impresora. Tenemos que la TIR de esta inversión es del 7% y conforme al criterio TIR, el proyecto debería aceptarse sólo si k, el costo del capital de la empresa es menor al 7%. De acuerdo con el criterio VAN, un proyecto debería aceptarse sólo si su VAN es positivo. Sabemos por la tabla que el VAN de la máquina impresora es positivo cuando el costo del capital es inferior al 7%. Por consiguiente, los dos criterios coinciden con la misma decisión.

1.2 La TIR y las inversiones no simples

Es necesario clasificar las inversiones nó simples en puras y mixtas para comprender el sentido de la TIR. Pero antes debemos definir y analizar los conceptos, saldo del proyecto de una inversión y valor futuro del proyecto.

El saldo de un proyecto de una inversión al final del año t, es el valor futuro de una serie al final de cualquier año t, para $0 \leq t \leq n$, que está dado por la expresión

$$S_t(i) = a_0(1+i)^t + a_1(1+i)^{t-1} + \dots + a_t$$

$$(0 \leq t \leq n)$$

donde, i es la tasa de rentabilidad y $a_0, a_1, \dots, a_n$ es el flujo neto de fondos de una inversión al final del año $0, 1, \dots, n$.

Para conocer el significado económico del saldo de un proyecto $s_t(i)$ cuando es positivo, cero o negativo, consideramos una inversión para la cual $a_0 < 0$ y las a restantes no tienen restricciones de signos. Si i es la tasa de rentabilidad del proyecto, una $s_t(i) < 0$ significa que en el tiempo t la rentabilidad obtenida es menor que i, y que los ingresos obtenidos por la empresa son menores que los esperados, por lo que se puede afirmar que la empresa ha comprometido $-s_t(i)$ pesos en el proyecto durante el año t+1. Un $s_t(i) > 0$ significa que en el tiempo t la rentabilidad es mayor que i, y que los ingresos obtenidos por la empresa son mayores que los esperados, por lo que se puede afirmar que la empresa tiene un préstamo de $s_t(i)$ pesos originados en el proyecto durante el año t+1. Finalmente un saldo $s_t(i) = 0$ significa que la rentabilidad obtenida en el tiempo t es igual a i.

El saldo del proyecto al final de la vida del proyecto, se refiere a un caso particular que es conocido como el valor futuro del proyecto que está dado por la expresión.

$$s_n(i) = a_0(1+i)^n + a_1(1+i)^{n-1} + \dots + a_n$$

Observamos que el valor futuro siempre se mide al final de la vida del proyecto, en cambio el saldo del proyecto puede medirse en cualquier punto t de la vida del proyecto.

Inversiones puras y mixtas. No obstante que los autores de temas financieros que utilizan el criterio TIR en el análisis de las inversiones suponen implícitamente que la tasa de rentabilidad de una inversión es independiente del costo del capital para la empresa, es necesario hacer la distinción entre inversiones puras y mixtas para determinar la validez de este supuesto implícito. Se dice que una inversión es pura si los saldos del proyecto calculados con la TIR del proyecto son cero o negativos durante la vida del proyecto. La inversión es pura en el sentido de que la firma no recibe demasiado de su rentabilidad en ningún punto, y por lo tanto no está endeudada con el proyecto. En términos de símbolos una inversión es pura si y solamente si $s_t(r^*) \leq 0$ para $t = 0,1,\ldots,n-1$, donde r^* es la TIR del proyecto.

En cambio, es mixta cualquier inversión que no es pura. Esto es, una inversión mixta es un proyecto en el que $s_t(r^*) > 0$ para algunos valores de t, y $s_t(r^*) \leq 0$ para los restantes valores de t. El significado de esta distinción estriba en que sólo para las inversiones puras hay un concepto de tasa de rentabilidad interna del proyecto. Como los proyectos mixtos son en parte inversiones y en parte ingresos para la empresa, las rentabilidades de estas inversiones tienden a variar con el costo de capital de la empresa.

Si se observa que $a_0 < 0$ entonces podemos lograr que cualquier inversión satisfaga la condición $s_t(i) \leq 0$ para $t = 0,1,...,n-1$, simplemente elevando la tasa de interés compuesto i a cierto nivel crítico $r_{mín}$. Pero si $r_{mín}$ es el interés compuesto, el valor futuro del proyecto $s_n(r_{mín})$ puede ser negativo, cero o positivo. Si $s_n(r_{mín}) \geq 0$, existe cierta tasa $r^* \geq r_{mín}$ que determinará $s_n(r^*) = 0$.

Puesto que $r_{mín}$ se define de modo que los saldos del proyecto $s_t(r_{mín}) \leq 0$ para $t = 0,1,...,n-1$. Entonces el efecto de una tasa de interés compuesto más elevada incrementa la negatividad de estos saldos del proyecto, de manera que $r^* \geq r_{mín}$ implica que $s_t(r^*) \leq 0$ para $t = 0,1,...,n-1$, por consiguiente la inversión es pura. Ahora, si $s_n(r_{mín}) < 0$, existe cierta tasa $r^* < r_{mín}$ que determinará que $s_n(r^*) = 0$. Puesto que $r_{mín}$ es la tasa mínima en que los saldos del proyecto son todos cero o negativos para $t = 0,1,...,n-1$, entonces el proyecto no será una inversión pura cuando se evalua con r^* que es la TIR del proyecto. Otra manera de definir una inversión pura, es cuando $s_n(r_{mín}) \geq 0$, y una inversión es mixta si $s_n(r_{mín}) < 0$.

1.2.1 Método de cálculo de la rentabilidad del capital invertido. Como en una inversión mixta, la empresa hace desembolsos de fondos durante cierto tiempo, y en lo que resta tiene un préstamo proveniente del proyecto. En este caso necesitamos distinguir entre r, la rentabilidad del capital invertido (RCI), y k, el costo del capital tomado en préstamo. Cuando el saldo del proyecto es negativo, ésto es, cuando la empresa tiene comprometidos fondos, el interés compuesto se calcula a la tasa r; y cuando el saldo es positivo, es decir, cuando la firma tiene un prestamo, el interés compuesto se calcula a la tasa k. Para la inversión pura, únicamente se calcula el interés compuesto a la tasa r, puesto que la empresa nunca está en deuda con el proyecto, la RCI r es independiente de k, el costo de capital para la empresa, mientras que para una inversión mixta la RCI r varía directamente con k, el costo del capital. Esta relación se deriva de que dados los flujos de fondos asociados con una inversión mixta, cuanto más elevado es el valor de k, más reducida es la fracción de los flujos netos de fondos que representan préstamos y mayor la fracción de estos flujos que representan rentabilidad de la inversión.

El procedimiento más directo para calcular la relación funcional entre r y k de una inversión mixta, es a través del valor futuro del proyecto. Puesto que el saldo del proyecto de una inversión mixta se calculará con la tasa de r o k según sea el signo del saldo, entonces el valor futuro del proyecto expresado por $s_n(r,k)$ es una función de dos variables. Si observamos que el proyecto concluye al final del año t y k es el costo de capital para la empresa, encontramos que $s_n(r;k)$ es la suma adicional que la empresa debe recibir(o desembolsar)en el año t para obtener una rentabilidad del capital invertido (RCI) de r. Como se supone que el proyecto concluye al final del año n, $s_n(r,k) = 0$ es la condición necesaria para que la empresa realice una RCI de r, suponiendo que el costo del capital es igual a k. Al igualar a cero $s_n(r,k)$ se define una relación implícita entre r y k, que es la función que estamos buscando.

Con el siguiente algoritmo podemos determinar RCI r correspondiente a un costo dado del capital k:

Primero, encontramos $r_{mín}$ por el método de tanteo, enseguida calculamos $s_n(r_{mín})$. Si el valor futuro del proyecto a la tasa $r_{mín}$ es mayor o igual a cero, el proyecto es una inversión pura y por lo tanto, el problema se reduce a encontrar la TIR r^*, tal que $s_n(r^*) = 0$. En caso contrario que el valor futuro del proyecto sea negativo, el proyecto es una inversión mixta, y si el costo del capital es igual a k, entonces calculamos $s_t(r,k)$, de la manera siguiente:

$$s_0(r,k) = a_0$$

$$\begin{aligned} s_1(r,k) &= s_0(1+r) + a_1 \quad \text{si } s_0 < 0 \\ &= s_0(1+k) + a_1 \quad \text{si } s_0 > 0 \end{aligned}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

...

$$s_n(r,k) = s_{n-1}(1+r) + a_n \quad \text{si } s_{n-1} < 0$$
$$= s_{n-1}(1+k) + a_n \quad \text{si } s_{n-1} > 0$$

(a_t representa el flujo neto de fondos al fin del año t)

Después se determina el valor de r resolviendo la ecuación $s_n(r,k) = 0$.

1.2.2 El análisis de inversiones puras no simples

Dentro del campo del análisis de inversiones existen algunos proyectos no simples que son inversiones puras. Esto se demuestra con la existencia de inversiones puras no simples, para lo cual, consideramos un proyecto con el siguiente flujo de fondos.

Fin de año	0	1	2	3	4	5
Flujos de fondos	- 4100	+ 1000	+ 1000	+ 1000	- 1000	+ 3140

Conforme a los cálculos, se encontró que este proyecto no simple tiene una TIR única del 7 por ciento. Con el mismo porcentaje como tasa de interés compuesto, esta inversión tiene los siguientes saldos no positivos del proyecto:

$$s_0\ (7\%) = -\ \$4100$$
$$s_1\ (7\%) = -\ 4100\ (1.07) + 1000 = -\ \$\ 3387$$
$$s_2\ (7\%) = -\ 3387\ (1.07) + 1000 = -\ \$\ 2624$$
$$s_3\ (7\%) = -\ 2624\ (1.07) + 1000 = -\ \$\ 1808$$

$$s_4\ (7\%) = -\ 1808\ (1.07) - 1000 = -\ \$\ 2935$$

$$s_5\ (7\%) = -\ 2935\ (1.07) + 3140 = \ \$\ 0$$

Como $s_t(7\%) \leq 0$ ($t = 0,1,2,3,4,$) significa qu este proyecto no simple es una inversión pura.

Una característica de las inversiones puras simples, es que al combinar dos inversiones puras, la inversión compuesta resultante también es pura. Puede ser que la nueva inversión pura no sea necesariamente una inversión simple, como es el caso que estamos analizando, donde la inversión resultante es no simple y se descompone en dos subseries, que representan ambas inversiones puras simples:

Flujos de fondos al final del año

	0	1	2	3	4	5
Subserie 1	– 4100	1000	1000	1000	1000	1000
Subserie 2	0	0	0	0	–2000	2140
TOTAL	– 4100	1000	1000	1000	–1000	3140

Como el proyecto es una inversión pura. su TIR es indepdendiente del costo del capital para la empresa. Por lo tanto, la firma debería aceptar el proyecto si el costo del capital es menor del 7 por ciento y en caso contrario, rechazarlo

1.2.3 El análisis de las inversiones mixtas no simples.

En el desarrollo de este punto, analizamos dos ejemplos de inversiones mixtas, uno con una TIR única y el otro con múltiples TIR. Como la TIR de una inversión mixta depende funcionalmente de k, el costo del capital para la empresa, es independiente de que sea o no única.

Primer ejemplo, sea una inversión mixta con el flujo de fondos $a_0 = - \$10$, $a_1 = \$40$, $a_2 = - \$40$ al final del año 0, 1 y 2, y la TIR r^* igual al 100 por ciento, además es única. Si suponemos que el costo de capital k de la empresa es 10 por ciento, igual a un décimo de la TIR r^* del proyecto. Entonces como k r^* puede parecer que el proyecto es rentable. Con k = al 10 por ciento el valor actual neto del proyecto es negativo, igual a - \$ 6.70, lo que implica, que la aceptación de este proyecto disminuirá el valor actual neto de la empresa, en lugar de aumentarlo.

Conforme a los resultados, la empresa no puede realizar una ganancia invirtiendo fondos que cuestan el 10 por ciento en un proyecto que rinde el 100 por ciento, lo que hace suponer que en nuestro análisis hay un error. Este resultado paradójico puede explicarse si recordamos que el proyecto es una inversión mixta, entonces la tasa de rentabilidad depende del costo del capital de la empresa. El r^* de 100 por ciento y k de 10 por ciento no son comparables, porque cuando k = 0,1 la rentabilidad del capital invertido es de - 63.6 por cien to (según resultado del algoritmo que calculamos a continuación no de + 100 por ciento. Al confundir la TIR como la RCI cometimos un error que originó el resultado paradójico.

Ahora, queremos encontrar la relación funcional entre la rentabilidad del capital invertido r y el costo del capital k a través del algoritmo que describimos antes:

Primero se comprueba que $r_{mín}$ es igual a 300 por ciento; después se calcula el saldo del proyecto $s_n(r_{mín}) = -\$4$ lo que nos indica que el proyecto es una inversión mixta; si el costo del capital es k, calculamos el saldo del proyecto $s_t(r,k$

$$s_0(r,k) = -10$$

$$s_1(r,k) = -10(1+r) + 40 = 30 - 10r$$

ya que r no puede ser mayor que $r_{mín}$, $s_1(r,k) \geq 0$

$$s_2(r,k) = (30 - 10r)(1+k) - 40$$

$s_2(r,k) = 0$ implica

$$r = \frac{3k-1}{1+k} \quad \text{para } k = 0.1 \quad r = \frac{3(0.1)-1}{1.1} = .636$$

nos indica la relación funcional entre r y k.

Del análisis de esta función destacan dos aspectos el primero de ellos nos indica que r, es una función monótonamente creciente de k, puesto que $\frac{dr}{dk} = \frac{4}{(1+k)^2}$ siempre es positiva.

Con respecto al flujo de fondos del problema, podemos afirmar que $a_1 = \$40$ está integrado por la rentabilidad de la inversión original, y un préstamo proveniente del proyecto, y $a_2 = -\$40$, es el reembolso del préstamo con interés calculado a la tasa k. Cuando k aumenta, la porción del préstamo a_1 disminuye, y aumenta la correspondiente a la rentabilidad de la inversión, según la relación directa entre r y k. En segundo lugar, si r es igual a k, entonces $r = k = r^* = 100$ por ciento. Significa que en las inversiones mixtas la tasa interna de rentabilidad r^*, es el valor de la rentabilidad sobre el capital invertido r cuando r es igual a k. En la representación gráfica de la función usando como ejes de coordenadas rectangulares r y k, observamos que la TIR es el punto de intersección entre la función y la recta de 45°. En este punto la empresa alcanza su punto de equilibrio de la inversión, que corresponde a un costo del capital del 100 por ciento. Ahora la pregunta que se plantea, ¿cuál es el costo del capital, en que la inversión será rentable para la empresa?. Primero observamos que la recta de 45° $r = k$ es tangente a la función en el punto ($r = 1$, $k = 1$) y que la segunda derivada de r con respecto a k, es

$$\frac{d^2r}{dk^2} = - \frac{8}{(1+k)^3}$$ que es negativo para todo valor de $k \geq 0$.

Significa que la función es cóncava en sentido descendente, y por lo tanto debe extenderse totalmente por debajo de la recta de 45° $r = k$, excepto en el punto (1,1), donde -

la línea es tangente a la curva. Por consiguiente se advierte la figura 6, que el proyecto alcanza el equilibrio si k es igua al 100 por ciento, y que no es una inversión rentable si k es d ferente de esa tasa. De acuerdo con el criterio de la tasa de rentabilidad, la empresa debe rechazar la inversión.

Otro método que nos permite analizar el problema para tomar una decisión de inversión, es por medio de la funció VAN del proyecto.

$$VAN = -10 + \frac{40}{(1+k)} - \frac{40}{(1+k)^2}$$

En esta función destacan tres aspectos. En prime lugar si k = 0, VAN tiene un valor de - \$10. La inversión inicial de \$10 puede interpretarse como el precio por adelantar un año, la recepción de \$40, del final del año 2 al final del año En segundo lugar, si k tiende a infinito las sumas futuras pierden importancia económica, y el VAN del proyecto es también - \$ En tercer lugar, de acuerdo con los resultados anteriores cuand k = 100 por ciento, el VAN es igual a \$ 0. Por otra parte, al ferenciar la función VAN y resolviendo para el valor crítico de k, se demuestra que \$0 es el valor máximo de la función VAN. S representación gráfica está descrita en la figura 7. Como la f ción nunca es positiva, la empresa debe rechazar la inversión s gún el criterio VAN.

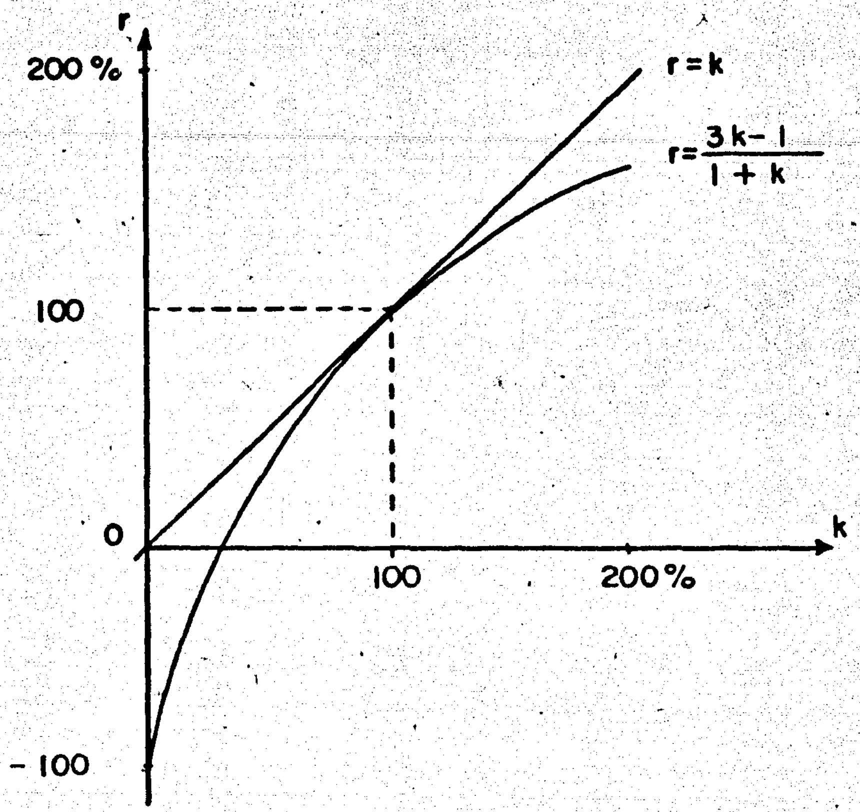


Fig. 6 TASA DE RENTABILIDAD COMO FUNCION DEL COSTO DE CAPITAL

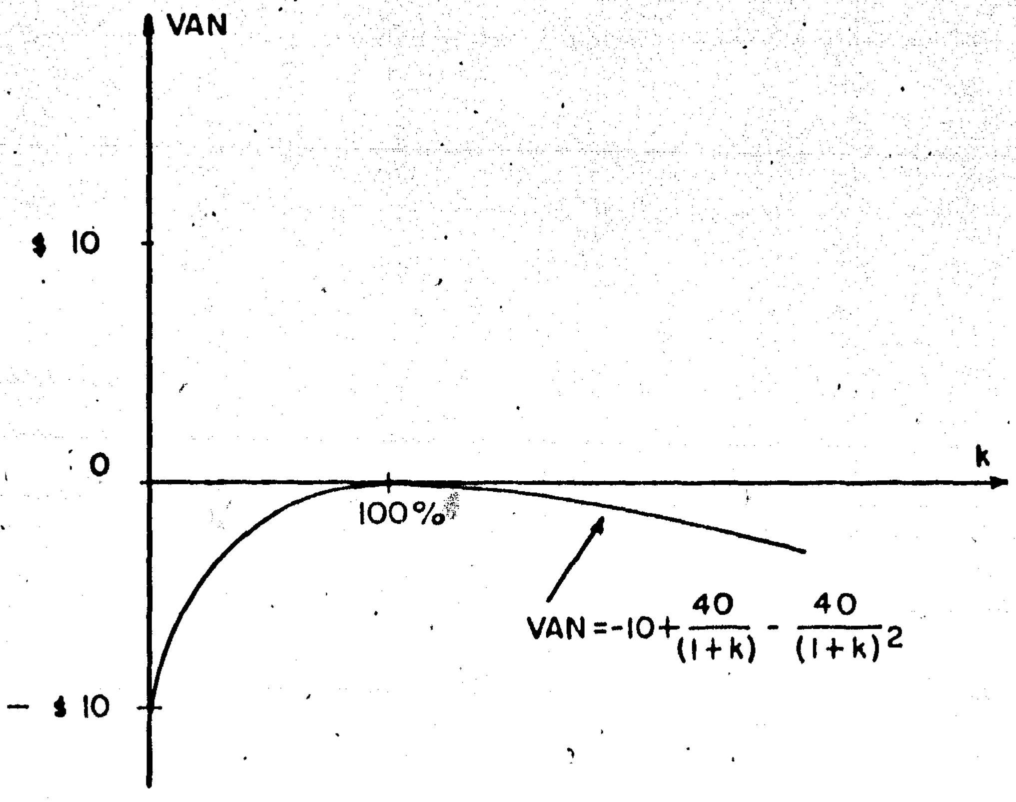


Fig. 7 VALOR ACTUAL NETO COMO FUNCION DEL COSTO DEL CAPITAL

Segundo ejemplo. En este caso el propósito es -- ilustrar las TIR múltiples, por medio de un problema de una bomba de petróleo. La decisión que se analiza es la instalación de una nueva bomba que pueda extraer una cantidad fija de petróleo de un pozo con más eficiencia que la bomba utilizada actualmente. Si la nueva bomba cuesta $ 1600 y aumenta los ingresos de fondos em $ 10 000 al final del año 1, y disminuye los ingresos de fondos en la misma cantidad al final del año 2.

Fin de año	0	1	2
Flujo de fondos	- 1600	+ 10000	- 10000

En esta inversión existen dos TIR, el 25 por ciento y el 400 por ciento. Ahora para que la inversión sea rentable - para la empresa su costo de capital debe ser menor del 25 por -- ciento. Es decir, si su costo de capital es del 10 por ciento, el VAN de la inversión es negativo, igual a - $ 773.50. Al aceptar este proyecto cuando $k = 0.1$, implica una disminución en lu-- gar de un aumento en el valor actual neto de la empresa.

Nuevamente este resultado paradójico, se debe al confundir la tasa interna de rentabilidad r^* con la rentabilidad sobre el capital invertido r. Si el costo de la bomba es calculado con cualquiera de las TIR, el saldo del proyecto al final - del año 1 es positivo. Lo que significa que la bomba es una inversión mixta, y que su RCI r es una función del costo de capital k de la empresa. La relación funcional entre r y k se obtiene al calcular $r_{mín}$ con un valor de 525 por ciento, con $s_n(r_{mín})$ - \$10000, implica que el proyecto es una inversión mixta, y si el costo del capital es igual a k, tenemos

$$s_0(r,k) = -1600$$

$$s_1(r,k) = -1600(1+r) + 10\,000$$

$$= 8400 - 1600\,r$$

como r no debe ser mayor de $r_{mín}$, $s_1(r,k) \geq 0$ tenemos

$$s_2(r,k) = (8400 - 1600\,r)\,(1+k) - 10\,000$$

al igualar $s_2(r,k)$ con cero y despejar para r, tenemos

$$r = 5.25 - \frac{6.25}{(1+k)}$$

La representación gráfica de esta relación la tenemos en la figura 8, en la que destacan tres aspectos principales. En primer lugar, r es una función monotónicamente creciente. En segundo lugar, la ecuación intersecta dos veces a la recta de 45° $r = k$, cuando k toma los valores del 25 por ciento y 400 por ciento. Este resultado confirma nuestro cálculo que el proyecto de la bomba tiene dos TIR, 25 y 400 por ciento. En tercer lugar, la ecuación pasa por arriba de la línea $r = k$ para $25\% < k < 400\%$, y por debajo de la línea $r = k$ para otros valores de k. De lo anterior y de acuerdo con el criterio de la tasa de rentabilidad, la empresa debería invertir en la bomba solamente si su costo de capital está entre el 25 y el 400 por ciento.

Otro método para determinar la rentabilidad de la bomba es por medio de la función VAN del proyecto.

$$VAN = -\ 1600 + \frac{10000}{(1+k)} \qquad \frac{10000}{(1+k)^2}$$

Como la TIR es por definición, la solución de la ecuación VAN = 0. Entonces la gráfica de la ecuación corta al eje de las abscisas en k = 25 por ciento, y k = 400 por ciento. Si k es igual al 0, o se aproxima a infinito, el VAN = - 1600. El valor máximo de la función es 900 y corresponde al punto k cuando es igual al 100 por ciento. (De lo anterior, no debe inferirse que la diferencia entre la rentabilidad del capital invertido r y el costo del capital k, también alcanza su máximo en k = 1). Puesto que el VAN es positivo sólo para $0.25 < k < 4$ y negativo para otro valor de k, el criterio del VAN coincide con el criterio de rentabilidad en la aceptación o rechazo del proyecto, ver figura 9.

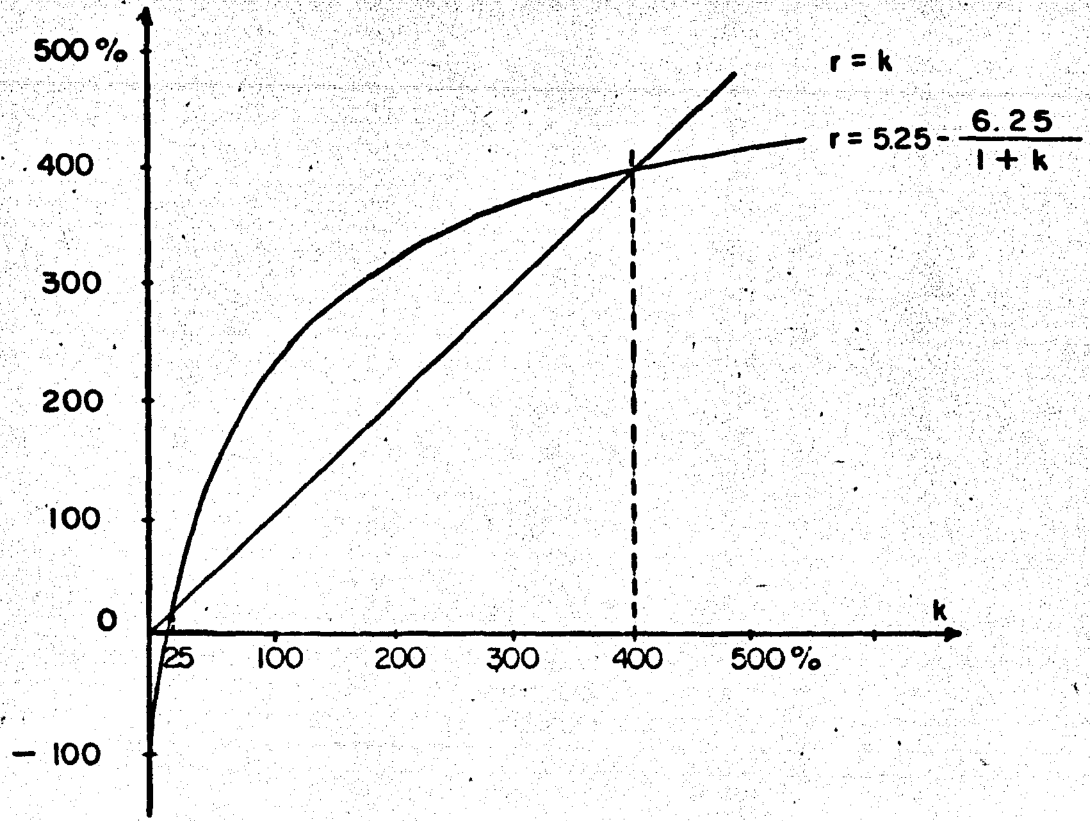


Fig. 8 TASA DE RENTABILIDAD COMO FUNCION DEL COSTO DEL CAPITAL

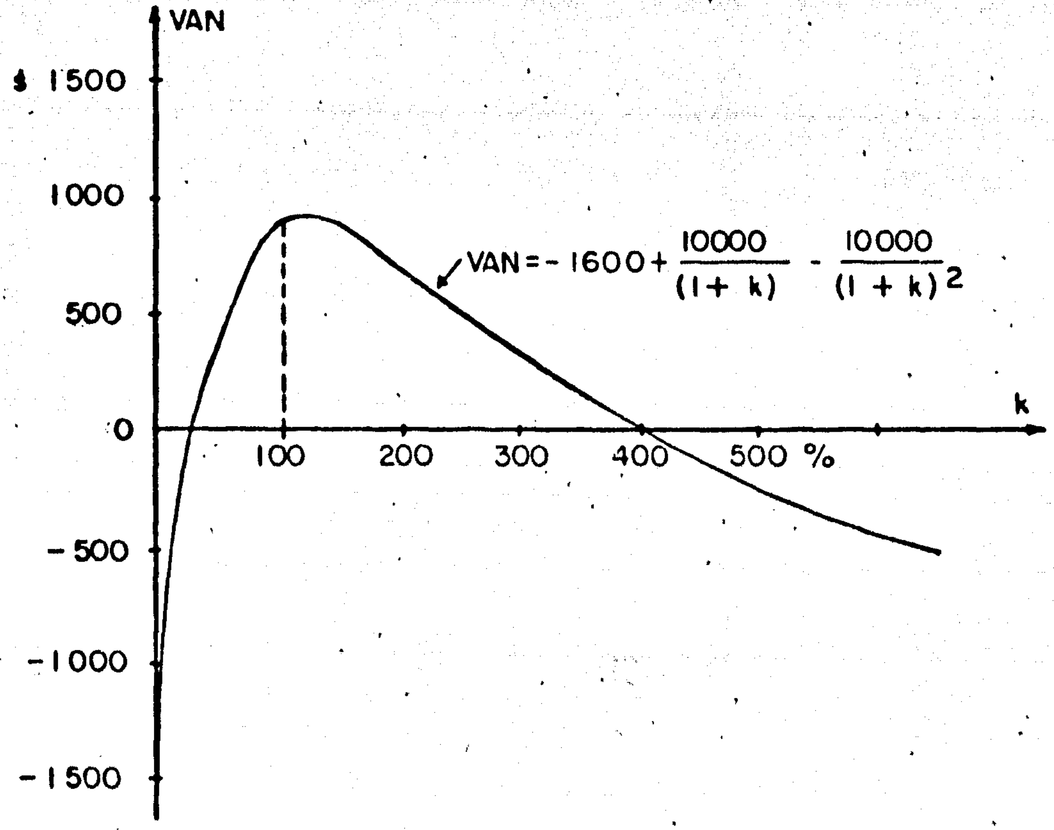


Fig. 9 VALOR ACTUAL NETO COMO FUNCION DEL COSTO DEL CAPITAL

2. Decisiones de inversión en condiciones de certeza II.

Las decisiones de inversiones examinadas hasta esta parte, suponen la independencia de los proyectos, la disponibilidad ilimitada de capital y la divisibilidad perfecta de las inversiones. Entendiendo que dos proyectos son independientes si la aceptación o rechazo de uno no tiene efecto mensurable en la rentabilidad del otro; cuando ésto no sucede, los proyectos son dependientes y un ejemplo obvio de ellos, es cuando una empresa debe elegir entre dos proyectos que se excluyen mutuamente. Además como el capital es ilimitado, cada inversión debe juzgarse individualmente, sin referencia a cualquier otra inversión. Para estos casos la empresa no tiene que elegir entre proyectos que compiten, las únicas decisiones son las que se han analizado de aceptar o rechazar la inversión.

Como las inversiones reales de las empresas, difieren de los supuestos que se han considerado, a menudo deben elegir entre inversiones que se excluyen mutuamente; con frecuencia tienen racionamiento de capital, y en general los proyectos pueden ser divisibles. Con estas condiciones, el procedimiento óptimo de decisión requiere que se analice cada inversión no sólo individualmente, sino también en relación con otras inversiones competidoras.

Para ilustrar estos tres casos, consideramos las inversiones A y B, con una vida útil de ambas de 10 años, con un costo de $ 100 cada una y aportan rentabilidades anuales del 15 y el 20 por ciento respectivamente. Si el costo del capital -- para la empresa es el 10 por ciento, la aplicación del criterio TIR o VAN determina la aceptación de ambas inversiones. Si no hay racionamiento de capital, la decisión tomada es óptima, porque ambos proyectos contribuyen a incrementar el valor actual - neto de la firma. Pero supongamos que la empresa únicamente -- puede invertir un máximo de $ 200, y además existe una tercera inversión posible C que también cuesta $ 100, pero aporta, 25 - por ciento anualmente durante 10 años. La decisión de aceptar a A y B, era óptima cuando representaban las únicas alternativas de inversión, ahora ya no es óptima si se incluye C en la - relación de proyectos competidores. No obstante, que los proyectos A y B incrementan el valor actual neto de la empresa, su aportación al VAN es menor que la de los proyectos B y C. Como la firma sólo dispone de fondos para seleccionar dos proyectos de tres, la política óptima exige la aceptación de B y C.

A pesar de que el proyecto A es una inversión - aceptable cuando se juzga individualmente, ésta no es incluida en la combinación óptima de proyectos. Esto implica que cuando la administración debe elegir entre inversiones competidoras, - no sólo necesita una norma que le permita clasificar las inversiones en aceptables o inaceptables; también necesita un método para seleccionar del conjunto de proyectos aceptables, aquellos que maximizan el valor actual neto de la firma.

El problema de la selección de una cartera óptima de inversiones tiene dos enfoques: 1) el método del ordenamiento y 2) el método de la programación matemática. En el primer método, todos los proyectos competidores se clasifican por orden decreciente, en base a sus respectivas TIR o VAN. Entonces, los proyectos se seleccionan en este orden hasta agotar el presupuesto del capital de la empresa. Con relación a este enfoque se plantean dos problemas; en primer lugar dado un conjunto de proyectos competidores, su orden de preferencia conforme al criterio TIR, algunas veces difiere del que se establece de acuerdo al criterio VAN. El segundo problema, al aplicar el método del ordenamiento se origina la indivisibilidad de los proyectos. Cuando el capital es ilimitado, la indivisibilidad de los proyectos no representa un problema. Pero en condiciones de racionamiento de capital, la aceptación de un gran proyecto puede excluir la ejecución de varios proyectos más reducidos. Si el conjunto de proyectos más pequeños permite un uso más completo del presupuesto del capital, es posible que incremente más el valor actual neto de la empresa, que el proyecto principal, a pesar de que este último puede ser el más rentable de los proyectos competidores. Por ejemplo, sean D, E y F tres inversiones, que cuestan \$ 100, \$ 75 y \$ 75, con VAN de \$ 25, \$ 15 y \$ 15 respectivamente. Si el presupuesto del capital de la empresa es de \$ 150, entonces el proyecto seleccionado es D, por tener el más elevado VAN total y el más alto VAN por peso de inversión. Como consecuencia, se rechazan los proyectos E y F, dos proyectos pequeños que juntos aportarían un VAN de $ 30. Por lo tanto, al menos teóricamente cuando las inversiones no son perfectamente divisibles, el método del ordenamiento no conduce necesariamente a una cartera óptima de inversiones.

Entre los diferentes métodos de tratar la indivisibilidad, el método de la programación de enteros es quizá el más promisorio. La programación de enteros es la forma de programación lineal en la cual se requiere que los valores óptimos de los variables de decisión sean enteros.

2.1 El problema de la tasa de reinversión.

Una ventaja importante del criterio del VAN sobre el criterio de la TIR, es su relación directa con el objetivo básico de la administración financiera, que es elevar el valor actual neto de la empresa, en virtud que el VAN de una inversión suministra un indicador claro de la aceptabilidad de la inversión. Sin embargo, los hombres de negocios ven con más claridad el criterio TIR, por ser la tasa de rentabilidad de la inversión. Hemos demostrado que para juzgar el valor de una inversión con los criterios TIR y VAN, éstos son equivalentes, siempre que la tasa de rentabilidad se interprete como la tasa interna de rentabilidad (TIR) en el caso de las inversiones puras, y como la rentabilidad del capital invertido (RCI) para las inversiones mixtas. En la selección de una cartera óptima de inversiones de una lista de proyectos competidores, es posible encontrar una clasificación distinta al aplicar ambos criterios, el VAN y la TIR. Esta inconsecuencia del ordenamiento puede recibir el nombre de problema de la tasa de reinversión, pues la causa puede imputarse a los diferentes supuestos que realizan estos dos criterios acerca de la tasa de reinversión. Si se supone una tasa común de reinversión esta inconsecuencia desaparece.

Para ilustrar la naturaleza del problema de la tasa de reinversión, consideramos el caso de una empresa que tiene que elegir entre dos proyectos, cada uno de ellos tiene un costo de $ 100. El proyecto X genera una renta de $ 120 al fin del año 1; el proyecto Y, genera $ 201.14 al fin de 5 años. Las TIR calculadas para los proyectos X, Y son el 20 y el 15 por ciento respectivamente. Si los proyectos se ordenan de acuerdo a sus tasas internas de rentabilidad, la administración elige el proyecto X, por tener una rentabilidad mayor que Y. Esta decisión no siempre maximiza el valor actual neto de la empresa, es decir, si suponemos una tasa de descuento del 10 por ciento, el proyecto X que renta $ 120 al final del año 1, tiene un valor actual de $ 109.09. El proyecto B que genera $ 201.14 al fin de 5 años tiene un valor actual de $ 124.89, y como cada proyecto cuesta $ 100 ahora, la empresa debería elegir Y, si los proyectos se ordenan de acuerdo con sus VAN. Lo que confirma que el método del ordenamiento mediante la tasa de rentabilidad no siempre maximiza el valor actual neto.

Encontramos que hay contradicción entre los criterios TIR y VAN, al aplicarlos con fines de ordenamiento a un conjunto de inversiones competidores. Esta situación tiene implicaciones significativas para cualquier empresa que posea un presupuesto fijo de capital y deba elegir entre diferentes inversiones. Sin embargo, las clasificaciones contradictorias del ejemplo anterior, no se deben a contradicciones entre los dos criterios de clasificación, sino en los supuestos contradictorios de la tasa posible de reinversión de los fondos liberados de los proyectos. Como vemos, el proyecto X aporta una rentabilidad del 20 por ciento anual, con una vida de 1 año, mientras que el proyecto Y aporta una rentabilidad del 15 por ciento anual, para una vida de 5 años. Por lo tanto, la oportunidad de reinversión se convierte en una cuestión importante para determinar la mayor o menor atracción de dos proyectos competidores.

Cuando la empresa tiene un presupuesto fijo de capital, el principio de costo de oportunidad exige que el VAN de una inversión se calcule descontando los flujos netos de fondos de acuerdo con la rentabilidad de la inversión marginal (RIM). Entonces, el ordenamiento de los proyectos de acuerdo con sus VAN implica que los fondos liberados por los proyectos pueden reinvertirse con una rentabilidad igual a la RIM de la empresa. Esto es, sean A y B dos proyectos competidores, el proyecto A cuesta a_0 pesos ahora Y renta a_m pesos -

al final de m años; el proyecto B cuesta a'_0 pesos y renta a'_n pesos al final de n años, siendo $a_0 = a'_0$, $a'_n > a_m$, y $n > m$. Supongamos que k representa la RIM de la empresa, y j la tasa de reinversión para el período entre las fechas finales de los dos proyectos. Con estos datos las expresiones de los VAN de estos dos proyectos son las siguientes:

$$\text{VAN de A} = \frac{a_m}{(1+K)^m} - a_0$$

$$\text{VAN de B} = \frac{a'_n}{(1+K)^m\ (1+j)^{n-m}} - a'_0$$

Obsérvese que el VAN de A se calcula descontando el flujo futuro de fondos con la tasa K, y el VAN de B se calcula descontando el flujo futuro de fondos con dos tasas k y j. Si k = j el VAN de B tendría un valor acertado. Entonces, el ordenamiento de los proyectos de acuerdo con sus VAN supone implícitamente que los fondos liberados por los proyectos de vida más corta se reinvierten según la RIM de la empresa, que es k.

Si la RIM k, se acepta como la tasa de reinversión j de la empresa, tenemos que la fórmula VAN para clasificar proyectos según el orden de su rentabilidad es

$$\text{VAN} = \sum_{t=0}^{n} \frac{a_t}{(1+k)^t}$$

En el ejemplo numérico precedente, se demuestra -- que si la tasa de reinversión es igual a la RIM de la empresa, el 10 por ciento, el VAN del proyecto Y es mayor que el del pro yecto X, no obstante que la TIR de X es mayor en los dos proye tos. Comparado con Y, el proyecto X tiene la ventaja de una e vada TIR (20 por ciento) por un año; pero también tiene la des ventaja de una baja tasa de reinversión (10 por ciento) para l 4 años siguientes. Si se acepta la tasa de reinversión del 10 por ciento, incluso los cálculos de la tasa de rentabilidad in dicarán que el proyecto Y es mejor inversión que X. El proyec to X libera $ 120 al final del primer año, que reinvertidos a la tasa del 10 por ciento anual, al final de cinco años forma rían un monto de $ 175.20. El proyecto X tiene una TIR del 2 por ciento para el primer año, pero la inversión en X implica una secuencia de inversiones que prometen una rentabilidad me o igual al 12 por ciento anual durante los 5 años. Puesto qu el proyecto Y aporta una rentabilidad del 15 por ciento anual durante 5 años, el criterio de la TIR clasifica en un posició superior al proyecto Y con respecto al proyecto X. Por consi guiente, si se acepta una tasa común de reinversión, las clas ficaciones de los proyectos competidores son idénticas, indep dientemente del criterio TIR o VAN que se aplique.

El problema de la tasa de reinversión no se r fiere únicamente a proyectos competidores de distinta duraci sino a proyectos con misma duración, pero con distintas secu cias de flujo de fondos. Esto es, sean M y N dos inversione 5 años, con la siguiente serie de flujo y de fondos.

Flujo de fondos al final del año

	0	1	2	3	4	5
M	-3790	1000	1000	1000	1000	1000
N	-3790	200	600	600	1000	2800

Los cálculos de la TIR de los proyectos M y N, indican que tienen un valor aproximado del 10 y 8 por ciento respectivamente. Si los proyectos se clasifican de acuerdo con sus TIR, entonces M es una inversión más deseable que N. Pero si afirmamos que la RIM y la tasa de reinversión de la empresa del 3 por ciento, los VAN de M y N son \$ 789.71 y \$ 822.61 respectivamente. En este caso, N es una inversión más deseable que M, si los proyectos se clasifican de acuerdo con sus VAN.

Aunque los proyectos M y N tienen los mismos períodos de vida, M genera sus ingresos a una tasa constante en cambio N genera los suyos a una tasa variable. El proyecto M libera más fondos para la reinversión durante los 3 primeros años igual fondos para la reinversión en el año 4 y menos fondos para la reinversión en último año. Por consiguiente, vemos que la tasa de reinversión aparece siempre que la administración debe elegir entre inversiones con distintas secuencias de flujos de fondos.

2.2 El supuesto que está en la base del criterio T

En las decisiones de inversión, siempre se presenta el problema de la reinversión por lo que es conveniente preguntarnos si en todos los casos es posible ordenar acertadamente los proyectos mediante la TIR de los proyectos mismos. La respuesta es afirmativa si se satisface cierto supuesto. Primero representamos gráficamente las relaciones funcionales entre el VAN y la RIM k de la empresa para los proyectos X e Y de nuestro primer ejemplo numérico. Observamos que en la figura 10, las dos funciones X e Y tienen pendientes negativas y su intersección única corresponde al valor de k = 13.8 por ciento. Como la TIR es la tasa que iguala a cero el VAN, la función X corta el eje de las abscisas (0,k) en el 20 por ciento, y la función Y lo corta en el 15 por ciento. Conforme a la gráfica el método del VAN da mayor prioridad al proyecto Y sobre el proyecto X, sólo cuando la RIM es menor que 13.8 por ciento, en este punto los proyectos tienen VAN idénticos, por consiguiente el mismo ordenamiento, en cambio para los valores mayores a 13.8 por ciento, la prioridad se invierte, es decir, el proyecto X tiene preferencia sobre el proyecto Y.

En la figura 10, destaca un importante supuesto acerca de la tasa de reinversión cuando se clasifican los proyectos de acuerdo con su TIR. Puesto que la gráfica demuestra que si la tasa de reinversión supera el 13.8 por ciento, el VAN del proyecto X supera al que le corresponde al proyecto Y, entonces las clasificaciones de estos proyectos por ambos criterios VAN y TIR son idénticas. El punto de intersección que en este caso corresponde a k = 13.8 por ciento, es el concepto que Irwing Fisher denomina tasa de rentabilidad sobre el costo. Por consiguiente, el ordenamiento de los proyectos conforme a su TIR supone implícitamente que los fondos generados por el proyecto pueden reinvertirse con una rentabilidad más elevada que la tasa de rentabilidad sobre el costo de Fisher.

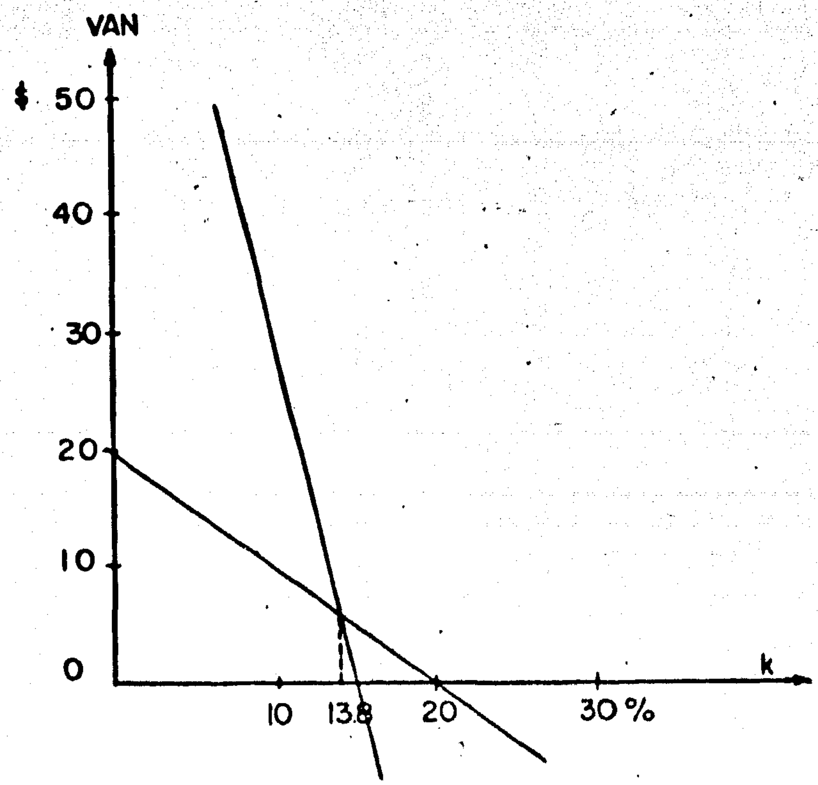


Fig. 10 INTERSECCION DE FISHER.

2.3 La intersección de Fisher, su existencia y carácter único.

En la sección anterior, analizamos que las funciones VAN de dos inversiones se intersectan en el intervalo $(0, r^*_m)$ siendo r^*_m la más pequeña de las dos TIR. Si la RIM de la empresa k es menor que r^*_m, uno de los proyectos o ambos tendrán un VAN negativo, y así desaparece la necesidad del ordenamiento. La TIR es un criterio válido de ordenamiento sólo si la RIM es igual o mayor que la tasa de rentabilidad sobre el costo, y por consiguiente su tasa de reinversión supera la tasa de rentabilidad de Fisher.

A menudo sucede que una inversión es más atractiva que otra considerada como preferente por la tasa de reinversión de la empresa. En estas condiciones, las funciones VAN no se intersectan en el intervalo $(0, r^*_m)$.

Como la intersección de Fisher no existe, los ordenamientos conforme a los criterios TIR y VAN son los mismos. Por lo tanto, la presencia o ausencia de la intersección de Fisher muestra si los proyectos deben ordenarse mediante la TIR con o sin referencia a la tasa de reinversión

Es conveniente aclarar que estamos analizando los problemas acerca de la intersección que estén relacionados con las inversiones puras con tasas positivas de rentabilidad.

No hay intersección. Hay dos situaciones en las que se puede afirmar que no hay intersección de Fisher en el intervalo $(0, r^*m)$. La manera de cómo identificarlas, es analizando el problema de la clasificación de dos inversiones puras P y Q. Definimos el VAN del proyecto p como p(k) y el VAN del proyecto Q como q(k), donde k es la RIM de la empresa. Donde p(k) y q(k) son funciones contínuas de k, es decir, su representación gráfica no tendrá huecos en las curvas que representan estas funciones; ambas curvas tienen pendiente negativa, lo que significa que el VAN disminuye a medida que k aumenta, son cóncavas y ambas curvas se extienden sobre sus tangentes, porque la función VAN de una inversión simple tiene siempre pendiente negativa y es cóncava en sentido ascendente, y también porque una inversión pura puede concebirse como la suma de dos o más inversiones simples. Después representamos la TIR del proyecto p como r^*_p y del proyecto Q como r^*_q. Por definición $r^*_m = \text{mín}\,(r^*_p, r^*_q)$; es decir, r^*_m es la menor de las dos TIR.

Las funciones VAN p(k) y q(k) no tendrán intersección en el intervalo $(0, r^*_m)$ si se satisfacen simultáneamente las tres condiciones siguientes:

$$p(0) > q(0) \qquad p'_{(k)} < q'_{(k)} \text{ para } 0 \leq k \leq r^*_m$$

$r^*_p > r^*_q$ donde $p'_{(k)}$ y $q'_{(k)}$ son las primeras derivadas del p(k) y q(k)

$p(0)$ y $q(0)$ son los valores respectivos de $p(k)$ y $q(k)$ cuando k asume el valor de cero, los términos restantes se definen - como antes. Esta aseveración se demuestra por contradicción, suponiendo que existe una nueva función $f(k) = p(k) - q(k)$. - Si $p(k)$ y $q(k)$ se intersectan en un punto k_0 que pertenece al intervalo $(0,r^*_m)$ el valor de $f(k_0) = p(k_0) - q(k_0) = 0$. Aún más, como $p' < q'$, $f'(k) < 0$. Estas dos conclusiones impli-- can que $f(k) < 0$ para $k > k_0$, sobre todo para $k = r^*_q$, $f(r^*_q) < 0$ y $q(r^*_q) = 0$, por consiguiente $p(r^*_q) < 0$, por hipótesis $r^*_p > r^*_q$ pero en nuestro caso, se deduce que $p(r^*_p) < p(r^*_q) < 0$, entonces contradice el supuesto de $p(r^*_p) = 0$, lo que - demuestra que $p(k)$ y $q(k)$ no se intersectan en el intervalo - $(0,r^*_m)$.

Como ejemplo. Sean P y Q dos inversiones con la siguiente serie de flujos de fondos.

Flujos de fondos al final del año

	0	1	2	3
P -	\$ 100	\$ 20	\$ 20	\$ 120
Q -	100	10	10	110

$$p(k) = -100 + \frac{20}{(1+k)} + \frac{20}{(1+k)^2} + \frac{120}{(1+k)^3}$$

$$q(k) = -100 + \frac{10}{(1+k)} + \frac{10}{(1+k)^2} + \frac{110}{(1+k)^3}$$

(1) $p(0) = 60 > q(0) = 30$

$$(2)\quad p'(k) = -\frac{20}{(1+k)^2} - \frac{40}{(1+k)^3} - \frac{360}{(1+k)^4}$$

$$q'(k) = -\frac{10}{(1+k)^2} - \frac{20}{(1+k)^3} - \frac{330}{(1+k)^4} \text{ entonces}$$

$$p' < q' \quad \text{para todos los valores de } k \geq 0$$

$$(3)\quad r^{*}_{p} = 0.2 > r^{*}_{q} = 0.1$$

Como las tres condiciones se satisfacen, tenemos la certeza de que la intersección de Fisher no existe, entonces los proyectos pueden clasificarse acertadamente de acuerdo con su TIR sin ninguna referencia a la tasa de reinversión de la empresa. En la figura 11.1 se tiene una representación gráfica de esta situación.

El segundo caso, en el cual no existe intersección de Fisher, es cuando se satisfacen simultáneamente las dos condiciones siguientes:

$$p(0) > q(0) \qquad p'_{(k)} > q'_{(k)} \quad \text{para } 0 \leq k \leq r^{*}_{m}$$

para demostrar esta aseveración, se considera a f como una función definida $f(k) = p(k) - q(k)$, con la propiedad $f(0) > 0$ y $f'(k) > 0$. Como $f(k)$ no intersecta el eje de las abscisas, no puede haber intersección entre $p(k)$ y $q(k)$ en el intervalo $(0, r^{*}_{m})$, donde $r^{*}_{m} = r^{*}_{q}$.

Para ilustrar este caso, sean P y Q la siguiente serie de flujos de fondos:

Flujos de fondos al final del año

		0	1	2	3
P	-	\$ 10	\$ 20	\$ 20	\$ 20
Q	-	20	22	22	22

(1) $p(0) = 50 > q(0) = 46$

(2) $$p'(k) = -\frac{20}{(1+k)^2} - \frac{40}{(1+k)^3} - \frac{60}{(1+k)^4}$$

$$q'(k) = -\frac{22}{(1+k)^2} - \frac{44}{(1+k)^3} - \frac{66}{(1+k)^4}$$

$p' > q'$ para todos los valores $k \geq 0$. Como las dos condiciones se satisfacen, tenemos la certeza que la intersección de Fisher no existe, por lo cual, pueden utilizarse el VAN y TIR para obtener un ordenamiento válido de estas dos inversiones, figura 11.2

Intersección única. Existe una situación en la cual se puede afirmar positivamente que las funciones VAN de dos inversiones P y Q tendrán una intersección única de Fisher en el intervalo $(0, r^*_m)$. Esto sucede cuando se satisfacen simultáneamente las tres condiciones siguientes:

$$p(0) > q(0) \qquad r^*_p < r^*_q \qquad p' < q'$$

para demostrar este caso, se define la función f como $f(k) = p(k) - q(k)$. Sabemos que $f(k)$ es contínua y $f(0) > 0$ y $f(r^*_p) < 0$, entonces $f(k)$ debe intersectar el eje de las abscisas en cierto punto del intervalo $(0, r^*_p)$. Aún más, como $f'(k) < 0$, significa que $f(k)$ es monotónicamente decreciente, lo que implica que f(k) sólo una vez puede intersectar el eje de las abscisas. Lo que demuestra que hay una intersección única entre p(k) y q(k) en el intervalo $(0, r^*_m)$, donde $r^*_m = r^*_p$. Una representación gráfica de esta situación la encontramos en las figuras 11.3 y 11.4.

Un ejemplo, sean P y Q dos inversiones con la siguiente serie de flujos de fondos.

Flujos de fondos al final del año

	0	1	2	3	4	5
P	- 3 790	200	600	600	1 000	2 800
Q	- 3 790	1 000	1 000	1 000	1 000	1 000

(1) $p(0) = 1410 > q(0) = 1210$

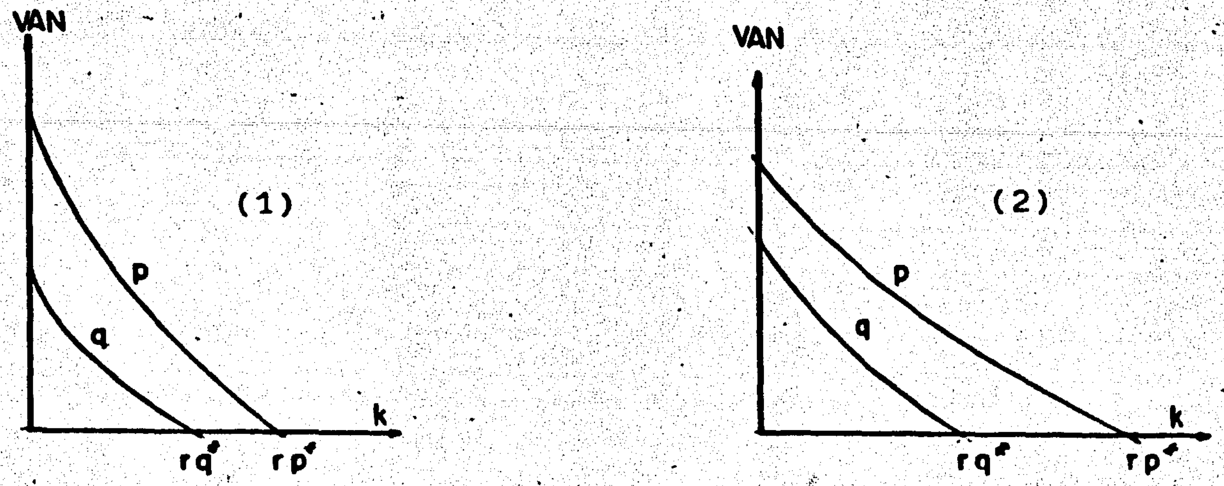
(2) $r^*_p = 0.08 < r^*_q \quad 0.10$

(3) $$q'(k) = -\frac{1\ 000}{(1+k)^2} - \frac{2\ 000}{(1+k)^3} - \frac{3\ 000}{(1+k)^4} - \frac{4\ 000}{(1+k)^5} - \frac{5\ 000}{(1+k)^6}$$

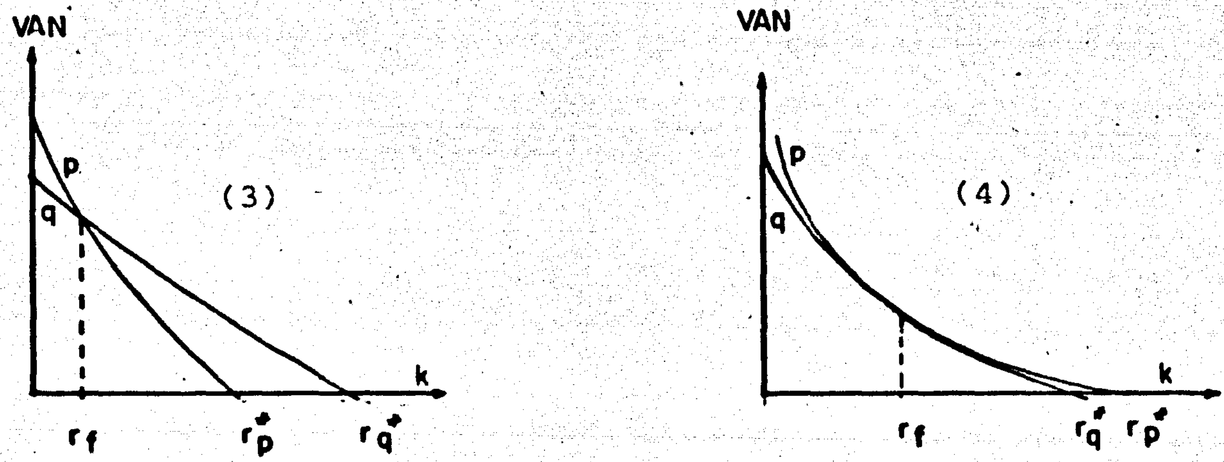
$$p'(k) = -\frac{200}{(1+k)^2} - \frac{2\ 000}{(1+k)^3} - \frac{1\ 800}{(1+k)^4} - \frac{4\ 000}{(1+k)^5} - \frac{14\ 000}{(1+k)^6}$$

$q' > p'$ para k en el intervalo (0, 0.1). Como las tres condiciones se satisfacen, entonces las funciones VAN de estas dos funciones tienen una intersección única en el intervalo (0, 0.8). Al calcular la tasa de rentabilidad de Fisher, encontramos que es el 4 por ciento, por lo tanto, los proyectos se clasifican acertadamente por medio de sus TIR sólo si RIM de la empresa es igual a la intersección de Fisher y su tasa de reinversión supera el 4 por ciento, figura 11.4.

NO HAY INTERSECCION



INTERSECCION UNICA



INTERSECCIONES MULTIPLES

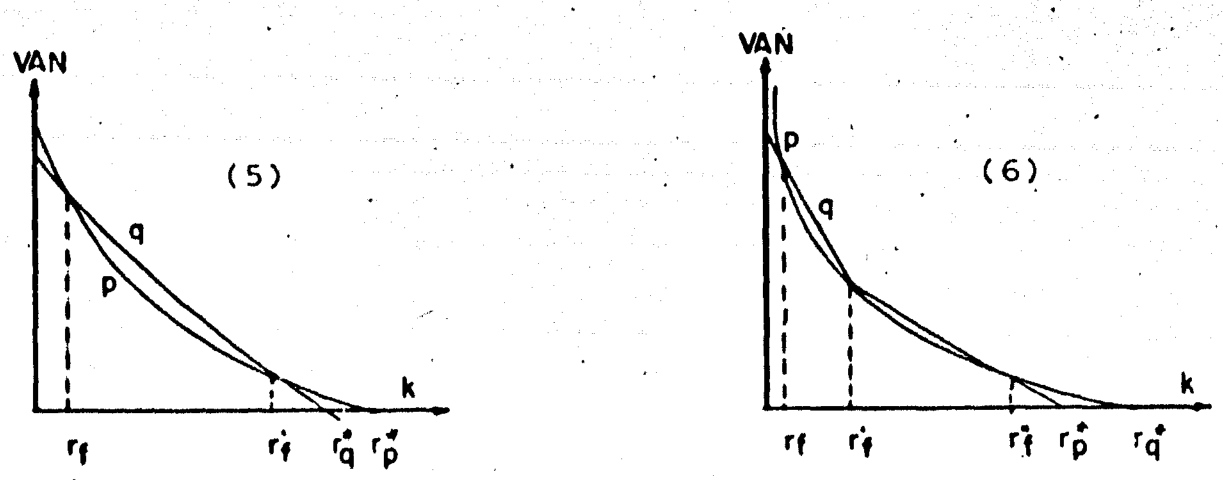


Fig. II r_f , r_f' , r_f'' TASA DE RENTABILIDAD DE FISHER

r_p^* TIR DEL PROYECTO-X r_q^* TIR DEL PROYECTO-Y

Posibles intersecciones múltiples. Si las funciones VAN p(k) y q(k) no satisfacen las condiciones especificadas - anteriormente, en ese caso, dependiendo de las formas funcionales de p(k) y q(k) puede haber cualquier número de intersecciones de Fisher. La representación gráfica de funciones VAN, con dos y tres intersecciones, respectivamente, las encontramos en las figuras 11.5 y 11.6. En los casos en que son posibles intersecciones múltiples, es difícil realizar generalizaciones de la intersección de Fisher, y por consiguiente, el procedimiento recomendado para ordenar proyectos es el empleo del criterio VAN o el método de la programación matemática.

El análisis anterior supone que las funciones VAN -- tienen pendiente negativa y son cóncavas en sentido ascendente, lo que implica que sólo son aplicables al ordenamiento de inversiones puras. Para las inversiones mixtas las funciones VAN no son monotónicas ni cóncavas en sentido ascendente, y - por lo tanto las generalizaciones de la intersección de Fisher son todavía más difíciles. En general, las inversiones mix-- tas deben ordenarse utilizando el método VAN o el de la programación matemática.

2.4 Aplicación de la programación lineal con enteros

La administración financiera con frecuencia debe elegir entre inversiones competidoras, ya sea que el capital de la empresa esté racionado o porque ciertos proyectos se excluyen mutuamente. En estas situaciones, la manera de elegir la mejor cartera de proyectos es el método que acabamos de analizar, cuando los proyectos competidores se ordenan de acuerdo con cierto criterio, y se aceptan en el orden de su clasificación hasta que se agota el capital de la firma. Cuando cada inversión es reducida en relación con el presupuesto total de capital, este método de selección determina una cartera de inversiones que se aproxima al óptimo. Pero cuando cada inversión es grande, este procedimiento fracasa porque no toma en cuenta la indivisibilidad de los proyectos. Para considerar la indivisibilidad de los proyectos, el principio del ordenamiento debe aplicarse, no a cada proyecto individulamente, sino a todas las posibles combinaciones de proyectos, con el inconveniente que al aumentar el número de proyectos que compiten, los cálculos asociados con el método del ordenamiento se multiplican rápidamente. Un enfoque más promisorio es la programación lineal con enteros que puede tratar simultáneamente los problemas de racionamiento de capital, las inversiones que se excluyen mutuamente y la indivisibilidad de los proyectos.

Un problema de programación con enteros, es el caso de una empresa que afronta el problema de distribuir entre n inversiones competidoras un presupuesto fijo de capital. Para cualquier inversión, supongamos que es el proyecto j con flujos netos de fondos o egresos de a_{tj} pesos al año t (t =1, 2,...,T), donde T es el período de vida del proyecto que tiene más larga vida del conjunto de n inversiones. Por problemas presupuestarios, el importe máximo que la empresa puede gastar durante el año t es A_t pesos con $t = 1,2,\ldots,T$. La administración ha determinado que el VAN del proyecto j es V_j pesos. Por ahora suponemos que no hay dos proyectos que se excluyen mutuamente, después consideramos este supuesto, pero si se toma en cuenta el correspondiente a la indivisibilidad de los proyectos en el sentido, de que cualquier inversión solamente se acepta o rechaza. Si el objetivo financiero es maximizar el valor actual neto, ¿cuál es la cartera óptima de inversiones?.

Para la solución de este problema de presupuesto del capital, suponemos que x_j es el proyecto j que la empresa decide incluir en su cartera de inversiones. El problema es hallar los valores de x_j, $j = 1,2,\ldots,n$ sujetos a las restricciones presupuestarias, a la propiedad de integralidad y al mismo tiempo maximizar la función objetivo, del problema siguiente:

$$\text{maximizar } f = v_1x_1 + v_2x_2 + \ldots + v_nx_n$$

sujeta a las restricciones presupuestarias

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq A_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leq A_2 \\ &\vdots \\ a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \ldots + a_{tn}x_n &\leq A_t \end{aligned}$$

y a la propiedad de integralidad

$$x_j = 0,1 \qquad (j = 1,2,\ldots,n)$$

La expresión $a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \ldots + a_{tn}x_n$ represe ta el flujo neto de fondos del año t. El conjunto de desigualdades determinado por las restricciones presupuestarias, indican que el flujo neto de cualquier año de los proyectos aceptados no debe exceder el presupuesto de ese año. Las condicione de integralidad limitan a las variables x_j a tomar los valores 0 ó 1, lo que significa que cada proyecto sea aceptado o rechazado. La función f se refiere al objetivo del programa, que e seleccionar la cartera de inversiones que aporte el mayor valo neto actual. Las variables que representan la cartera óptima deben satisfacer las condiciones de racionamiento de capital, indivisibilidad de los proyectos y las correspondientes a los proyectos que se excluyen mutuamente. Aunque este último caso no se consideró en el programa con enteros que se acaba de exp ner, a continuación indicamos la manera de como tomar en cuent estas restricciones. Supongamos que los proyectos 1, m y n se excluyen mutuamente, es decir, la aceptación de un proyecto cualquiera implica el rechazo de dos restantes, la expresión m temática de esta restricción es:

$$x_1 + x_m + x_n \leq 1$$

donde x_i $(i = 1,m,n)$ toma el valor de 0 ó 1. El signo menor que, permite que las x_i asuman al mismo tiempo el valor cero, el signo de igualdad implica que las tres variables asuman por parejas el valor cero. Por lo tanto, no puede haber más de -- una variable con valor 1, en ningún caso.

Un ejemplo que ilustra lo anterior, es el de una empresa que tiene el problema de seleccionar una cartera óptima de inversiones de un conjunto de nueve proyectos indivisibles, cada uno de estos proyectos requiere desembolsos en dos períodos consecutivos de tiempo; la disponibilidad de fondos de la firma se limitan a un valor actual de $ 50 pesos para el primer - año y un valor actual de $ 20 pesos para el segundo año. Si - el objetivo es maximizar el VAN, ¿cuáles serán los proyectos - seleccionados de este conjunto?. Los datos correspondientes - al problema se encuentran a continuación:

Proyectos	Erogaciones del año 1	Erogaciones del año 2	VAN
1	$ 12	$ 3	$ 14
2	54	7	17
3	6	6	17
4	6	2	15
5	30	35	40
6	6	6	12
7	48	4	14
8	36	3	10
9	18	3	12
Disponibilidad	50	20	

la formulación mediante la programación de enteros de este problema de presupuesto de capital, que consiste en encontrar los valores x_j ($j = 1,2,\ldots,9$) que maximiza la función objetivo y satisface las restricciones presupuestarias y la propiedad de integridad es:

$$\text{maximizar } f = 14x_1 + 17x_2 + 17x_3 + 15x_4 + 40x_5 + 12x_6 + 14x_7 + 10x_8 + 12x_9$$

sujeta a las restricciones presupuestarias

$$12x_1 + 54x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 30x_5 + 6x_6 + 48x_7 + 36x_8 + 18x_9 \leq 50$$

$$3x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 35x_5 + 6x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 3x_9 \leq 20$$

y a la propiedad de integralidad

$$x_j = 0 \text{ ó } 1 \quad (j = 1,2,\ldots,9).$$

donde x_j es el proyecto j que la empresa decide aceptar. Una solución de programación con enteros para las variables de decisión es: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$, $x_7 = 0$, $x_8 = 0$, $x_9 = 1$. Por lo tanto, los proyectos que forman la cartera óptima son 1, 3, 4, 6, y 9, que requieren un desembolso de capital de \$ 48 en el primer año y \$ 20 para el segundo año, con una aportación total al valor neto actual de la empresa de \$ 70.

El propósito de este ejemplo es ilustrar la aplicación de la programación con enteros en las decisiones de inversión, sin describir el método empleado en la solución del problema, por el número elevado de cálculos que requiere su solución y -

no solamente en este caso, sino de manera general en todos los problemas relacionados con la programación entera. El algoritmo que se usa para resolver este tipo de problemas ya se presentó en el inciso 2.5 de la parte matemática y nos referimos a los planos de corte de R.E. Gomory, en esta sección la aplicación del algoritmo difiere del método que se presentó, en este caso consiste en resolver el problema de programación con enteros como un problema común de programación lineal, sin tomar en cuenta la condición de integralidad. Si las variables que componen la solución óptima son enteros, la solución también es óptima para el problema original de programación con enteros, pero si la solución óptima al problema común de programación lineal contiene valores fraccionales, el algoritmo de Gomory genera automáticamente una restricción adicional que conserva todas las soluciones viables con valores enteros, eliminando la solución actual no entera. El problema con la restricción aumentada, se resuelve de nuevo como un problema común de programación lineal. Si la nueva solución óptima es entera, la solución también es óptima para el problema original de programación con enteros. Pero si la solución es no entera, el algoritmo genera otra restricción, la agrega al problema existente, y se resuelve de nuevo como un problema de programación lineal. Se ha demostrado que este algoritmo siempre conduce a una solución óptima con valores enteros en un número finito de pesos.

Un ejemplo para ilustrar el algoritmo de Gomory es el que describimos a continuación:

maximizar $f = x_1 + 2x_2$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$3x_1 + x_2 + x_4 = 10$$

$$x_1 + 4x_2 + x_5 = 12$$

y

$x_i \geqq 0 \quad x_i$ un entero $(i=1,2,...,5)$

Al resolver el problema por el algoritmo simplex, la tabla 10 final está representanda por las siguientes cantidades:

TABLA 10. SIMPLEX FINAL

	Base	C		-1	-2	0	0	0
			P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_1	-1	4/3	1	0	4/3	0	-1/3
2	P_2	-2	8/3	0	1	-1/3	0	1/3
3	P_4	0	10/3	0	0	-11/3	1	3/4
4	$z_j - c_j$		-6.67	0	0	-2/3	0	-1/3

El valor correcto de la función objetivo en 6.67, puesto que originalmente estabamos tratando con un problema de maximización.

En la solución óptima x_1, x_2 tienen valores fraccionados de 4/3 y 8/3 respectivamente. Ahora se genera una restricción que conserve las soluciones viables con valores enteros, pero que elimine la fracción de 8/3 para x_2. Para ésto, la ecuación que le corresponde a la segunda fila es:

(1) $8/3 = x_2 - 1/3x_3 + 1/3x_5$

como cada número fraccionado se puede expresar como la suma de la parte entera inmediata inferior y una fracción positiva, la ecuación anterior se transforma

(2) $2 + 2/3 = x_2 + (-1+2/3)x_3 + (0 + 1/3)x_5$ enseguida

k se define como la suma de los productos de las variables no básicas, x_3 y x_5, con sus respectivos coeficientes de fracciones positivas, obteniendo como resultado

(3) $k = 2/3x_3 + 1/3x_5$

Puesto que todas las variables básicas o no básicas, deben ser iguales o mayores que cero, entonces k es no negativa. Al restar (3) de (2), se obtiene

(4) $2/3 - k = x_2 - x_3 - 2$

Como las variables del problema deben satisfacer la condición de integralidad, el segundo miembro de la ecuación (4) debe ser un entero con un valor cero o negativo, ésto es, el primer miembro de la ecuación está formado por la fracción 2/3 menos cierto número no negativo k. Donde k es igual o mayor que 2/3, es decir

(5) $k = 2/3x_3 + 1/3x_5 \geq 2/3$

Por las restricciones presupuestarias conocemos que $x_3 = 4 - x_1 - x_2$ y $x_5 = 12 - x_1 - 4x_2$, que al sustituir estas ecuaciones en (5), se obtiene una restricción de Gomory:

(6) $x_1 + 2x_2 \leq 6$

Después se agrega este plano de corte a las restricciones existentes, para aplicar de nuevo el algoritmo simplex, como si fuera un problema totalmente nuevo, tabla 11. Un procedimiento más eficaz consiste en incluir la nueva restricción al cuadro simplex final que se obtuvo y aplicar el método simplex dual.

Esta tabla tiene como elementos el conjunto de restricciones ya existentes y la determinada por el plano de corte de Gomory. Esto es:

TABLA 11. PASO INICIAL

	Base	C		-1	-2	0	0	0	0
			P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	0	4	1	1	1	0	0	0
2	P_4	0	10	3	1	0	1	0	0
3	P_5	0	12	1	4	0	0	1	0
4	P_6	0	6	1	2	0	0	0	1
5	z_j-c_j		0	1	2	0	0	0	0

Al aplicar el método simplex, obtenemos el segundo paso

SEGUNDO PASO

i	Base	C		-1	-2	0	0	0	0
			P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	0	1	1/2	0	1	0	0	-1/2
2	P_4	0	7	1/2	0	0	1	0	-1/2
3	P_5	0	0	-1	0	0	0	1	-2
4	P_2	-2	3	1/2	1	0	0	0	1/2
5	z_j-c_j		-6	0	0	0	0	0	-1

El valor de la función objetivo es -6 para el problema de minimizar, pero lo que deseamos es maximizar la ganancia de la empresa, que se determina al multiplicar por (-1) la función objetivo, la que indica una utilidad de $ 6. para la firma. - La solución encontrada, se caracteriza por ser óptima y estar expresada en valores enteros, y sus componentes significativos son $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

La solución gráfica a este problema la encontramos en la figura 12. La solución óptima del problema común de programación lineal está representada por el punto N, con $x_1 = 4/3$ y $x_2 = 8/3$, ya que las variables de la solución óptima no son - enteras, entonces se incluye el corte de plano de Gomory (6) - representado por la línea FF' que corta el conjunto original -

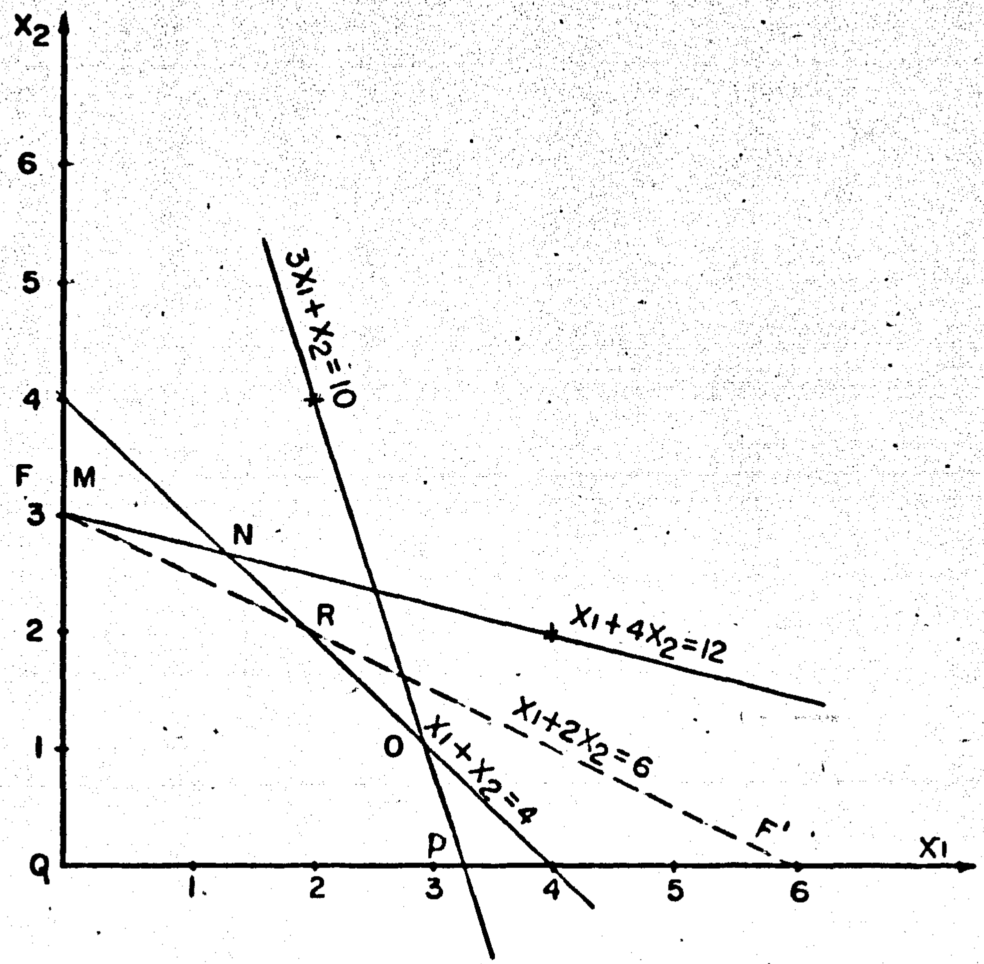


Fig. 12 SOLUCION GRAFICA DEL PROBLEMA DE PROGRAMACION CON ENTEROS

de soluciones viables. Esta restricción limita la región de - soluciones viables de MNOPQ a MROPQ. La nueva región MROPQ excluye la solución fraccionada que se obtuvo, pero conserva todas las soluciones del conjunto original viable que tienen valores enteros. Al sustituir los valores extremos de la nueva región, en la función objetivo, se obtiene una solución óptima expresada en enteros que corresponde al punto M con $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$, lo que representa para la firma una utilidad de \$ 6. - Esta misma solución se obtuvo por el método simplex

2.5 Aplicación de la programación dinámica

La programación dinámica puede definirse como una técnica matemática empleada para la solución de problemas por medio de una serie de decisiones en secuencia. Se debe tomar - una secuencia de decisiones con cada una de ellas que afecte - las decisiones futuras. Esto es necesario, por ser poco los - problemas en los que las implicaciones de una decisión no se - extiendan al futuro. En consecuencia la empresa se enfrenta - a situaciones en las que debe tomar una serie de decisiones, - donde el éxito de cada una depende de los resultados de una decisión previa de la misma serie.

Un análisis de inversiones por medio de la programación dinámica, lo encontramos cuando una empresa afronta el -- problema de distribuir su presupuesto de capital en n inver---

siones con el propósito de obtener la ganancia máxima. Para ampliar esta parte, consideramos el caso de una empresa que tiene dentro de sus planes hacer una campaña comercial en -- cuatro ciudades principales del país, en cada una de ellas, la empresa tiene sus propias representaciones, que le permiten conocer en base a la experiencia de cada una, la utilidad factible de conseguir conforme al número de unidades de inversión en cada ciudad, según tabla 11.

Si la empresa tiene asignado como presupuesto de - capital una cantidad fija X, dividida en m unidades. Para - un caso concreto, supongamos que X = 10 000 000 y m = 10, o sea, cada unidad tiene un valor de un millón de pesos, el -- objetivo de la empresa es encontrar la política de distribución de la inversión que aporte la ganancia total máxima.

TABLA 11. Utilidad por unidad invertida

Unidades de inversión	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D
0	0	0	0	0
1	0.28	0.25	0.15	0.20
2	0.45	0.41	0.25	0.33
3	0.65	0.55	0.40	0.42
4	0.78	0.65	0.50	0.48
5	0.90	0.75	0.62	0.53
6	1.02	0.80	0.73	0.56
7	1.13	0.85	0.82	0.58
8	1.23	0.88	0.90	0.60
9	1.32	0.90	0.96	0.60
10	1.38	0.90	1.00	0.60

Antes de analizar el problema se expresa lo que es una política de inversión para 10 unidades de las cuales 4 se in vierten en A, 3 en B, 2 en C y 1 en D. De la tabla 11, se - toman los valores correspondientes de cada ciudad para deter minar el valor de la política que es 0.78 + 0.55 + 0.25 + -- 0.20 = 1.78.

Un problema así es de caracter combinatorio y podrá - resolverse por enumeración de todos los casos, de manera que al incrementar el número de unidades de inversión, aumentará el número de políticas posibles, por consiguiente el número de cálculos hasta alcanzar cifras astronómicas. Una forma - más breve de resolver este tipo de problemas es por la aplicación del principio de optimidad.

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 las inversiones en millones de pe sos, unidades indivisibles, en las ciudades A, B, C, y D; - $v_1(x_1)$; $v_2(x_2)$, $v_3(x_3)$ y $v_4(x_4)$ las ganancias en las ciuda-- des correspondientes y $s(f) = s(x_1, x_2, x_3, x_4)$ la ganancia total. Entonces tenemos:

(1) $$s(x_1, x_2, x_3, x_4) = v_1(x_1) + v_2(x_2) + v_3(x_3) + v_4(x_4)$$

sujeta $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, donde $x_i (i = 1,2,3,4)$ puede tomar cualquier valor entero 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Para poder aplicar el teorema de optimidad hagamos --

las sustituciones siguientes:

$$x_1 + x_2 = u_1 \qquad u_1 + x_3 = u_2 \qquad u_2 + x_4 = P$$

$$\text{con} \qquad u_1 \leq P \qquad u_2 \leq P$$

Donde P toma sucesivamente los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Entonces (1) se puede escribir

$$s(x_1, x_2, x_3, x_4) = v(x_1) + v_2(u_1 - x_1) + v_3(u_2 - u_1) + v_4(P - u_2)$$

lo que nos permite calcular las subpolíticas óptimas de $f_{1,2}(u_1)$, $f_{1,2,3}(u_2)$ y $f_{1,2,3,4}(P)$. Las fórmulas correspondien-- tes a cada una de ellas, se presentan a continuación:

$$f_{1,2}(u_1) = \max_{x_1=0,1,\ldots,u_1} \left[v_1(x_1) + v_2(u_1 - x_1) \right]$$

Esta expresión, nos permite determinar y calcular el número de combinaciones posibles de unidades de inversión entre las ciudades A y B, definidas en el conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, u_1\}$ y seleccionar la combinación que maximiza la ganancia total. Esto es, como ejemplo calculamos tres casos, posteriormente con el fin de abreviar, únicamente se registrarán los resultados obtenidos en la tabla 12, que corresponden al valor máximo de la subpolítica y al número de unidades invertidas en ella. Además, la tabla contiene las unidades de inversión de 0 a 10, con sus respectivas ganancias para las ciudades A y B.

$$(1) \quad f_{1,2}(u_1 = 0) = \text{máx} \left[v_1(0) + v_2(0) = 0 + 0 = 0 \right]$$

$$(2) \quad f_{1,2}(u_1 = 1) = \text{máx} \left[v_1(0) + v_2(1),\ v_1(1) + v_2(0) \right]$$
$$= \text{máx} \left[0 + 0.25,\ 0.28 + 0 \right]$$
$$= 0.28$$

$$(3) \quad f_{1,2}(u_1 = 2) = \text{máx} \left[v_1(0) + v_2(2),\ v_1(2) + v_2(0),\ v_1(1) + v_2(1) \right]$$
$$= \text{máx} \left[0 + 0.41,\ 0.45 + 0,\ 0.28 + 0.25 \right]$$
$$= \text{máx} \left[0.41,\ 0.45,\ 0.53 = 0.53 \right]$$

y así sucesivamente.

TABLA 12.

x_1, x_2, u_1	$v_1(x_1)$	$v_2(x_2)$	$f_{1,2}(u_1)$	Subpolítica óptima para A y B.
0	0	0	0	(0,0)
1	0.28	0.25	0.28	(1,0)
2	0.45	0.41	0.53	(1,1)
3	0.65	0.55	0.70	(2,1)
4	0.78	0.65	0.90	(3,1)
5	0.90	0.75	1.06	(3,2)
6	1.02	0.80	1.20	(3,3)
7	1.13	0.85	1.33	(4,3)
8	1.23	0.88	1.45	(5,3)
9	1.32	0.90	1.57	(6,3)
10	1.38	0.90	1.68	(7,3)

La columna de la subpolítica óptima nos indica el número de unidades a invertir en la ciudad A y B, por ejemplo, si se -

dispone de 4 unidades, la empresa debe invertir 3 en la ciudad A y una en la ciudad B, para obtener una subpolítica óptima de 0.90 (0.65 + 0.25).

Análogamente, se calculan las subpolíticas óptimas para las tres primeras ciudades A, B y C en base a los resultados de la tabla 12 y la expresión.

$$f_{1,2,3}(u_2) = \max_{u_1=0,1,2,\dots,u_2} \left[f_{1,2}(u_1) + v_3(u_2-u_1) \right]$$

los resultados obtenidos al calcular las combinaciones posibles de las unidades de inversión, están registrados en la tabla 13.

TABLA 13.

u_1, x_3	$f_{1,2}(u_1)$	$v_3(x_3)$	$f_{1,2,3}(u_2)$	Subpolítica óptima para A y B	Subpolítica óptima para A, B y C.
0	0	0	0	(0,0)	(0,0,0)
1	0.28	0.15	0.28	(1,0)	(1,0,0)
2	0.53	0.25	0.53	(1,1)	(1,1,0)
3	0.70	0.40	0.70	(2,1)	(2,1,0)
4	0.90	0.50	0.90	(3,1)	(3,1,0)
5	1.06	0.62	1.06	(3,2)	(3,2,0)
6	1.20	0.73	1.21	(3,3)	(3,2,1)
7	1.33	0.82	1.35	(4,3)	(3,3,1)
8	1.45	0.90	1.48	(5,3)	(4,3,1)
9	1.57	0.96	1.60	(6,3)	(5,3,1) ó (3,3
10	1.68	1.00	1.73	(7,3)	(4,3,3)
.....	.....	.....	.....	.....	.....

Ahora calculamos las políticas óptimas para las 4 ciudades A, B, C y D, con los resultados obtenidos en la tabla 13 y la expresión.

$$f_{1,2,3,4}(P) = \max_{u_2=0,1,2,\dots,P} \left[f_{1,2,3}(u_2) + v_4(P-u_2) \right]$$

Los resultados de las combinaciones posibles de las unidades de inversión, están asentados en la tabla 14.

TABLA 14.

u_2, x_4	$f_{1,2,3}(u_2)$	$v_4(x_4)$	$f_{1,2,3,4}(P)$	Subpolítica óptima para A, B y C	Política óptima p/ A,B,C y D
0	0	0	0	(0,0,0)	(0,0,0,0)
1	0.28	0.20	0.28	(1,0,0)	(1,0,0,0)
2	0.53	0.33	0.53	(1,1,0)	(1,1,0,0)
3	0.70	0.42	0.73	(2,1,0)	(1,1,0,1)
4	0.90	0.48	0.90	(3,1,0)	(3,1,0,0)ó (2,1,0,1)
5	1.06	0.53	1.10	(3,2,0)	(3,1,0,1)
6	1.21	0.56	1.26	(3,2,1)	(3,2,0,1)
7	1.35	0.58	1.46	(3,3,1)	(3,2,1,1)
8	1.48	0.60	1.55	(4,3,1)	(3,3,1,1)
9	1.60	0.60	1.68	(5,3,1)ó (3,3,3)	(4,3,1,1)ó (3,3,1.2)
10	1.73	0.60	1.81	(4,3,3)	(4,3,1,2)

La ganancia máxima que es 1.81, se obtiene cuando P = 10 unidades de inversión, cuyos valores óptimos de las variables asociadas son:

$$x^*_1 = 4,\ x^*_2 = 3,\ x^*_3 = 1,\ x^*_4 = 2.$$

que forman la política óptima (4, 3, 1, 2) y todas las subpolíticas derivadas, también son óptimas. Como ejemplo, sea la subpolítica A, B y C con $x^*_1 = 4$, $x^*_2 = 3$, $x^*_3 = 1$, es óptima y corresponde a $u_2 = 8$. En el caso de B, C y D, $x^*_2 = 3$, $x^*_3 = 1$, $x^*_4 = 2$, determinan una subpolítica óptima que corresponde a $x_2 + x_3 + x_4 = 6$. Para A y B con $x^*_1 = 1$, $x^*_2 = 1$, forman la subpolítica óptima que corresponde a $u_1 = 2$.

Es conveniente destacar que el orden en que se puede optimizar es arbitrario. Se eligió el A, B, C y D pero se puede tomar B, C, A y D o cualquier otra permutación, obteniendo resultados idénticos.

3. Arboles de decisión y decisiones secuenciales de inversión bajo incertidumbre.

En la teoría de las decisiones de inversión en condiciones de incertidumbre, hay modelos que tratan las inversiones actuales como decisiones aisladas que se pueden optimizar sin referencia de decisiones futuras de inversión. Pero como las decisiones actuales modifican las alternativas futuras, la actividad industrial no puede reducirse a una sola decisión, y debe considerarse como una secuencia de decisiones que se extienden desde el momento actual hacia el futuro, donde las erogaciones de inversión se tratan como eslabones de -- una cadena de compromisos actuales y futuros. Entonces un método de análisis que nos permita describir la interacción de - una decisión actual, los hechos casuales, finalmente las posibles decisiones futuras y sus secuencias, es conocido como árboles de decisión.

Para las empresas los árboles de decisión pueden - utilizarse para aclarar problemas que implican una secuencia - de decisiones cuyas alternativas y ponderaciones de una etapa dependen de la decisión adoptada en la etapa anterior. En cada caso la consecuencia de la decisión depende del resultado - de cierto hecho casual que no puede conocerse cuando se adopta la decisión, pero es posible asignarle una distribución de probabilidad.

La figura 13 es un diagrama en árbol para un pro-- blema de decisión secuencial en dos etapas. Ilustra la situación que se presentaría para una empresa que afronte una decisión de inversión y quiere optimizarla considerándola como la primera de una cadena de decisiones. En el diagrama, I representa al responsable de la decisión, X el hecho casual y g las ganancias. Cuando t = 1 la empresa debe escoger entre la construcción de una planta pequeña (e'_1) y una grande (e''_1). Esta decisión debe tomarse en condiciones de incertidumbre porque - las consecuencias inmediatas de la elección de e'_1 o e''_2 depen

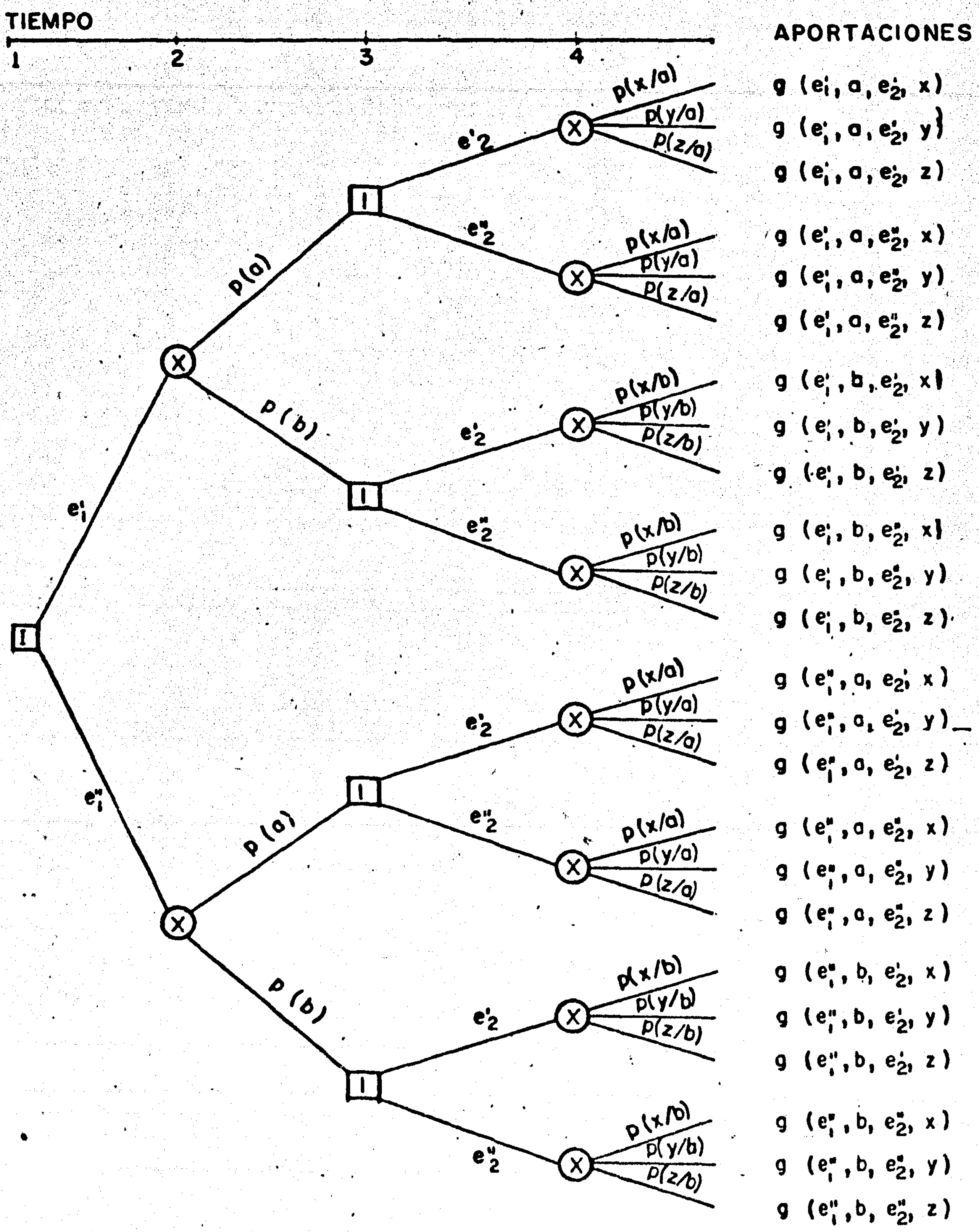


Fig. 13 LA ESTRUCTURA DE UN ARBOL DE DECISION

den del hecho casual X cuando $t = 2$, que en este caso determina la demanda inicial de consumo. En base a la experiencia pasada, la empresa estima que existe una probabilidad de p(a) que la demanda inicial sea elevada, y una probabilidad p(b) de ser disminuida. Independientemente que la demanda inicial sea aumentada o disminuida, la empresa tiene que elegir nuevamente cuando $t = 3$ entre ampliar su planta (e'_2) o no ampliarla (e''_2). Las consecuencias de esta segunda decisión dependen de la demanda obtenida cuando $t = 4$, que en el momento 3 todavía es incierta. Los volúmenes factibles por obtener de esta demanda están representados por x, y, z. Entonces, si la empresa estima que el hecho a ocurre cuando $t = 2$, existe una probabilidad p(x/a) de que x ocurra en el momento 4, y asimismo una probabilidad p(y/a) de que ocurra y, y una probabilidad p(z/a) de que ocurra z. de manera análoga, si el hecho b ocurre cuando $t = 2$, las probabilidades correspondientes son p(x/b), p(y/b) y p(z/b), respectivamente. Cada uno de estos posibles cursos de acción determinan una ganancia g. Por ejemplo $g(e'_1, a, e''_2, x)$ significa la ganancia asociada con la decisión e'_1 cuando $t = 1$, el resultado a en el tiempo 2, la decisión e''_2 en el tiempo 3, y el resultado x en el momento 4. Las g restantes tienen significado similares.

De acuerdo con el objetivo de la empresa maximizar su ganancia esperada, implica hacer un análisis de la figura 13, que consiste en determinar los posibles cursos de acción a partir del instante $t = 1$, pero los factores aleatorios de los ins tantes $t = 2$ y $t = 4$ hacen que la decisión sea muy compleja. En cambio, si analizamos la decisión en el instante $t = 3$, sus consecuencias dependen sólo del resultado incierto del hecho casual en el instante $t = 4$, entonces los cursos de acción son más fáciles de determinar, ya que si nos colocamos sucesivamente en cada una de las cuatro situaciones posibles que pueden ocurrir en el instante $t = 3$, y calculamos las ganancias esperadas de los distintos cursos que en ese instante se nos presentan, suponiendo que la decisión e'_1 (construir una pequeña planta) es seguida por la consecuencia a (una elevada demanda inicial) para decidir entre las dos alternativas e'_2 y e''_2 (ampliar o no la planta) necesitamos asignar probabilidades a los posibles resultados del hecho casual en el instante $t = 4$ y determinar la ganancia asociada con cada rama completa del árbol. Estas probabilidades son condicionales, por estar condicionadas al resultado de un hecho casual anterior, las cuales, nos permiten calcular un promedio ponderado para elegir cual de las dos alternativas que se nos presentan en el instante $t = 3$ es más atractiva. La cantidad mayor que se obtiene, es la ganancia para esta rama principal del árbol, tomando en cuenta que e'_1 va seguida de a. Enseguida, calculamos las ganancias asociadas con las otras tres ramas principales. Por último, regresamos el punto de partida en el instante $t = 1$, y repitiendo el mismo proceso determinamos cual de las dos alternativas que se presentan en este instante tiene la más alta ganancia esperada. La alternativa seleccionada es la óptima, que se tuvo por medio del método de inducción retrógada.

Una ilustración de los árboles de decisión en el análisis de las decisiones secuenciales de inversión, lo encontramos en cierta empresa que contempla construir una planta para producir un nuevo artículo de consumo que su departamento de investigación acaba de desarrollar. Se está discutiendo el problema de la magnitud óptima de la planta en una reunión de los principales ejecutivos de la compañía. El señor X, un ejecutivo de comercialización, argumenta que como la demanda del nuevo producto es incierta, recomiendo construir ahora una planta pequeña. Después si la respuesta inicial del consumidor es favorable, la pequeña planta puede ampliarse en un par de meses. En cambio el señor Y propone levantar ahora una fábrica grande. La especialidad de Y es la administración de fábricas, y destaca que cuesta menos construir de una vez una planta grande que hacerlo por partes. Sin embargo, ambos ejecutivos coinciden que hay una probabilidad de 0.4 de que la demanda inicial (primer año) sea elevada y una probabilidad de 0.6 de que la demanda inicial sea baja. Aún más, dada una demanda inicial elevada, las probabilidades son 0.9 de que ésta permanezca elevada durante los años siguientes, y por consiguiente de 0.1 que la demanda continúe reducida en ese período; dada una demanda inicial baja, las probabilidades correspondientes son 0.1 y 0.9 respectivamente.

La nueva planta costará $ 26 ó $ 13 (unidades de millón) según sea grande o pequeña. La planta grande puede gene rar flujos anuales de fondos por un máximo de \$ 20, comparadas con \$ 10 en el caso de la planta pequeña. Si se construye inicialmente una planta pequeña, la empresa la ampliaría al terminar el primer año, siempre que durante ese año se tuviera una demanda elevada. En caso contratio, no se contemplaría ninguna expansión durante los 5 años de vida de la planta. El costo de expansión futura se estima en \$ 16.

La tabla 15 muestra las aportaciones de la planta en diferentes supuestos respecto a la magnitud inicial de la planta y la demanda de consumo. Consideramos el primer caso de una planta inicialmente pequeña y una elevada demanda el añ 1. La planta pequeña operará a capacidad completa y originará un flujo neto de fondos de \$ 10. Posteriormente, la empresa decide ampliar, y si la demanda continúa siendo elevada los años siguientes, la planta ampleada generará flujo neto de fondos de \$ 20 los años 2 a 5. Descontada a la tasa libre de riesgos del 10 por ciento, esta serie de ingresos de fondos tiene un VA de \$ 66.72. Como la planta tiene un total de \$ 29 la inversión tiene un VAN de \$ 37.72. Substituyendo este valo de \$ 37.72 en la función de ganancia supuesta de la empresa, $(M + 10)^{0.6} - (10)^{0.9}$ obtenemos \$ 24.36 como ganancia de la inversión (primer renglón de la tabla). En cambio, si después que la empresa ha ampliado su planta, la demanda real es reducida durante los años 2 a 5, se supone que en lugar de \$ 20 la planta genera únicamente \$ 5 en flujos netos anuales de fondos. Esta serie de flujos de fondos tienen un VA de \$ 23.50,

DETERMINACION DE LAS APORTACIONES DE UNA PLANTA EN DISTINTOS

SUPUESTOS DE LA MAGNITUD DE LA PLANTA Y LA DEMANDA FUTURA

TABLA 15. Planta Inicial Pequeña

Demanda	Decisión de Ampliar	Ingresos de fondos en el año 1	2	3	4	5	Valor actual de los ingresos (VA)	VAN	Ganancia
D_1 D_2	si	$ 10	$ 20	$ 20	$ 20	$ 20	$ 66.72	$ 37.72	$ 24.36
D_1 R_2	si	10	5	5	5	5	23.50	- 5.50	- 4.07
D_1 D_2	no	10	10	10	10	10	37.91	24.91	16.46
D_1 R_2	no	10	5	5	5	5	23.50	10.50	7.16
R_1 D_2	si	5	20	20	20	20	62.18	33.18	21.66
R_1 R_2	si	5	5	5	5	5	18.95	-10.05	- 7.94
R_1 D_2	no	5	10	10	10	10	33.36	20.36	13.66
R_1 R_2	no	5	5	5	5	5	18.95	5.95	4.16

Planta Inicial Grande

Demanda	Decisión de Ampliar	Ingresos de fondos en el año					Valor actual de los ingresos (VA)	VAN	Ganancia
D_1 D_2	-	\$ 20	\$ 20	\$ 20	\$ 20	\$ 20	\$ 75.82	\$ 49.82	\$ 31.86
D_1 R_2	-	20	5	5	5	5	32.59	6.59	4.61
R_1 D_2	-	5	20	20	20	20	62.18	36.18	23.66
R_1 R_2	-	5	5	5	5	5	18.95	- 7.05	- 5.25

D representa la demanda elevada y R la demanda reducida. El subíndice 1 se refiere al año 1 y el subíndice 2 a los años comprendidos en el período 2 a 5.

Para una planta pequeña VAN = VA - \$ 29 si la planta se amplía al final del año 1; VAN = VA - \$ 13 si no se hace ampliación a la planta.

Se supone que la función de ganancia de la compañía es $G = (M+10)^{0.6} - (10)^{0.9}$, donde G representa la ganancia y M el VAN.

y por lo tanto la inversión tiene un VAN de -\$5.50 y una utilidad de -\$4.07 (renglón 2 de la tabla 15). Por supuesto - - existe la posibilidad que la empresa deseche la idea de ampliar incluso después de tener una demanda elevada el primer año. - Si la demanda posterior continúa siendo elevada, la planta generará un flujo anual neto constante de fondos de \$ 10 durante los 5 años de vida. La inversión tiene un VAN DE \$ 24.91 y una ganancia de \$ 16.46 (renglón 3 de la tabla 15). En cambio, si la demanda posterior es reducida, la planta originará \$ 10 de ingresos netos de fondos en el primer año y \$ 5 en cada uno de los 4 años restantes. La inversión tendrá entonces un VAN de \$ 10.50 y una ganancia de \$ 7.16 (renglón 4 de la - tabla 15). Las cantidades restantes de la tabla 15, se interpretarán de manera similar.

Pare resolver este problema, tenemos que hacer un análisis del árbol de decisión. Primero utilizamos un diagrama en árbol para representar los datos del problema como se - muestra en la figura 14, donde se observa que el diagrama del árbol no es simétrico, puesto que el problema de la expansión no se plantea en relación con la gran planta. El árbol tiene más ramificaciones de la planta pequeña que la planta grande. Las probabilidades condicionales y las que se asemejan se calculan: $P(D_2/D_1) = 0.9$, $P(R_2/R_1) = 0.9$, $P(D_1D_2) = (0.4)(0.9) = 0.36$, $P(R_1R_2) = (0.6)(0.9) = .54$

Ahora para determinar el tamaño óptimo de la planta, aplicamos el método de inducción retrógada como sigue: --

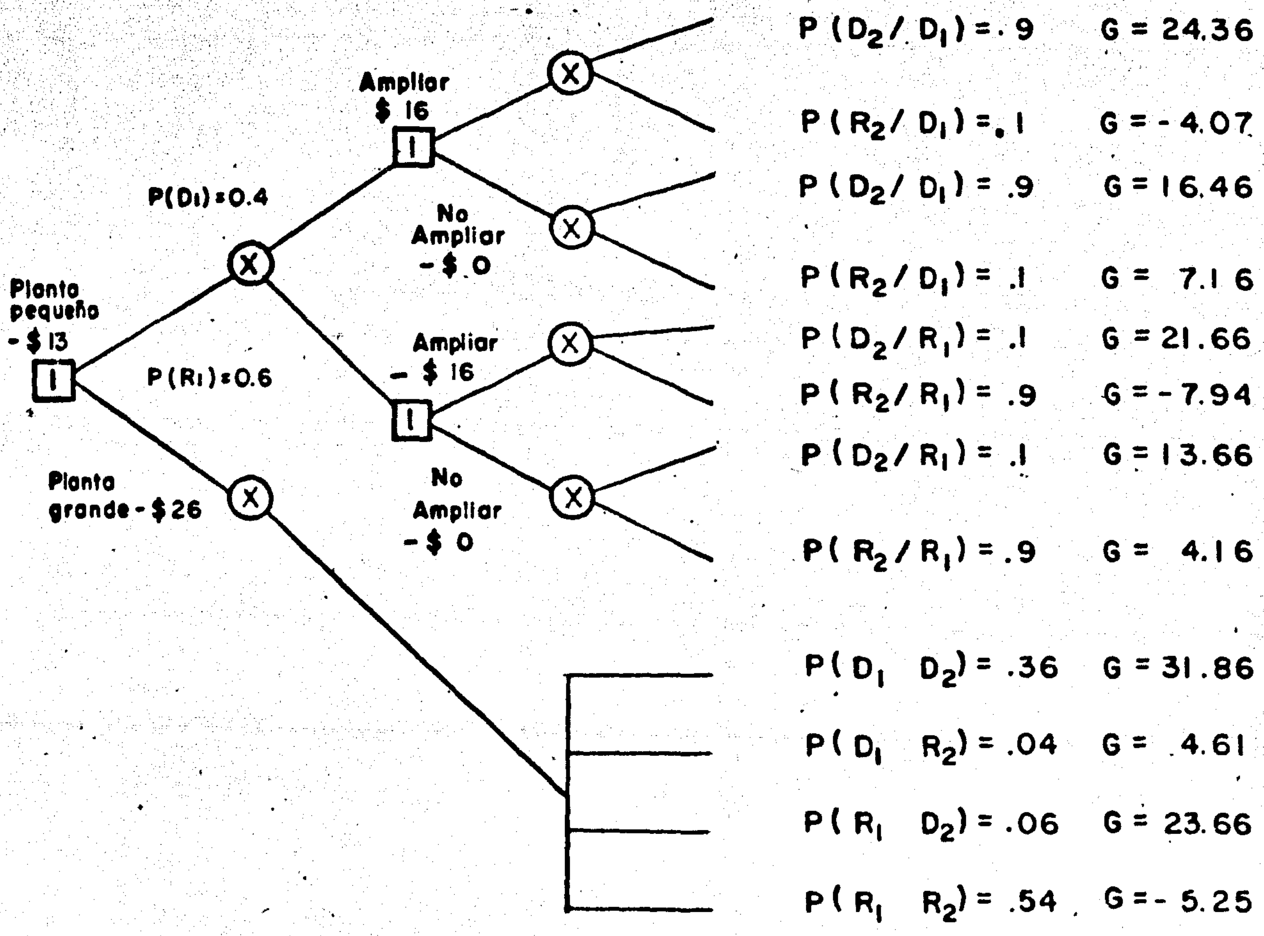


Fig. 14 ELECCION DE LA MAGNITUD OPTIMA DE LA PLANTA POR DECISION SECUENCIAL

supongamos que se ha construido una planta pequeña, que la demanda ha sido elevada durante 5 años, y que la empresa afronta ahora la decisión de ampliar (e'_2), o no ampliar (e''_2). La figura 14 muestra que e'_2 tiene una ganancia de \$ 24.36 ó -\$4.07, según la demanda posterior sea elevada o reducida. Por lo tanto, la ganancia esperada para e'_2 es

$$(24.36)\ (0.9) + (-4.07)\ (0.1) = 21.49$$

análogamente e''_2 tiene una ganancia esperada de

$$(16.46)\ (0.9) + (7.16)\ (0.1) = 15.53$$

Por ser 21.49 mayor que 15.53, la empresa debe elegir e'_2 que corresponde ampliar la planta pequeña.

En cambio, si se construye una planta pequeña y la demanda del primer año es reducida e'_2 (la decisión de ampliar) tendrá una ganancia esperada de $(21.66)(0.1) + (-7.94)(0.9) = -4.96$, e''_2(la decisión de no ampliar) tendrá una ganancia esperada de $(13.66)(0.1) + (4.16)(0.9) - 5.12$.

En este caso e''_2 es la decisión escogida de no ampliar la planta pequeña. Pero si inicialmente se construye -- una planta grande, no se plantea el problema de expansión.

Hasta ahora la elección de la planta óptima inicial se ha simplificado, porque conocemos la ganancia asociada con la decisión de la empresa en el instante $t = 2$, en todas las - circunstancias posibles, figura 15. En esas condiciones, las ganancias de e'_1(planta pequeña inicial) y e''_1(planta grande - inicial) son inciertos porque todavía se desconoce el nivel de la demanda durante el primer año. Por medio de la esperanza - matemática eliminamos esta incertidumbre. La decisión e'_1 tiene una ganancia esperada de (21.49)(0.4) + (5.12)(0.6) = 11.67 comparada con una ganancia esperada para la decisión e''_1 de - (31.86)(0.36) + (4.61)(0.04) + (23.66)(0.06) + (-5.25)(0.54) = 10.24 lo que implica que la empresa debe elegir e'_1, o sea - - construir inicialmente una planta pequeña.

A la vez nos proponemos ilustrar los resultados del análisis no secuencial, con el propósito de destacar la importancia del enfoque secuencial. Para ésto encontramos cual es la magnitud óptima de la planta si se considera la inversión - como la decisión aislada correspondiente a un período. Si la empresa limita su planteamiento a un período, eliminará las posibilidades de expansión futura al elegir entre una planta inicial grande y una pequeña. La descripción de la magnitud de - la planta como la decisión aislada de un período la encontramos en la figura 16 que se obtiene a partir de la figura 14, - al eliminar la parte de ampliación. Aplicando la esperanza matemática encontramos que e'_1(construir una planta pequeña) tiene una ganancia esperada de

(16.46)(0.36) + (7 16)(0.04) + (13.66)(0.06) + (4.16)(0.54) =

9.28

pero sabemos que la ganancia esperada de e''_1(construir una -- gran planta) es de $10.24. Entonces como el resultado es ma-

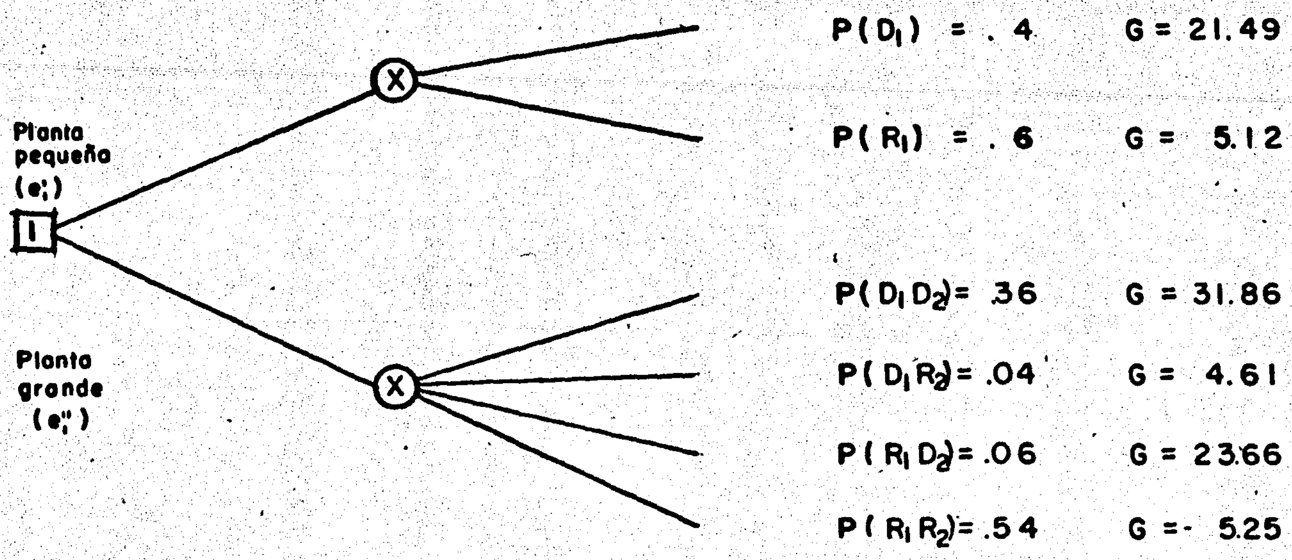


Fig. 15 ELECCION DE LA MAGNITUD DE LA PLANTA INICIAL POR INDUCCION RETROGRADA

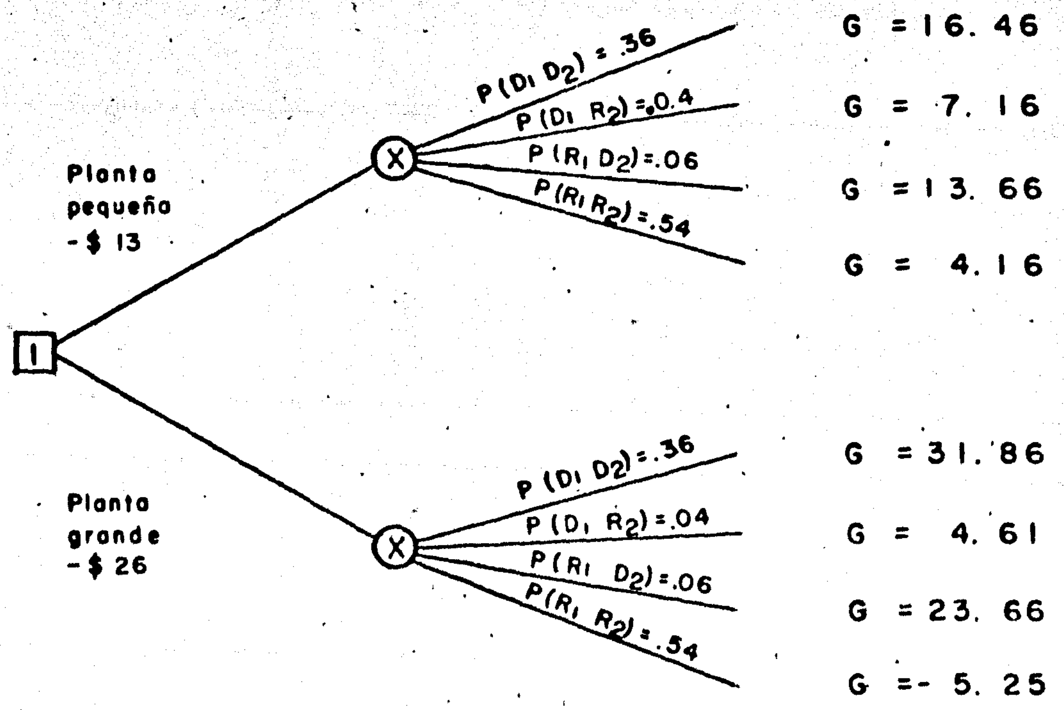


Fig. 16 ELECCION DE LA MAGNITUD OPTIMA DE LA PLANTA POR DECISION DE PERIODO AISLADO

yor cuando se considera a la inversión como la decisión aislada de un período, la empresa debe construir una planta grande ahora. Pero esta decisión no es óptima si los gastos de la planta se consideran como los eslabones de una cadena de compromisos actuales y futuros como se demostró. Con estos dos ejemplos, ilustramos que el árbol de decisión es un instrumento analítico, útil y que también destaca la importancia de considerar las inversiones como un proceso de decisión secuencial donde las preferencias actuales cambian las alternativas futuras.

C O N C L U S I O N E S

En el desarrollo de este trabajo, se analizó tanto de manera teórica como analítica a los proyectos, desde su etapa de formulación hasta la toma de decisiones. El material empleado, no está limitado a la aplicación de proyectos de un tipo específico, sino al contrario, algunos puntos son considerados con cierta flexibilidad para que puedan adaptarse a diferentes tipos de proyectos.

La metodología que se desarrolló, puede aplicarse a los proyectos del sector público como a los del sector privado.

Con lo asentado en la primera parte, se pueden formular proyectos, pero la asignación óptima de los recursos limitados no será posible, si no se aplican los modelos matemáticos que procedan, los cuales fueron analizados en la segunda parte. Pero la decisión óptima de inversión es aquella que satisface mejor los criterios de decisión.

Para la formulación de un proyecto, no se tienen que desarrollar abligatoriamente todos los puntos especificados en el contenido de un proyecto, habrá casos en los que se eliminarán algunos mientras que en otros ciertos puntos podrán agregarse, pero ésto dependerá del tipo de proyecto que se considere.

En el desarrollo de un modelo matemático o criterio de decisión, se procuró complementar lo que se analizó, ilustrando cada caso con ejemplos numéricos, para que facilite su comprensión y se vea su aplicación inmediata.

En aquellos proyectos de características cualitativas, no se podrán aplicar las técnicas analíticas para determinar la decisión óptima de inversión. En su lugar, se analizará la aportación del proyecto en el bienestar social de la población por beneficiar, con el fin de determinar si es o no conveniente realizar el proyecto.