1-5
1

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

El Cálculo Diferencial Como Instrumento Analítico en la Optimización de Recursos Dentro del Análisis Económico

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

ACTUARIO

P R E S E N T A :

LUIS BARRIOS RODRIGUEZ

México, D. F. 1979

A la Mujer Desinteresada que me dio el Ser.

"EL CALCULO DIFERENCIAL COMO INSTRUMENTO ANALITICO EN LA OPTIMIZACION DE RECURSOS DENTRO DEL ANALISIS ECONOMICO"

CONTENIDO

INTRODUCCION.

La razón fundamental de realizar el presente trabajo, es sin duda, el interés que se desperto en mí el relacionar los fundamentos de la Teoría Matemática con problemas prácticos que día a día nos visitan de alguna manera con carta de presentación económica.

La construcción de modelos matemáticos basados en el Cálculo Diferencial, coadyuvan al estudio e interpretación de los problemas que generalmente son planteados en Economía, y así para poder decidir qué cantidad de material X usar para obtener el máximo beneficio económico, es necesario echar mano de métodos confiables para no tener que arrepentirnos de la operación efectuada, y uno de los métodos más exactos y seguros para la solución de esta clase de problemas es, sin duda alguna el Cálculo Diferencial.

Espero que este escrito alguna vez llegue a ser útil para las personas que tengan la oportunidad de leerlo.

Este trabajo se divide en tres parte o capítulos, a saber:

I) La idea general de la Optimización y la forma de relacionar el Análisis Económico con la Optimización.

II) La definición de la Derivada a través de los conceptos de Función, Límite y Continuidad, así como la construcción de algunas de sus reglas más usadas en este trabajo y finalmente la construcción del criterio de primera y segunda Derivada, de Máximos y Mínimos, así como el desarrollo de la Derivación Parcial de gran utilidad en el Análisis Económico.

III) La forma de aplicar los conceptos, definiciones y reglas del Cálculo Diferencial a problemas típicos del Análisis Económico.

Introducción al Marco Económico.
(Como Referencia al Análisis Matemático).

Definición de Economía.- Existen muchas definiciones de la materia, pero en realidad casi todas concuerdan en que la Economía es la ciencia de la escaces, esta definición es una de ellas: "La Economía es el estudio de la manera en que la sociedad elige la utilización de recursos escasos como la tierra, el trabajo, los bienes de capital, maquinaria y conocimientos técnicos, para así producir distintos bienes, como el trigro, la carne, el calzado, vestidos, la vivienda, etc., y distribuirlos entre los miembros de la sociedad para su consumo. Así mismo se puede decir que analiza los costos y beneficios derivados de la mejora de patrones de distribución de los distintos recursos"

Después de haber definido a la Economía, es importante saber que existe en toda sociedad, el llamado Sistema Económico, el cual representa la suma de los distintos elementos que participan en la vida económica de las naciones, así como la interrelación de los mismos y su posible dependencia.

Para comprender mejor la secuencia del presente trabajo deberemos explicar de manera breve y sustanciosa los elementos de la Literatura Económica que hemos empleado en este trabajo de alguno u otra forma, tales como el mercado, el valor, la riqueza, el precio, la oferta y la demanda, la elasticidad y el dinero, así como la relación de las figura geométricas que existen en la Teoría Económica y la Teoria Matemática, para así justificar la razón y desarrollo del capitulo II, independientemente que esta justificación de dicho capítulo, sea la de dar a conocer explícitamente los elementos necesarios para la construcción del concepto de estudio en este trabajo, "La Derivada como instrumento de optimización". Así mismo será conveniente presentar finalmente el origen y desarrollo de los monopolios, y de esta manera reconocer que el ejemplo visto en el tercer capítulo es completamente hipotético.

Para empezar, podemos definir a la riqueza de una persona, como el valor nominal, o en dinero de las cosas que dicha persona posee.

Es necesario reconocer que el valor nominal se determina por la escacez del producto, de manera que al estudiar la escacez y la forma en que influye en la conducta humana, la Economía estudia así, el porqué la propiedad de algunas cosas dá más riqueza que la propiedad de otras.

Un mercado por otra parte se puede definir como el lugar o situación en que los compradores y vendedores compran y venden bienes, servicios, y recursos. Hay un mercado para cada artículo, servicio o recurso, que se venden y compran en la Economía.

Del precio podemos decir que éste se dá a las cosas que son escasas y tambien deseadas. Es preciso que reunan estos dos requisitos, ya que nadie pagará un precio por el aire que respiramos, ya que no cabe la menor duda que es deseable, pero que existe en cantidad suficiente para que haya por todas partes y nadie tenga que comerciar con él, por otra parte, nadie pagaría el precio de un mosquito albino, ya que si bien son escasos, también es cierto que nadie los desea. El precio varía en la medida en qúe el artículo es escaso y deseado. Los movimientos del precio indican si cada mercancía y servicio deben producirse en mayor o menor cantidad. Los movimientos del precio son los que conducen a todo el proceso económico hacia un estado de equilibrio, y equilibrio en términos económicos lo definimos como un estado de cosas en que ningun consumidor de mercancías y servicios desea distribuir sus recursos de modo diferente y en que ningún productor encuentra lucrativo producir menor o mayor cantidad del artículo que fabrica.

En cuanto a la demanda, podremos afirmar que la cantidad que la gente compra de un bien en un momento dado, depende del precio del mismo: cuanto mayor es el precio de un artículo, la gente está dispuesta a comprar menor cantidad de ese bien, sin embargo, cuando es más bajo el precio, más unidades del producto se demandarán.

Por tanto, existe en cada momento una relación concreta entre el precio de mercado de un bien y la cantidad demandada del mismo. A esta relación entre el precio y la cantidad comprada es a lo que se llama curva de la demanda.

Para representar gráficamente la curva de la demanda, supongamos que sobre el eje de las ordenadas se midan los precios, mientras que sobre el eje de las abscisas, sea la cantidad de la mercancía por alguna unidad del tiempo.

Ya que existe una relación inversa entre la cantidad y el precio porque el aumento de la primera, provoca una disminución en el segundo, la curva se inclina hacia abajo, por lo que podemos hablar de una ley de la demanda decreciente.

La cual se enunciará así: Si se lanza una mayor cantidad de un bien al mercado, sólo podrá venderse a un precio menor, permaneciendo constantes los demás factores.

Por otra parte, podemos ver que así como la demanda relaciona los precios con las cantidades que los consumidores desean comprar, una curva de la oferta relaciona los precios y las cantidades que los productores están dispuestos a ofrecer. A diferencia de la curva de la demanda, la curva de la oferta de un bien es generalmente creciente de izquierda a derecha.

Suponiendo que dicho bien sea el trigo, a mayor precio del mismo los agricultores le dedicarán a su cultivo mayor cantidad de tierra, quitándole quiza de la porducción de otro cereal. Además, los agricultores, pueden ahora gastar más en abonos, maquinaria y trabajo, y pueden inclusive cultivar trigo adicional en tierras más pobres y menos productivas, por lo tanto estos factores tienden a aumentar la producción a los más altos precios ofrecidos.

La ley de los rendimientos decrecientes, nos ofrece una poderosa -

zaón para que la curva de la oferta sea creciente, dicha ley enuncia lo siguiente: " El aumento de algunos factores, en relación con otros factores fijos, causará aumentos de las producción, dada la situación de la técnica; pero a partir de cierto momento, la producción adicional resultante de iguales aumentos de factores será cada vez mayor. Esta disminución de los rendimientos es consecuencia del hecho de que los medios de producción variables, tiene cada vez menor cantidad de factores constantes con que operar. Es decir, si la sociedad desea mayor cnatidad de trigo, habrá que ir añadiendo mayor cantidad de mano de obra a la limitada superficie de tierra apta para el cultivo del cereal. Pese a que esta indurtria sea muy pequeña para influir en el salario del trabajo en general, cada persona que se dedique a cultivar esa tierra irá haciendo elevar el producto en cantidades cada vez menores, por lo tanto, el costo necesario para elevar la producción de una unidad más tendrá que ser cada vez mayor.

Además tenemos que saber que los precios se fijan en el mercado de acuerdo a las leyes de la oferta y la demanda, en competencia perfecta, es decir, que el precio de un producto depende de la actitud del comprador hacia ese producto , que a su vez, depende de las distintas maneras en que pueda gastar su dinero y de su actitud hacia aquellas opciones. La demanda de una mercancía esta enlazada con las demás y en consecuencia los precios lo están también, el precio en la demanda se determina por el margen, éste último significa que, si bien, la importancia que tiene para el comprador una serie de artículos depende del número de ellos enque piense, lo importante no es el orden en que los compre. Entendiendo por artículo marginal aquel que al comprador le es casi indiferente comprar o no, pero que finalmente lo compra a un precio determinado; y así si en el mercado existe un cierto número de artículos, y estos deben venderse, el precio tendrá que ser tal, que los compradores, tomados en su conjunto, quieran comprar toda la existencia.

La influencia correspondiente que actúa en el mercado de la oferta es el costo; es decir, que si los materiales y las herramientas con que se hace una cosa son escasos, lo serán las cosas mismas, es decir, que serán caras y los materiales y las herramientas también lo serán.

El precio del producto que resulta de la demanda de los consumidores en comparación con la escaces, compensa pagar un precio elevado por las herramientas, los materiales y el trabajo que se usan en su producción.

Es importante saber con exactitud la influencia que la cantidad disponible de un determinado producto tiene sobre el precio. Suponiendo que se duplique, sabemos que el precio bajará; pero ¿ en cuánto?. Esto depende de lo que se llama la elasticidad de la demanda. Esta mide la magnitud del cambio de la demanda cuando el precio cambia. Se dice que es muy elástica si cambia mucho, y si es poco el cambio, será muy inelática.

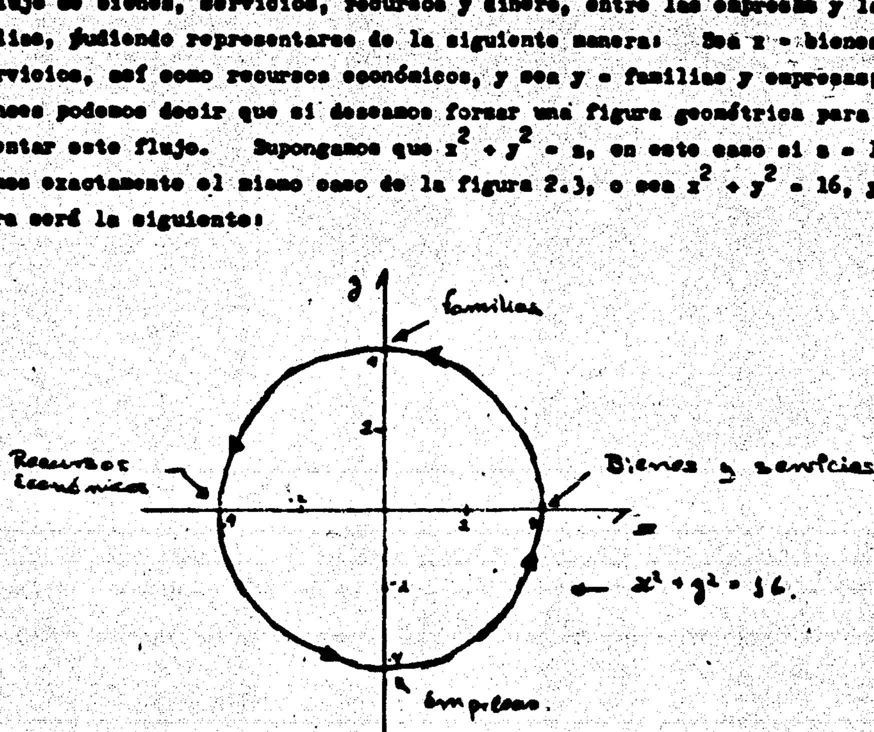
Finalmente podemos decir que la importancia del dinero se encuentra en primer lugar, en su función como medio de cambio. Los servicios que presta al respecto son tan evidentes que no hace falta detenerse demasiado tiempo a examinarlos. La gente no se especialisará si no sabe qué puede cambiar sin incurrir en demasiadas molestias, las cosas que ha hecho por otras que tenga mayor necesidad,de aquí vemos que la división del trabajo depende en realidad de la existencia del dinero.

Igual de importante es el servicio que presta como unidad de cuenta ya que no hay procedimiento de expresar las escalas individuales de preferencias que nos sirven de guía para comprar y vender hasta no tener medidas de dinero en que contar, y por lo tanto, no hay modo de expresar el valor. Podríamos agregar otra función del dinero, y es la de proporcionar el poder consuntivo en general, esta es una forma abreviada de decir que es más conveniente acumular y poseer deinero que mercancías, porque estasocupan espacio, se deterioran, cambian su valor y no se puede estar seguro de encontrar un comprador en el momento oportuno.

El poder consuntivo que representan el efectivo que llevamos consigo y las cuentas corrientes bancarias, nos proporcionan dos ventajas. la libertad de elección y la seguridad en casos de emergencia, por lo tanto podemos afirmar que el dinero permite a la gente hacer planes anticipados, y si es preciso, modificarlos y, además hacer frente a cambios imprevistos de circunstancias exteriores sin padecer por ello. Pero lo más importante al considerar el estudio del dinero es considerarlo por encima de todo como un título sobre mercancías y no una mercancía. Ya que si por ejemplo, alguien tiene hambre y cuenta con el suficiente dinero para comprar comida lo único que hace es cambiar su poder adquisitivo o nominal (dinero), por la comida - así en general para todas las necesidades consumtivas de la gente.

Para tener una relación geométrica entre las figuras usadas en la Teoría Económica y las usadas en la Teoría Matemática, mostraremos algunos - ejemplos sencillos.

Con respecto a la figura 2.3 de la primera sección del capítuloII la podremos relacionar con un poco de ingenio con el proceso circulatorio - de flujo de bienes, servicios, recursos y dinero, entre las empresas y las familias, pudiendo representarse de la siguiente manera: Sea x = bienes - y servicios, así como recursos económicos, y sea y = familias y empresas; — entonces podemos decir que si deseamos formar una figura geométrica para re- presentar este flujo. Supongamos que $x^2 + y^2 = a$, en este caso si $a = 16$, tenemos exactamente el mismo caso de la figura 2.3, o sea $x^2 + y^2 = 16$, y su figura será la siguiente:



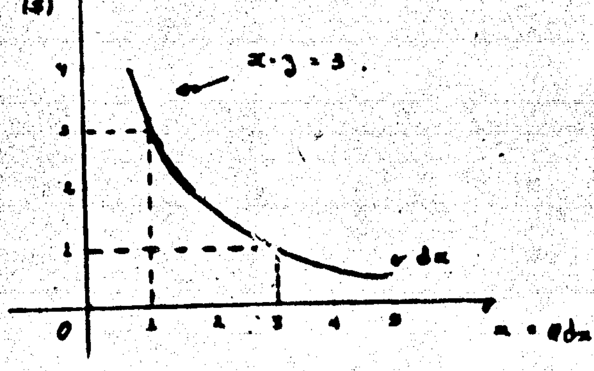
Otra relación que podemos tomar en consideración, es la de la curva de la demanda de un bien normal como es el maíz y la figura 2.2 de la primera sección del capítulo II. Supongamos que la tabla de la demanda del maíz es la siguiente:

Puntos	Precio	Demanda
A	4.0	.75
B	2.0	1.50
C	1.0	3.00
D	0.8	3.60
E	0.6	5.00

Siendo para la primera columna los puntos por donde pasa la gráfica de la curva en el plano cartesiano, la segunda curva, el precio expresado en pesos y centavos por cada kilogramo de compra, y en la tercera, por la cantidad demandada en miles de kilogramos al día.

Su curva correspondiente será exactamente la misma de la figura - - 2.2 de la primera sección del capitulo II. Sólo que en este caso obviamente suponemos tanto a x como a y, ambas positivas.

La Curva de la Demanda.



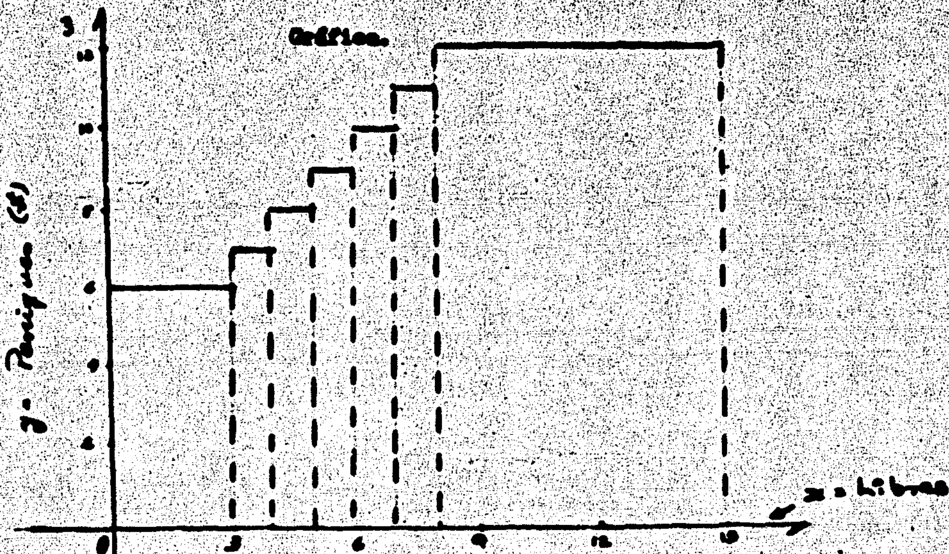
Entonces vemos que un momento dado y a cada precio se demandará - una cantidad concreta de maíz. Según desciende el precio, aumenta la cantidad demandada, al sustituir los consumidores otros alimentos por maíz y al - poder satisfacer hasta sus más raquíticas necesidades de este bien. Al - - unir los 5 puntos de la tabla de la demanda del maíz, obtenemos la curva de la demanda, y su naturaleza decreciente hacia la derecha, la curva nos ilustra una vez más la importante razón de la ley de los rendimientos decrecientes, y por tanto la ley de decrecimiento de la curva de la demanda. (entre menos cuesta un bien, más demanda tendrá el mismo).

Un ejemplo más será aquél donde se representa la relación del franqueo postal inglés donde, dependiendo del peso del paquete se aplicarán di - ferentes precios por el transporte de los mismos y así vemos que si el paquete pesa de cero a tres libras, el precio será de 6 peniques, y si este se encuentra entre 3 y 4 libras, su precio de transporte será de 7 peniques, ..., etc,etc., como se aprecia en el siguiente cuadro. (#)

Cuadro.

peso	precio
de 0 a 3	6
de 3 a 4	7
de 4 a 5	8
de 5 a 6	9
de 6 a 7	10
de 7 a 8	11
de 8 a 15	12

#.- Ejemplo tomado de una revista inglesa sobre economía, en 1936.



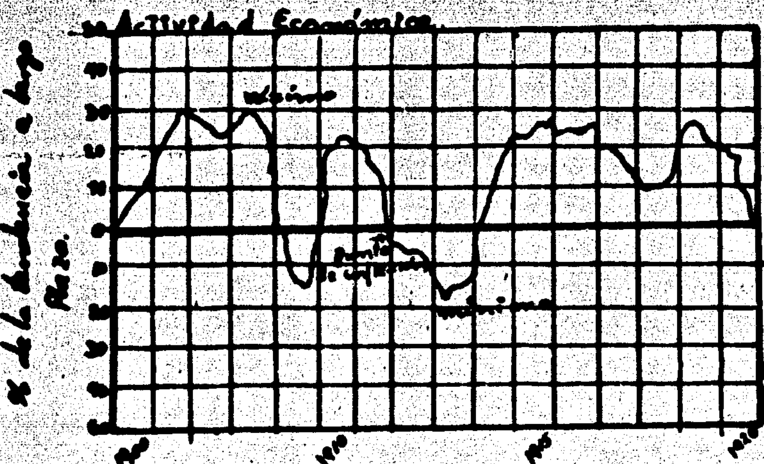
o sea, que suponiendo a y = peniques = eje de ordenadas, y a x = libras = = eje de las abscisas, entonces, su representación geométrica será exactamente igual a la de la figura 2.5, del segundo capítulo, así como a la figura E (d), de la sección 2.3, e inclusive tener cierta semejanza con la figura D(e), de la sección 2.2.

La función de producción para cualquier artículo, definida como la ecuación, tabla o gráfica que muestra la cantidad máxima del producto — que se puede obtener con un conjunto de insumos determinado, usando las mejores técnicas de producción, se puede comparar con los dos trazos de la izquierda de la figura J, de la sección 2.7, del capítulo II; ya que algunas funciones de producción tienen formas similares.

Los llamados ciclos económicos de la sociedad capitalista que no es otra cosa que la situación económica de un país en un momento determinado las épocas de inflación, las de depresión, la ocupación de la fuerza de trabajo, la producción, etc., son graficados y se asemejan a una función matemática, donde se pueden localizar los llamados puntos máximos, mínimos y los puntos de inflexión.

La siguiente gráfica tomada de los datos de una compañía norteamericana, muestra cómo el sistema económico, ha sido atormentado por las incertidumbres del ciclo económico en el período comprendido de 1905 a 1920, en la Unión Americana.

Gráfica.



Como es posible apreciar, existe cierta analogía con las figuras que empleamos en el segundo capítulo, tales como las figuras C (c), C (d), de la sección 2.2; la figura G, de la sección 2.7; y las figuras K y L de la misma sección 2.7, en todas ellas existen los valores antes mencionados.

Existen ciertamente muchos más ejemplos de la relación geométrica de una y otra materia, pero ahora deberemos pasar a otro punto interesante en este trabajo: la historia de los monopolios y oligopolios, para poder entender que el ejemplo de la sección 3.3, es sólo un caso hipotético.

La concentración del capital industrial y la formación de convenios de grupos, así como la fusión de empresas (los llados trusts) capitalistas, conducen a la creación de los monopolios en numerosos sectores de la industria. Una sola empresa o número reducido de ellas, controlan una gran parte de la producción a tal punto que pueden fijar arbitrariamente los precios y las tasas de ganancia durante períodos más o menos largos; es obvio en este caso que las llamadas leyes de la oferta y la demanda adquieren un carácter completamente secundario.

Analizando un ejemplo extremo, vemos que en 1928, el trust norteamericano General Electric, obtuvo un monopolio completo en el mercado norteamericano del carburo de tungsteno, aleación indispensable para las máquinas-herramienta de gran velocidad. A consecuencia del establecimiento de este monopolio, el precio del carburo de tungsteno salto de 50 a 453 dólares la libra y se mantuvo durante toda la crisis, hasta 1936. Siendo su costo de producción de sólo 8 dólares.

En un estudio efectuado en 1 año de 1937 por Walter F. Crowther, éste descubrió que las condiciones de producción de los 1 807 productos más corrientes manufacturados en los Estados Unidos, la mitad de los mismos, proceden de sectores en los que cuatro empresas, como máximo, realizan más del 75% de la producción.

En realidad podemos afirmar que la potencia de los grandes monopolios rebasa, sin embargo, el control de los sectores de producción cuyos mercados dominan, ya que en general los grupos financieros que controlan estos sectores son también los dueños de bancos, compañías de seguros, sociedades industriales y comerciales, así como de transportes, que llevan los más diversos nombres, sin sospechar que están ligados unos con otros.

La participación de los representantes de grupos financieros en los consejos de administración de numerosos trusts importantes es un indicio clave de la extensión de su control.

Por ejemplo, vemos que en los Estados Unidos, el presidente del poderoso Chase National Bank del grupo Rockefeller, Winthrop W Aldrich, en -

1948, es al mismo tiempo, el director del trust más rico del mundo, la - - - American Telephone and Telegraph Cy., y a la vez que administraba la mayor - compañía de seguros en el mundo, la Metropolitan Life Insurance Cy., del - - trust eléctrico Westinghouse, del trust International Paper, de los bancos - Discount Corp. of New York y de la Chase Safe Deposit Company. Este hombre participó en el control de más de 20 000 millones de dólares de capital. - (¡tres presupuestos anuales de Francia a principios del decenio de 1950 !).

Por otra parte George Whitney, socio del banco J. P. Morgan and Cy. es durante el mismo año, miembro del consejo de administración del trust de electricidad Consolidated Edison of New York; del trust de automóviles General Motors Company; del trust de cobre Kennecott Copper; del trust de ferrocarriles Pullmann Cy.; del trust de petróleo Continental Oil Cy., y del gran banco Guaranty Trust Cy.

Finalmente, R. K., Mellon, presidente del banco Mellon National - - Bank, es a la vez, presidente de las sociedades holding(sociedad de participación que permite concentrar el control financiero en numerosas empresas — que han permanecido formalmente independientes) F. Mellon & Sons y Millbank Corp., es así mismo administrador del trust de aluminio Aluminium Cy. of - - America (ALCOA); del trust de petróleo Gulf Oil Cy.; del trust de electricidad Westinghouse Air Brake Corp.; del trust del vidrio Pittsburgh Plate - - Glass Cy.; del trust del ferrocarril Pennsylvania Rail Road Cy.; del trust - de gas Koppers Corp.; del trust Union Switch an Signal Fire Insuranse Cy.; - de la General Reinsurance Corp.; y dela North Star Reinsurance Cy.

En estos casos, en verdad la sobreganancia monopolista resulta de - una elevación del precio de ventade los sectores monopolizados por encima de precio de producción. Sin embargo, la sobreganancia monopolista, resulta - también de las ventajas de productividad que obtienen los trusts en relación a las empresas medianas y pequeñas y a los sectores no monopolizados.

Ante todo, estas ventajas son las de una mayor eficacia ligada a dimensiones mayores. Tanto en los Estados Unidos, como en Gran Bretaña el margen de utilidades aumenta a medida que las sociedades se hacen más grandes. El producto neto por cada asalariado aumenta en un promedio de 201 libras esterlinas para las empresas que emplean de 11 a 24 asalariados, y a 309 libras, para quienes emplean de 7 000 a 8 000 asalariados; este aumento es casi constante a medida que asciende el número de asalariados.

El trust norteamericano del caucho Good year Tire & Rubber de 1926 a 1937, suministró neumáticos de automóvil a la empresa expedidora Sears Roebuck & Co., a precios inferiores en un 29 al 40% a los pedidos por detallistas.

El informe publicado en 1957, por la comisión británica de estudio sobre los monopolios y prácticas restrictivas concluyó que el principal trust fabricante de lámparas de radio, Mullard (una filial de Phillips), vendía sus bulbos a 17 chelines 6 peniques a los detallistas y a 3 chelines 6 peniques a las sociedades que fabricaban aparatos de radio.

Debe atribuirse un papel particularmente importante a los gastos de transporte preferenciales, especialmente a las tarifas ferroviarias obtenidos por los trusts. Estas tarifas han tenido un papel importante en la formación y consolidación del trust de la Standard Oil, igualmente, el monopolio de los medios de transporte obtenido por los trusts, como el monopolio de los oleoductos que muy pronto logró el trust Standard Oil de los Estados Unidos, y el monopolio del ferrocarril de la U. S. Steel Corp., en las regiones de minerales de hierro; esto obliga prácticamente a los vendedores a inclinarse ante el precio de compra que los monopolios fijan arbitrariamente.

Las grandes sociedades,, y en particular los trusts monopolistas ligados a los grupos financieros, consiguen capitales y créditos sin muchos gastos, en tanto que para las sociedades pequeñas y medianas los gastos de crédito son a menudo exorbitantes. En 1937, una encuesta realizada en

Estados Unidos demostró que las emisiones de acciones por importe inferior a un millón de dólares, cada una costaban a las sociedades emisoras un 16.5% por término medio, mientras que estos gastos se reducían a 7.7% para aquella que pasaba del millón de dólares.

También debemos recordar que los monopolios cuentan con el apoyo de abogados y profesionistas que los rodean. Este apoyo llega a un extremo tal que las compañías no solamente pueden explotar patentes sabiéndose protegidas de toda amenaza de litigio, sino que también pueden apropiarse de las ventajas, al saber que el adversario no posee la fuerza financiera para entablar un proceso largo.

Con esto confirmamos que sólo bajo condiciones supuestas, se puede usar al Cálculo Diferencial para lograr el equilibrio de los monopolios y oligopolios en general; como lo hiciéramos notar en la ya mencionada sección 3.3.

" CAPITULO I ".

1) OPTIMIZACION.

1.1 Punto de vista general.- A menudo las empresas para lograr entrar en la competencia, disponen que se hagan estudios del mercado, para calcular qué cantidad de sus productos podrán vender en el año próximo o en cualquier otro período del fututo. A base de estas cifras, que la dirección de la empresa parece tratar cual si fueran unas constantes fijas las cuales se denominan como potencial de mercado y se decide la cantidad de materia prima que deberá tener en existencia, el personal a contratar, etc.

En su análisis el economista teórico, parte de la posición de que no existe una cantidad fija de ninguna mercancía que los compradores estén dispuestos a adquirir. Las ventas dependerán, más bien de la demanda, y de otras variables, que pueden estar bajo el control de la empresa.

En lugar de una cifra fija de ventas, el análisis de posibilidades, analisis de optimisación trata por lo tanto, con una legión de posibilidades a menudo de número infinito. Así pues el analista no limita su análisis al de una sola decisión posible, tratándola cual si hubiese de ser la única para la empresa en estudio, debido a que, por lo general, tendrá ante sí una serie de elecciones posibles, cualquiera de las cuales le permitirá seguir en el negocioo inclusive acumular. Puede con relativa impunidad, gastar en forma segura algo más o algo menos en propaganda, hacer un cambio para ampliar o reducir su cuerpo de vendedores, sus niveles de existencias, y a menudo que aumente o rebaje sus precios.

La manera de proceder del análisis de optimisación, es tomar en cuenta estas alternativas y preguntarse por cual de estos posibles conjuntos de decisiones se puede acercar más a lograr los objetivos de la empresa, es decir, encontrar los acuerdo y decisiones óptimas.

1.2 La Optimización en el Análisis Económico.- El concepto de - - Optimización es importante para que el economista realice sus análisis teóricos y aplicados, de problemas de política con respecto al público; pero - también le ayuda a comprender el comportamiento del sistema económico en su conjunto.

El Análisis de optimización deberá servir como un buen medio de — predicción del comportamiento económico; es decir que deberá proporcionar — una explicación satisfactoria de los acuerdo y actividades económicos. En teoría económica se acostumbra utilizar una premisa de optimización cuando - se expone el comportamiento del sistema económico. Se dá sencillamente por supuesto que las decisiones de estas unidades son aproximadamente óptimas y, por lo tanto, las consecuencias de esta presunción se presentan como una descripción del mundo real. De esta manera el economista, expone, en efecto, la manera en la cual, cualquier individuo, habrá de llevar sus decisiones económicas a las esperadas decisiones óptimas.

1.3 Calculo de Optimización.- Existen dos aspectos del enfoque - el Cálculo de Optimización que deberán ser examinados con cuidado, para entenderlos mejor, el primero, es la consideración explícita de toda la escala de posibilidades congruentes, y el segundo es de someter todas estas posibilidades a un análisis sistemático y riguroso. Estos dos aspectos de optimización, quizá se pueden entender mejor por medio de un ejemplo. Para tal - efecto, examinaremos uno de los modelos más sencillos del Análisis de existencias. Hemos de aclarar, que la elección de este ejemplo es sólo con fines explicativos, y la intención es que se pueda observar que basándose en - muy poca información inicial, se van sacando del modelo más y más implicaciones.

En nuestro análisis, trataremos con un comerciante, que espera confiadamente vender en el curso del próximo año, una cantidad determinada de - mercancías que de ahora en adelante llamaremos Q' unidades de una de sus mercancías a un precio determinado, con la demanda repartida por igual durante todo el año.

La pregunta ahora es: ¿Cuántas existencias deberá tener a mano?, se pueden hacer muchas elecciones; por ejemplo si Q' = 100 000 unidades se puede hacer frente a la demanda haciendo que se le entregue al almacén toda esta cantidad al principio de enero y que la conserve en existencia hasta que la misma se vaya agotando paulatinamente por los envíos a los clientes, o bien se puede hacer entrega de 50 000 unidades inmediatamente después del primero de enero y otra cantidad al principio de julio. Otra alternativa más, sería que se le entregasen 25 000 unidades trimestralmente, y así sucesivamente, etc.

Ahora bien, la primera alternativa, comporta un inventario que empieza con 10000 unidades y termina en cero, de manera que el promedio de existencias es de 50 000 unidades. De la misma manera, el segundo procedimiento, comporta existencias que empiezan con 50 000 unidades y terminan en cero de manera que el promedio de mercancías, es de 25 000 unidades, y en el tercer caso, comporta existencias de 25 000 unidades al principio del período con un promedio de 12 500 unidades, etc. Así al hacer pedidos cada vez más frecuentes, puede hacerse cada vez más pequeño el nivel promedio de existencias que sea necesario.

Surge ahora una pregunta: ¿Hasta que punto puede llevarse este proceso de rebajar las existencias?. Como es natural, un inventario reducido, ahorra dinero de los costos de sostenimiento de existencias, es decir, los costos de almacenamiento, costos de intereses del efectivo empleado en la adquisición de mercancías, etc. Pero por otra parte, hay un costo de sostenimiento de renovación de pedidos, como consecuencia de colocarlos y entregarlos y, puesto que un inventario más reducido comporta pedidos y entregas más frecuentes, si se puede optar por un promedio muy bajo de existencias, estos costos se pueden hacer prohibitivos. La determinación del nivel óptimo de existencias comporta un equilibrio sistemático de las economías logradas en los costos de sostenimiento de existencias contra la renovación de pedidos, necesarios cuando el inventario es reducido.

Para encontrar el nivel óptimo de existencias o sea el que cumpla con su función y con el costo mínimo, debemos pasar ahora al proceso de encontrar expresiones matemáticas para los costos de sostenimiento de existencias y los de renovación de pedidos. Para el primero y en base a nuestro ejemplo, se vió que el nivel promedio de existencias, es la mitad de la cantidad recibida en su envío. Así pues, para tener una connotación general, haremos que D sea el número de unidades producidas por el comerciante y luego tal como se ha dado por supuesto, si la demanda se reparte por igual durante todo el año, las existencias disminuirán a un ritmo continuo desde el — día de su producción, hasta el día en que queden agotadas. Así es que el - inventario disminuirá gradualmente desde D, hasta llegar a cero, de manera - que el nivel medio de existencias, tendrá que ser:

$$\frac{D+0}{2} = \frac{D}{2}$$

Dejemos ahora que K'(pesos), represente el interés y demás costos de sostenimiento propios de mantener en existencia una unidad de mercancías por espacio de un año. Luego el costo total de sostenimiento será el costo anual de sostenimiento de una unidad de mercancía multiplicada tantas veces la unidad como indique el número promedio de unidades en existencia, o sea $\frac{K'D}{2}$.

Para el otro, si se han de vender 100 000 unidades y se entregan 25 000 de ellas por embarque, entoces está claro que el curso del año se — necesitarán 100/25 = 4 entregas. Dicho en términos más generales, sí en - el curso del año han de venderse Q' y cada vez la entrega es D, el número - necesario de entregas será entonces de $\frac{Q'}{D}$.

Supongamos, además que el costo por entrega es proporcional a la cantidad entregada, según la expresión $a' + b'D$, en la cual a' y b' son - ciertos números. En este caso b', puede interpretarse como unidad enviada de tal manera que el costo de envío de D unidades = $b'D$ pesos. Análogamen te, a' representa los costos tales como de contabilidad, conferencias telefónicas para los pedidos; dicho en otras palabras; costos cuya magnitud no vienen seriamente afectados por la cantidad que comporta el envío.

Ahora ya podemos calcular el costo total anual de renovación de pedidos; que será igual al número de entregas multiplicado por el costo de cada una de ellas, a saber:

$$\frac{(a' + b'D)\, Q'}{D} = \frac{a'\, Q'}{D} + \frac{b'Q'D}{D} = \frac{a'\, Q'}{D} + b'\, Q'$$

El costo total del comerciante que anota en el libro de inventario es la suma de estos dos costos; es decir, el de conservación y el de renovación . Por lo tanto es igual a:

$$C = \frac{K'\, D}{2} + \frac{a'\, Q'}{D} + b'\, Q'.$$

La única incógnita de la ecuación anterior es el valor óptimo de D, o sea la cantidad que habrá de entregarse por envío. Una vez que se halla este número, el problema estará rèsuelto, debido a que entonces, se puede hallar el promedio correspondiente al nivel de existencias = D/2, y el número de veces por año que se habrán de pedir los embarques será de Q '/D.

Pero una vez que hallemos nuestra ecuación, la solución del problema se reduce a un sencillo problema de cálculo, puesto que la ecuación nos dará una relación directa entre los costos y los valorés alternativos de nuestra variable D. Por ejemplo: suponiendo que los números de la ecuación fuesen Q' = 100 000, K' = 8, a' = 60 y b' = 3. Entonces la ecuación se convierte en:

$$C = \frac{8\, D}{2} + \frac{60 \times 100\,000}{D} + 3 \times 100\,000$$

Entonces, $C = 4D + \dfrac{6\ 000\ 000}{D} + 300\ 000$

Con esta relación cabe hacer la aproximación del valor óptimo de D por medio de cierto número de cálculos de tanteo. Se puede tomar sencillamente ciertos números alternativos de D, sustituirlos por su turno, en la ecuación, y calcular los correspondientes valores de C, encontrando así, de manera aproximada, el valor de D que dá el costo más bajo. Por ejemplo si fijamos a D = 100 000, se obtiene que C = 40 000 + 6 000 000 + 300 000 = 940 00, y ahora abreviando tenemos que: para los siguientes valores, se llega a una tabla:

D	C
10 000	940 000
20 000	680 000
30 000	620 000
40 000	610 000
50 000	620 000
60 000	640 000
70 000	666 666

El examen de esta tabla sugiere que la conclusión correcta deberá ser de aproximadamente 40 000 unidades por entrega, el valor óptimo de D.

Así pues, al encontrar la ecuación del costo de inventario, hemos obtenido toda la información que necesitabamos para resolver el problema. Las ecuaciones de esta índole reciben el nombre de función objetiva, debido a que demuestran la forma en que los objetivos de la empresa (reducción al mínimo de los costos), vienen afectados por los distintos valores de la variable encuestión. La función objetivo son muy comunes en los problemas semejantes al presente.

Por tanto, vemos que el problema se resuelve. Sin embargo un poco más de Análisis permitirá sacar gran cantidad de información, partiendo de esta solución. Los métodos usuales del Cálculo Diferencial (que veremos en el próximo capítulo), serán de utilidad para sacar de nuestra ecuación, -

que nos dará el valor óptimo de nuestra variable D.

Esta ecuación es: $D = \sqrt{\dfrac{2\,a'\,Q'}{K'}}$

Prueba.- El valor óptimo de D, es el que reduce al mínimo el costo total de las existencias C. Por lo tanto, diferenciamos C con respecto a D y fijamos la derivada $\dfrac{dC}{dD}$, y lo igualamos a cero, y despejamos D.

por tanto, $\dfrac{DC}{dD} = \dfrac{K'}{2} - \dfrac{a'\,Q'}{D^2} = 0$

de donde, $\dfrac{K'}{2} = \dfrac{a'\,Q'}{D^2}$ por lo tanto, $D^2 = \dfrac{2a'\,Q'}{K'}$

y finalmente, $D = \sqrt{\dfrac{2\,a'\,Q'}{K'}}$

Este resultado nos dá el nivel medio óptimo de existencias D/2, y la cantidad óptima para los pedidos de renovación D, correspondiente a cualquier nivel: de volumen de ventas, Q'; de costo unitario de conservación, K'; y de costo unitario de pedidos, a' . Se puede ver fácilmente que indica que el nivel óptimo de existencias, D/2, debe aumentarse, cuando las ventas Q', aumentan.

Nota.- Hemos puesto un asterisco a las literales que representan un número definido que la empresa conoce. Este signo lo empleamos para - - distinguir estos números de los que representan variables, cuyos valores son las incógnitas del análisis.

1.4 Programación Lineal.- Aunque este trabajo esté desarrollado - sobre los principios y técnicas matemáticas del Cálculo Diferencial, el tema sugiere a la vez que sea mencionado otro instrumento muy efectivo para la resolución de problemas del tipo aquí tratado, optimización de recursos dentro del Análisis Económico.

Existe una nueva metodología matemática conocida con el nombre de Investigación de Operaciones, cuyo objetivo principal es la de encontrar las soluciones óptimas de los problemas económicos, mediante procedimientos matemáticos y estadísticos. Aún cuando su campo de aplicación no es exclusivo de la economía, la mejor cosecha se ha logrado en él.

Dentro de esta ciencia encontramos a la Programación Lineal. El problema que resuelve su aspecto general, es el que se refiere a determinar la combinación de recursos que permita la obtención del óptimo producto. - El adjetivo de "lineal", se deriva de la condición de que las relaciones implicadas sean de primer grado.

Ya a primera vista se puede ver que se trata de una metodología - que hace posible, de manera científica, la aplicación del principio económico de minimizar el costo, en aquellos casos en que la expresión algebraica del problema es un conjunto de relaciones lineales.

Aún cuando parezca demasiado restrictiva la condición de linealidad, las posibilidades de aplicación son numerosas.

Tenemos un objetivo, que es la maximización de las utilidades. - Ahora bien, tales utilidades dependen del número de unidades que de cada artículo se produzcan, por lo que es posible expresarlas como la suma de la utilidad unitaria de cada artículo multiplicada por el número de unidades que se produzcan de éste. La expresión algebraica de las utilidades será una -

función (1), y si, cualquiera que sea la cantidad producida de un artículo, su unidad utilizable es constante, esa función será una función lineal.

Nuestro objetivo, por lo tanto, es obtener el máximo valor de la función de utilidades, es decir, maximizar la función. Pero dicho máximo está restringido por las limitaciones de materias primas y de capacidad de producción; por ello decimos que se trata de obtener un máximo que está condicionado.

Analicemos las condiciones o restricciones. Si disponemos de una cantidad determinada de materias primas para la producción, resultará obvio, que lo requerido para un plan de producción posible será igual, cuando más, a la suma disponible. Dicho de otro modo, la cantidad de materias primas utilizadas deberá ser igual o menor que la cantidad disponible de ellas. Pero en sentido matemático, esto equivale a una desigualdad. A esta conclusión se llega al plantear la restricción de capacidad.

El problema desde el punto de vista matemático, consiste en obtener el valor máximo de una función condicionada por desigualdades. Sin embargo, lo que se ha dicho para el caso de las utilidades o el producto, es válido también para conceptos tales como los costos; pero en este caso, el objetivo será minimizarlos.

(1) ver sección 2.1, acerca del concepto de función.

" CAPITULO II "

2) DERIVADAS.

Es indudable que, para poder comprender la definición y el uso de la Derivada, es imprescindible manejar de una manera un tanto fluída los — conceptos de Función, Límite y Continuidad. En el presente Capítulo veremos de una manera breve la definición de cada uno de estos conceptos, acompañados de ejemplos sencillos para hacerlos más ilustrativos.

Si bien es cierto que estos conceptos no son tratados con rigor — matemático, consideramos que, por lo menos nos son indispensables e suficientes para comprender la definición y uso de la derivada.

2.1 Función.- El Análisis Matemático, trata con variables; lo más importante es la manera en que aparecen relacionadas unas con otras. Por - tanto, se puede decir que el Análisis Matemático no es, sino el estudio de - las relaciones existentes entre las variables. Para expresar y representar una relación cualquiera entre variables, nos servimos del término técnico — llamado función.

Aunque el concepto de función presenta un carácter general y abstracto, es, esencialmente sencillo. Al objeto de lograr una noción clara - del término, daremos a continuación casos o ejemplos de funciones, tomadas - del campo científico y de la vida práctica. Cuando el Análisis Matemático se aplica al estudio de los fenómenos reales, las magnitudes físicas y de — tipo distinto en que ellos aparece, se representan por variables. Los ejemplos siguientes tomados estocásticamente, podemos decir, que nos - - - - - -

aclararán este punto.

Sí una bola de plomo cae desde cierta altura, sabemos que la distancia recorrida expresada en metros o cualquier otra unidad de longitud, dependerá del tiempo expresado en segundos o cualquier otra unidad de medición que tarde en recorrerla. Análogamente el volumen de un gas, sometido a una temperatura constante, dependerá de la presión que se ejesa sobre el mismo, es decir, será una función de la presión. Dando un ejemplo más corriente, puede decirse que el pago dentro de la ciudad, del transporte, de un paquete cualquiera, dependerá del peso del mismo. Finalmente, en economía, la cantidad demandada de una mercancía cualquiera dependerá del precio del mercado; es decir, la demanda es una función del precio.

En cada caso, existen dos magnitudes variables representadas por números variables. Estas magnitudes y variables que las representan, no cambian de valor independientemente unas de otras; existe una relación determinada entre los valores correspondientes, es decir, una cierta dependencia entre una y otra magnitud. La noción de función implica, por lo tanto, los conceptos de relación entre los valores de dos variables y de dependencia entre una y otra variable.

Podemos pasar ahora a las definiciones de los siguientes dos términos técnicos:

Se dice que existe una función implícita o relación funcional entre dos variables x e y, con campos de variabilidad conocidos, si los valores que x e y pueden tomar no son independientes unos de otros, sino que están relacionados de alguna manera definida. Sí se supone que los valores de x son conocidos, entonces el valor o valores de y no lo son, sino que son determinados en base a los valores obtenidos de x, e inversamente. Una función implícita es, por lo tanto, una relación mutua entre dos variables, determinando cada variable a la otra. Se dice que la variable y es una función explícita de la variable x, sí el valor o valores de y dependen de algun modo definido de los valores arbitrarios que le hemos asignado a -

x. En este caso es la variable x, la que toma valores arbitrarios y determina el valor de la variable y. Análogamente, puede darse como x función explícita de y.

DE aquí resulta que una función implícita dada entre las variables x e y, dá lugar a dos funciones explícitas: la y como función explícita de x y la x como función explícita de y. Estas funciones se dice que son inversas una de la otra. Recíprocamente cada función explícita dada deberá procedér de cierta función implícita y tendrá su correspondiente función inversa. La distinción entre funciones implícita y explícitas depende principalmente del punto de vista considerado. Si se considera una relación mutua entre x e y, el término apropiado será entonces, el de función implícita, ya que las variables ocupan el mismo lugar en la relación funcional. Pero si por el contrario, la relación se considera en un sentido particular, tomando por ejemplo a y como dependiente de x, será conveniente en este caso, adoptar el término de función explícita, ya que aquí establecemos una distinción arbitraria de las variables, denominando a y variable dependiente y a x variable independiente.

Debe tenerse en cuenta que una función considerada desde este punto de vista, no significa necesariamente una relación causal, ya que la discriminación que se establece entre las variables es puramente convencional, y por lo tanto no puede decirse en rigor que una variable sea causa de la otra. Las relaciones causales aparecen sólo entre las cantidades pertenecientes a fenómenos reales, y cuando una de las relaciones se interpreta por una función, sucede que uno de los aspectos de la función predomina y se desecha al otro. Toda función matemática puede ser considerada desde uno u otro punto de vista, teniendo su correspondiente función inversa.

El concepto de función es sumamente amplio. Los siguientes ejemplos lo manifiestan, y entonces serviran para clasificar las funciones de una manera conveniente para su estudio particular.

1) Las variables x e y toman valores numéricos cualesquiera, con

la condición de que el valor de y sea el doble del de x. Simbólicamente tenemos:

$$2x - y = 0 .$$

que es la expresión de la función implícita. Las dos funciones explícitas correspondientes son:

$$y = 2x \qquad y \qquad x = 1/2\, y ,$$

siendo una la inversa de la otra y con un campo de variabilidad, el conjunto de los números reales, tanto para x, como para y.

2) La variable y, depende de la x, que puede tomar cualquier valor numérico, según las operaciones algebraicas que expresan simbólicamente la siguiente igualdad:

$$y = x^2 + 3x - 2 .$$

En este caso, y, aparece como una función explícita de x, y el campo de variabilidad de x, es el conjunto de los números rales. La función implícita de la que se procede es:

$$x^2 + 3x - y - 2 = 0.$$

La correspondiente función inversa es más difícil de obtener, pero es evidente que para cada valor dado de y, corresponde un par de valores a x, o no corresponde valor real alguno. Resolviendo la ecuación cuadrática anterior, para todo valor de y, hallamos:

$$x = 1/2\,(-3 \pm \sqrt{4y + 17}\,),$$

que dá a x como función explícita de y, y la que sólo estará definida, para los valores reales de x en un limitado campo de variabilidad de y, del que quedan excluídos los valores negativos de valor absoluto mayor a 4.25.

3) Las variables x e y toman valores cualesquiera, con las condición de que su producto sea siempre igual a 3. La representación simbólica de esta función, será pues:

$$x\,y = 3.$$

y las dos funciones explícitas correspondientes serán:

$$y = 3/x \quad y \quad x = 3/y$$

siendo una varible la inversa de la otra, y teniendo ambas como campo de varibilidad el conjunto de los números reales.

4) La variable y, viene dada por :

$$y = 100\,(1.05)^{x} \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Aquí vemos que y, es función explícita de x, tomando como campo de variabilidad de esta última al conjunto de los enteros positivos, nos garantiza que el valor de (1.05), será siempre mayor que la unidad. Por otra parte la función inversa correspondiente se puede expresar en términos de logaritmos, asabe:

Partiendo de (1), $\log y = \log 100 + x \log (1.05)$,

de donde, $x = \dfrac{\log y - \log 100}{\log (1.05)}$ . . . . . (2).

En este ejemplo, como podemos apreciar, se puede considerar como problema típico de finanzas, donde en (1), se representa al monto de $ 100.00 al 5 % anual, durante x años, y en (2), se representa al tiempo que tardará para acumularse ese monto, ambas (1), y (2) son funciones explícitas una de la otra, y la correspondiente función implícita en este caso será:

$$\frac{100\ (1.05)^x}{y} = 1,$$

la cual implica que el monto sobre él mismo dá la unidad, ya que si $y = 100\ (1.05)^x$, y por lo tanto esto es igual a decir que:

$$y/y = \frac{100\ (1.05)^x}{100\ (1.05)^x} = 1.$$

5) Las variables x e y, están relacionadas por la ecuación:

$$x^2 + y^2 = 16,$$

que es una función implícita de x e y. Las correspondientes funciones explícitas son:

$$y = \pm\sqrt{16 - x^2} \qquad y \qquad x = \pm\sqrt{16 - y^2}$$

El campo de variabilidad de x(para valores reales de y), está constituído por todos los números cuyo valor absoluto no supere 4, y de manera análoga, respecto al campo de variabilidad de y. Existirán, por tanto dos valores de y (excepto en los puntos ± 4), correspondientes a cada valor dado de x, y recíprocamente.

Dada una función cualquiera, se deduce la posibilidad de construir un cuadro, asignando valores arbitrarios a x, con los valores que corresponden a y. Como es usual, se requiere que se determinen los valores a cada una de las variables, el valor o valores que tome la otra. Sí el campo de variabilidad es contínuo, no habrá limitación alguna en el número de valores correspondientes que pueden anotarse en el cuadro.

Sobre una hoja de papel cuadriculado, se trazan los ejes de coordenadas Ox y Oy, tomando usualmente a Ox, como horizontal y a Oy como vertical y se elige sobre los mismos una escala de medida. Cada par de valores de los que figuran en el cuadro obtenido de la función, dará lugar a un punto sobre el gráfico de la misma.

A medida que se vayan obteniendo puntos de este modo, se verá la posibilidad de trazar, a mano alzada, una curva a través de todos los puntos. El conjunto de puntos así obtenidos, o bien la curva correspondiente que pasa por ellos, se denomina gráfica de la función. Los ejemplos siguientes, aclararán completamente el procedimiento.

1) $y = x^2 + 3x - 2$.

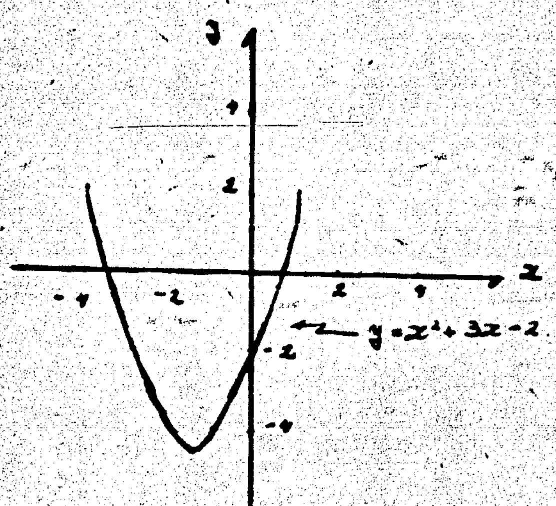
De la fórmula anterior de la función, se puede obtener el siguiente cuadro, que contiene los valores correspondiente de x e y.

X	- 4	- 3	- 2	- 1 1/2	- 1	0	1	2	3
Y	2	- 2	- 4	- 4 1/2	- 4	-2	2	8	16

Trazando los puntos correspondientes, se ve una curva conocida como parábola. Por presentar mayor interés entre los puntos que corresponden a valores de x comprendidos entre - 2 y - 1, se ha señalado en ella misma un punto intermedio, siendo este el punto más bajo de la curva, a saber (1 1/2 , 4 1/2), o bien (3/2, 9/2).

En la siguiente figura 2.1, podremos apreciar en forma analítica el comportamiento de esta función cuadrática.

FIGURA 2.1



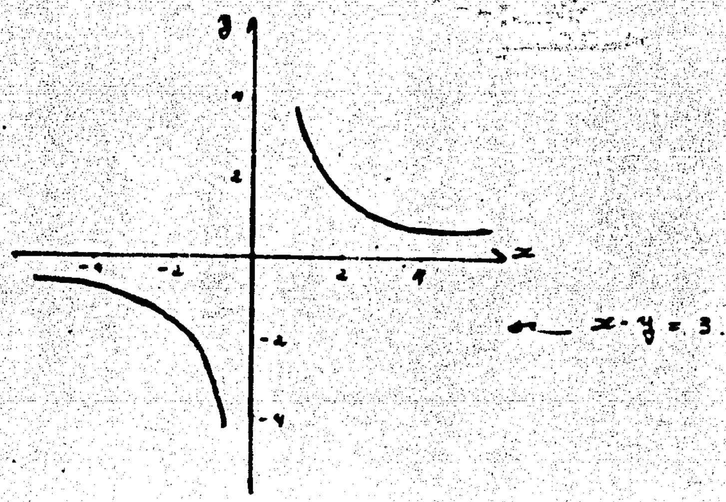
2) $xy = 3.$

La gráfica de la función se puede obtener del siguiente cuadro:

X	- 4	- 3	-2	- 1	0	1	2	3	4
Y	- 3/4	- 1	-3/2	- 3	?	3	3/2	1	3/4

Por medio de la figura 2.2, que puede ser dibujada por una curva de trazo contínuo a traves de la serie de puntos dados, existiendo sin embargo, cierta duda, respecto al curso que debe seguir cuando x toma valores muy pequeños. Cuando x alcanza precisamente el valorcero, la fórmula no proporciona ningún valor correspondiente de y. Observemos también, que el valor de y aumenta rápidamente a medida que x recibe valores positivos cada vez más pequeños, y que decrece con rapidez para valores negativos de x , cada vez menores. La gráfica de la función por esto es que toma la forma indicada, y constituye la representación de la curva llamada hipérbola e - quilátera.

FIGURA 2.2



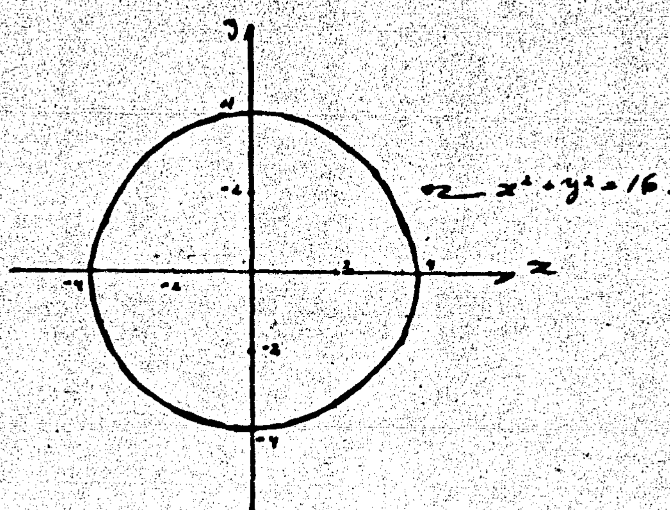
3) $x^2 + y^2 = 16.$

En el cuadro siguiente, aparecen los valores de la función para los valores de x, y de y, comprendidos entre - 4 y 4.

X	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4
Y	0	2.6 -2.6	3.5 -3.5	3.9 3.9	4 -4	3.9 -3.9	3.5 -3.5	2.5 -2.5	0

Los valores de y, se han calculado tomando una cifra decimal. — No está definida la y, para valores de x, que no pertenezcan al intervalo — citado. En x=+_ 4, existe un valor sólo para y, mientras que en los demás valores de y, que le corresponden serán siempre dos. La gráfica de la función representada en la figura 2.3, es una circunferencia de radio igual a 4, con centro en el origen.

FIGURA 2.3



4) $$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

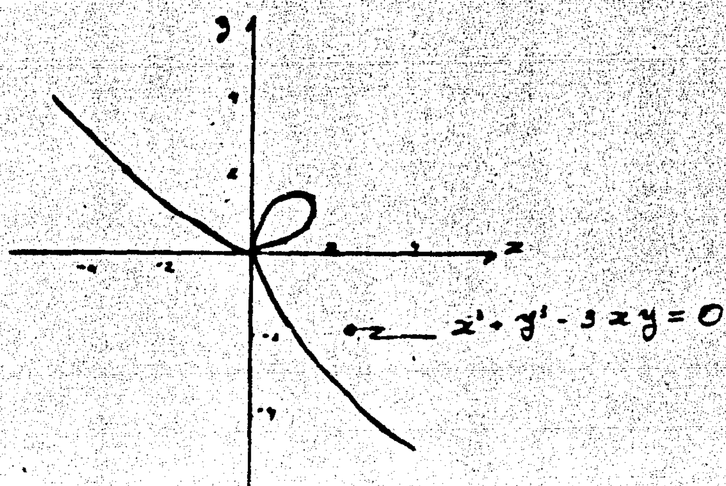
El cuadro con los valores correspondientes de x e y, de los que se obtiene el gráfico de la función, es el siguiente:

X	-4.9	-3.9	-2.8	-1.7	0	0.0	1.3	1.5	1.9	2.9	3.9
Y	3.9	2.9	1.9	0.9	0	1.3 0.15 -1.5	1.6 0.7 -2.25	1.5 0.9 -2.4	-2.8	-3.9	-4.9

Para obtener en este caso los valores correspondientes de y, a los de x, es necesario resolver la ecuación cúbica. Los valores correspondientes de y, a los de x, tienen una cifra decimal exacta. El conjunto corres -

pondiente de puntos a los valores del cuadro anterior se pueden unir por - medio de una curva continua, formada por un lazo y dos cabos. La gráfica presenta un tipo de curva menos conocida que las obtenidas anteriormente, - y que recibe el nombre de Folium de Descartes. La figura 2.4, representa geométricamente la mencionada curva.

FIGURA 2.4



5) Los valores correspondientes a x e y, están dados por el si - guiente cuadro:

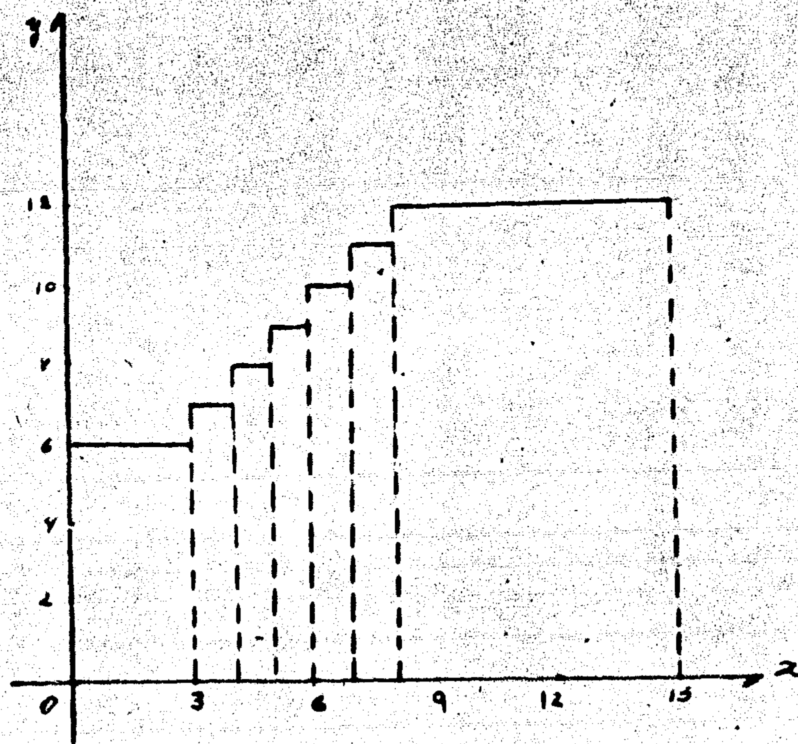
$x \leq 3$, $3 < x \leq 4$, $4 < x \leq 5$, $5 < x \leq 6$, $6 < x \leq 7$, $7 < x \leq 8$, $8 < x \leq 15$

$= 6$, $y = 7$, $y = 8$, $y = 9$, $y = 10$, $y = 11$, $y = 12$

En este caso, y, es una función de x, cuyos valores se forman por el conjunto de los números positivos no mayores a 15. Por otra parte, si x, es función de y, el campo de variabilidad de ésta es discontinuo.

Para el caso de la variable x, su campo de variabilidad esta constituído por los enteros positivos que van del 6 al 12. La función escalonada definida en este ejemplo, puede ser trazada de manera análoga. No es posible trazar una curva contínua a través de dichos puntos, los que no pueden relacionarse de otro modo que por una serie de siete segmentos independientes y paralelos al eje Ox. Este es un tipo de función llamada función discontínua y su interpretación geométrica viene dada en la siguiente figura 2.5.

FIGURA 2.5



Según hemos observado, en las funciones explícitas tomamos una variable cualquiera, y, como función de x, o viceversa. Las funciones explícitas se pueden clasificar en uniformes y multiformes. Cuando, para un valor dado de x, a y le corresponde un valor, y sólo uno, se dice que y es una función uniforme de x. Cualquier función para la cual esto no sea válido definirá a y como función multiforme de x, pudiendo ser biformes, triformes, etc. Análoga distinción puede establecerse respecto a la función inversa, x, de y.

Desde el punto de vista gráfico, si y es una función uniforme de x, entonces la curva correspondiente será cortada en un solo punto por una paralela al eje Oy. Pero, si por el contrario, y es función multiforme de x, la curva respectiva podrá ser cortada en dos o más puntos de una de tales rectas. Del mismo modo, diremos que x es una función uniforme o multiforme de y, según que la curva que la representa pueda ser cortada, respectivamente, en uno o en varios puntos por una recta paralela al eje Ox. No es necesario que exista una correspondencia entre la uniformidad de una función y su curva representativa y la función inversa de la misma, según el procedimiento indicado de sus intersecciones con las paralelas a los ejes. Una curva de una función dada puede ser cortada en un punto único por una paralela al eje respectivo, y, no obstante, la curva que represente la función inversa puede ser cortada en dos o más puntos por una recta paralela al otro eje. No existe, pues, una perfecta uniformidad entre las propiedades de una función explícita y las de su correspondiente función inversa. Existe una razón que pone bien de manifiesto la importancia de las funciones uniformes. Cuando y es una función uniforme de x, se puede hacer caso omiso de la manera como varía x(considerando implícitamente que toma siempre valores crecientes), limitándonos a observar como varía y. Los valores que recibe y pueden ser crecientes, decrecientes o presentar secciones alternativamente crecientes y decrecientes de una forma continua. Gráficamente, si tomamos los valores de x a lo largo del eje horizontal y dibujamos la curva de la función de izquierda a derecha del gráfico, la variación que experimenta y, aparecerá manifiesta por la mayor o menor altura a que se halle la curva del eje horizontal, pudiéndose observar también cuando la curva asciende, es decir, al crecer y, y cuando des - ciende, es decir, al decrecer y.

Esta última observación nos conduce a definir un subgrupo de funciones de particular utilidad. Siendo y, una función uniforme de la variable contínua x, si al crecer x , crece también y, se dice que y es una función creciente de x. Análogamente, cuando al crecer x, decrece y, se dice que y es una función decreciente de x. La funciones crecientes y decre — cientes forman, conjuntamente, el grupo de las funciones monótonas. Las - funciones monótonas aparecen representadas gráficamente por una curva constante ascendente, o descendente, según el caso, de izquierda a derecha del gráfico.

Prescindiendo aquí de los requisitos formales que la continuidad impone, se puede establecer una propiedad característica de las funciones - monótonas: la inversa de una función monótona uniforme, es también una función monótona uniforme en el mismo sentido que la función original; p. ej., si y es una función uniforme creciente de x, para cada valor de x sólo le - corresponderá un valor a y, y los valores de y aumentarán cuando x aumente. Esto aparece completamente claro desde el punto de vista gráfico, ya que la curva que representa a y, por ser ésta una función uniforme creciente de x, se elevará de izquierda a derecha a medida que nos alejamos del origen. - De aquí resulta que sólo existe una uniformidad perfecta entre una función y su inversa cuando se trata de funciones monótonas.

Respecto a las funciones multiformes, es a veces posible dividir una función de este tipo en dos o más secciones, de tal modo que cada una - constituya una función uniforme. La curva correspondiente quedará también dividida en dos o más secciones distintas, siendo entonces cortada cada una de éstas en un solo punto por rectas paralelas al eje respectivo. La función que figura en la siguiente expresión: $y = x^2 + y^2 = 16$, es de — esta clase. La expresión explícita de y, como función biforme de x, es - la siguiente.

$$y = \pm\sqrt{16 - x^2}$$

la que puede dividirse en las funciones uniformes:

$$y = +\sqrt{16 - x^2} \qquad\qquad y = -\sqrt{16 - x^2}$$

La curva correspondiente a esta función, es una circunferencia, la cual queda también dividida en dos secciones uniformes, una sobre el eje Ox, y la otra por debajo de dicho eje. Análogamente, en el siguiente ejemplo: $y = x^2 + 3x - 2$, x, es una función biforme de y, descomponible en las dos secciones siguientes:

$$x = 1/2(\sqrt{4y + 17} - 3) \quad y \quad x = -1/2(\sqrt{4y + 17} + 3).$$

La curva correspondiente, será una parábola, que se divide en dos secciones por una línea paralela al eje Oy, que pasa por el punto $x = -3/2$, siendo cortada cada una de ellas en un solo punto por rectas paralelas al eje Ox. La primera sección de esta función es creciente en y, y la correspondiente rama de la curva asciende de izquierda a derecha, en tanto que la segunda sección define una funciónde y decreciente, estando la sección de la curva que la representa en posición decreciente. Estas divisiones en secciones uniformes de las funciones multiformes, son de mucha utilidad.

Puede observarse, que algunas funciones presentan la propiedad de ser simétricas. La simetría puede definirse de muchas formas, de las cuales la siguiente es, quizá, la más importante. Se dice que una función implícita de x, y, es simétrica cuando al permutar las variables x e y la función no varía. Esto implica que la función explícita y de x, tenga la misma forma que la función explícita x de y. La función $x\,y = 3$, es simétrica, según la definición anterior, ya que las dos funciones explícitas, $y = 3/x$ y su inversa $x = 3/y$, son idénticas.

Una función implícita de las variables x, y puede representarse, cualquiera que sea su forma, por la notación:

$$f(x,y) = 0.$$

Esta expresión es, evidentemente, apropiada para cualquier función que relaciones a las variables x, y. Para obtener de esta notación general una función particular cualquiera, bastará expresar simplemente la forma precisa que corresponda a $f(x, y)$; por ejemplo, haciendo $f(x, y)$ igual a $2x - y$, $x^2 + y^2 - 16$ ó $x^3 + y^3 - 3xy$, obtendremos las funciones particulares $y = 2x$; $x^2 + y^2 = 16$ ó $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, respectivamente.

Por otra parte, si y es una función explícita de x, cualquiera que sea la forma que le corresponda, pondremos la siguiente notación, para designarla: $y = f(x)$.

Esta notación se aplica, evidentemente, al caso en que la función sea uniforme. En toda función de esta naturaleza, se define y como el valor de una determinada expresión que depende de x, y $f(x)$ se considera entonces como un modo conveniente de representar una función particular cualquiera que sea su forma. Para deducir de aquí una función particular cualquiera, bastará reemplazar $f(x)$ por la forma definida que le corresponda; y si hacemos $f(x) = 2x$; $f(x) = x^2 + 3x - 2$ ó $f(x) = 3/x$, obtendremos tres funciones uniformes muy conocidas. Esta notación puede extenderse también al caso de funciones no uniformes; en su uso más general, $y = f(x)$, significa solamente que tomamos y como alguna función de x.

Las letras se usan indistintamente para designar variables y parámetros, aunque es costumbre reservar las últimas letras del alfabeto para designar variables, y parámetros, para las letras del principio.

Nos queda pues, considerar ahora la notación adoptada para designar valores particulares que toman las variables de una función general. Si $y = f(x)$ es una función explícita cualquiera y damos a la variable x valores numéricos determinados, tales como $x = 0$, $x = 1/2$, $x = 1$, los valores correspondientes de y vendrán entonces expresados por $f(0)$, $f(1/2)$, $f(1)$. Podemos, además, asignar a x valores fijos indeterminados, tales como a, b, c, ..., ó x_1, x_2, x_3, ..., utilizando la misma letra x con subíndices o acentos distintos.

El valor que corresponde a y, cuando x toma un valor fijo, por ejem., a ó x_1, se representará por $f(a)$ ó $f(x_1)$. Estos valores fijos indeterminados que toma la variable independiente son, por supuesto, constantes paramétricas. Ilustraremos esto con una función particular dada. Sí:

$$f(x) = x^2 + 3x - 2,$$

entonces,

$$f(0) = (0)^2 + 3(0) - 2 = -2 ; \quad f(1/2) = (1/2)^2 + 3(1/2) - 2 = -1/4 ;$$

$$f(1) = (1)^2 + 3(1) - 2 = 2,$$

y así sucesivamente. Además, si $x = a$, se tendrá $f(a) = a^2 + 3a - 2$.

Por otra parte, si $f(x, y) = 0$ es una función cualquiera $f(a, y) = 0$ será, entonces, una ecuación que una vez resuelta, nos dará los valores de y correspondientes a $x = a$, y $f(x, b) = 0$, una ecuación que nos dará los valores de x correspondientes a $y = b$. Las constantes paramétricas a ó b pueden ser sustituídas, por supuesto, por números determinados.

Como ejemplo de la notación funcional, consideraremos las siguientes operaciones, de las cuales se hará el debido uso más adelante. Sí la variable x toma los valores particulares a y $(a + h)$, siendo a y h números positivos o negativos cualesquiera, la función $f(x)$ tomará entonces los valores correspondientes $f(a)$ y $f(a + h)$. El incremento de la función correspondiente al incremento dado de x será :

$$f(a + h) - f(a).$$

El incremento que experimenta la función para el incremento de la unidad de x, es:

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

el cual toma el nombre de variación de la función x cuando varía de a a (a + h).

Los incrementos efectivos que toman x y f(x), pueden ser positivos o negativos, según que se experimente un aumento o una disminución.

2.2 Noción Fundamental del Límite.- Estamos en condiciones de - iniciar el estudio del concepto de infinito, para así apreciar la potencia del Análisis Matemático.

Como es sabido, los números reales son suceptibles de colocación por orden de magnitud, pudiéndose elegir, por lo tanto, dentro del conjunto a una sucesión numérica particular, cuyos términos se formen con arreglo a una ley cualquiera, previamente establecida; por ej., sean las sucesiones crecientes,

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots.$$

$$1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \ldots\ldots$$

de núemros reales; y, análogamente, podrían citarse muchos otros ejemplos. Todas estas sucesiones presentan la propiedad esencial de que cada término se deduce del anterior según una ley determinada, teniendo, por tanto, cada término un siguiente, sin que se llegue nunca a un último término.

Las sucesiones monótonas crecientes de números reales pueden - - clasisificarse en dos grupos. En el primero, del que forma parte la primera del ejemplo anterior, los términos de la sucesión alcanzan valores cada vez más grandes, a medida que seguimos el orden de enumeración. Dado un número cualquiera, por grande que sea, hay un término de la sucesión a partir del cual son mayores que dicho número. Las sucesiones crecientes de esta clase se dicen que tienden a infinito, y de aquí resultan las nociones de infinitamente grande y de sucesión infinita de un conjunto de números cada vez mayores.

En el segundo grupo, del que forma parte la segunda sucesión del ejemplo anterior, se clasifican todas aquellas sucesiones cuyos términos también crecen, pero sin pasar por encima de todo número, por grande que éste sea. Como puede apreciarse en el citado ejemplo, los términos de la sucesión se acercan contínuamente, aproximándose cada vez más a uno, pero sin alcanzar este valor. Se podrá elegir evidentemente un término de la sucesión tan próximo a 1 como se desee, sin más que avanzar convenientemente a través de la sucesión. En esta circunstancia, los términos de la sucesión se dice que tienden a 1, siendo 1 el límite, o el valor límite de la sucesión. Toda sucesión de esta clase tiene un límite finito, y ya que el intervalo que separa a los términos de la sucesión del límite es cada vez más pequeño, y queda subdividido el que corresponde a un valor cualquiera por los términos posteriores.

Del mismo modo, se pueden elegir sucesiones monótonas decrecientes de números reales, es decir, aquellas que presentan invertido el orden de magnitud de sus términos. Como ejemplos de sucesiones monótonas decrecientes, podemos citar las siguientes:

$$1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2,\ 3/2,\ 4/3,\ 5/4,\ 6/5,\ 7/6,\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Existen, de nuevo, dos clases de sucesiones, representantes, respectivamente, por cada uno de los ejemplos anteriores. Toda sucesión de la primera clase está formada por términos, cuyo valor absoluto crece —

infinitamente. Una sucesión de tipo similar, se dice que tiende a menos - infinito ($-\infty$), lo que nos proporciona la noción de lo infinitamente - - grande y negativo, como contrapartida de infinito. En la segunda sucesión anterior, los términos decrecen aproximándose a 1, es decir, la sucesión — tiende a 1.

Finalmente, las sucesiones de números reales pueden aparecer con - sus términos ordenados de una manera independiente de su magnitud relativa, o sea que no es necesario que manifiesten crecimiento ni decrecimiento monótono. En las sucesiones de este tipo se pueden dar las tres posibilidades citadas, es decir, la sucesión puede ser que tienda a $+\infty$, a $-\infty$, o a un límite finito. Así, por ejemplo, la sucesión

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{7}{8} \ldots\ldots$$

de la se ha obtenido tomando un término sí y el otro no en las segundas sucesiones de los ejemplos citados en esta sección, no es creciente ni decre - ciente, pero tiende al límite 1. Surge aquí, sin embargo, una nueva compli cación: la sucesión puede no verificar ninguna de las posibilidades admiti - das, ya que el valor de sus términos puede ser oscilante, sin que manifieste por lo tanto, ninguna de las tendencias indicadas anteriormente. Una suce - sión de este tipo es, por ejemplo,

$$1, \frac{1}{2}, 3, \frac{5}{4}, 5, \frac{7}{6}, 7, \frac{9}{8}, 9, \ldots\ldots$$

Se dice entonces, que la sucesión es oscilante y que carece de límite. Dada una sucesión cualquiera de números reales, podrá, por lo tanto, ocurrir:

1.- Que tienda a $+\infty$.
2.- Que tienda a $-\infty$.
3.- Que tienda a un límite finito; o

4.- Que, siendo oscilante, caresca de límite.

Todo concepto relacionado con el infinito utilizado en matemática, ya se trate del infinitamente grande o del infinitamente pequeño o contínuo, está basado en la noción de una sucesión indefinida de números reales. En términos generales, el infinitamente grande corresponde a un proceso de multiplicación o crecimiento sin fin, en tanto que el infinitamente pequeño está relacionado con un proceso de división o decrecimiento ilimitado. El infinitamente grande y el infinitamente pequeño están, por lo tanto, íntimamente relacionacionados, de manera análoga a lo que ocurre con la multiplicación y la división, constituyendo meramente dos aspectos distintos de una misma noción esencial: la de orden y continuidad. La noción de infinito está implícita, además, en el propio sistema numérico real. En efecto, el sistema real es ilimitado, ya que cada uno de sus números presenta un siguiente; es continuo e indefinidamente divisible, ya que entre dos números cualesquiera del mismo se pueden introducir infinitos números. Entonces, podremos ocuparnos a continuación de la generalización del concepto de límite, según se ha establecido antes, al caso de las funciones. El modo más conveniente de definir el límite de una función, en sus diversos casos, consiste en considerar algunos ejemplos significativos. Un detenido estudio de los ejemplossiguientes será muy conveniente, ya que, elegidos de modo que comprendan el mayor número posible de casos, nos permitirán pasar a definiciones más precisas de todos estos conceptos.

1) Sea $y = 1 - \frac{1}{x}$.

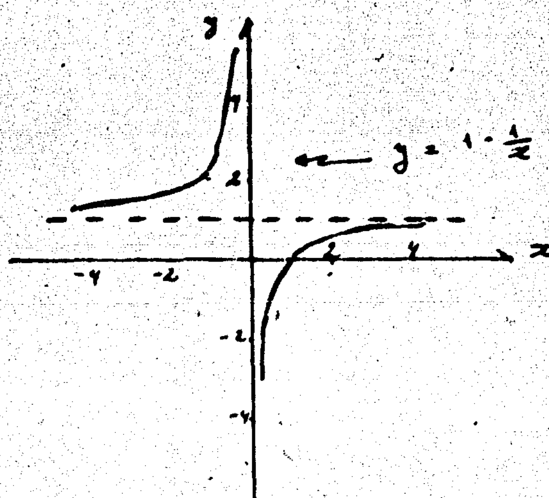
Dando a x sucesivamente valores enteros, positivos y negativos, la correspondiente sucesión de valores de y, puede ser deducida de la función anterior, como se expresa a continuación:

x	1	2	3	4	5	6	7	.....
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	.....

x	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	....
y	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{7}$	....

Dado este cuadro, se puede obtener gráficamente la curva que re - presenta a esta función, la cual es una hipérbola equilátera, como se puede apreciar en la siguiente, figura A.

Figura A.



En el cuadro anterior figuran las cuatro sucesiones de números indicadas en el párrafo anterior. Las dos primeras estan relacionadas de tal modo que, conforme x aumenta indefinidamente tomando valores enteros, y, también au - menta, aproximándose indefinidamente a 1. Aunque x es evidente que es variable contínua, también lo es que la introducción de nuevos valores en la sucesión de x no cambiaría esencialmente lo dicho: la sucesión de los valores correspondientes de y tendería siempre al límite 1. Esta noción de correspondencia entre las sucesiones de valores de x y de y, se expresa di —

siendo que la función $y = 1 - 1/x$, tiende a 1 cuando x tiende a ∞. Este hecho se ilustra por medio de la gráfica de la función. A medida que x crece tomando valores positivos, la curva representada en la gráfica sube de izquierda a derecha y se aproxima a la recta de puntos trazada a la distancia 1 del eje Ox.

Análogamente, en el segundo par de sucesiones del cuadro, éstas aparecen relacionadas, tendiendo la sucesión de valores de y, al límite 1, a medida que la sucesión de valores de x tiende a $-\infty$. El mismo gráfico representa esta tendencia, ya que la curva baja de derecha a izquierda, aproximándose a la misma horizontal a medida que x, va tomando valores negativos, de valor absoluto cada vez mayor.

2) Sea $y = 3/x^2$ una función de cuyos valores correspondientes tabulamos en los siguientes cuadros:

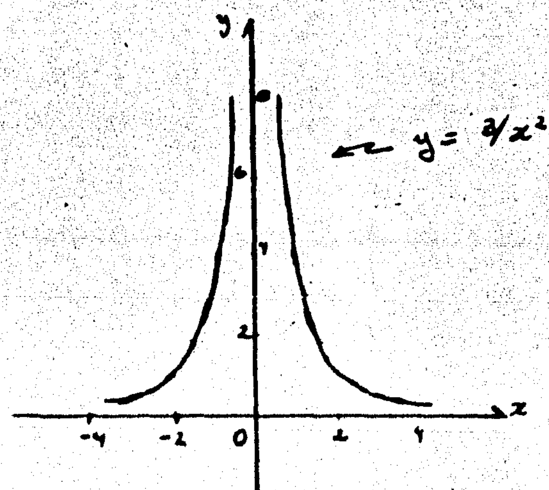
x	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	....
y	3	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{25}$	....

x	± 1	$\pm 1/2$	$\pm 1/3$	$\pm 1/4$	.....
y	3	12	27	48	.....

se obtiene el gráfico de la figura B.

En este caso es indiferente tomar para x valores positivos o negativos, ya que los correspondientes valores de y, son independientes del signo de x. A medida que x toma una sucesión de valores de y, va disminuyendo. Por lo tanto, la función $y = 3/x^2$ tiende a cero, cuando x toma los valores que tienden a $\pm\infty$. La función $y = 3/x^2$, no está definida para — $x = 0$. Pero, cuando x toma una sucesión decreciente de valores tiende a — cero, se observa que la sucesión de valores correspondientes a y, crece indefinidamente. De aquí resulta que la función $y = 3/x^2$ tiende a ∞, cuando x tiende a cero. La gráfica de la función ilustra estos límites. La curva desciende al eje Ox, a medida que nos alejamos (hacia la derecha o a la izquierda) del origen de coordenadas, y se eleva indefinidamente, aproximándose al eje Oy, a medida que x se aproxima a dicho origen.

Figura B.



Los ejemplos anteriores demuestran que la noción de límite de una función debe deducirse de la del límite de una sucesión numérica indefinida. Si y es una función uniforme de x, se puede dar a x una sucesión de valores, según una ley establecida previamente, y el límite de la función dependerá — entonces de la manera de comportarse de la sucesión de valores correspondientes de y. El concepto de límite es esencialmente relativo, significando — siempre el valor a que se aproxima la sucesión de valores de y, cuando la variable independiente x, varía de un modo definido. Habrá, por tanto, en ca se, que completar la frase

"y tiende a ______, cuando x tiende a _____".

La segunda parte de esta frase se completa de una manera arbitraria, según el criterio adoptado para la variación de x; respecto a la primera, dependerá del modo de comportarse la función al variar x.

Las siguientes definiciones comprenden todos los casos de límite de una función $y = f(x)$ explícita y uniforme.

1.- Límite de $f(x)$ cuando x tiende a $\pm\infty$.

Para hallar el límite de la función cuando x tiende a ∞, observaremos el comportamiento de la sucesión de valores positivos de x, elegida de antemano y que aumente indefinidamente. Existen cuatro casos posibles:

a) Los valores de $f(x)$ son positivos y se hacen mayores que todo número dado, por grande que este sea, cuando x crece indefinidamente. Para un valor conveniente de x, la función tomará, pues, un valor superior a todo número dado, por grande que este sea, diciéndose entonces que "$f(x)$ tiende a ∞, cuando x tiende a ∞", lo cual puede simbolizarse del modo siguiente:

$$f(x) \longrightarrow +\infty \text{ cuando } x \longrightarrow +\infty, \text{ o bien } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

En este caso, la curva $y = f(x)$ se eleva indefinidamente sobre el eje horizontal Ox, de izquierda a derecha, como ocurre con la curva (a) de la figura C.

b) Los valores de $f(x)$ son negativos, pero crecen indefinidamente en valor absoluto cuando crece x indefinidamente.

Este caso es enteramente análogo al anterior, pudiendo afirmarse que "$f(x)$ tiende a $-\infty$, cuando x tiende a $+\infty$", o simbólicamente:

$f(x) \longrightarrow -\infty$ cuando $x \longrightarrow +\infty$, o bien $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

La curva $y = f(x)$ desciende ahora indefinidamente, de izquierda a derecha, como ocurre con la (b) de la figura C.

c) Los valores de $f(x)$ forman una sucesión que tiende a un valor finito lamda, cuando x crece indefinidamente. El valor de $f(x)$ se puede hacer que difiera de lamda tan poco como se quiera, sin más que tomar un valor de x, lo suficientemente grande.

En este caso, se dice que "$f(x)$ tiende a lamda cuando x tiende a ∞", y se expresa simbólicamente por

$f(x) \longrightarrow$ lamda cuando $x \longrightarrow +\infty$, o bien $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ lamda

La curva $y = f(x)$ se aproximará ahora (por encima o por debajo) a la línea horizontal $y =$ lamda a medida que nos alejemos(hacia la derecha) del origen, veáse la curva (c) de la figura C.

d) Los valores de $f(x)$ pueden variar, oscilando sin manifestar tendencia alguna cuando x crece indefinidamente. En este caso, la función $f(x)$ carece de límite al tender x a ∞, y la curva $y = f(x)$ presentará, de un modo permanente, oscilaciones determinadas a medida que nos alejemos indefinidamente hacia la derecha del origen, veáse la curva (d) de la figura C.

Los ejemplos siguientes ilustran estas clases de límites:

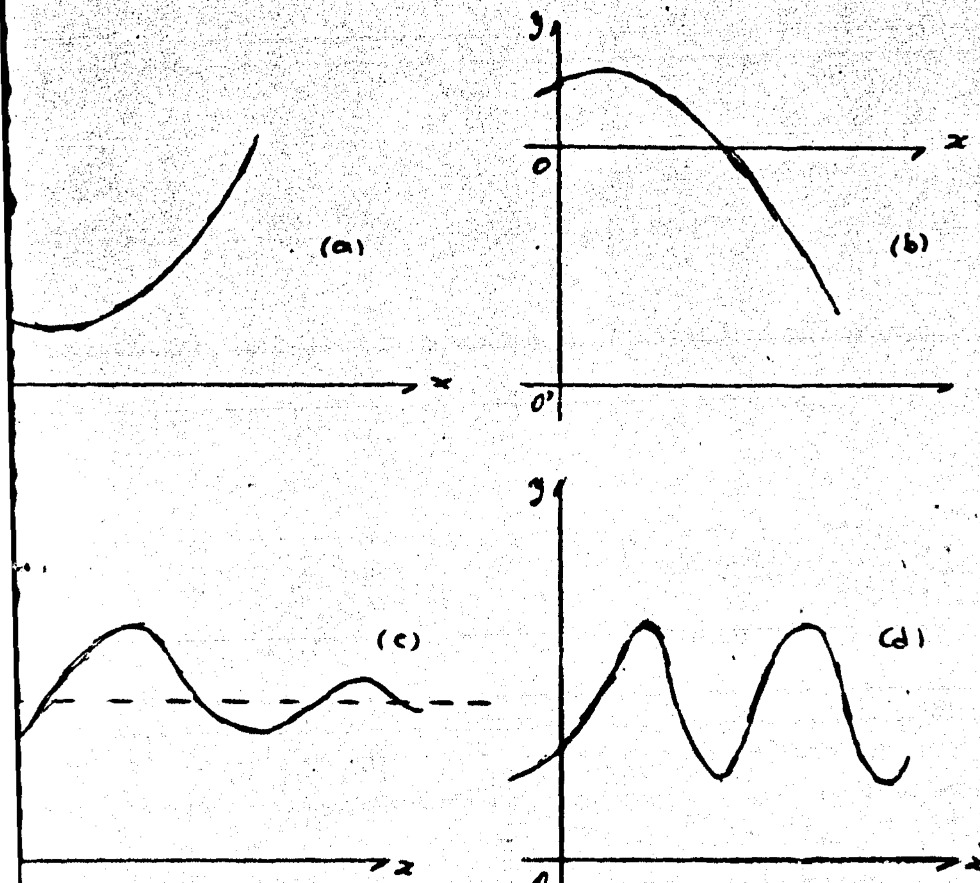
$1 - 1/x \longrightarrow 1$ cuando $x \longrightarrow +\infty$; $\dfrac{2x+1}{x-1} \longrightarrow 2$ cuando $x \longrightarrow +\infty$.

$x^2 + 3x - 2 \longrightarrow +\infty$ cuando $x \longrightarrow +\infty$; $\dfrac{1}{x^2} \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow +\infty$.

El límite de $f(x)$, al tender x a $-\infty$, se define y representa de una manera análoga. Por ejemplo:

$1 - 1/x \longrightarrow 1$ cuando $x \longrightarrow -\infty$; $3/x \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow -\infty$.

Figura C.



2.- Límite de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow a$.

La cuestión aqui planteada consiste en analizar la manera de comportarse $f(x)$ cuando la variable x toma una sucesión de valores que tiendem a un valor finito $x = a$. No es preciso, en todo caso, que él límite de la función coincida con el valor que toma para $x = a$, encuyo punto puede incluso no estar derinida.

Supongamos, primeramente, que la sucesión de valores de x tiende a $x = a$, tomando siempre valores mayores que a. La sucesión de valores correspondientes de $f(x)$ puede presentar las mismas cuatro posibilidades que antes; es decir, que puede tender a $+\infty$, a $-\infty$, a un valor finito lamda, o a carecer de límite, al tender x a a, recibiendo siempre valores superiores a a. La notación simbólica empleada en este caso es análoga a la adoptada con anterioridad, pero se utilizará la locución complementaria "cuando x tiende a a tomando valores mayores que a" y se escribirá " $x \longrightarrow a^+$" . Así por ejemplo, en el caso de que $f(x)$ tenga por límite lamda, se expresará:

$$(x) \longrightarrow \text{lamda cuando } x \longrightarrow a^+ \text{ o bien } \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = \text{lamda.}$$

Análogas observaciones pueden hacerse cuando x recibe una sucesión de valores menores que a, que tienden a a, escribiendose $x \longrightarrow a^-$, e indicándose el límite de la función por medio de la notación:

$$f(x) \longrightarrow \text{lamda, cuando } x \longrightarrow a^- \text{ o bien } \lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \text{lamda.}$$

Finalmente, si $f(x)$ tiene el mismo límite para $x \longrightarrow a^+$ que para $x \longrightarrow a^-$, lo expresaremos simplemente diciendo que $f(x)$ tiende a dicho límite cuando x tiende a a, por ejemplo,

$$f(x) \longrightarrow \text{lamda cuando } x \longrightarrow a \text{ o bien } \lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \text{lamda.}$$

lo que significa que $f(x)$ tiende a lamda cuando x tiende a a tomando valores mayores o menores que a. Este es el caso más importante en esta clase de límites. Cuando los límites son diferentes, según $x \longrightarrow a^+$ o bien $x \longrightarrow a^-$, no es posible expresarlos con una sola notación. La significación gráfica de estos límites para $x \longrightarrow a$ se da en la siguiente figura D, que presenta la curva $y = f(x)$ en las proximidades del punto $x = a$. En los casos a) y b), $f(x)$ tiene un solo límite, cuando $x \longrightarrow a$ siendo éste finito en un caso e infinito en el otro. En los casos c) y d), los límites son diferentes cuando $x \longrightarrow a^+$ y cuando $x \longrightarrow a^-$, siendo ambos finitos en el primer caso, c), e infinitos en el otro, d).

Los siguientes casos son ilustrados por los correspondientes ejemplos:

$3/x^2 \longrightarrow +\infty$ cuando $x \longrightarrow 0$; $\quad \dfrac{(1+x)^2 - 1}{x} \longrightarrow 2$ cuando $x \longrightarrow 0$;

$$3/x \begin{Bmatrix} \longrightarrow +\infty \\ \longrightarrow -\infty \end{Bmatrix} \text{ cuando } x \begin{Bmatrix} \longrightarrow 0^+ \\ \longrightarrow 0^- \end{Bmatrix} ; \quad \frac{2x+1}{x-1} \begin{Bmatrix} \longrightarrow +\infty \\ \longrightarrow -\infty \end{Bmatrix} \text{ cuando } x \begin{Bmatrix} \longrightarrow 1^+ \\ \longrightarrow 1^- \end{Bmatrix}$$

La función escalonada del ejemplo 5 de la sección 2.1, da $y \longrightarrow 7$ cuando $x \longrightarrow 3^+$ e $y \longrightarrow 6$ cuando $x \longrightarrow 3^-$.

Finalmente daremos a conocer algunas propiedades de los límites. Dadas dos funciones uniformes (x) y (x), que verifican los siguientes resultados:

1) $\varphi(x) + \psi(x) \longrightarrow$ lamda + miu cuando $x \longrightarrow \infty$.
2) $\varphi(x) - \psi(x) \longrightarrow$ lamda - miu cuando $x \longrightarrow \infty$.
3) $\varphi(x) \cdot \psi(x) \longrightarrow$ lamda por miu cuando $x \longrightarrow \infty$.
4) $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} \longrightarrow \dfrac{\text{lamda}}{\text{miu}}$ cuando $x \longrightarrow \infty$ (para miu $\neq 0$).

Todos estos resultados se deducen fácilmente de nuestra definición de límite, sin que sea necesario dar una demostración formal de los mis mos. Así por ejemplo, al acercarse indefinidamente $\varphi(x)$ al valor lamda - y $\psi(x)$ a miu, las sumas de los valores correspondientes a estas dos funcio nes se aproximaran, cada vez más, a (lamda + miu), al crecer x indefinida - mente. Por lo tanto, (lamda + miu) será el límite de $[\varphi(x) + \psi(x)]$, — cuando x tiende a ∞. Se obtienen los mismos resultados cuando x tiende a $-\infty$ o a un valor finito a. Tienen también valides, evidentemente, cuando se trata de sumas, diferencias, productos o cocientes con más de dos funcio nes.

Los ejemplos siguientes aclararán este procedimiento.

1) El valor constante 2 tiene, evidentemente, por límite a 2 — cuando $x \longrightarrow \infty$, y la función $1/x \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow \infty$. Por lo tanto, - del resultado 1), se tendrá:

$$2 + \frac{1}{x} \longrightarrow 2, \quad \text{para } x \longrightarrow \infty.$$

2) Sabemos que $\dfrac{2x + 1}{x - 1} \longrightarrow 2$ y que $1 - \dfrac{1}{x} \longrightarrow 1$, para $x \longrightarrow \infty$;

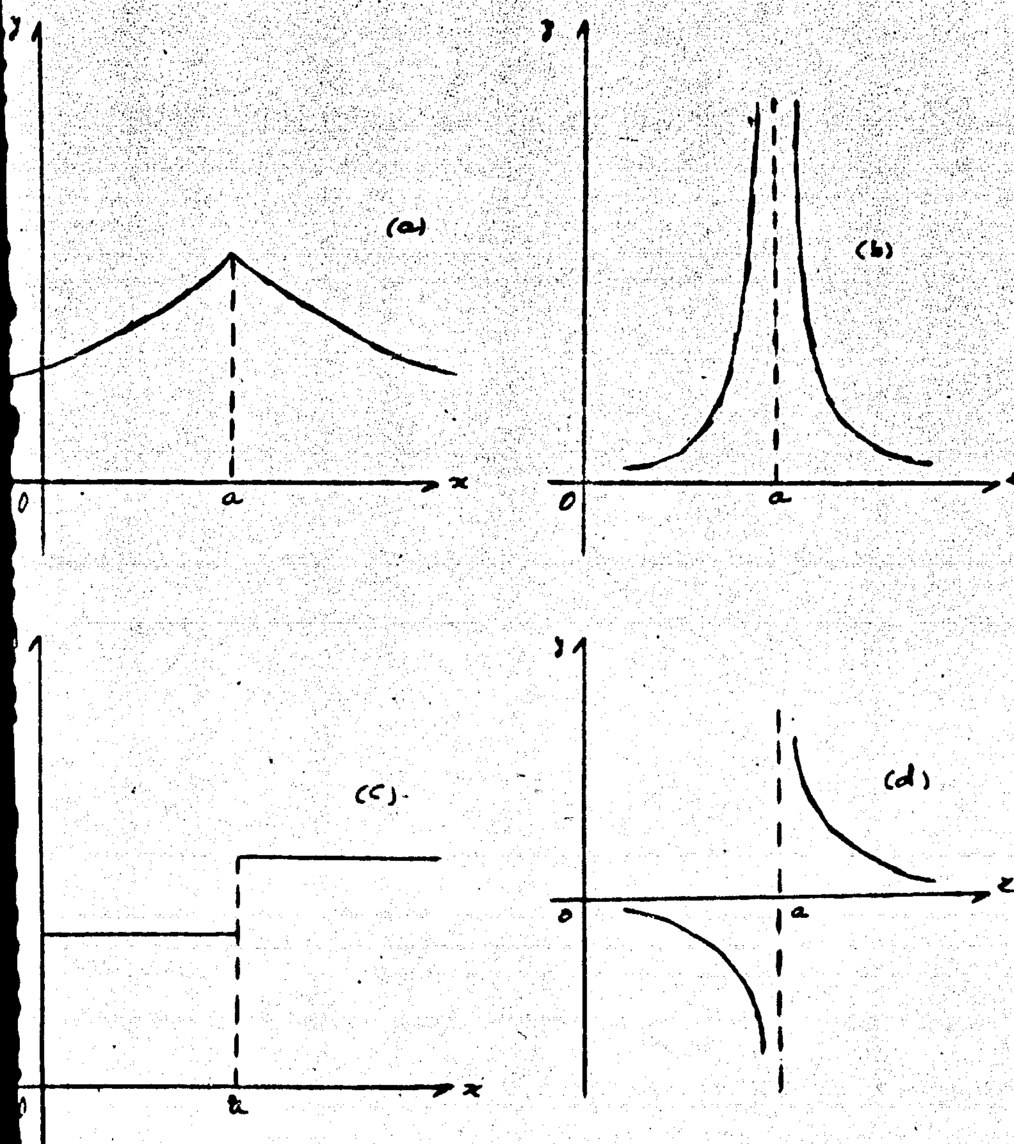
pero siendo

$$\frac{x^2 + 3x - 1}{x(x - 1)} = \frac{2x + 1}{x - 1} - \frac{x + 1}{x} = \frac{2x + 1}{x - 1} - \left(1 - \frac{1}{x}\right),$$

se tendrá, aplicando el resultado 2),

$$\frac{x^2 + 3x - 1}{x(x - 1)} \longrightarrow 1 \quad \text{cuando } x \longrightarrow \infty.$$

Figura 3.



2.3 Continuidad de Funciones .- La definición de función se basa en una correspondencia entre los valores de dos variables, de tal modo que, para cada valor asignado a una de ellas, le corresponde a la otra un conjunto definido de valores. Estas variables pueden ser continuas o discontínuas. Pero la definición de función es completamente independiente de la noción de continuidad. La sustitución de un valor particular de la variable, para obtener el correspondiente valor de la variable dependiente, no está necesariamente relacionada con la sustitución de los demás valores.

Extenderemos ahora la noción de continuidad al caso de las funciones, estableciendo la distinción entre funciones continuas y discontinuas. En principio, puede decirse, de una manera poco científica, que una función es continua cuando las variables que aparecen relacionadas en ella varían simultáneamente de un modo contínuo. Las variables consideradas aisladamente, experimentan variación continua en ambas variables, pero estas deberan estar sincronizadas para que la variación continua de la función también sea continua.

Nos limitaremos, a considerar el caso de una función uniforme de una variable continua, $y = f(x)$. La noción general de función continua se aplica aquí a la función considerada en conjunto, implicando que al variar x contínuamente, y, varía también de un modo continuo. Cuando se trata, sin embargo, de dar una definición rigurosa, es necesario definir primero la continuidad en un punto, es decir, para un valor dado de x. La continuidad en un punto es más significativa que la continuidad en general.

La primera condición para que una función sea continua en un punto $x = a$, es que $f(x)$ esté definida para dicho valor $x = a$ y para todos los próximos a él. Existen diversas posibilidades respecto al modo de variar $f(x)$ cuando $x \longrightarrow a$, y al valor $f(a)$ que la función tomaen dicho punto. En primer lugar, $f(x)$ puede presentar dos límites diferentes o carecer de todo límite, al tender x a a, por uno y otro lado de este punto. En segundo lugar, $f(x)$ puede tender a un límite finito, distinto de $f(a)$, al tender x a a por uno y otro lado. La función $f(x)$ puede, por último, tender, al valor $f(a)$ cuando x tiende a a por uno y otro lado. La función es continua en el punto $x = a$ sólo cuando se halla en este caso.

La función $y = f(x)$ vendrá representada por una curva sobre el plano Oxy, cortada, por cualquier paralela al eje Oy, en un sólo punto. Dos condiciones son necesarias para que dicha curva sea continua. Primera: que exista un punto P de la curva que corresponda al $x = a$; lo que supone que dicha curva carezca de huecos, o sea, que presente un trazo continuo. Segunda: que, al movernos a lo largo de la curva, nos aproximemos tanto como queramos al punto P a medida que x se acerca al valor $x = a$, lo mismo si lo hacemos a uno que a otro lado de este punto; lo que implica que la curva no dé un salto al pasar por P. Por lo tanto, una curva será continua en un punto $x = a$ cuando no presente huecos ni saltos en dicho punto. En la figura C, sólo la curva (a) es continua en $x = a$. Las curvas (b) y (d) son discontinuas por presentar huecos en dicho punto, siendo también discontinua la (c), al dar un salto en el punto citado.

Puede, pues, darse para la continuidad de una función en un punto la siguiente

DEFINICION: La función $y = f(x)$ es continua en $x = a$:

1o.- Si existe $f(a)$ y es finita.

2o.- Si $f(x)$ toma valores finitos para todos los valores de x próximos a $x = a$, verificándose $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Esta definición equivale, esencialmente, a decir que una función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$ cuando el límite de $f(x)$ coincide con el valor que la función toma en dicho punto, de la que se deducen necesariamente las condicienes impuestas, de que $f(x)$ tome un valor finito $f(a)$ en el punto $x = a$ y que $f(x)$ tienda a este valor cuando x se aproxima a a, por uno y otro lado de este punto. Estas condiciones se corresponden con las geométricas de que la curva $y = f(x)$ no presente salto en dicho punto.

Conviene extender esta definición al caso de la continuidad de una función en un intervalo. Se dice que una función es continua en un inter -

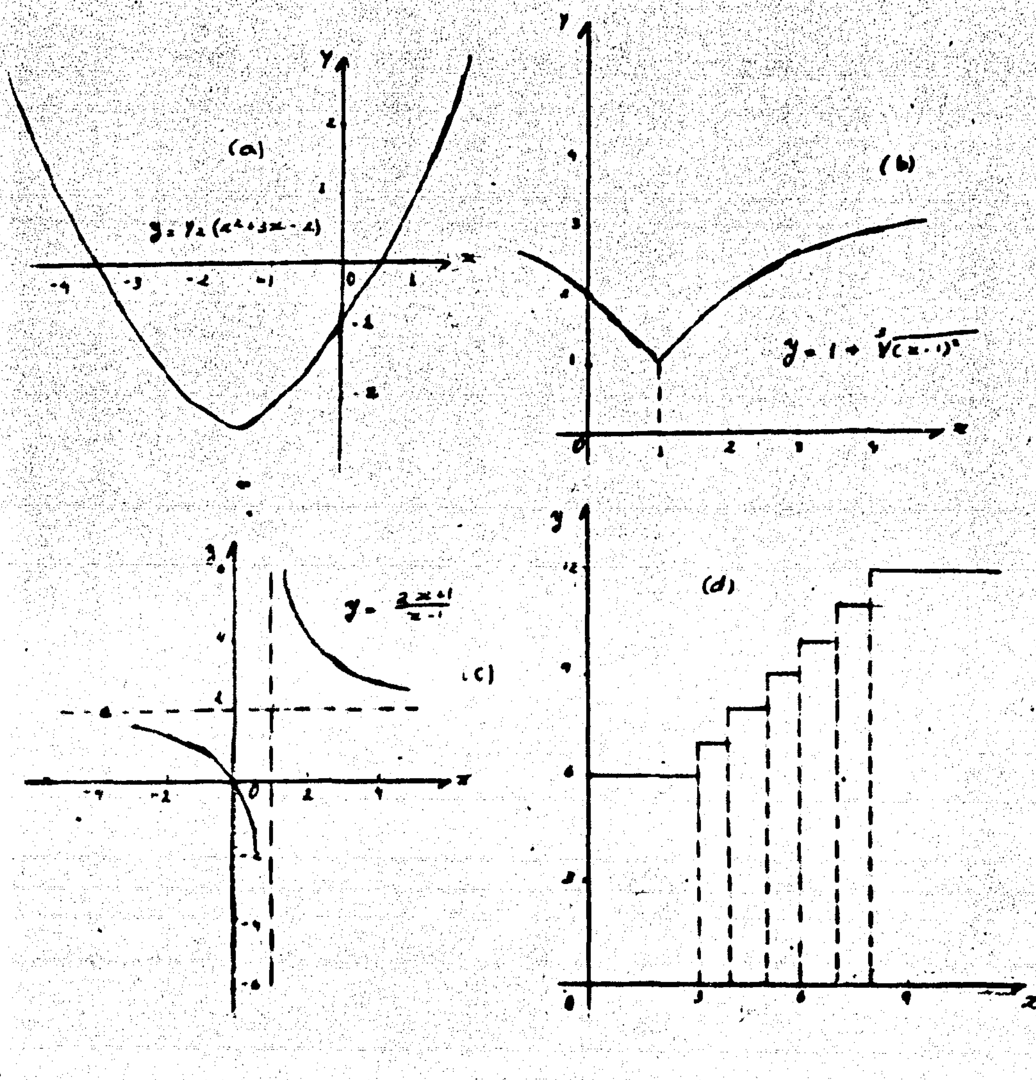
valo de valores de x cuando es continua en todos los puntos del mismo. Por otra parte, una función no es continua en cierto intervalo, si existe un punto, al menos, de discontinuidad en dicho unterválo.

Si una función es continua en un intervalo, será, según lo dicho, también continua en uno de sus puntos, y vendrá representada, por tanto, por una curva sin huecos ni saltos en dicho intervalo. Esto significa a grandes rasgos que la curva puede ser trazada sobre el papel sin levantar el lápis del mismo. Es importante, sin embargo, destacar que el hecho de que una curva sea continua no supone necesariamente que haya de ser también lisa o sin puntos angulosos. El concepto de lisura tiene, en efecto, un alcance más limitado que el de continuidad. Las curvas (a) y (b) de la figura D son continuas en el intervalo en que están definidas. La primera que representa la parábola $y = 1/2\ (x^2 + 3x - 2)$, es, además, lisa. La segunda, que corresponde a la ecuación $y = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$, es también continua, ya que puede dibujarse sin levantar el lápis del papel, pero no es lisa, puesto que presenta, para $x = 1$, un punto anguloso.

Sí una función es dicontinua en cierto intervalo, habrá en él un punto, al menos, de discontinuidad en el que una u otra de las condiciones necesarias para la continuidad no se cumpla. La curva representativa de la función presentará, al menos, un hueco o salto en dicho intervalo. El caso más importante es de dicontinuidad infinita, y surge cuando la curva carece de algún punto, es decir, cuando presenta un hueco o solución de continuidad en el intervalo en qu está definida. La función $y = f(x)$ vendrá en este caso, para cierto valor de $x = a$, infinito, es decir, que $f(x) \longrightarrow \pm \infty$, cuando $x \longrightarrow a$. La curva se aleja hacia el infinito cuando x toma (a la izquierda y a la derecha) valores próximos a a. Esta clase de discontinuidad aparece frecuentemente, aun considerando sólo las funciones algebraicas ordinarias.

La función representativa de la hipérbola equilátera con asíntotas paralelas a los ejes (es decir, la función formada por el cociente de dos expresiones lineal s en x) presenta siempre discontinuidad infinita en el punto en que la asíntota vertical de la curva corta al eje de las abscisas.

Figure 2.



La curva (c) de la figura 8, representa a una hipérbola equilátera con discontinuidad infinita en el punto $x = 1$. El obstáculo de la discontinuidad infinita se salva en el análisis matemático por medio de la noción de límite infinito.

Es muy diferente el caso en que la discontinuidad está motivada — porque la curva da un salto. La curva (d) de la figura 8. que corresponde a una función escalonada, es discontinua en seis puntos, en los cuales dicha curva da un alto. Una función discontinua cómo esta tiene, evidentemente, muy poca utilidad desde el punto de vista del análisis matemático, ya que no es posible representarla por una simple fórmula analítica de la clase de las que corrientemente se consideran de la investigación matemática. Pero son, precisamente, las funciones de esta clase particular las que tienen mayor aplicación en diversos problemas de economía.

2.4 Definición de Derivada.- Empezaremos considerando funciones particules de forma sencilla. Si en una función, por ejmplo, $y = x^3$ se aumenta el valor de x desde un valor x_1 a un valor mayor x_2, el valor correspondiente de la función aumentará desde x_1^3 a x_2^3. La variable x ha sido incrementada, pues, en la cantidad $(x_2 - x_1)$, siendo el correspondiente incremento de la función igual a $(x_2^3 - x_1^3)$. El incremento medio de la función, por incremento unidad de x, es entonces,

$$\frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 ,$$

expresión que depende de x_1 y x_2. El incremento medio de y, depende, del valor asignado a x, desde el cual partimos, y del incremento dado a esta — variable.

Consideremos ahora este incremento a partir de un definido valor x. Sea x el valor original fijo asignado a esta variable y h el incremento correspondiente. Al aumentar el valor de x desde x a $(x + h)$, la - - -

función vendrá incrementada en la cantidad $[(x + h)^2 - x^3]$ y la razón incremental será:

$$\frac{(x + h)^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2,$$

la cual depende sólo del incremento h de la variable x.

Como puede observarse, cuando el valor de h se hace cada vez más pequeño, es decir, cuando $h \longrightarrow 0$, esta razón incremental tiende al límite $3x^2$, al que llamaremos la razón incremental instantánea, o simplemente, la razón incremental de la función en el punto x. Por lo tanto, la razón incremental de la función en el punto x será, por definición,

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h} = 3x^2 .$$

La razón o cociente incremental de una función es un concepto perfectamente definido para cualquier valor valor real del incremento h de x; en tanto que la razón incremental instantánea está relacionada con el concepto abstracto del límite, es decir, es el límite al cual tiende la razón incremental cuando el incremento a x tiende a cero. Según veremos más adelante, aunque los fenómenos científicos sean expresados directamente por medio de razones incrementales infinitas, el análisis matemático encuentra más conveniente operar con el referido concepto abstracto de la razón incremental instantánea. El hecho verdaderamente significativo, desde el punto de vista matemático, no consiste en que una función sea incrementada realmente en determinada razón media, dentro de un intervalo definido de valores de x, sino que la función tienda a cambiar el valor en cierta razón, para un punto definido de dicho intervalo.

La razón incremental instantánea tiene un valor distinto para cada valor dado a x. Se ha visto que la razón incremental de x^3 es $3x^2$ para un punto cualquiera x. Así por ejemplo, en el punto x = 1, la razón incremental de x^3 es igual a 1, en el punto x vale 12, y así sucesivamente. En el primer caso, el valor de x^3 tiende a aumentar con arreglo a la razón de 3 unidades por unidad de x, y análogamente para los demás casos. La razón incremental de x^3, en el punto x, varía al variar x, viniendo siempre dada por la expresión $3x^2$. La razón incremental de una función de x es, por lo tanto, una función de x.

Como un segundo ejemplo, vemos que la función $y = 1/x$ disminuye en una cantidad $(1/x - 1/ x+h)$ al aumentar x en h desde x a $(x + h)$. La razón de decrecimiento medio de la función es, por tanto,

$$1/h \ (1/x - 1/x+h) = \frac{1}{x(x + h)}$$

La razón incremental instantánea de la función en el punto x será, pues:

$$\lim_{h \to 0} \ 1/h \ (1/x - 1/x+h) = 1/x^2$$

La razón incremental de la función $1/x$ vendrá siempre dada por la expresión $1/x^2$, pero tomará diferentes valores(es decir, la razón de decrecimiento será distinta) al aumentar x.

El proceso que acabamos de exponer se puede entender y generalizar al caso de una función uniforme cualquiera. Supongamos que , en la función $y = f(x)$, la variable independiente se incrementa en una cantidad h, pasando del valor x al valor $(x + h)$. Se puede admitir que h es susceptible de tomar valores positivos o negativos, indicando, en el primer caso, que x aumenta, y en le segundo, que x disminuye. El correspondiente incremento en el valor de la función será entonces $f(x + h) - f(x)$, pudiendo ser también éste positivo o negativo, según que haya aumentado o disminuído el valor de la función. La expresión

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

indicará, entónces, la razón incremental media en $f(x)$ por incremento unidad en x. El signo que corresponda a esta expresión es de gran importan -

cia. Si éste es positivo, entonces $f(x)$ variará en el mismo sentido que x, aumentando cuando x aumente y disminuyendo al disminuir x; si, por el contrario, es negativo, $f(x)$ variará en opuesto sentido quex, aumentando cuando x disminuya y disminuyebdo al crecer x. La cuestión más importante consiste en ver si la razón incremental media tiende a un límite definido cualquiera, al tomar h valores (positivos o negativos) cada vez menores. Si este límite existe, representará entonces, la razón incremental instantánea de $f(x)$ en el punto x, es decir, la razón con arreglo a la cual $f(x)$ tiende a aumentar o disminuir(según el signo del límite) al variar x desde un punto x cualquiera. Cuando dicho límite no existe, entonces, el valor de la función varía de una manera incierta o irregular a medida que x recibe incrementos cada vez máspequeños, no pudiéndose, en este caso, representar el cambio que experimenta la función por ninguna razón incremental instantánea definida. La cuestión completa de la existencia y del valor de la razón incremental de una función $y = f(x)$ se tranforma así en la investigación de la existencia y del valor del límite de la razón incremental media $1/h \ \ f(x+h) - f(x)$, cuando h tiende á cero, en un punto definido x.

En el primer ejemplo antes citado, la razón incremental de x^3, en el punto x, viene dada por $3x^2$ y, puesto que ésta es positiva, sabemos que x^3 aumentará al aumentar x. Por otra parte, la razón incremental de la segunda función $y = 1/x$, en el punto x, es,

$$\lim_{h \to 0} 1/h \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{h \to 0} \left[- \frac{1}{x(x+h)} \right] = - 1/x^2 .$$

Esta razón incremental es, excepto en el signo, idéntica a la obtenida anteriormente. En efecto, el signo negativo indica, simplemente, que la función es decreciente(al crecer x), en tanto que el valor numérico $1/x^2$ mide la razón efectiva de decrecimiento de la funcion en un punto cualquiera.

Sí $y = f(x)$ es una función uniforme de la variable continua x, y la razón incremental $1/h\ (f(x + h) - f(x))$ tiende a un límite finito cuando h tiende en valor absoluto acero, se dice entonces que la función tiene una derivada en el punto x, la qur viene dada por límite de dicha razón incremental. Sí tal rázón incremental carece de límite, la función carecerá de derivada tambien en dicho punto.

Para representar la derivada de una función se utilizan corrientemente diversas notaciones. Las dos siguientes son las más comunes y se emplearán de ahoracen adelante. La derivada de $y = f(x)$, en el punto x, puede ser representada lo mismo por el símbolo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

que por lanotación

$$y' = f'(x).$$

Puésto que una misma función puede expresarse por y que por $f(x)$, se adoptarán también para la derivada de cualquier función las dos notaciones equivalentes. De aquí se deduce la siguiente

Definición: La derivada de la función $y = f(x)$ con respecto a la variable x, en el punto x, es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = y' = f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

si existe este límite.

Es conveniente, en estos momentos, hacer algunas observaciones — sobre la definición de derivada:

1.- El concepto de derivada, según se deduce de su misma naturaleza, se aplica solamente a una función de una variable continua. La definición aquí dada, además, comprende sólo las funciones uniformes, prescindiéndose ahora por extender este concepto al caso de las funciones multiformes.

2.- La razón incremental utilizada en la definición de derivada no está definida cuando es efectivamente igual a cero, y, por lo tanto, es imposible considerar a la derivada como el valor de la razón incremental cuando en ésta se hace $h = 0$. La erivada constituye, en efecto, el resultado de una operación de paso al límite efectuada sobre la razón incremental de la función. En el caso de que anotemos $d/dx\, f(x)$ o bien dy/dx, la d/dx debe considerarse como un símbolo operativo aplicado a la función que figura a su derecha, y su empleo es parecido al del símbolo f en la notación funcional $f(x)$. Debe observarse, particularmente, que el símbolo dy/dx no quiere decir que la derivada sea el cociente de un valor dy por otro dx.

3.- La razón incremental se puede expresar en otra forma, que resulta, a veces, útil. Los cambios e incrementos correspondientes a las variables x, y, relacionadas por una función cualquiera, se pueden designar por Δx, Δy, respectivamente. La razón incremental vendrá entoces expresada por $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, y la derivada aparecerá como el límite de esta razón cuando $\Delta x \to 0$. Ambos incrementos $\Delta x, \Delta y$ toman valores finitos y, dado un valor particular a Δx, se hallará de la función misma el correspondiente valor de Δy.

4.- El valor de la derivada vendrá expresado por tantas unidades de y por unidad de x. Si se alteran las unidades en las cuales cada variable es medida, se deberá alterar también el valor numérico de la derivada de la función en el punto x, cualquiera. La regla para el cambio de unidades, considerando a la derivada como una cantidad obtenida a partir de x e $y = f(x)$, ha sido visto ya en la pasada sección dedicada al concepto de función, si una unidad antigua de x equivale a λ unidades nuevas, y una unidad antigua de y, es igual a μ unidades nuevas, entonces el nuevo valor de la derivada -

$\mu/2$ veces el valor antiguo. Debe considerarse que el valor de la derivada depende de las unidades de medida de x e y.

5.- Las notaciones que hemos dado de las derivadas se aplican a una función $y = f(x)$ cualquiera. Pero deben modificarse convenientemente cuando la función reciba una forma particular. Así por ejemplo, $d/dx\ (x^2)$ y $d/dx(1/x)$ designan las derivadas de las funciones particulares de x^3 y $1/x$, respectivamente. Será necesario, asimismo modificar la noción de las derivadas cuando expresan el valor de las mismas, no en un punto variable x, sino para un valor definido de x. Los siguientes ejemplo demuestran la flexibilidad que, en tales casos, presenta la notación admitida:

$$\left[\frac{d}{dx}\ f(x)\right]_{x=0} = f'(x) \quad y \left[\frac{d}{dx}\ f(x)\right]_{x=1/2} = f'(1/2),$$

cuyos símbolos designan la derivada de $f(x)$ en los puntos particulares $x = 0$ y $x = 1/2$, respectivamente.

Ejemplos del cálculo de derivadas.- Las consideraciones hechas al principio de la presente sección demuestran que:

$$\frac{d}{dx}\ (x^3) = 3x^2 \qquad y \qquad \frac{d}{dx}\ (1/x) = -1/x^2$$

Los ejemplos siguientes demuestran también el modo de hallar, según la definición dada, las derivadas de varias funciones particulares:

1) La derivada de $(2x - 1)$ en un punto cualquiera de x, se obtiene hallando el límite, cuando $h \rightarrow 0$, de la razón

$$\frac{(2(x + h) - 1\ ) - (2x - 1)}{h} = \frac{2x + 2h - 1 - 2x + 1}{h} = \frac{2h}{h} = 2.$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dx}(2x - 1) = 2.$$

La derivada, en este caso, es una constante. Un resultado semejante es válido para la derivada de una función lineal cualquiera:

$$\frac{d}{dx}(ax + b) = a.$$

2) La razón incremental de la función $(x^2 + 3x - 2)$ es,

$$1/h((x + h)^2 + 3(x + h) - 2) - (x^2 + 3x - 2) =$$

$$= 1/h\ ((x^2 + 2xh + h^2) + (3x + 3h) - 2 - (x^2 + 3x - 2)) = \frac{2hx + 3h + h^2}{h}$$

$$= 2x + 3 + h \longrightarrow 2x + 3 \text{ cuando } h \longrightarrow 0.$$

Por tanto, $$\frac{d}{dx}(x^2 + 3x - 2) = 2x + 3.$$

Del mismo modo, la derivada de la función cuadrática general es,

$$\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) = 2ax + b.$$

3) Para la función $\frac{2x + 1}{x - 1}$ la razón incremental es,

$$1/h \quad \frac{2(x + h) + 1}{(x + h) - 1} - \frac{2x + 1}{x - 1} =$$

$$= \frac{(x - 1)(2x + 2h + 1) - (2x + 1)(x + h - 1)}{h(x - 1)(x - 1 + h)} = \frac{-3h}{(x - 1)(x - 1 + h)\,h}$$

$$= \frac{-3}{(x-1)(x-1+h)} \longrightarrow -\frac{3}{(x-1)}, \text{ cuando } h \longrightarrow 0.$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = -\frac{3}{(x-1)^2}$$

2.5 La función potencial, y algunas reglas para el cálculo de derivadas.- En álgebra elemental se trata con expresiones del tipo potencial a^n, donde a es la base y n el exponente. El significado de esta expresión varía, según la naturaleza del número n. Así, por ejemplo,

$$a^2 = a \cdot a; \quad a^{1/2} = \sqrt{a}; \quad a^{-2} = 1/a^2; \quad a^{-2/3} = 1/\sqrt[3]{a^2}, \text{ etc.,}$$

y en general, la potencia a^n se interpretará como sigue:

1.- Sí n es entero y positivo, a^n expresará el resultado de multiplicar el número a, n veces, por sí mismo.

2.- Sí n es fraccionario y positivo, a^n expresará el valor positivo de una raiz determinada:

$$a^{r/q} = \sqrt[q]{a^r}.$$

3.- Sí n es negativo, entero o fraccionario, a expresara el recíproco de la potencia de exponente positivo correspondiente:

$$a^{-r/q} = 1/\sqrt[q]{a^r}.$$

4.- Sí n es nulo, a^n expresará la unidad: $a^0 = 1$.

5.- Sí n es irracional, la potencia a^n tiene un significado más complicado. Como n puede ser considerada en este caso como el límite de una sucesión indefinida de números enteros o fraccionarios n_1, n_2, ..., la potencia a^n se definirá, entonces, como el límite de a^{n_r} cuando $r \longrightarrow \infty$.

En todos lo casos, la potencia x^n obedece alas conocidas leyes de los exponentes, desarrolladas en el álgebra elemental.

Una de las funciones más sencillas es la denominada función potencial $y = x^n$, en la que el exponente n es una constante. La variable x está definida en todo el campo real, excepto en ciertos casos, en los que sólo toma valores positivos(como ocurre, por ejemplo, en $y = \sqrt{x}$). Una propiedad característica de la función potencial es que su función inversa también es del mismo tipo. Así, por ejemplo, la función potencial $y = x^2$ tiene como función inversa $x = \sqrt{y}$, que constituye una función potencial de y.

Daremos, primeramente, cierto número de casos sencillos:

1.- $d/dx\ (x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h) - x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h} = 1.$

2.- $d/dx\ (x^2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h) - x^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2hx + h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$

3.- $d/dx\ (1/x) = \lim\limits_{h \to 0} 1/h\ (\ 1/x + h - 1/x) = \lim\limits_{h \to 0} - \dfrac{1}{x(x+h)}$

$= -1/x^2$, es decir, $d/dx = -x^{-2}$.

De estos ejemplo se deduce, evidentemente, una ley uniforme. En todos ellos la derivada de x^n es de la forma nx^{n-1}. Este resultado se puede expresar de un modo muy sencillo como sigue:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \lambda x^2,$$

donde λ es una expresión en x, siendo finita aún cuando $x \longrightarrow 0$. Entonces

$$d/dx\ (x^n) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^n}{h} ((1 + h/x)^n - 1) =$$

$$= \lim_{h \to 0} x^n \left(1 + n\frac{h}{x} + \frac{h^2}{x^2} - 1 \right) = \lim_{h \to 0} x^n \left(n/x + h/x^2 \right) = x^n \; n/x = nx^{n-1}.$$

Tenemos, pues,

$$d/dx \, (x^n) = nx^{n-1},$$

para un valor fijo cualquiera de n.

Llegamos ahora a la elaboración de una serie de reglas para calcular las derivadas de las combinaciones de funciones elementales. Las tres primeras reglas siguientes se refieren, respectivamente, a sumas (o diferencias), productos y cocientes de funciones. En cada una de ellas se supone u y v son dos funciones de x conocidas, con derivadas finitas en los puntos considerados.

Regla I.- Derivada de una suma o diferencia de funciones.

La derivada de una suma (o diferencia) de dos funciones es la suma (o diferencia) de sus derivadas respectivas:

$$d/dx \; (u + v) = du/dx + dv/dx \quad \text{y} \quad d/dx(u - v) = du/dx - dv/dx.$$

Regla II.- Derivada de un producto.

La derivada de un producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda, más la segunda por la derivada de la primera:

$$d/dx \; (uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} .$$

Regla III.- Derivada de un cociente

La derivada de un cociente de dos funciones es igual al denominador por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del denominador, dividida la diferencia así obtenida por el cuadrado del denominador:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \, (du/dx) - u \, (dv/dx)}{v^2}$$

La demostración formal de estas reglas se deduce directamente de la misma definición de derivada. Así, con respecto a la primera regla, se tiene:

Si $u = \varphi(x)$ y $v = \psi(x)$ son las dos funciones dadas, resulta:

$$d/dx\ (u + v) = \lim_{h \to 0} \frac{(\varphi(x+h) + \psi(x+h)) - (\varphi(x) + \psi(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} = du/dx + dv/dx\ ,$$

y análogamente para la diferencia entre u y v. Nos hemos valido aquí del teorema de la sección 2.2, del presente capítulo, que dice que el límite de una suma o diferencia es la suma o diferencia de sus límites. Las demostraciones de las otras dos reglas, serán las siguientes,

para el producto tenemos,

$$d/dx\ (u \cdot v) = \frac{\varphi(x+h)\ \psi(x+h) - \varphi(x)\ \psi(x)}{h}\ ,$$

restando y sumando el término $\varphi(x+h)\ \psi(x)$ en el numerador del lado derecho de esta igualdad, obtendremos después de agrupar términos,

$$d/dx\ (u \cdot v) = \frac{\varphi(x+h)\ \psi(x+h) - \varphi(x+h)\ \psi(x) + \varphi(x+h)\ \psi(x) - \varphi(x)\ \psi(x)}{h},$$

$$= \varphi(x+h) \left(\frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} \right) + \psi(x) \left(\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right)$$

y por medio de los teoremas sobre límites, tenemos:

$$d/dx\ (u \cdot v) = \lim_{h \to 0} \varphi(x+h)\ .\ \lim_{h \to 0} \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h}$$
$$+ \lim_{h \to 0} \psi(x)\ .\ \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = u\ dv/dx + v\ du/dx.$$

para el cociente, tenemos que:

si d/dx (u/v) = $\frac{\varphi(x+h)}{\psi(x+h)}$, entonces, sea $F(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, ~~entonces~~, para,

$F(x+h) = \frac{\varphi(x+h)}{\psi(x+h)}$, y luego, para $F(x+h) - F(x) = \frac{\varphi(x+h)}{\psi(x+h)} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$

$$= \frac{\psi(x)\ \varphi(x+h) - \varphi(x)\ \psi(x+h)}{\psi(x+h)\ \psi(x)}$$

, y sumando y restando $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ en el numerador, la fracción se transforma en:

$$= \frac{\psi(x)\ \varphi(x+h) - \varphi(x)\ \psi(x) + \varphi(x)\ \psi(x) - \varphi(x)\ \psi(x+h)}{\psi(x+h)\ \psi(x)}$$

$$= \frac{\psi(x)\left(\varphi(x+h) - \varphi(x)\right) - \varphi(x)\left(\psi(x+h) - \psi(x)\right)}{\psi(x+h)\ \psi(x)}$$

y dividiendo entre h a ambos lados, tenemos,

$$= \frac{\psi(x)\left(\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right) - \varphi(x)\left(\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}\right)}{\psi(x+h)\ \psi(x)}$$

y al aplicar el teorema de límites, concerniente al cociente de los mismos, tenemos que:

$$= \frac{\lim_{h\to 0}\psi(x)\ .\ \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} - \lim_{h\to 0}\varphi(x)\ .\ \lim_{h\to 0}\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}}{\lim_{h\to 0}\psi(x+h)\ .\ \lim_{h\to 0}\psi(x)}$$

finalmente,

$$= \frac{\psi(x)\ \varphi'(x) - \varphi(x)\ \psi'(x)}{(\psi(x))^2} = \frac{v\ du/dx - u\ dv/dx}{v^2}$$

De las reglas I y II se puede decir son importantes consecuencias respecto al comportamiento de las constantes en la derivación. Una consetanto se puede considerar como una función de x que permanece invariable al variar x. La razón incremental de una constante deberá ser, según esto, nula, es decir, la derivada de una constante es cero. De las reglas I y II se tendrá, por lo tanto,

$$d/dx\ (u + a) = du/dx \qquad y \qquad d/dx\ (au) = a\ (du/dx),$$

siendo u una función de x cualquiera, y a una constante. De aquí se deduce que si a una función se le suma una constante cualquiera, su derivada no varía, y que si se multiplica la función por la constante, la derivada queda multiplicada por dicha constante.

Aunque las reglas anteriores se hayan deducido para el caso de dos funciones, se pueden utilizar también en aquellas combinaciones funcionales en las que figuran más de dos funciones, sin más que aplicarlas sucesivamente al calcular la derivada. Debe observarse, asimismo, que la regla para hallar la derivada de la suma y diferencia de funciones se puede generalizar al caso de una suma algebraica de funciones, cuya derivada será análogamente, la suma algebraica de sus derivadas respectivas. Así, por ejemplo,

$$d/dx\ (u + v + w) = du/dx + dv/dx + dw/dx,$$

siendo u, v y w funciones de x con derivadas finitas.

La derivada de un producto o cociente de más de dos funciones se obtiene con mayordificultad, como puede apreciarse en el siguiente ejemplo:

Sea el producto uvw, el cual puede descomponerse en (uv) por w, teniéndose entonces,

$$d/dx\ (uvw) = uv\ dw/dx + w \frac{d(uv)}{dx} = uv\ dw/dx + w \left(u\ dv/dx + v\ du/dx\right) =$$

$= vw\,(du/dx) + uw\,(dv/dx) + uv\,(dw/dx).$

De un modo análogo, se demuestra que,

$$d/dx(uv/w) = 1/w^2\left(vw\,\frac{du}{dx} + uw\,\frac{dv}{dx} - uv\,\frac{dw}{dx}\right).$$

Es posible expresar las reglas de derivación del producto y del cociente en una forma un poco diferente de las anteriores, cuando se trata de generalizarlas para más de dos funciones. Así, si dividimos los dos miembros de la expresión de la derivada de $y = uv$ por y, se tiene:

$$1/y \cdot dy/dx = 1/u \cdot du/dx + 1/v \cdot dv/dx.$$

Dividiendo análogamente, por $y = u/v$, la expresión de la derivada del cociente, resulta:

$$1/y \cdot dy/dx = 1/u \cdot du/dx - 1/v \cdot dv/dx.$$

De este modo, la derivada de $y = uvw$, obtenida anteriormente vendrá expresada por:

$1/y \cdot dy/dx = 1/u \cdot du/dx + 1/v \cdot dv/dx + 1/w \cdot dw/dx$, y la de $y = uv/w$,

$$1/y \cdot dy/dx = 1/u \cdot du/dx + 1/v\, dv/dx - 1/w \cdot dw/dx .$$

Hemos obtenido así una forma de expresión común para las derivadas del producto y del cociente de funciones, que se podrá aplicar evidentemente, cualquiera que sea el número de funciones consideradas.

Las tres reglas de derivación dadas anteriormente, no son suficientes para calcular las derivadas de todas las funciones que aparecen en el análisis matemático. Existen, en efecto, muchas funciones relativamente sencillas, cuyas derivadas no se pueden hallar por medio de las reglas -

anteriores. Así por ejemplo, al considerar la función

$$y = \sqrt{2x^2 - 3} \ ,$$

formada por la combinación de dos funciones elementales, la raíz cuadrada y la función cuadrática$(2x^2 - 3)$, nos encontramos, al pretender hallar su derivada, con que ésta no puede reducirse a una suma, diferencia, producto o cociente de derivadas, ya que la función dada es de una naturales muy — distinta, lo que hace necesario un método conveniente para calcular su derivada.

La cuestión puede resolverse por la introducción de una nueva — variable:

$$u = 2x^2 - 3.$$

En este caso, u es de la forma cuadrática, que representa una — función de x, cuya derivada es,

$$du/dx = d/dx \ (2x^2 - 3) \ = \ 4x.$$

La función original aparecerá ahora en la forma $y = \sqrt{u}$, es decir, como una función simple de la variable u, teniendo una derivada conocida con respecto a u:

$$dy/du = d/du \ (u^{1/2}) = 1/2 \ \ u^{-1/2} = 1/2\sqrt{u}$$

La función $y = \sqrt{2x^2 - 3}$, tal como ha sido dispuesta, aparece de tal modo que y es una función de u, siendo u una función de x. Ambas funciones, consideradas por separado, tienen derivadas conocidas. ¿Podremos ahora calcular la derivada de y con respecto a x? La sencilla regla dada a continuación nos dará la respuesta afirmativa.

Regla IV.- Derivada de una función de función.

Sí y es una función de u, siendo u una función de x, entonces la derivada de y con respecto a x será igual al producto de la derivada de y con — respecto a u por la derivada de u con respecto a x.

$$dy/dx = dy/du \cdot du/dx$$

La demostración formal de esta regla se obtiene como sigue:

Si $y = f(u)$, siendo $u = \psi(x)$, entonces $y = f(\psi(x))$ y, por lo tanto,

$$dy/dx = \lim_{h \to 0} \frac{f(\psi(x+h)) - f(\psi(x))}{h}$$

Haciendo $k = \psi(x+h) - \psi(x) \to 0$, cuando $h \to 0$, resulta:

$$dy/dx = \lim_{h \to 0} \frac{f(u+k) - f(u)}{k} \cdot \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(u+k) - f(u)}{k} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} = dy/du \cdot du/dx,$$

habiéndose utilizado aquí el teorema 3 de la sección 2.2 de que límite de un producto es igual al producto de sus límites.

La regla anterior es aplicable al caso en que sean varias las funciones intermedias. Así, por ejemplo, si y es una función de u, siendo u una función de v y ésta, a su vez, una función de x, se tendrá:

$$dy/dx = dy/du \cdot du/dv \cdot dv/dx ,$$

una vez llegando a este resultado aplicando sucesivamente la regla dada para la función, todo esto queda demostrado.

La utilidad práctica de esta regla depende principalmente de la introducción de una función intermedia u, que hace más fácil la obtención de la derivada. En los siguientes ejemplos se aclara la aplicación de la regla:

1) $y = \sqrt{2x^2 - 3}$.

Haciendo $y = \sqrt{u}$, siendo $u = 2x^2 - 3$, tenemos que:

$$d/dx\sqrt{2x^2 - 3} = d/du\sqrt{u} \cdot d/dx\ (2x^2 - 3) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 4x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 - 3}},$$

ya que u se introduce por comodidad de cálculo, siendo en última fase de proceso, expresar a esta variable como función de x.

2) $y = \dfrac{1}{3x + 2}$

es decir, $y = 1/u$, donde $u = 3x + 2$.

Por tanto,

$$d/dx\left(\frac{1}{3x+2}\right) = d/du(1/u) \cdot d/dx(3x + 2) = - 1/u^2 \cdot 3 = -\frac{3}{(3x+2)^2};$$

la cual ha sido ya obtenida.

3) $y = (ax + b)^n$;

haciendo $u = ax + b$, se tiene $y = u^n$, de donde,

$$d/dx\ (ax + b)^n = d/du\ (u^n) \cdot d/dx\ (ax + b) = nu^{n-1} \cdot a = na\ (ax + b)^{n-1}.$$

Cada uno de los tres ejemplos constituye un caso particular de una forma general, deducida de la regla para hallar la derivada de la función de función:

$$d/dx\ (u^n) = nu^{n-1} \cdot du/dx,$$

siendo u una función de x cualquiera. Para $n = - 1$ se tiene:

$$d/dx(1/u) = - 1/u^2 \cdot du/dx.$$

la cual no es más que el caso particular de la derivada de un cociente.

Una vez obtenida la regla de derivación de la función de función, podemos deducir la quinta y última regla de derivación.

Mediante esta regla obtendremos la derivada de la función inversa de una función dada, siendo ambas funciones uniformes.

Regla V.- Derivada de una función inversa.

La derivada de una función inversa es la inversa de la derivada de la función directa; es decir,

$$dx/dy = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} ,$$

cuando ambas funciones son uniformes.

La demostración es la siguiente: supongamos que la función uniforme $y = \varphi(x)$ tiene una función inversa uniforme $x = \psi(y)$, entonces, $\psi(\varphi(x))$ deberá ser igual a x, cualquiera que sea el valor que tome esta variable. Por tanto,

$$d/dx\ \psi(\varphi(x)) = d/dx\ (x) = 1.$$

pero, según la regla IV, se tiene:

$$d/dx\ \psi(\varphi(x)) = d/dy\ \psi(y) \cdot d/dx\ \varphi(x) = dx/dy \cdot dy/dx .$$

Luego el producto de dx/dy por dy/dx es igual a la unidad, como queríamos demostrar.

Como un ejemplo aclaratorio de esta regla, podemos tomar el caso de la derivada de $\sqrt{x}$. Siendo así $y = \sqrt{x}$, su función inversa será $x = y^2$, de donde, según la regla para calcular la derivada de la función inversa, tendremos:

$$d/dx\,(\sqrt{x}) = \frac{1}{\frac{d}{dy}(y^2)} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Este resultado coincide, por supuesto, con el obtenido de la derivada de x^n, para un valor cualquiera de n.

Con esto tenemos ya el procedimiento completo para el cálculo de todo tipo de derivadas. Las cinco reglas anteriores son suficientes para hallar las derivadas de todo tipo de funciones uniformes, por compleja que sea su expresión.

2.6 Criterio de la Segunda Derivada.- Habiendo representado el valor de la derivada de $f(x)$ en el punto $x = a$ por $f'(a)$, será fácil comprender el significado de su signo. Si $f'(a)$ es positiva, el cociente incremental de $f(x)$, en dicho punto, será también positivo, es decir, $f(x)$ crecerá cuando crezca x, a partir del punto $x = a$. El coeficiente angular de la tangente a la curva $y = f(x)$, será también positivo, y tanto la tangente como la curva estarán inclinadas hacia arriba de izquierda a derecha en el punto de abscisa a. Ocurre lo contrario si $f'(a)$ es negativa. De aquí se deduce:

1.- $f'(a) > 0$ significa que $f(x)$ es creciente al crecer x, y que la curva $y = f(x)$ asciende de izquierda a derecha en el punto $x = a$.

2.- $f'(a) < 0$ significa que $f(x)$ es decreciente al crecer x y que la curva $y = f(x)$ es decreciente de izquierda a derecha en el punto $x = a$.

El valor numérico de la derivada $f'(a)$ medirá entonces la rapidez con que la función $f(x)$ crece o decrece en dicho punto, y la inclinación o pendiente con que la curva $y = f(x)$ asciende o desciende en el punto $x = a$.

Esta interpretación de la derivada se puede extender a cierto intervalo de valores de x, indicándonos así la naturaleza de la función o de la curva correspondiente. Para ver cuándo la función crece o decrece o la curva asciende o desciende, bastará simplemente examinar el signo de la derivada de la función. En todo intervalo de x en el que $f'(x)$ sea positiva, $f(x)$ crecerá constantemente al crecer x, y la curva $y = f(x)$ ascenderá contínuamente de izquierda a derecha; y viceversa, si $f'(x)$ es negativa en el intervalo.

Un caso particular aparece ahora; aquel en que la derivada en un punto es nula. Sí $f'(a) = 0$, entonces $f(x)$ no será ni creciente ni decreciente en el punto $x = a$, y la curva $y = f(x)$ no ascenderá ni descenderá tampoco en dicho punto. El valor de la función se hace pues, momentáneamente estacionario, presentando la curva una tangente paralela al eje Ox. El valor que la función toma en tal punto se denomina valor estacionario.

La derivada segunda de $f(x)$, por ser la derivada de la primera derivada $f'(x)$, mide la variación unitaria de $f'(x)$, es decir del coeficiente angular de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto correspondiente. El signo de $f''(x)$ en un punto cualquiera $x = a$ es de gran importancia. Si $f''(a)$ es positiva, entonces $f(x)$ variará, en un entorno del punto a, en proporción creciente, y el coeficiente angular de la tangente a la curva $y = f(x)$ crecerá también en el punto de abscisa a. La tangente a la curva girará, entoces, en la dirección contraria a las agujas del reloj, siendo la curva convexa vista desde abajo. Por el contrario, si $f''(a)$ es negativa, entonces $f(x)$ variará en proporción decreciente, y la tangente a la curva girará en la misma dirección a las manecillas de un reloj, siendo la curva cóncava vista desde abajo. Estos resultados, que han sido representados en la siguiente figura F, son completamente independientes del valor de la derivada $f'(a)$, es decir, de que la tangente en el punto $x = a$ esté inclinada hacia arriba, hacia abajo o sea horizontal.

En efecto, cuando decimos que $f'(a) < 0$ y que $f''(a) > 0$, significamos que $f(x)$ es decreciente y que, en un entorno del punto $x = a$, cambia en proporción creciente, ya que la razón incremental de $f(x)$ va tomando, para entonces, valores absolutos decrecientes al crecer x, y en consecuencia, irá creciendo, por tratarse de una magnitud negativa. Por tanto:

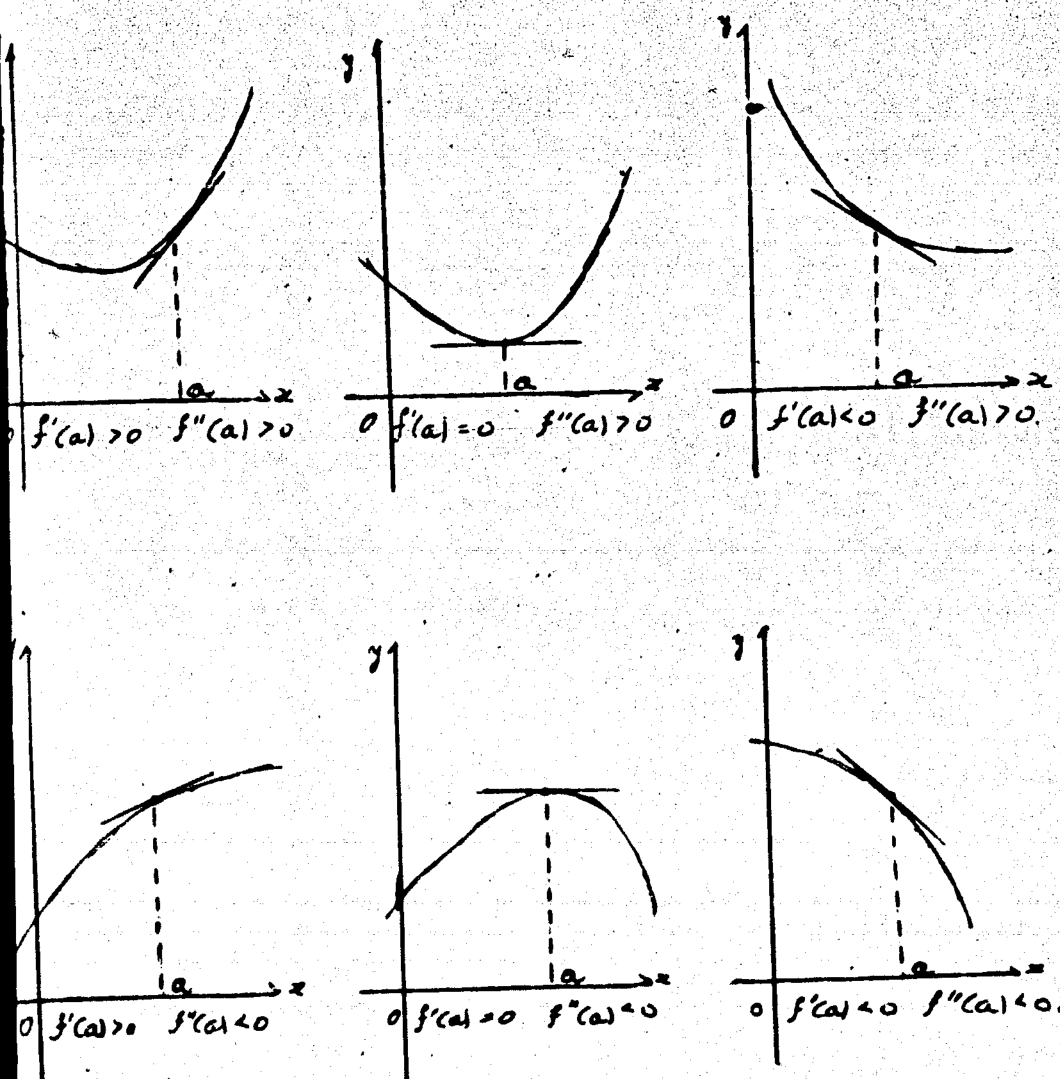
1.- Si $f''(a) > 0$ significa que la función $f(x)$ cambia, en un entorno del punto a, en una proporción creciente, y que la curva $y = f(x)$ es convexa vista desde abajo, en el punto $x = a$.

2.- Si $f''(a) < 0$ significa que la función $f(x)$ cambia, en un entorno del punto a, en proporción decreciente, y que la curva $y = f(x)$ es cóncava, vista desde abajo, en el punto $x = a$.

El valor absoluto de $f''(a)$ nos indicará entonces la rapidez con que $f'(a)$ crece o decrece en $x = a$, es decir, la aceleración con que $f(x)$ varía, y el grado de curvatura de $y = f(x)$ en dicho punto. Todas las cuestiones relacionadas con la naturaleza e intensidad de la curvatura de una línea se resuelven por medio del examen de la derivada segunda de la función correspondiente.

Se puede dar también, utilizando la segunda derivada, otro criterio para la investigación de los máximos y mínimos relativos de una función cualquiera, (los máximos y mínimos los veremos en la siguiente sección); suponiendo que la función $f(x)$ sea finita, continua y admita primera y segunda derivadas, también continuas, si $f'(a)$ es nula y $f''(a)$ negativa, entonces $f'(x)$ será decreciente, haciéndose igual a cero cuando x sea igual a a, es decir, $f'(x)$ pasará de positiva a negativa en el punto $x = a$, es decir, el valor $f(a)$, que la función toma en dicho punto, es un máximo relativo. Análogamente, cuando $f'(a)$ sea nula y $f''(a)$ positiva, la función tendrá un mínimo relative en dicho punto.

Figura F.



De lo anterior podemos deducir elsiguiente,

Criterio para investigar los máximos y mínimos relativos. 1.- Todo máximo y mínimo relativos de $f(x)$ aparecerá sólo en aquellos casos donde $f'(x) = 0$.

2.- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, $f(a)$ será un máximo relativo de la función.

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, $f(a)$ será un mínimo relativo de $f(x)$.

La primera condición es, una condición necesaria; la segunda constituye una condición suficiente, que sólo tendrá lugar cuando $f(x)$ presente un máximo o un mínimo relativo. Pero ambas condiciones no son completas, o sea que no forman una condición necesaria y suficiente, ya que queda excluído el caso en que $f''(a)$ sea nula.

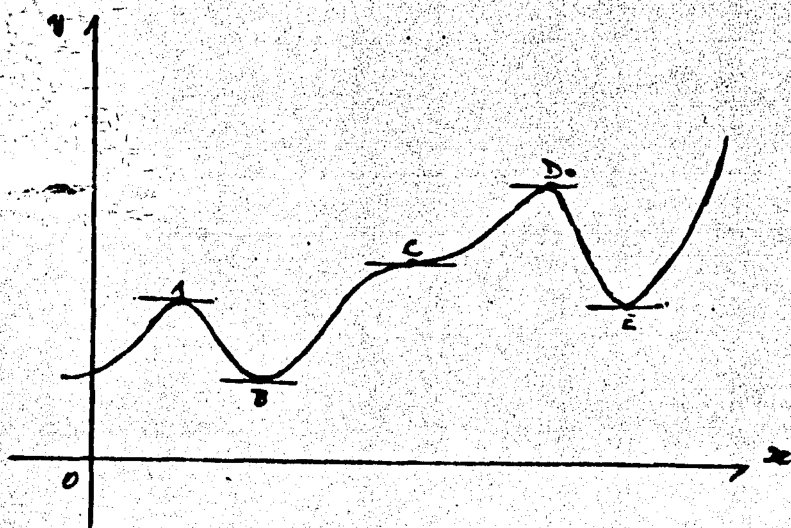
2.3 Valores máximos y mínimos relativos.- Es preciso ahora, el conocer el sentido de los conceptos de máximo y mínimo relativos de una función que, según hemos visto, estan relacionados con los valores estacionarios de la misma.

DEFINICION: La función $f(x)$ presenta un máximo o mínimo relativo en un punto, cuando el valor que la función toma en dicho punto es mayor o menor, según se trate, que todos los valores correspontientes a un entorno de dicho punto.

Los máximos y mínimos relativos de una función reciben la denominación conjunta de extemos de la función.

Admitiendo, en lo sucesivo, que tanto la función como su derivada correspondiente son finitas y contínuas en el intervalo en que están definidas, su curva representativa será entonces regular, es decir, no presentara ni discontinuidades, ni puntos angulosos. La siguiente figura 8, presenta una curva de este tipo, imaginada con el fin de que indique todos los casos posibles.

Figura G.



Es evidente, que un máximo o un mínimo relativo de $f(x)$ sólo podrá aparecer donde la curva $y = f(x)$ tenga la tangente horizontal. Sí la tangente, en un punto cualquiera, es ascendente, existirán inmediatamente a la derecha de dicho punto valores de $f(x)$ que superen al que toma en el mismo. Si por el contrario, la tangente es descente, existirán, para puntos muy próximos a la izquierda del considerado, valores de $f(x)$ mayores que el que toma en dicho punto. En ninguno de estos dos casos es posible, según la definición dada, que $f(x)$ presente un máximo relativo. Y análogamente ocurre con respecto al mínimo relativo de $f(x)$. Se tiene, por lo tanto, que una función contínua sólo podra presentar un máximo o mínimo relativo en un punto cuando la tangente a la curva, en dicho punto, sea horizontal.

De este modo, todos los máximos y mínimos relativos de una función estarán comprendidos entre los valores estacionarios de la misma.

En segundo lugar, de todos los puntos donde la tangente a la curva $y = f(x)$ es horizontal, existen algunos, tales como I y IV, en la figura G, en los que la función presenta un máximo, y otros, tales como el II y V, donde $f(x)$ presenta un mínimo. Pero puede darse también la posibilidad de que presente una tercera clase de puntos, tales como el punto de inflexión III, donde la función carece de máximo o mínimo. Dentro de los valores estacionarios de una función habrá que incluir, por lo tanto, estos otros puntos, además de los máximos y mínimos relativos.

La misma figura G nos sugiere un método práctico para distinguir los distintos tipos de valores estacionarios. En efecto, cuando la función $f(x)$ presenta un máximo relativo en un punto dado, el coeficiente angular de la tangente a la curva $y = f(x)$ es positivo (o sea que se eleva hacia la derecha) en el semientorno de la izquierda del punto considerado, y negativo (la tangente desciende hacia la derecha) en el semientorno de la derecha. Por lo tanto, la derivada $f'(x)$ pasará de positiva a negativa al pasar x por el punto dado, en el que la derivada será nula. Cuando, por el contrario, la función presenta un mínimo relativo en un punto, la derivada y el coeficiente angular de la tangente a la curva pasan de negativos a positivos en un entorno del punto. Por último, si el valor estacionario de la función no es ni máximo ni mínimo, el anularse la derivada y el coeficiente angular de la tangente a la curva no indica cambio alguno de signo; es decir ambos presentarán el mismo signo a uno y otro lado del punto.

Esta consecuencias, deducidas del simple examen de la curva de la figura G, se pueden expresar en una forma analítica precisa:

Criterio de Máximo y Mínimo relativos.- 1.- Todo máximo y mínimo relativos de una función uniforme $f(x)$ es un valor estacionario que existe cuando $f'(x)$ es nula.

2.- Si $f'(x)$ cambia de signo de positiva a negativa, en un entorno del punto $x = a$ en el que $f'(a) = 0$, entonces el valor $f(a)$ será un máximo relativo de la función.

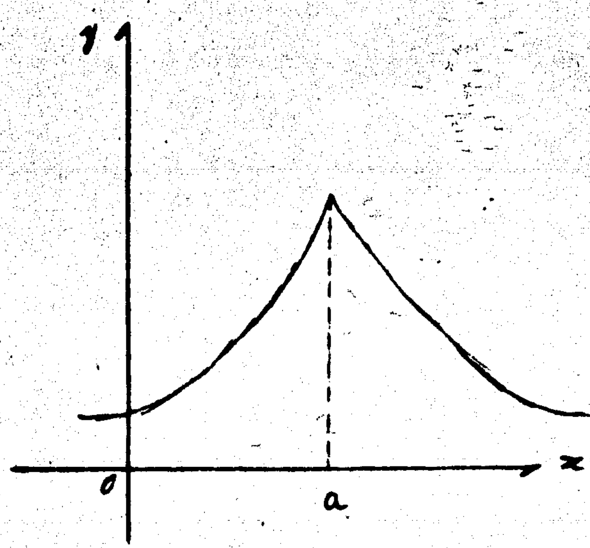
Si en las mismas condiciones, $f'(x)$ cambia de signo, pasando de negativa a positiva, el valor $f(a)$ será entonces, un mínimo relativo de la función.

Cuando, dentro de las condiciones establecidas, el signo $f'(a)$ no cambia; la función no presenta máximo ni mínimo al tomar el valor $f(a)$.

Existen, por consiguiente, dos condiciones a considerar en el problema que estudiamos. La primera es la condición necesaria para que la función presente un valor estacionario en un punto, en tanto que la segunda es una condición suficiente, en virtud de la cual se pueden distinguir los máximos y mínimos relativos de otros valores estacionarios de una función uniforme cualquiera. Ambas condiciones, conjuntamente, constituyen una condición necesaria y suficiente. Puede darse otra forma, aunque menos precisa de la condición necesaria. Si $y = f(x)$ presenta un valor estacionario, por ejemplo un máximo o mínimo relativo, en un punto, entonces y será momentáneamente constante y se tendrá para un incremento muy pequeño de x a partir de este valor que $\Delta y = 0$, aproximadamente. De aquí se deduce que al considerar una función en una posición de máximo o mínimo se le puede considerar como constante en un entorno del punto correspondiente.

Debe subrayarse que un máximo relativo de la función no significa necesariamente que éste sea el mayor de la misma. Un máximo relativo es siempre un valor mayor que todos los valores próximos a él, es decir, qur todos los valores que toma la función en un entorno del punto en que dicho máximo este definido, pero considerando puntos más alejados, es obvio que existirán valores superiores de la función. Análogamente, un mínimo relatico no necesita ser el menor valor de la función en el intervalo en que esté definida. Para toda función contínua existen sólo un máximo y un mínimo absolutos, pero puede varios máximos y mínimos relativos alternativamente. Esto es evidente en la pasada figura G. Es importante, tener presente que todo valor estacionario no constituye necesariamente un extremo y que, por lo tanto se habrá de investigar, entre los valores estacionarios, cuáles son de inflexión. Finalmente, el criterio anterior de máximo y mínimo relativos puede fallar en el caso en que la función o su derivada no sean contínuas. La figura H representa un ejemplo en que dicho criterio carece de validez por presentarse el máximo relativo en un punto anguloso de la curva.

Figura H.



Como es sabido en los problemas prácticos se trata de encontrar los máximos y mínimos relativos alcanzados por una variable (y) al variar el valor de la variable (x). Si ambas variables están relacionadas por medio de una función uniforme $y = f(x)$ procederemos del siguiente modo:

1.- Se obtendrá la derivada $f'(x)$.

2.- Se resolverá la ecuación $f'(x) = 0$, obteniéndose las raíces

$$x = a,\ x = b,\ x = c,\ \ldots.$$

3.- Se tomará sucesivamente cada una de estas raíces para ser analizada con arreglo a uno cualquiera de los siguientes procedimientos:

a) Determinación del cambio de signo experimentado por $f'(a + h)$, al pasar denegativa a positiva la h. Si $f'(a + h)$ pasa de positiva a negativa, $f(a)$ será un máximo relativo de $f(x)$. Si en cambio sucede lo contrario, — $f(a)$ será un máximo relativo de $f(x)$. Cuando no exista cambio alguno de — signo, $f(a)$ será un punto de inflexión de $f(x)$.

b) Se calcula $f''(a)$ y se determina su signo. Si $f''(a)$ es negativa, $f(a)$ será un máximo relativo de la función $f(x)$. Si $f''(a)$ es positiva, — $f(a)$ será un mínimo relativo de $f(x)$.

Los siguientes ejemplos aclararán completamente el método.

1) $\quad y = x^3 - 3x^2 + 5.$

se tiene:

$$dy/dx = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2); \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6 = 6(x - 1).$$

Los valores estacionarios de y aparecerán cuando $3x(x - 2) = 0$, — es decir, para $x = 0$ y para $x = 2$. Los valores correspondientesde y en — estos puntos son $y = 5$ e $y = 1$. Para ver si estos son máximos o mínimos — relativos, tendremos:

para $x = 0$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -6 < 0$; para $x = 2$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6 > 0$.

La función tiene, pues, un máximo relativo igual a 5 en $x = 0$ y un mínimo relativo igual a 1 en $x = 2$.

2) $$y = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

su derivada es,

$$dy/dx = -\frac{3}{(x - 1)^2},$$

que es negativa para todo valor de x. La función carece, pues, de valores estacionarios y, por lo tanto, de máximos y mínimos relativos. La curva representativa de la función es una hipérbola equilátera con asíntotas paralelas a los ejes, que evidentemente, carece de tangentes paralelas al eje Ox.

3) $$y = \frac{2 - x}{x^2 + x - 2}$$

su derivada es, $dy/dx = \dfrac{x(x - 4)}{(x^2 + x - 2)^2}$

Existen los valores estacionarios $y = 1$, para $x = 0$, $y = -1/9$ para $x = 4$. Examinando ahora el signo de la derivada en un intervalo de estos puntos, se tiene que:

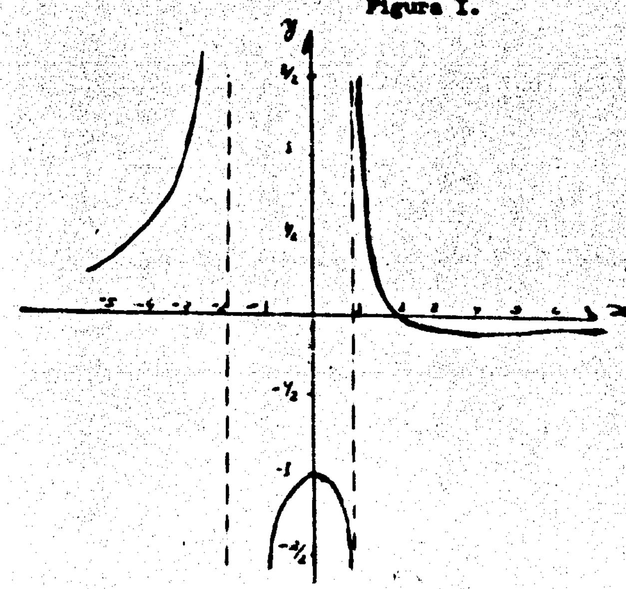
$$dy/dx = \frac{h(h - 4)}{(h^2 + h - 2)^2} \quad \text{para } x = h;$$

$$dy/dx = \frac{h(h + 4)}{(h^2 + 9h + 18)^2} \quad \text{para } x = 4 + h.$$

La primera expresión pasa de positiva a negativa cuando h toma valores muy pequeños y pasa de negativa a positiva después. La segunda expresión cambia de signo en sentido opuesto, al variar h de la misma manera. La función presenta, por tanto, un máximo relativo igual a -1 en el punto $x = 0$ y un mínimo relativo igual a $-1/9$ en $x = 4$.

Lo curioso de este caso es que máximo de la función es menor que el mínimo. Este hecho aprentemente paradójico, se debe a que la función se hace infinita en los puntos x = 1 y x = - 2. La siguiente figura I, demuestra la presencia de discontinuidades infinitas que influyen sobre el máximo y mínimo de la función.

Figura I.

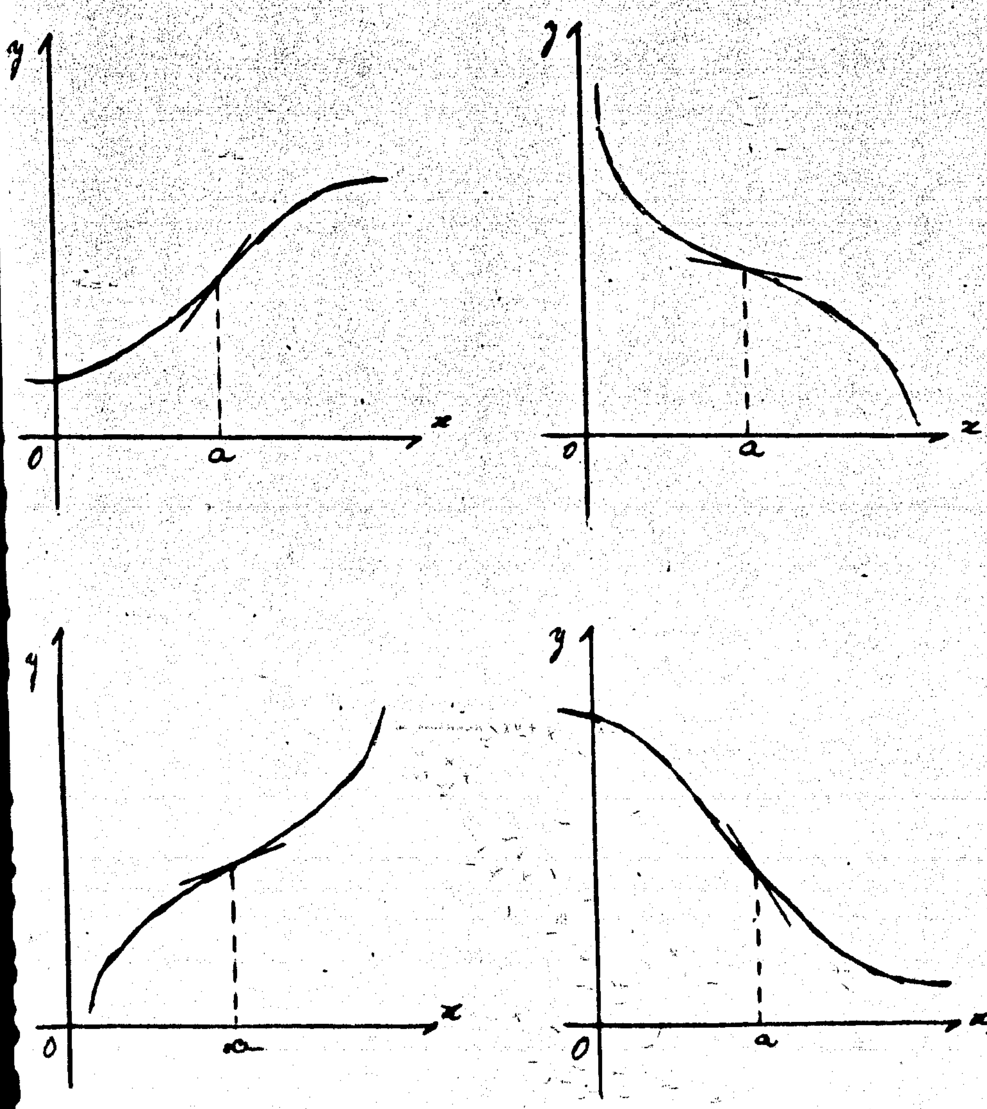


Por otra parte cuando una función uniforme y = f(x) presenta una inflexión en un punto donde la curva correspondiente cruza de un lado a otro la tangente, el mismo punto se define como un punto de inflexión. La propiedad más importante de los puntos de inflexión es que en ellos tiene lugar un cambio de curvatura, es decir, la curva se transforma de convexa a cóncava(hacia el origen), o viceversa, según se pasa, de derecha a izquierda a través del punto. Esta propiedad resulta evidente en los casos de inflexión representados en la figura J. Existen dos clases de puntos de inflexión. Los de la primera clase, indican un cambio de curvatura en la curva de convexa a cóncava (vista desde abajo), al movernos sobre la misma de izquierda a derecha. Un punto de inflexión de la segunda clase señala un cambio de curvatura en sentido contrario, es decir, de cóncava a convexa. La tangente a la curva en el punto de inflexión no está sujeta realmente a ninguna limitación; puede estar inclinada hacia arriba o hacia abajo y tener un coeficiente angular con un valor numérico cualquiera.

Además de la propiedad del cambio de curvatura, resulta evidente otra característica de los puntos de inflexión al examinar la figura J, a saber: la de que a todo punto de inflexión le corresponde un valor extremo del coefiente angular de la tangente a la curva. En efecto, en un punto de inflexión de la primera clase, el coeficiente angular de la tangente es un máximo, ya que el coeficiente angular va aumentando según nos movamos de izquierda a derecha, hasta alcanzar el punto de inflexión, y empieza a decrecer a partir de dicho punto; en un punto de inflexión de la segunda clase, se observa, del mismo modo, cómo el coeficiente angular de la tnagente alcanza un mínimo en el punto.

Suponiendo que la función uniforme $f(x)$ sea finita y continua y que admita primera y segunda derivadas, conviene expresar ahora de un modo analítico las propiedades anteriores de los puntos de inflexión de $f(x)$. La derivada $f'(x)$, por ser la medida del coeficiente angular de la tangente a la curva, deberá presentar un valor extremo en todo punto de inflexión. Será necesario, pues, que la derivada segunda $f''(x)$, por ser la derivada de la primera derivada, se anule en dicho punto. Además, el valor de $f''(x)$ deberá cambiar de signo cuando x pase a través de un punto de inflexión, determinado el sentido del cambio de clase a que pertenece el punto de inflexión. Si $f''(x)$ pasa de positiva a negativa, la derivada primera $f'(x)$ presentará un máximo en dicho punto, y el cambio de curvatura será de convexa a cóncava (vista desde abajo), es decir, el punto de inflexión pertenecerá a la primera clase. Un cambio inverso del signo de $f''(x)$ indicará que el punto de inflexión es de la segunda clase. De aquí deduciremos el siguiente

Figure J.



Criterio para los puntos de inflexión. 1.- Las inflexiones de la función $f(x)$ sólo pueden aparecer en aquellos puntos donde $f''(x) = 0$.

2.- Si $f''(a) = 0$ y $f''(x)$ cambia de signo al pasar x por el punto a, entonces $f(a)$ será una inflexión de la función $f(x)$. El sentido en que tenga lugar el cambio de signo de $f''(x)$ indicará a qué calse pertenece el punto de inflexión considerado.

La primera es una condición necesaria de los puntos de inflexión; la segunda es una suficiente, y conjuntamente, constituyen un criterio completo, es decir, una condición "necesaria y suficiente".

Si se admite que la función tiene tercera derivada contínua, se podrá dar entonces dicho criterio de una forma que incluya a la tercera derivada. Cuando $f'''(a) = 0$, entonces $f'(x)$ presentará un máximo en $x = a$, y se tendrá, por lo tanto, un punto de inflexión de la primera clase. Análogamente, si $f'''(a)$ es positiva en un punto a, en el que se verifica $f''(a) = 0$, tendremos un punto de inflexión de la segunda clase. De aquí se deduce que, si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0$, existirá un punto de inflexión en $x = a$, y el signo de la tercera derivada (no nula) indicará a qué clase pertenece el punto de inflexión. El criterio, expresado en esta forma alternativa, no es completo, puesto que queda excluído el caso en que la tercera derivada sea nula.

Todo punto de inflexión, según hemos observado, es completamente independiente del valor que tome la primera derivada de la función en dicho punto. Sin embargo, puede darse el caso de que la derivada primera se anule en el punto de inflexión supuesto, y entonces el valor de la función podrá ser, simultáneamente, un valor estacionario y un valor de inflexión. El segundo criterio de los valores estacionarios, puede ahora extenderse un poco añadiendo la siguiente condición:

Si $f'(a) = f''(a)$ y $f'''(a) \neq 0$, $f(a)$ será entonces un valor estacionario y de inflexión de la función $f(x)$.

Este criterio es aún incompleto, ya que no tiene presente los casos en que se anula la tercera derivada.

Para todos aquellos casos en que la tercera derivada de la función $f'''(x)$ no se anule en el punto $x = a$, se podrán señalar los valores estacionarios y de inflexión de $f(x)$ por medio del siguiente esquema:

Valor estacionario		Valor de inflexión
Valor extremo	Valor estacionario y de inflexión	Valor de inflexión no estacionario
$f'(a) = 0 \quad f''(a) \neq 0$	$f'(a) = f''(a) = 0$	$f'(a) \neq 0 \quad f''(a) = 0$

Para ilustrar el método de localización de puntos de inflexión en los casos de funciones particulares daremos los dos ejemplos siguientes:

1) $$y = x^3 - 3x^2 + 5.$$

Sus derivadas sucesivas son:
$dy/dx = 3x(x-2)$; $d^2y/dx^2 = 6(x-1)$; $d^3y/dx^3 = 6$.

Existe, en este caso, un solo valor de inflexión de la función, en el punto $x = 1$, en el que $y = 3$. La tercera derivada es positiva y la derivada segunda pasa de negativa a positiva en dicho punto de inflexión. Este pertenece, a la segunda clase, cambiando la curvatura de cóncava a convexa y alcanzando el coeficiente angular de la tangente (igual a -3) un mínimo relativo. En la siguiente figura K, se indican el punto de inflexión P y el máximo y mínimo, A, y B, de la curva representativa de la función.

2) $$y = x^4 - 4x^3 + 16x.$$

En este caso,

$$dy/dx = 4(x - 2)^2(x + 1); \quad d^2y/dx^2 = 12x(x - 2); \quad d^3y/dx^3 = 24(x - 1).$$

Aparecen aquí dos puntos de inflexión: $y = 0$, para $x = 0$, e $y = 16$ para $x = 2$. En el primero, la tercera derivada es negativa; el punto de inflexión pertenece a la primera clase, cambiando la curvatura de convexa a cóncava y el coeficiente angular de la tangente (igual a 16) es un máximo relativo. En el segundo, la tercera derivada es positiva; el punto de inflexión es de la segunda clase, cambiando la curvatura de cóncava a convexa, y teniéndose, además, que la primera derivada es también nula en dicho punto. El punto hallado es, por lo tanto, estacionario y de inflexión; el coeficiente angular de la tangente es nulo en este punto y constituye un mínimo relativo. La siguiente figura L, muestra la gráfica de la curva correspondiente de esta función.

Figura K.

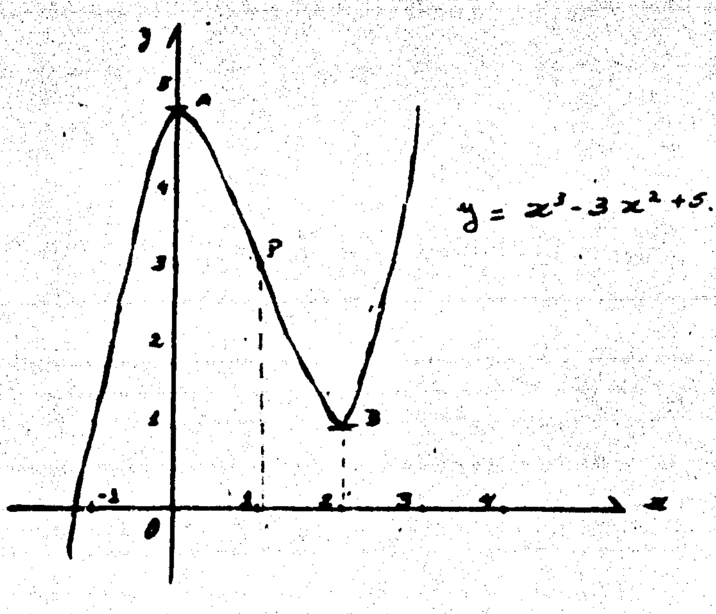
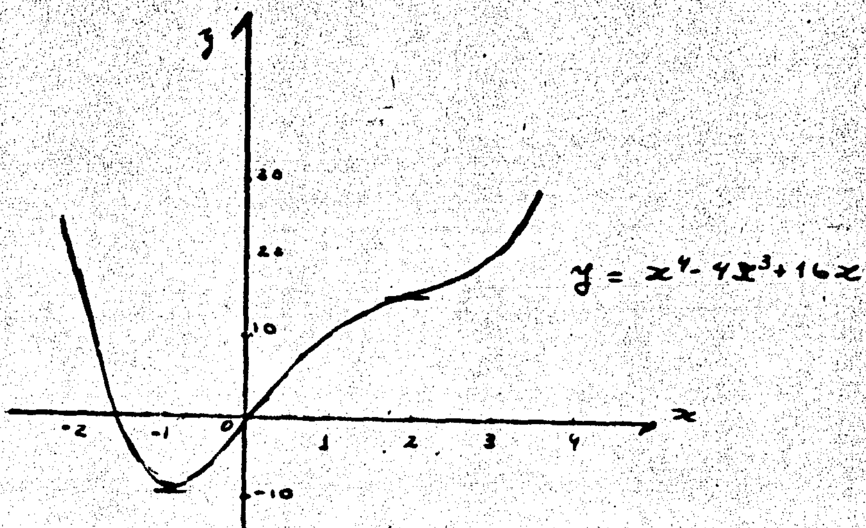


Figura 1.



En el análisis efectuado anteriormente hemos tenido ocación de establecer las debidas distinciones entre condicio es necesarias, condiciones suficientes y condiciones necesarias y suficientes. Las siguientes observaciones tienen por objeto aclarar, de una manera más completa, la naturaleza de estas distinciones y destacar su importancia.

Para empezar con un sencillo ejemplo, podemos examinar las condiciones bajo las cuales un cuadrilátero es un rectángulo. En primer lugar, si el polígono es un rectángulo, uno de sus ángulos tendrá que ser recto, siendo ésta una condición necesaria. Aunque todos los rectángulos tienen un ángulo recto, existen, sin embargo, otras figuras geométricas con la misma propiedad. Si uno de los ángulos del polígonoes, sin embargo, recto y todos sus lados son iguales, la figura deberá ser entonces un rectángulo, teniéndose así una condición suficiente. Todas las figuras geométricas que tengan la expresada propiedad son rectángulos, pero existen algunos rectángulos(es decif, los que no son cuadrados) que no manifiestan dicha propiedad. La última condición no es, pues, completa; esto es, no constituye —

una condición necesaria y suficiente. Por último, si el polígono es un rectángulo, entonces uno de sus ángulos será recto y los lados opuestos iguales. Recíprocamente, si una figura geométrica tiene un ángulo recto y los lados opuestos iguales, ésta será entonces un rectángulo. Tenemos, en este caso, una condición necesaria y suficiente; es decir, la condición es completa, ya que incluye a todos los rectángulos y nada más que a los rectángulos.

En general una condición necesaria para que se verifique cierta propiedad ha de ser tal que, si la propiedad se presenta, la condición queda entonces satisfecha. La condición es satisfecha por todas las cosas que manifiesten dicha propiedad, pero puede también ser satisfecha por otra cosa que no la tenga. Una condición es suficiente si, al verificarse ésta la propiedad tiene lugar. La condición no es satisfecha, en este caso, por aquellas cosas que carezcan de la propiedad, pero puede también ocurrir que algunas de las cosas que poseen dicha propiedad no la satisfagan tampoco. Una condición es necesaria y suficiente cuando se dan en ella las dos formas descritas, es decir: si la cosa posee la propiedad, satisface la condición, y si la condición es satisfecha, tendrá lugar la propiedad.

Un caso importante, relacionado con la distinción establecida, tiene lugar al estudiar las condiciones de los máximos y mínimos relativos de una función continua $f(x)$, que admita derivada finita y continua. Según dijimos, una condición necesaria de máximo relativo, en un punto $x = a$, es que $f'(a) = 0$. Esta condición es satisfecha por todos los valores de x en que $f(x)$ sea un máximo, pero también en otros caso, por ejemplo cuando aparecen mínimos relativos o puntos de inflexión, también se cumple. Una condición suficiente de máximo relativo es que $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$. Siempre que esta condición es satisfecha, $f(x)$ presenta un máximo, pero puede tener también otros máximos, aun cuando la condición no sea satisfecha. Una condición necesaria y suficiente de máximo relativo es que $f'(a) = 0$ y $f'(x)$ cambie de positiva a negativa en un entorno del punto $x = a$.

2.8 Derivadas Parciales.- En una función de dos variables $z = f(x, y)$, las variables x e y pueden variar de una manera completamente independiente una de otra. En particular, se puede atribuir a una de las variables un valor fijo y hacer que varíe únicamente la otra. En este caso, la función anterior queda reducida a una función de una sola variable. De este modo se podrán obtener dos funciones de una sola variable, a saber: z como función de x, siendo y constante, y z como función de y siendo x constante. La derivada en un punto de cada una de estas funciones se podrá definir y calcular exactamente como en el caso de una sola variable, aplicando la técnica yaconocida. Las derivadas así obtenidas se denominan derivadas parciales de la función $z = f(x, y)$, y el se les llama parciales porque sólo están definidas para variaciones muy particulares de las variables independientes. Una derivada parcial resulta cuando x varía, manteniéndose y constante, y la otra, cuando y varía y x permanece constante.

Si la función $z = f(x, y)$ es uniforme, su derivada parcial respecto a x en el punto (x, y) es el límite de la razón,

$$\frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

cuando el incremento arbitrario h tiende a cero, y la derivada parcial así obtenida se designa con la notación $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ o bien $z'_x = f'_x(x, y)$.

Las notaciones son análogas a las de las derivadas ordinarias; pero, para indicar que tenemos la derivada parcial respecto a x (es decir, que la otra variable se mantiene fija), usamos el símbolo "∂" en lugar de "d" utilizado para las derivadas ordinarias, o colocamos el subíndice que sea necesario, según el caso. De aquí resulta la siguiente

DEFINICION: La derivada parcial de $z = f(x, y)$ respecto a x en el punto (x, y) es:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = z'_x = f'_x (x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

y la derivada parcial respecto a y en el mismo punto es

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = z'_y = f'_y(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}$$

Es conveniente a veces utilizar notaciones ligeramente distintas. Así, por ejemplo, se pueden utilizar las notaciones $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en lugar de las $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

El significado de las derivadas parciales aparece de manera más clara cuando se interpretan geométicamente. En la figura M, P es un punto de la superficie $z = f(x, y)$ definido por los valores x e y de las variables independientes. Se pueden trazar por P dos secciones verticales de la superficie, una perpendicular al eje Oy y la otra al Ox. La primera es la curva de la superficie que pasa por P en la dirección O.E. e indica la variación de z al variar x. En esta sección la variable y conserva el valor constante inicial en el punto P. La tangente PT_x a la sección en P tiene como coeficiente angular la derivada de z, considerada como función de x, es decir, la derivada parcial en el punto (x, y). Por lo tanto, $\partial z/\partial x$ debe ser considerada como el coeficiente angular de la sección de la superfice en el P y en la dirección O.E.

Análogamente, el valor de $\partial z/\partial y$ en (x, y) mide la pendiente de PT_y, es decir, de la tangente en P a la sección vertical de la superficie perpendicular al eje Ox, esto es, el coeficiente angular S.N. de la superficie en el punto P. Por consiguiente:

Las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ miden los coeficientes angulares o pendientes de las tangentes a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto P, definido por las coordenadas (x, y), trazadas en las dos direcciones ortogonales correspondientes a los planos perpendiculares a los ejes

Oy y Ox, respectivamente.

Debe observarse que no hemos obtenido aún la medida del coeficien te angular de la superficie en cualquier otra dirección.

El valor de $\partial z/\partial x$ en el punto (x, y) depende, no sólo del valor de x desde el cual partimos al tomar el límite que define la derivada parcial, sino también el valor de y que permanece constante durante el proceso de paso al límite. La derivada parcial, que mide la pendiente de la tangente a la superficie $z = f(x, y)$ por el punto P y en la dirección O.X., varía en magnitud cuando dicho punto se mueve de cualquier modo, es decir, cuando una o ambas variables x e y varían.

La definición de las derivadas parciales no implica esencialmente nuevos conceptos, y pueden, por tanto, clacularse de un modo parecido al de las derivadas ordinarias. La variable respecto a la cual no se deriva, deberá por supuesto, ser considerada como una constante en el proceso de derivación. Las reglas para calcular las derivadas parciales de las funciones compuestas son, enparticular, análogas a las que se aplican en el caso de las derivadas ordinarias. La forma modificada de la regla para calcular la derivada de una función de función merece, sin embargo una observación aparte. Puede expresarse del modo siguiente:

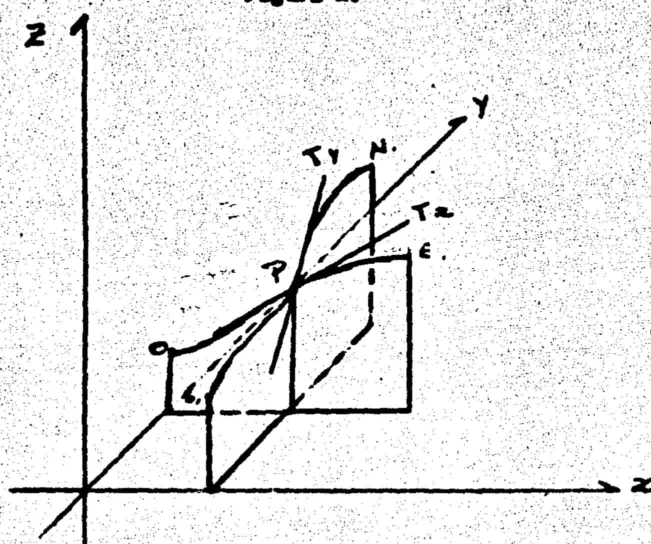
Si z es una función uniforme de u, siendo u una función uniforme de x e y, entonces z es función de x e y por intermedio de u, siendo sus derivadas parciales respectivas,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \qquad y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

En particular, si u es una función uniforme de x e y, se tiene,

$$\frac{\partial}{\partial x} u^n = nu^{n-1} \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \frac{\partial}{\partial x} e^u = e^u \frac{\partial u}{\partial x} \quad y \quad \frac{\partial}{\partial x} lu = 1/u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} .$$

Figura H.



La técnica práctica para la derivación parcial se aclarará por — medio de los siguientes ejemplos:

1) $z = f(2x - 3y + 1)$

$$\frac{\partial}{\partial x}(2x - 3y + 1) = 2 \,; \quad \frac{\partial}{\partial y}(2x - 3y + 1) = -3.$$

2) $z = f(ax + by + c)$

$$\frac{\partial}{\partial x}(ax + by + c) = a \,; \quad \frac{\partial}{\partial y}(ax + by + c) = b;$$

3) $z = \dfrac{x^2}{x - y + 1}$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x^2}{x - y + 1} =$$

$$\frac{1}{(x - y + 1)^2} \quad (x - y + 1) \frac{\partial}{\partial x} (x^2) - x^2 \frac{\partial}{\partial x} (x - y + 1) =$$

$$= \frac{2x(x - y + 1) - x^2}{(x - y + 1)^2} = \frac{x(x - 2y + 2)}{(x - y + 1)^2} \, ;$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2}{(x - y + 1)} \right) = x^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x - y + 1} \right) =$$

$$= - \frac{x^2}{(x - y + 1)^2} \; \frac{\partial}{\partial y} (x - y + 1) = \frac{x^2}{(x - y + 1)^2}$$

4). $z = f(x^2 + y^2)^2$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^2 = 4x(x^2 + y^2); \quad \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^2 = 4y(x^2 + y^2).$$

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{x^2 + y^2} = 2xe^{x^2 + y^2} \, ; \quad \frac{\partial}{\partial y} e^{x^2 + y^2} = 2ye^{x^2 + y^2},,$$

siendo, claro $z = f(e^{x^2 + y^2})$.

La definición de derivada parcial se generaliza fácilmente a los casos de funciones de más de dos variables. Si $u = f(x, y, z)$ es una — función uniforme de tres variables, se podrá entonces obtener una función — de una variable siempre que se den valores fijos a las dos restantes. — — Esto puede lograrse de tres formas distintas, a saber: manteniendo y, y z fijas, teniéndose entonces a u como función de x solamente; tomando a u como función de y (z y x como constantes), y considerándola como una función de z, dando a x e y valores fijos. Se podrán definir por lo tanto, tres — derivadas parciales $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ y $\partial u/\partial z$ de la función en cual — — quier punto (x, y, z), siendo por ejemplo,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

Entonces se podrán obtener de cada una de estas derivadas parciales de primer orden, tres de segundo, con lo que se tendrá un total de nueve derivadas de segundo orden de la misma función. El orden de derivación es indiferente, para todas las funciones contínuas ordinarias; y en este — caso, por lo tanto, sólo tres de las seis derivadas parciales cruzadas de — segundo orden serán diferentes. De aquí resultan sólo tres derivadas parciales directas ($\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial^2 u/\partial y^2$, $\partial^2 u/\partial z^2$) y tres cruzadas ($\partial^2 u/\partial x\partial y$, $\partial^2 u/\partial z\partial x$, $\partial^2 u/\partial y\partial z$). Es evidente que las otras notaciones de las derivadas parciales pueden también aplicarse a este caso de tres variables. — — Podremos por último, obtener en caso necesario, derivadas parciales de orden superior al segundo sin más que aplicar de nuevo el procedimiento de — derivación.

En el caso general de una función uniforme de n variables $y =$ $= f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ existen n derivadas de primer orden,

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} , \frac{\partial y}{\partial x_2} , \ldots\ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}$$

Cada una de ellas corresponde a la variación que experimenta y al variar una de las variables independientes, permaneciendo constantes las — (n - 1) restantes. Existen entonces n^2 derivadas parciales de segundo orden, pero este número se reduce, en el caso de funciones contínuas ordinarias. En efecto, existen eneste caso, n derivadas parciales directas,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}, \ldots\ldots, \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2};$$

y 1/2 n(n - 1) derivadas parciales cruzadas,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_3}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_4}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_3}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_4}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_5}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_n}, \quad \text{etc.},$$

La interpretación análitica de las derivadas parciales se generaliza inmediatamente. Las derivadas parciales de primer orden, calculadas en un punto dado, miden la variación unitaria de la función cuando una de - las variables crece desde un valor dado, permaneciendo constantes las otras variables. Así, si $\partial u/\partial x$ es positiva en el punto (a, b, c), la función u = f(x, y, z) crecerá al crecer x desde el valor dado a, tomando a y, y z respectivamente con los valores fijos b y c. No es posible, por supuesto, dar una interpretación geométrica precisa de las derivadas parciales cuando existen más de dos variables independientes.

" CAPITULO III ".

3) APLICACION DEL CALCULO DIFERENCIAL A PROBLEMAS TIPICOS DEL ANALISIS ECONOMICO.

3.1 Una observación al respecto.- Según hemos visto, en el Análisis Matemático, existen ciertas relaciona entre las variables que describen el comportamiento de una función cualquiera; ahora este caso lo veremos para los problemas de carácter económico, como por ejemplo la oferta y el precio, se pueden expresar por medio de una función y su curva correspondiente. Deberemos considerar la derivada de una función y la pendiente de la tangente a una curva y entonces, aclarar su significado económico.

Es frecuente en economía explicar la variación de una magnitud Y con respecto a otra magnitud X utilizando dos tipos de conceptos, a saber: el concepto de marginal y el concepto medio. El primero se refiere a la variación o cambios pequeños, de Y en X, a partir de un valor dado. El costo marginal, significará entonces el cambio que experimenta el costo, cuando en cierto nivel de la producción, se aumenta ésta en una unidad muy pequeña. Es evidente que el concepto marginal sólo posee un sentido preciso cuando se considera como un límite, al tender el incremento de X a cero; es decir, debe interpretarse como la derivada de la función que relaciona a X con Y. El segundo expresa la relación por cociente entre la variación de Y en un intervalo completo de valores de X, y la amplitud de este intervalo es, corrientemente, desde cero hasta un determinado valor elegido. Así, podemos decir que el costo medio expresa la relación por cociente entre el costo total de una determinada producción y esta producción.

Se pueden citar algunos ejemplos tomados de la realidad para ilustrar los conceptos medio y marginal. Según veremos la demanda de un bien cualquiera se puede expresar, bajo determinadas condiciones, por la relación $p = P(x)$, expresando el precio como una función continua y decreciente de la demanda. Pero el precio p puede considerarse como el ingreso medio obtenido con la demanda x, es decir, como el ingreso total dividido por la cantidad demandada o producida. La función y la curva de la demanda, son por lo tanto equivalentes a la función y curva del ingreso medio. Como el ingreso total $R = xP(x)$ es también una función de la demanda, se podrá deducir completamente de la curva del ingreso total, el ingreso medio como la pendiente de la recta OP que une el origen de coordenadas O, con el correspondiente punto P de la curva.

Si se aumenta la cantidad demandada o producida, desde determinado nivel x, en un pequeño incremento Δx; se nota un incremento correspondiente del ingreso total que será ΔR; según el signo que tenga ΔR, el ingreso total experimentará un aumento o una disminución. El aumento de ingreso producido por unidad de producción añadida será entonces la razón de ΔR a Δx, es decir, el ingreso medio correspondiente a un cambio en la producción desde x a $x + \Delta x$. A medida que el incremento de la producción se hace cada vez más pequeño, se tiene la razón incremental instantánea del ingreso en el margen de la producción x, como el límite de $\frac{\Delta R}{\Delta x}$, cuando $x \longrightarrow 0$. Este se llama el ingreso marginal de la producción x, estando medido por la derivada de R como función de x:

$$\text{Ingreso marginal} = \frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}\left(xP(x)\right).$$

El ingreso marginal es, por lo tanto, un concepto abstracto que sólo tiene sentido matemático cuando el ingreso y la producción varían de una manera continua; pero puede siempre considerarse como un valor aproximado del incremento de la misma producción. Gráficamente el ingreso marginal que corresponde a una producción x, viene dado por el coeficiente angular o pendiente de la tangente a la curva del ingreso total en el punto de abscisa x.

El ingreso marginal es una función de la producción x, ya que su valor depende siempre del margen particular de producción considerado. - Se puede, pues trazar una curva del ingreso marginal representando la va - riación que el ingreso marginal experimenta al crecer la producción. Del mismo modo que en los casos de las curvas del ingreso total y medio, las - cantidades se miden en el eje horizontal. Puesto que el ingreso marginal es la pendiente de la tangente a la curva del ingreso total, la forma de la curva de aquél ingreso puede deducirse fácilmente de la del ingreso total.

Con objeto de aclarar este punto, se pueden tomar dos tipos de - leyes de la demanda. De una ley de la demanda lineal $p = a - bx$, se tiene:

$$R = ax - bx^2 \qquad y \qquad \frac{dR}{dx} = a - 2bx.$$

La curva del ingreso total es, en este caso, una parábola de eje vertical dirigida hacía abajo. Las curvas del ingreso medio y marginal — son rectas inclinadas hacia abajo, siendo la tangente, referida al eje x, - de la última el duplo de la primera. La figura N, presenta las tres cur - vas citadas en el caso particualr en que la demanda del azúcar viene expresada por $p = 15 - 1/5x$. Resulta conveniente aquí, como en todos los demás casos, trazar sobre el mismo gráfico la curva del ingreso medio, y del in-- greso marginal, refiriéndolas a los mismos ejes y escalas de medida. Como puede observarse, la curva del ingreso marginal corta al eje x, en el mismo nivel de producción en que la curva del ingreso total alcanza el máximo; es ésta una propiedad general que se deriva del hecho de que en este punto de la producción la tangente a la curva del ingreso total es horizontal, siendo por lo tanto, nula su pendiente.

Es necesario hacer un paréntesis aquí para considerar la hipótesis que relaciona al precio y a la demanda de manera inversa, es decir, que un - mercado cualquiera, amayor precio, corresponderá menor demanda, y viceversa, para un bien dado. Existen algunos casos en los cuales esta hipótesis no se verifica, pero en realidad son escasos.

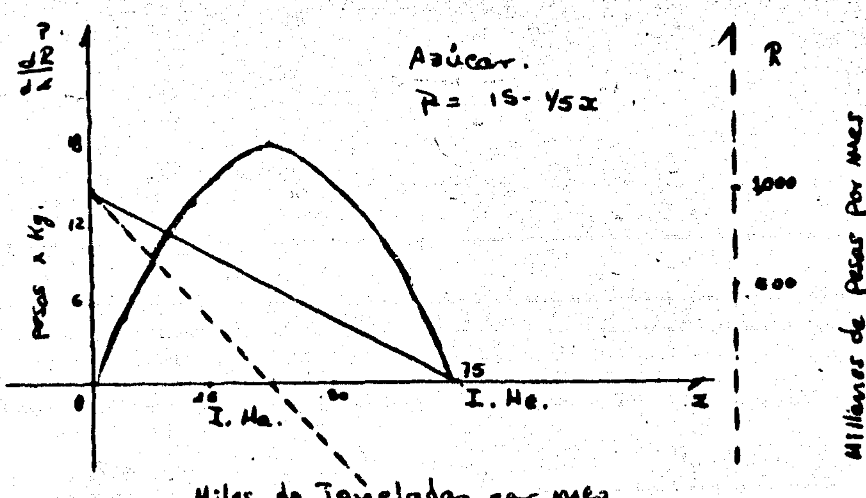
La hipótesis admitida implica que x decrece cuando p crece, es decir, que la función de la demanda es monótona decreciente. La función inversa, es por consiguiente, también monótona decreciente. Es indiferente pues tomar la demanda como una variable dependiente del precio, o a la inversa.

$$x = G(p) \qquad y \qquad p = F(x).$$

Ambas funciones se consideran aquí uniformes, continuas y monótonas decrecientes. La curva de la demanda desciende constantemente, de izquierda a derecha, presentando el mismo aspecto en general, tanto si se toma en el eje p horizontal, o vertical.

En cada caso particular que consideremos ahora tendremos que añadir nuevas limitaciones a la forma de la relación de la demanda.

FIGURA N.



La figura O, representa la demanda del azúcar en un mercado extenso, constituyendo un caso típico de un bien que carece de sustitutivos inmediatos. La demanda se anula para un precio de 21 pesos por kilogramo, no efectuando entonces los consumidores compra alguna a este o a cualquier precio mayor. Para precios inferiores, la demanda aumenta en proporción creciente según el precio desciende, hasta alcanzar la cantidad aproximada de 80 millones de Jg., mensuales cuando el precio es muy bajo. La curva corta a ambos ejes y es convexa hacia el origen. Como una representación aproximada de este tipo de demanda, se puede elegir una curva de la demanda que se aproxime a los ejes de modo análogo a como tiene lugar con la hipérbola equilátera con respecto a sus asíntotas.

El azúcar es una mercancía de difícil sustitución, incluso por sus más inmediatos sucedáneos, la sacarina y la miel. Pero la mayoría de los artículos comerciales presentan, en cada caso, un cierto número de sustitutivos. Estos se distinguen entre sí por diversas características, como por ejemplo, la calidad o la marca de fábrica.

A veces es conveniente representar, aproximadamente al menos la ley de la demanda por medio de una función de tipo definido, dentro de cierto campo de variavilidad de los precios. La curva de la demanda será, entonces, de determinada clase, por ejemplo, una recta o una parábola. Se pueden dar como ejemplos adecuados de leyes de la demanda los siguientes tipos de funciones:

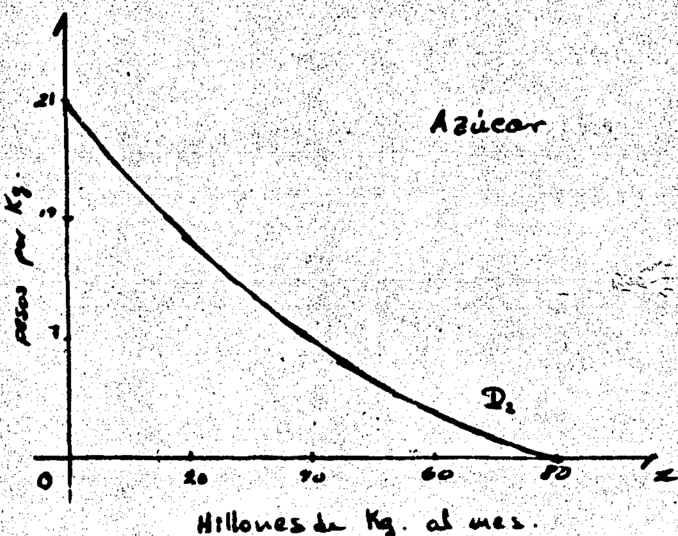
1.- $x = \frac{a - p}{b}$, $p = a - bx$.

2.- $x = \frac{a}{p + c} - b$, $p = \frac{a}{x + b} - c$.

3.- $x = \frac{a - p^2}{b}$, $p = \sqrt{a - bx}$

4.- $x = \frac{a - \sqrt{p}}{b}$, $p = (a - bx)^2$.

FIGURA O.



Cada una de las leyes que presentamos de la demanda, satisfacen la condición de ser monótona decreciente. Las variables x y p sólo toman valores positivos, y a b y c, son constantes en todos los casos. Si son aprovechables los datos numéricos reales de la demanda, será posible ajustarlos a las constantes y trazar un gráfico determinado de la curva de la demanda. La curva de la demanda correspondiente a la primera ley es una línea recta, inclinada hacia abajo, que corta al eje vertical de los precios en el punto A, donde p = a, y cuya tangente con respecto a dicho eje es igual a b.

Alterando los valores de a y b, cambiará la posición de la recta. Variando sólo el valor de a, la recta se trasladará paralelamente a sí misma; si sólo varia b, la recta girará en torno al punto A, situado sobre el eje de los precios; cuando a y b varien simultáneamente, la recta cambiará su posición por traslación y rotación. La segunda ley de la demanda, representa a una hipérbola equilátera, de asíntotas paralelas a los ejes de coordenadas y con centro en el punto $x = -b$, $p = -c$. Cuando los valores de a, b y c varían, la curva de la demanda cambia de posición. Un cambio de b y c solamente da lugar a un movimiento de traslación de la curva, sin que ésta cambie de forma; así, por ejemplo, se disminuye el valor de b, la curva se trasladará hacia al derecha. Todavía en la variación del valor de a, se alterará la forma de la curva de la demanda. En la figura P, se representan, casos de las curvas, de la forma lineal correspondientes a las siguientes funciones de la demanda:

$$x = 75 - 5p \qquad o \qquad p = 15 - 1/5x,$$

y

$$x = \frac{600}{p + 5} - 20 \qquad o \qquad p = \frac{600}{x + 20} - 5 .$$

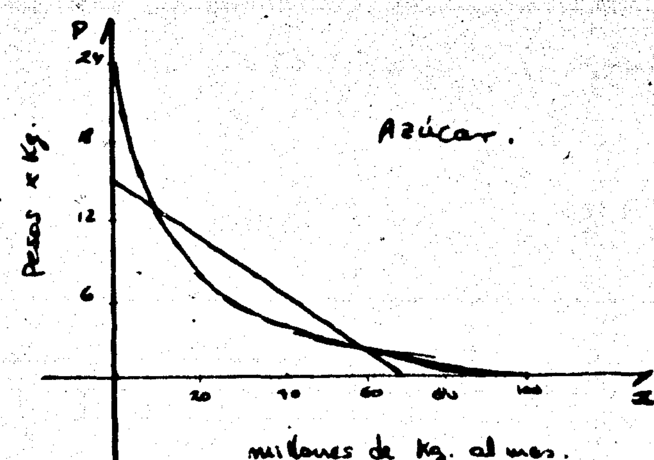
En ambos casos, x representa la demanda del azúcar, en millones de kilogramos, en un mercado en l que el precio p se expresa en pesos por Kg.

Tenemos aquí un ejemplo emportante del empleo de las constantes paramétricas. Si se sabe que una determinada relacion de demanda corresponde a uno de los tipos generales citados, sólo quedará fijada la posición de la curva de la demanda cuando se dé a los parámetros valores particulares. Los valores de a, b, y c, serán constantes para unas condiciones dadas de la demanda; pero toda alteración de los valores de dichos parámetros originará una modificación de la demanda, cuya naturaleza dependerá de la alteración particular que se haya efectuado.

Pasando a otra observación, diremos que la demanda de cierto bien X, se puede representar por las dos funciones inversas vistas anteriormente $x = G(p)$ y $p = P(x)$, correspondientes a la misma ley de la demanda. Siendo x la demanda y p el precio, el producto $R = xp$, se llamará ingreso total obtenido con la demanda y el precio. Este equivale al ingreso monetario total que los productos obtienen de sus ventas, o lo que es igual, al gasto total en dinero de los consumidores que componen la demanda. Por lo tanto, $R = pG(p) = xP(x)$, es decir, que R se puede expresar como una función del precio o como una función de la demanda. Sin embargo la última expresión es la más conveniente en muchos casos, y la función $R = xP(x)$ se denomina función del ingreso total correspondiente a la ley de la demanda dada. En esta función análogamente a lo que ocurría con la función de la demanda, se supone un régimen de compentencia perfecta entre los consumidores.

Es evidente que deduciéndose la función del ingreso total de la función de la demanda, que se ha supuesto contínua, será también una función contínua, como veremos más adelante, la forma de esta función depende de la elasticidad de la demanda, pero aquí únicamente podemos hacer la observación de que si la demnada es elástica o inelástica, en un sentido muy general, R, crecerá o decrecerá, respectivamente, al crecer la producción vendida.

Figura P.

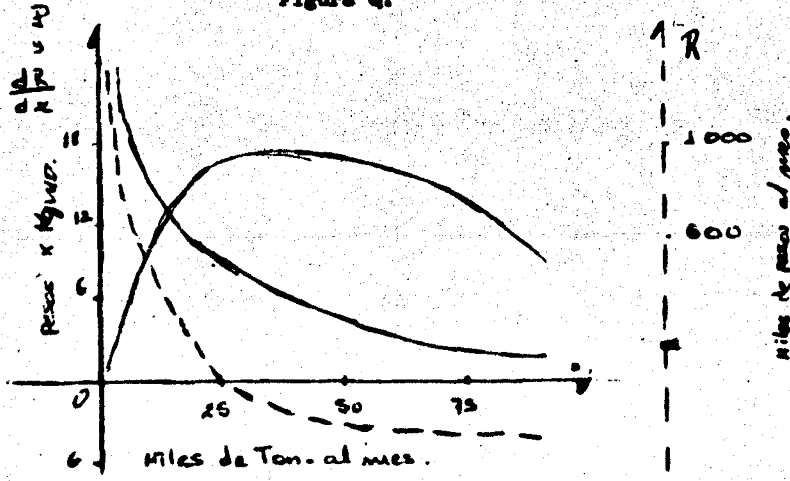


De la ley de la demanda $p = \dfrac{a}{x + b} - c$, se deduce:

$$R = \frac{ax}{x + b} - cx \quad y \quad \frac{dR}{dx} = \frac{ab}{(x + b)^2} - c$$

En la figura Q, se representan las curvas del ingreso total, medio y marginal correspondientes al caso particular en que la ley de la demanda del azúcar es $p = \frac{600}{x - 20} - 5$. De nuevo, la curva del ingreso marginal desciende continuamente, por debajo de la curva del ingreso medio, o de la demanda, y corta al eje Ox en el punto correspondiente a la producción en la que el ingreso total es máximo.

Figura Q.



Ahora bien, supongamos que una empresa determinada produce un bien uniforme X, con la ayuda de ciertos factores de producción. Algunos de estos factores son utilizados en cantidades fijas independientes de la producción de la empresa, y se supone que el costo de estos factores es conocido y fijo. Los restantes factores son variables, admitiéndose, que las condiciones de su oferta son conocidas, como ocurre, por ejemplo, cuando pueden adquirirse a precios de mercados fijos. Se supone, además que las condiciones técnicas en que la producción se realiza son conocidas y fijas.

Por último, se admite que la empresa ajusta de tal modo los factores variables, que una determinada producción x del bien X se obtiene al menor costo total C posible. Entonces C quedará determinado al conocerse x, es decir, C dependerá únicamente de x, teniéndose:

$$C = F(x) \text{ como función del costo total.}$$

Las variables x y C pueden tomar solamente valores positivos. La función está representada por la curva del costo total referida al eje horizontal x, y al vertical C del plano. Las diversas ordenadas de la curva — representan la variación de costo total al aumentar la producción.

Por conveniencia, se supondrá en lo sucesivo que la función del — costo total es uniforme y continua, además admitiremos , cuando haya por lo menos, un factor fijo de producción, la existencia de dos tipos de costo, a saber: los costos fijos, que son aquellos que ocasiona la explotación de una empresa independientemente de la producción obtenida, es decir, aunque esta sea nula, y los costos variables, los que varían en razón directa con la producción alcanzada. De aquí se deduce que la curva del costo total cortará el eje vertical OC, en un punto situado sobre el origen de coordenadas elevándose contínuamente de izquierda a derecha. En la figura B, representamos la curva del costo total apropiada, al caso hipotético de una refinería de azúcar; los gastos fijos son aquí de 250 000 pesos semanales, aumentando el costo total con el volumen de producción, hasta alcanzar la suma - de 1 250 000 pesos por semana cuando la producción de azúcar es de 80 toneladas. A veces es conveniente, para lograr una expresión aproximada, al - menos, del costo, para un campo de variabilidad dado de la producción, re - presentar por una función de forma particular el costo total de producción. Los tipos siguientes, son algunos:

1.- $C = ax + b$
2.- $C = ax^2 + bx + c$

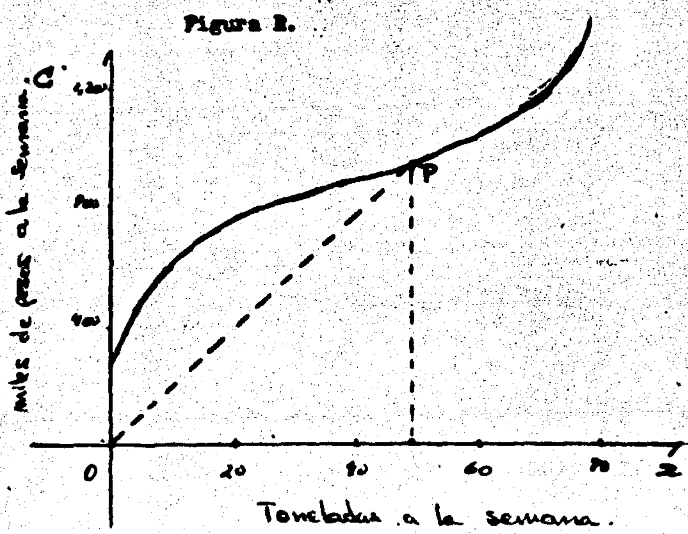
3.- $C = \sqrt{ax + b} + c$

4.- $C = ax^3 - bx^2 + cx + d$

5.- $C = ax \dfrac{x + b}{x + c} + d$

6.- $C = ax^2 \dfrac{x + b}{x + c} + d$

Figura 2.



La existencia de los parámetros en tipos de funciones del costo, tales como los anteriores, nos permiten considerar cambios muy distintos en él mismo. Así por ejemplo, la curva del costo dada por el segundo tipo, quedará fijada dando valores particulares a a, b, y c. Al variar los parámetros, cambiará también la posición de la totalidad de la curva del costo, lo que estará en relación con alguna modificación en las condiciones bajo las cuales actúa la empresa. Un aumento de c, por ejemplo, significa una elevación de los gastos generales, lo que dará lugar a que la curva del costo se desplace hacia arriba, aunque sin cambiar de forma. Modificaciones en a y b corresponden, por otra parte, a alteraciones del costo variable, y dan origen a que la curva cambie de posición y de forma.

Para una producción cualquiera, la razón entre el costo total y la producción correspondiente define el llamado costo medio o costo por unidad de producción. Si designamos el costo medio por c y nos referimos a la figura R, tendremos:

$$c' = \frac{C}{x} = \frac{MP}{OM} = \text{la pendiente de OP.}$$

Puede deducirse, por lo tanto, el costo medio a partir de la curva del costo total, sin más que medir al coeficiente angular o pendiente de la recta que une al origen de coordenadas con el punto correspondiente de la curva. Puesto que el costo medio depende de la producción, se tiene la función del costo medio siguiente, $c' = f(x)$, donde $f(x) = \frac{C}{x} = \frac{F(x)}{x}$, con su correspondiente curva del costo medio referida a los ejes Ox y Oc. La forma de esta última función se obtendrá, pues, de la que corresponde a la función del costo total. Así, por ejemplo, si el costo viene dado por la función que corresponde al tipo segundo anterior, se tendrá, entonces, la siguiente función del costo medio:

$$d' = ax + b + \frac{c}{x}$$

En este caso, $c' \longrightarrow \infty$, lo mismo si $x \longrightarrow \infty$ que si $x \longrightarrow 0$, es decir, que la curva del costo medio descenderá cuando la producción aumente a partir de pequeñas producciones, pero se elevará cuando la producción haya alcanzado cierto nivel. En el caso particular, ya cierto, de la refinería de azúcar, la curva del costo medio es de la forma presentada por la curva C. Me. de la figura S. La función del costo medio, a diferencia de lo que ocurre con la función del costo total, no es necesariamente monótona.

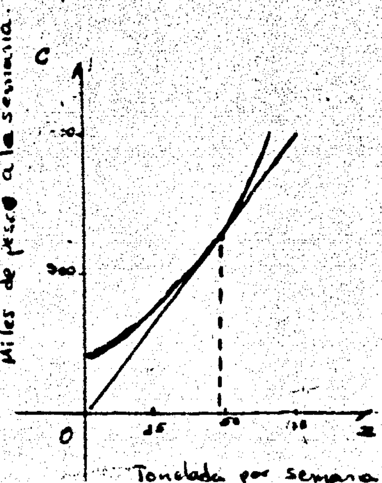
Los tres conceptos de costo total, medio y marginal se pueden definir dentro de las condiciones establecidas anteriormente, sobre el problema del costo total, medio y marginal, siendo ya explicadas las funciones del costo total y medio, y habiéndose deducido el costo medio de la curva del costo total como la pendientede la recta OP que une al origen O, con el punto P de la curva del costo total, al que corresponde la abscisa apropiada a la producción. Si la producción aumenta desde cierto nivel x en una cantidad — Δx, el costo experimentará un incremento ΔC y, en este caso, el incremento del costo por unidad de aumento en la producción será de $\frac{\Delta C}{\Delta x}$. El costo marginal se define entonces como el límite de esta razón cuando x, — tiende a cero, es decir, el costo marginal es la derivada de la función del costo total $C = F(x)$, midiendo la razón incremental del costo total y siendo un valor aproximado del costo que corresponde a una pequeña cantidad adicional de producción, obtenida desde un determinado nivel. El costo marginal de una producción cualquiera viene dado, además, por el coeficiente — angular o tangente a la curva del costo total en el punto correspondiente. Por depender elcosto marginal con su correspondiente cantidad producida, se tiene la fonción del costo marginal y su curva que lo representa.

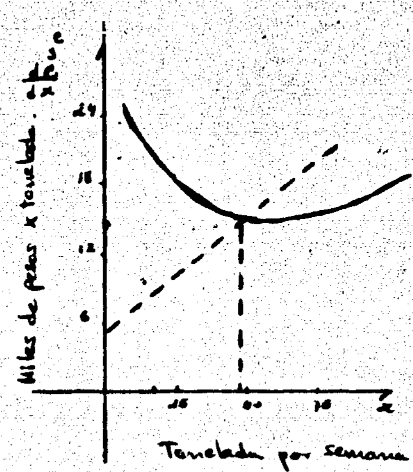
Si la función del costo total es igual a $C = ax^2 + bx + c$, se tendrá, entonces:

costo medio $c' = ax + b + \frac{c}{x}$ y costo marginal $\frac{dC}{dx} = 2ax + b.$

La curva del costo total está formada, en este caso, por la rama — ascendente de una parábola de eje vertical dirigida hacia arriba. La curva del costo medio representa la forma U, y la del costo marginal es una recta inclinada hacia arriba de pendiente igual a 2a. La figura S, presenta las tres curvas, en el caso particular en que $C = 1/10x^2 + 5x + 200$, y esta representará en este caso el costo total de una refinería de azúcar, donde el costo total por semana es de C millares de pesos, para una producción de x, toneladas de azúcar de la misma.

Figura 5.





3.2 Elasticidad de la demanda.- Para empezar tomemos en considera- ción la siguiente definición de elasticidad de una función: Supongamos que $y = f(x)$ es la elasticidad de la función en el punto x y es la razón entre la variación de y, y el correspondeinte cambio proporcional de x;

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{d(ly)}{d(lx)} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$$

Esta definición emana directamente de la definición de derivada de la función logarítmica $y = lx$, la cuál a su vez se deduce fácilmente partiendo de la definición de la derivada de una función, o sea que:

$$\frac{L(x+h) - Lx}{h} = \frac{1}{h} L\left(\frac{x+h}{x}\right) = \frac{1}{x} L\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/n}$$

$= 1/x\ L(1 + 1/n)^n$; de donde n indica x/h y tiende a infinito al tender h a cero. Pero la expresión $(1 + 1/n)^n$ tiende al límite e, al tender n a infinito; por lo tanto $\lim_{h \to 0} \frac{L(x+h) - Lx}{h} = 1/x \lim_{n \to \infty} L(1 + 1/n)^n = 1/x \text{ Log. } e =$ $= 1/x.$; es decir, $d/dx\ Lx = 1/x$.

Supongamos que se desea saber ahora las variaciones de ambas variables; si x cambia de x a $(x + h)$, los cambios de x e y, serán respectivamente; h/x y $\frac{f(x + h) - f(x)}{f(x)}$. La variación de y, que corresponde a la variación unitaria de x, será:

$$\frac{x}{f(x)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si existe la derivada de la función, tendremos que:

$$\lim \left(\frac{x}{f(x)} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}\right) = \frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}$$

Así pues, la variación de $y = f(x)$, cuando las variaciones de ambas variables se consideran, vendrá dada, por:

$$\frac{d(Ly)}{d(Lx)} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}$$

Esta expresión se denomina elasticidad de la función en el punto x, y se representa simbólicamente por $\frac{Ey}{Ex} = \frac{E}{Ex} f(x)$.

Por otra parte tenemos que la demanda del mercado para un bien cualquiera, se puede representar bajo ciertas condiciones, por la función monótona decreciente $x = G(p)$. La elasticidad de esta función define la elasticidad de la demanda para un precio cualquiera. Siendo su valor negativo para todo precio, es conveniente hacerla positiva anteponiéndole un signo negativo. Entonces, tenemos:

$$Eta = -\frac{p}{x} \frac{dx}{dp} = -\frac{d(Lx)}{d(Lp)}$$

de donde, Eta = elasticidad de la demanda. El valor de Eta, puede ser independiente de las unidades en que se expresan el precio y la cantidad demandada, varía de uno a otro punto midiendo siempre la razón entre el decrecimiento proporcio al de la demanda y el aumento proporcional del precio, a partir de una demanda y precio dados.

La función inversa de la demanda es $p = F(x)$, y la elasticidad del precio respecto a la demanda es $-\frac{x}{p}\frac{dp}{dx}$, i.e. recíproco de Eta.

Cuando se consideran las variaciones relativas en la demanda y el precio, es ventajoso trazar la curva de la demanda sobre un diagrama logarítmico, tomando tanto para el precio como para la demanda escalas logarítmicas. La tangente a la curva de la demanda tiene entonces pendiente negativa e igual, en valor absoluto, a la elasticidad de la demanda. Así por ejemplo, la ley de la demanda $x = ap^{-k}$ aparece, en un diagrama logarítmico, como una recta con pendiente igual a $-k$. La elasticidad de la demanda es, en este caso, constante e igual a k en todos sus puntos.

El siguiente método gráfico ha sido considerado por Marshall con el fin de estimar la elasticidad de una curva de la demanda trazada en escalas naturales (no logarítmica).

Dicho método se basa en el hecho de que una curva cualquiera de ecuación $xp = a$, es una curva de demanda con elasticidad igual a la unidad, en todos sus puntos. Una curva semejante puede denominarse curva de gasto constante, ya que el gasto (xp) de los consumidores, en conjunto es constante para todos los precios. En escalas logarítmicas, las curvas obtenidas, dando diversos valores a a forman una serie de rectas paralelas, con pendiente igual a la unidad. En escalas naturales, tenemos el sistema de hipérbolas equiláteras, representados por la figura T. Por cada punto P de una curva de demanda AB, pasa una de las curvas del gasto constante. La elasticidad en P de la curva de la demanda AB, se puede comparar con la - -

lasticidad igual a L, de esta curva del gasto constante, sin más que compa- ar las pendientes de las dos curvas referidas al eje de los precios. Esto s posible, ya que el otro factor p/x, que figura en la expresión de la elas icidad, es el mismo, en p, para ambas curvas. Si la curva de la demanda - B, se inclina con respecto al eje de los precios, que la correspondiente — urva de gasto constante en p, entonces la elasticidad de la demanda será - ayor que la unidad en ese punto de AB. Si AB, está menos inclinada que la urva de gasto constante en p, la elasticidad de la demanda de AB, será me - or que la unidad en dicho punto. Finalmente, si AB, es tangente a la cur- a de gasto constante como es el caso de la figura T, AB, tendrá una elasti- idad de la demanda igual a 1 en p. Por consiguiente, la forma como pase - na curva de la demanda dada a través de las curvas de gasto constante nos - ará una buena idea de la elasticidad de la demanda a lo largo de dicha cur- a. Así vemos que para una ley de la demanda $p = F(x)$, se tiene que : $R = xp = xF(x)$, y ,

$$\frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}(xp) = p + x\frac{dp}{dx} = p\left(1 + \frac{x}{p}\frac{dp}{dx}\right),$$

pero siendo la elasticidad de la demanda $Eta = -\, p/x \, \frac{dx}{dp}$, se tiene:

$$\frac{dR}{dx} = p(1 - 1/\eta)$$

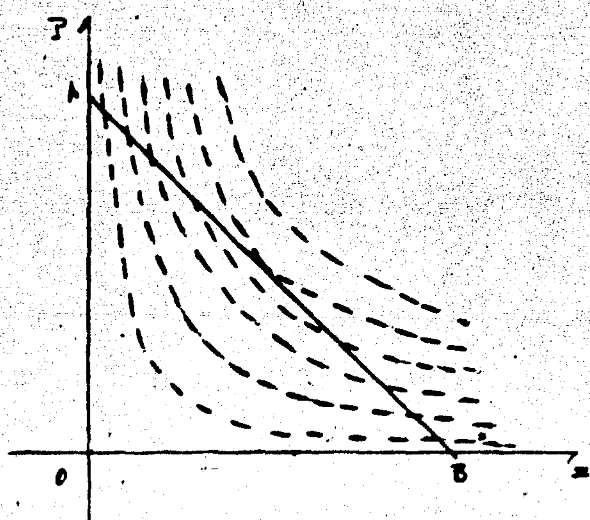
de lo cual deducimos que:

1.- Sí Eta es mayor que la unidad, para un precio y demanda dados, una pequeña disminución en el precio, dará lugar a un aumento, proporcionalmente mayor en la demanda; el ingreso marginal $\frac{dR}{dx}$ será positivo y el ingreso total aumentará cuando la cantidad de producto igual a la demanda aumente. En este caso se le llamará demanda elástica.

2.- Si Eta = 1, para un precio y demanda dados, una pequeña disminución en el precio motivará un aumento, proporcionalment igual; de la demanda y el ingreso marginal será nulo, mientras que el ingreso total será un valor estacionario, generalmente un máximo. En este caso ,la llamaremos demanda unitaria.

3.- Si Eta es menor que la unidad, para un precio y demanda dados, una pequeña disminución vendrá acompañada de un aumento proporcionalmente menor, de la demanda y el ingreso marginal será negativo, mientras que el ingreso total disminuirá a medida que la cantidad de producto aumente. Este es un caso de la demanda inelástica o rígida.

Figura 7.



Hemos supuesto en estos casos de la demanda, que la disminución del precio viene acompañada de un aumento de la demanda, y viceversa; es decir, que la curva de la demanda desciende de izuierda a derecha. Una nueva propiedad de la demanda se admite ahora que es válida, a saber: que cuando la demanda crece, la elasticidad de la demanda decrece contínuamente desde valores mayores que la unidad, para demandas pequeñas, a valores menores que la unidad, para demandas grandes. A medida que la demanda crece, se hace contínuamente más inelástica. De aquí resulta que habrá una demanda definida $x = a$, cuando la elasticidad de la misma sea igual a la unidad. Esta —

propiedad de la curva de la demanda es ilustrada por la curva AB de la figura T. La curva es tangente a la curva de gasto constante para una demanda definida; está más inclinada respecto al eje de los precios que las correspondientes curvas de gasto constante para todas las demandas más pequeñas, y menos inclinada para todas la demandas mayores.

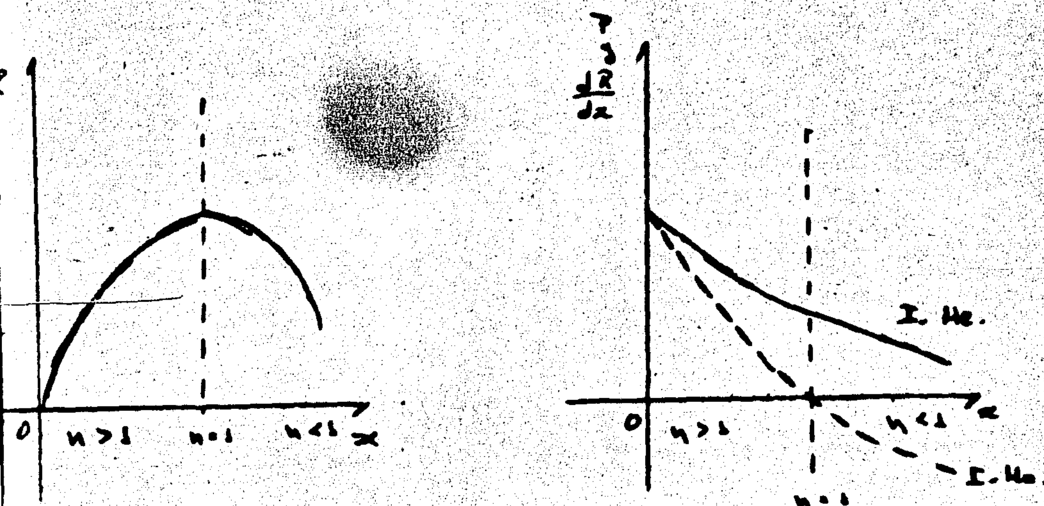
En este caso, por lo tanto, el ingreso total R crece al principio con Eta mayor que la unidad, y alcanza un máximo definido cuando la cantidad vendida es $x = a$, $(Eta = 1)$ y, a partir de aquí, decrece al aumentar aquella(Eta menor que 1). El ingreso medio, por supuesto, decrece continuamente a medida que la cantidad vendida aumenta.' De la expresión obtenida antes para $\frac{dR}{dx}$, resulta

$$\text{ingreso marginal} = \text{ingreso medio}(1 - 1/Eta).$$

Siendo Eta positiva, el ingreso marginal será menor que el ingreso medio para todas las producciones. Además, cuando la cantidad vendida crece, Eta decrece y llega a ser la unidad en el punto $x = a$. Por lo tanto, para las cantidades vendidas menores que a, $(1 - 1/Eta)$ es positivo y decreciente, de donde el ingreso marginal deberá crecer a medida que aumente la cantidad vendida de producto hasta hacerse igual a cero en el punto $x = a$, donde $Eta = 1$. Cuando continúa aumentando la cantidad vendida, el ingreso marginal se hace negativo, pero no decrece necesariamente de una manera continua. Las formas descritas anteriormente de las curvas de ingreso total, medio y marginal estan indicadas en la la figura U.

La ley lineal de la demanda, $p = a - bx$, y la ley hipérbólica de la demanda, $p = \frac{a}{\quad} - c$, son ambas consideradas en este caso. En el primer caso, $Eta = b(a/x - b)$, y en el segundo, tenemos la siguiente relación: $Eta = 1/a(1 + b/x)(1 - bc - cx)$.

Figura U.



Cada una de estas expresiones decrece al crecer x. Las curvas - de ingreso total , medio y marginal en los casos particulares de la demanda lineal e hiperbólica, están representados gráficamente en las figuras N y Q.

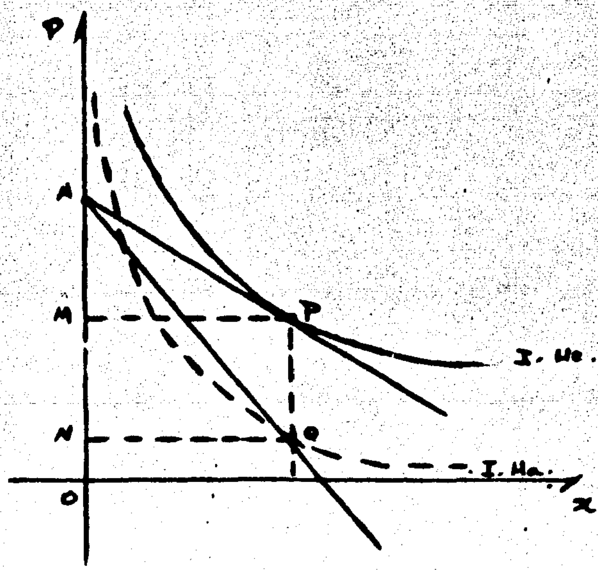
Podemos establecer finalmente, una interesante relación entre las curvas de ingreso medio y marginal. Si la tangente a la curva del ingreso medio, en cualquier punto P, corta al eje de los precios en A, y si se unen el punto A, con el Q, de la curva del ingreso marginal, al que corresponde la misma producción que a P, entonces la pendiente de AP referida al eje de los precios, será el doble de la AQ. En la figura V, PM y QN son perpendiculares al eje de los precios. Luego será: $Eta = \frac{OM}{MA} = \frac{P}{MA}$, es decir, $MA = \frac{p}{Eta}$

Aquí podemos considerar a la elasticidad de la demanda en P a Eta. Pero el ingreso marginal es igual al ingreso medio multiplicado por (1 - 1/E) es decir, $ON = OM(1 - 1/Eta)$, y $NM = OM - ON = \frac{OM}{Eta} = \frac{p}{Eta}$, de donde, - -

$MA = NM = 1/2NA.$

La pendiente de AP respecto al eje de los precios es $\frac{MP}{MA} = \frac{NQ}{\frac{NA}{2}} =$ $= 2\,\frac{NQ}{NA}$, es decir, el doble de la pendiente de AQ.

Figura V.



Este resultado proporciona un método para trazar la curva del ingreso marginal dada la curva de la demanda (ingreso medio). Eligiendo un punto cualquiera P, sobre la curva de la demanda, trazada la tangente que corta al eje de los precios en A y trazada la recta AQ con una pendiente respecto al eje de los precios igual a la mitad que la de AP, hallaremos el punto Q sobre AQ, el cuál será un punto de la curva del ingreso marginal.

3.3 Problemas de Monopolio y Duopolio en la Teoría Económica.- En ciertas ramas de la Teoría Económica es necesario resolver los problemas por medio del criterio de máximos y mínimos, en los problemas estáticos podremos admitir por razones de conveniencia, que el consumidor aislado pretende alcanzar, dentro de su escala de preferencias, la máxima posición posible en compatibilidad con las condiciones del mercado, y así mismo podremos considerar que cada empresa o firma aislada fijará su producción o el precio para lograr el máximo ingreso neto posible, teniendo en cuenta el debido uso de los distintos factores de producción, de tal modo que obtenga la máxima producción p sible a un costo determinado, o bien, el menor costo posible para una producción dad. Similares serán los principios que se tomen en cuenta, aunque en forma más complicada para la resolución de los problemas dinámicos.

Algunos ejemplos sencillos, destinados a aclarar los métodos desarrollados a la resolución de los problemas antes expuestos, serán tratados en los párrafos siguientes.

Como primer problema, supongamos que una empresa única produce un bien X, en condiciones de costo dadas, expresadas por la función de costo total $C = F(x)$. La demanda del mercado para dicho bien se supone conocida siendo su función $x = G(p)$, o bien $p = P(x)$, con x la cantidad demandada al precio p. Dentro de los límites expuestos por esta relación de la demanda, la firma actúa como un monopolista, tratando de obtener el máximo ingreso neto posible. Dos puntos de vista, sin embargo podemos considerar para este problema.

O bien la empresa fija su producción y deja que el precio se determine por las condiciones de la demanda, o por el contrario, fija el precio y deja que la demanda sea la que determine la producción conveniente. Aunque el análisis del problema sea distinto, en ambos caso, los resultados obtenidos son en esencia los mismos.

Suponiendo que la empresa fija la producción, entonces el precio correspondiente a la cantidad x vendrá determinado por la función $p = F(x)$, dada por las condiciones de la demanda. El ingreso bruto obtenido de la producción x será, evidentemente, $R = xP(x)$ y el costo total, $C = F(x)$, de donde se deduce el ingreso neto $(R - C)$, como una función de x. La producción x fijada por la empresa monopolista, de tal manera que obtenga con ella in ingreso neto máximo, deberá satisfacer las dos condiciones siguientes:

$$\frac{d}{dx}(R - C) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2}{dx^2}(R - C) < 0.$$

Según la primera, $dR/dx - dC/dx = 0$, o lo que es igual a la siguiente expresión, $dR/dx = dC/dx$. Para alcanzar, por lo tanto, la posición de equilibrio en la producción del monopolio, el ingreso marginal deberá ser iguál al costo marginal. La segunda condición, que establece un ingreso máximo en lugar de un mínimo, exige que;

$$d/dx \quad d/dx(R - C) = d/dx\ (dR/dx - dC/dx) = \frac{d^2R}{dx^2} - \frac{d^2C}{dx^2} < 0$$

esto es,

$$\frac{d^2R}{dx^2} < \frac{d^2C}{dx^2}$$

Por consiguiente, en la posición de equilibrio del monopolio, el ingreso marginal aumentará menos rapidamente que el costo marginal. Esta última condición se satisface de un modo automático, si por ejemplo, siendo el ingreso marginal decreciente y el costo marginal creciente, se incrementa la producción a partir del punto en que ambos valores marginales sean iguales. La posición de equilibrio del monopolio se puede representar gráficamente de dos formas diferentes. Trazando sobre un mismo diagrama las curvas del ingreso y del costo total, la producción x vendrá representada sobre el eje de las abscisas, y el ingreso y el costo total en el eje de las or —

denadas. Si se supone que en las dos curvas así definidas existen puntos pertenecientes a una misma vertical, tales que las tangentes a las respectivas curvas sean paralelas, se verificará que dR/dx = dC/dx y, por consiguiente, la producción común a tales puntos determina la posición de equilibrio del monopolio, a condición de que la curva del ingreso total presente menos convexidad(o más concavidad, vist, desde abajo) que la curva del costo total lo que corresponde a la condición analítica de que - - - $d^2R/dx^2 < d^2C/dx^2$. Las curvas de ingreso y costo total en posición de equilibrio dentro del monopolio, se pueden ilustrar por medio de las curvas de la figura N. El ingreso neto que corresponde a una producción cualquiera viene dado por la distancia vertical que separa a la curva del ingreso total de la curva del costo total. Aquél es, evidentemente, un máximo en la posición PQ, que corresponde al momento en que la tangente en el punto P a la curva del costo total es paralela a la tangente en el punto Q a la curva del ingreso total. La producción de monopolio ON se determina así en este caso, y el precio de monopolio viene dado por el coeficiente angular o pendiente del segmento OQ.

La posición de equilibrio del monopolio puede representarse también por medio de un diagrama en el que aparezcan todas las curvas de ingresos y costos medio y marginales, referidas a los mismos ejes y escalas. En la figura O aparecen representadas estas cuatro curvas tal como han sido obtenidas de las curvas de ingresos y costos totales de la figura N. - Tres de las mencionadas curvas son aquí rectas,

La producción única de monopolio viene representada, en este caso, por la abscisa ON del punto P en el que se cortan las curvas del ingreso y del costo marginal. El precio del monopolio vendrá dado por NR; el costo medio que corresponde a la producción de monopolio, por NQ, y el ingreso neto máximo, por el producto de QR y ON, es decir, por el área del rectángulo rayado. La condición suficiente de máximo queda automáticamente satisfecha, puesto que la curva de ingreso marginal es decreciente, mientras que la del costo marginal es creciente con la producción.

Puede ilustrarse la solución analítica del problema del monopolio por medio de funciones particualres del costo y de la demanda de un tipo sencillo sencillo que se adapte a las condiciones normales. Suponiendo que la función del costo total sea del tipo cuadrático $C = ax^2 + bx + c$ y que la demanda sea de la forma lineal $p = B - Ax$ (tomando todas las constantes positivas), tendremos que la primera condición de la igualdad entre el costo y el ingreso marginales, vendrá dada por

$$2ax + b = B - 2Ax,$$

es decir,

$$x = \frac{B - b}{2(a + A)}$$

Existirá una producción única de equilibrio siempre que $b < B$. Esta condición significa que el ingreso marginal es mayor que el costo marginal para una producción muy pequeña. Si no se cumple, la empresa no podrá obtener jamás un beneficio positivo y sus pérdidas serían mínimas al anular por completo su producción. La segunda condición de equilibrio ($d^2R/dx^2 < d^2C/dx^2$) se satisface completamente. En las figuras N y O se han dibujado las curvas correspondientes a las funciones del costo y la demanda de los tipos anteriores.

Tomemos ahora el segundo punto de vista en el problema. La empresa fija el precio y deja que la demanda, dada por la función $x = G(p)$, ajuste la producción.

En cuyo caso, se tiene,

$$R = xp = pG(p) \qquad \text{y} \qquad C = F(x) = F(G(p)).$$

El ingreso neto alcanzado con el precio p será igual a $(R - C)$, siéndo éste un máximo si se verifica

$$d/dp\,(R - C) = 0 \qquad \text{y} \qquad d^2/dp^2\,(R - C) < 0.$$

La primera condición equivale a

$$d/dp\,(pG(p)) - dC/dp = 0,$$

es decir, $G(p) + pG'(p) - dC/dx\; G'(p) = 0$, ya que $dC/dp = dC/dx \cdot dx/dp$.

La ecuación que, una vez resuelta, nos da el precio de monopolio en la posición de equilibrio, es por lo tanto,

$$G(p) + (p - dC/dx)\,G'(p) = 0.$$

La segunda condición para obtener un ingreso neto máximo vendrá dada por

$$d/dp\,(d/dp\,(R - C)) < 0,$$

es decir,

$$d/dp(G(p) + (p - dC/dx)\,G'(p)) < 0.$$

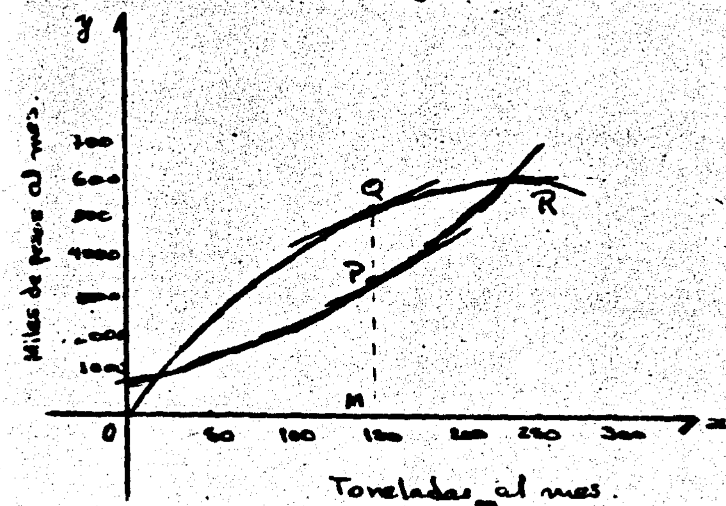
Un valor cualquiera de p que satisfaga, al mismo tiempo, a la ecuación y a la desigualdad anteriores, será un precio de monopolio posible y la producción de monopolio correspondiente vendrá dada entonces por la función $x = G(p)$.

En general, de la ecuación anterior del precio de monopolio resulta:

$$dC/dx = \frac{G(p) + pG'(p)}{G'(p)} = \frac{\frac{dR}{dp}}{\frac{dx}{dp}} = \frac{\frac{dR}{dx}\cdot\frac{dx}{dp}}{\frac{dx}{dp}} = \frac{dR}{dx},$$

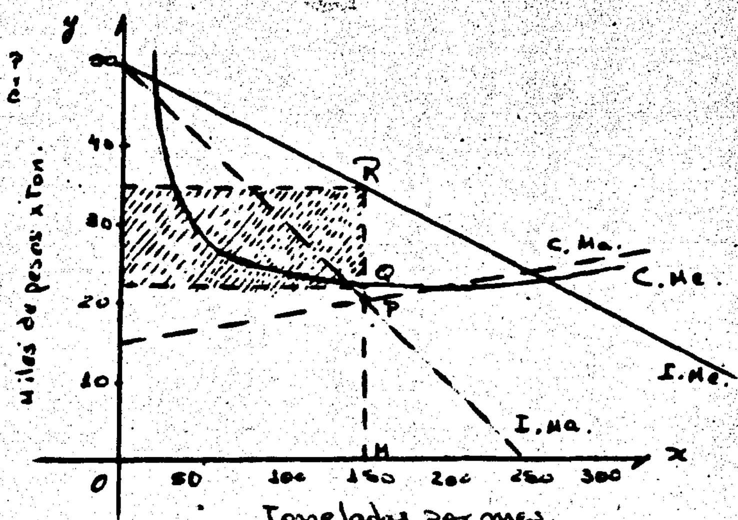
es decir, la condición del primer análisis de que el costo marginal sea i - gual al ingreso marginal se satisface con la condición del segundo análisis del problema de monopolio.

Figura 8.



Por otra parte la demanda del mercado para un bien X, se presenta, como antes por la relación $p = F(x)$ entre el precio p y la cantidad demandada x. La oferta de este bien está distribuída entre dos empresas duopolistas, que lo venden al mismo precio p. El primer duopolista produce x_1 cantidad con un costo total de $C_1 = F_1(x_1)$, siendo la producción del segundo duopolista x_2 y el costo total $C_2 = F_2(x_2)$. La solución del problema de la distribución del mercado entre los dos duopolistas depende completamente de la hipótesis que se establezca acerca de cómo reacciona uno de los duopolistas frente a cualquier acción que determine el otro.

Figura O.



Se supone en el caso más simple del duopolio, que cada uno de los duopolistas espera que el otro no alterará sensiblemente la producción habitual, cualesquiera que sean los cambios que él introduzca en su propia producción. En este caso, cada uno de los duopolistas fijará su producción con el propósito de alcanzar un ingreso neto máximo. Siendo x_1 y x_2 las producciones fijadas por los dos duopolistas, el precio del bien vendrá dado por la función $p = P(x)$, donde $x = x_1 + x_2$ es la producción total. El ingreso neto obtenido por el primer duopolista será entonces $(x_1 p - C_1)$ y, para que éste sea un máximo, x_1 deberá ser calculada de modo que cumpla con la condición:

$$d/dx_1\ (x_1 p - C_1) = 0.$$

o lo que es lo mismo,

$$d/dx_1\ (x_1 p) = \frac{dC_1}{dx_1}$$

Esta es la igualdad del ingreso y costo marginales. La única dificultad estriba en expresar el ingreso marginal en una forma conveniente. Puesto que $x_1 p = x_1 P(x)$, donde $x = x_1 + x_2$, se tiene:

$$d/dx_1\,(x_1 p) = P(x) + x_1\, d/dx\, P(x)\, d/dx_1\,(x_1 + x_2) = P(x) + x_1\, P'(x),$$

habiendo uso de la hipótesis de que el primer duopolista considera fija x_2. Por consiguiente, para cualquier producción dada x_2 del segundo duopolista, la ecuación que determina la producción x_1 del primero será:

$$P(x) + x_1 P'(x) = \frac{dC_1}{dx_1}$$

El mismo modo, dada una producción cualquiera x_1 del primer duopolista, el segundo fijará su producción x_2 de modo que se verifique,

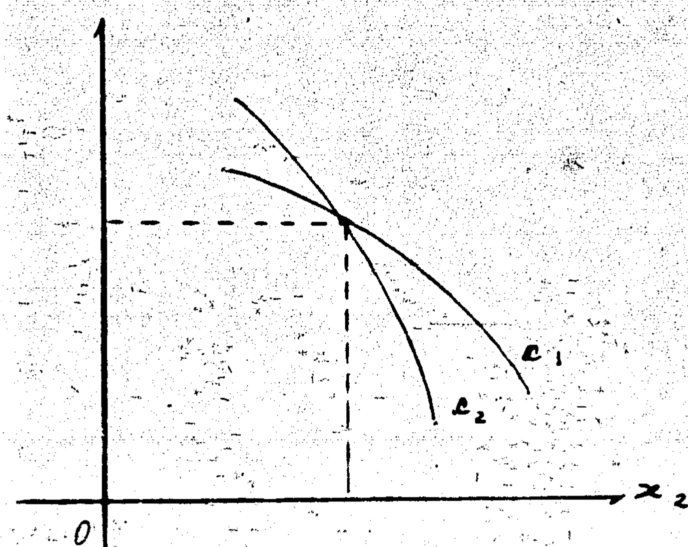
$$P(x) + x_2 P'(x) = \frac{dC_2}{dx_2}$$

Se tienen así dos ecuaciones con dos incógnitas, que son suficientes en general, para determinar las producciones de los dos duopolistas. La producción total y el precio de venta resultarán, al mismo tiempo determinados.

La primera ecuación de la producción del primer duopolista en función de x_2, o sea de la del segundo duopolista, es decir, que expresa x_1 como función de x_2. Puede admitirse, en este caso que un aumento de x_2, provocará una disminución más pequeña de x_1. La dependencia entre x_1 y x_2 puede representarse por medio de una curva de reacción C_1, en el plano Ox_1x_2. La forma de C_1 aparece en la figura P. La curva debe ser considerada en relación con el eje Ox_2 y el coeficiente angular de la tangente a la curva (respecto de este mismo eje) es negativo, pero en valor absoluto, menor que la unidad. Análogamente, la segunda ecuación dá x_2 como una función de x_1, pudiéndose obtener una segunda curva de reacción C_2.

Las dos curvas de reacción C_1 y C_2 se cortarán, por lo tanto en un punto único P, y las coordenadas de este punto nos darán las producciones de equilibrio x_1 y x_2 de ambos duopolistas.

Figura P.



En el caso particular de que los dos duopolistas tengan la misma función total $C = F(x)$, las ecuaciones determinantes de la producción serán:

$$F(x) + x_1 F'(x) = F'(x_1) \qquad \text{y} \qquad F(x) + x_2 F'(x) = F'(x_2) .$$

La curva de reacción C_1, observada desde el eje Ox_2, tiene ahora exactamente la misma curva de reacción de la C_2 mirada desde el eje Ox_1. Resulta que x_1 y x_2 deberán ser iguales en el punto de intersección de ambas curvas. Si la producción total se distribuye en dos partes iguales entre los duopolistas, se tendrá $x_1 = x_2 = 1/2\, x$, viniendo dado entonces el valor de x por la ecuación:

$$P(x) + 1/2\ xP'(x) = P'(1/2\ x).$$

Suponiendo, además que cada uno de los dos duopolistas produce con costos constantes, la producción total, distribuída del mismo modo entre ellos vendrá dada por:

$$P(x) + 1/2\ xP'(x) = 0.$$

es decir,

$$P(x) + (P(x) + xP'(x)) = 0.$$

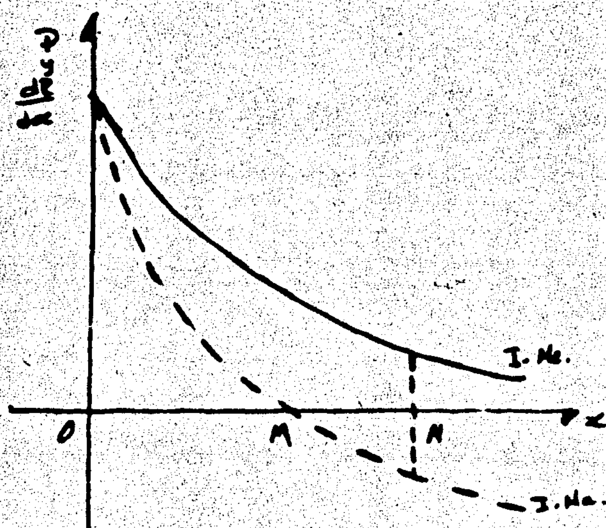
o lo que es igual a,

$$P(x) + \frac{d}{dx}\ (xP(x)) = 0.$$

La producción total es tal que la suma del ingreso medio y marginal, dada la demanda $p = P(x)$, es nula.

Si las curvas del ingreso medio y marginal son como las de la figura Q, la producción total en régimende duopolio es igual a ON. Esta producción puede ser comparada con la obtenida en las mismas condiciones por el monopolio puro. La producción del monopolio, cuando el monopolista trabaja con costos constantes, ha de ser tal que el ingreso marginal se iguale al costo marginal, es decir, se anule. En la figura Q, la producción de monopolio.es OM, siendo, como puede observarse, menor que la producción ON, del duopolio.

Figure Q.



3.4 Máximos Condicionados: Multiplicadores de Lagrange.- En los casos en que la escala de variación de las variables es limitada, - la maximización o minimización, es un problema que consiste en hallar los - valores más grandes o más pequeños que pueden lograrse con las magnitudes - permitidas de las variables. Se dice entonces que un problema de esta especie es de máximos condicionados, y las relaciones dentro de la escala limitada de variación de las variables se llamn condiciones de frontera.

Entonces, tendremos por lo general que una condición cambiará los valores de las variables independientes; y casí siempre disminuirá el valor del punto que se desee maximizar y, en el mejor dè los casos, dejará al valor sin afectarlo.

Pasemos ahora a examinar un problema específico de maximización. Supongamos que una empresa tiene 100,000 pesos para gastar en mano de obra y materias primas en el curso del año próximo. Sea L la cantidad de mano de obra que contrata y 2,000 pesos el precio anual por unidad de esta mano de obradonde M será la cantidad de materia comprada, y el precio por unidad será en este caso de 1,000 pesos. Entonces la firma está operando bajo la restricción de presupuesto de que sus gastos totales en estos dos — elementos habrán de ser iguales a 100,000, es decir que

$$2L + M = 100.$$

Para referencias subsiguientes, supongamos que la producción, Q - de la empresa, guarda una relación con L y M por conducto de la siguiente - función de producción

$$Q = 5LM.$$

Para sacar la máxima producción posible con este presupuesto la empresa tiene que encontrar los valores de L y M que maximicen Q, pero que satisfagan la restricción impuesta por el presupuesto.

Una forma directa de resolver el problema, es utilizar la restricción para eliminar una de las variables. Así 2L + M = 100 nos dá - M = 100 - 21 y, si en la función Q de producción Q = 5LM, sustituimos M con la expresión antes hallada y tendremos,

$$Q = 5L(100 - 2L) = 500L - 10L^2 .$$

Nos queda pues, un problema corriente de máximos y mínimos, el cual comporta solamente las dos variables Q y L. Este problema se resuelve, ajustando la primera derivada igual a cero, para determinar el valor de L, es decir, resolviendo

$$500 - 20L = 0,$$

que nos da L = 25. Ahora bien, sustituyendo a la variable L de la ecuación con limitación de presupuesto con este últimovalor, encontramos que - M = 100 - 2L = 50. Esta es pues, la solución, ahora vemos que la firma encuentra que le será beneficioso obtener 25 unidades de mano y 50 de materia prima.

Ahora bien, examinemos al problema geométricamente. En la figura Q, la línea recta BB' es la curva de la limitación del presupuesto 100 = 2L + M. Esta curva muestra la forma en que la limitación del presupuesto restringe la escala de valores de las variables L y M. Establece que sólo son admisibles ciertas combinaciones de estos valores, es decir, las que satisfacen la ecuación del presupuesto, de manera que están representadas por - - puntos situados en dicha línea. En términos económicos, esto es que habrán de considerarse sólo las combinaciones de cantidades de mano de obra y materia prima cuyo valor total sea igual a 100. Todos los demás puntos, tales como C o D representan las combinaciones decorriente de entrada que no - cumplen con los requisitos del presupuesto de la empresa.

*

Cabe ahora aclarar que por corriente de entrada entenderemos la - información que llega a alguna parte, o los medio y recursos de que dispone quien tiene que tomar acuerdos, para poder ejercer razonablemente su función mientras que el potencial de salida lo constituyen las respuestas o solu - ciones que dé o encuentre quien toma los acuerdos basándose en la corriente de entrada.

Ahora bien; supongamos que colocamos a figura Q en el suelo y, sobre ella, levantámos una representación gráfica de la función de produc- ción $Q = 5LM$. Esto aparece hecho en la figura R, en la que el plano OUVW representa la función de la producción, es decir, indica cuánto será pro — ducido con cada combinación de corriente de entrada L y M.

En el problema de maximización restringida no nos interesa todo - el plano de producción. Sólo tomaremos en cuenta la parte que corresponda a las combinaciones admisibles de corriente de entrada, cuyo lugar se en - cuentra en la línea BB' del piso del diagrama. El lugar que corresponde a los potenciales de salida (producción), es el arco BH'B' que se encuentra - por encima de la línea BB'. El punto óptimo que buscamos es, claramente, el punto H, que se encuentra directamente debajo del punto más alto de este arco, es decir, da el nivel de producción más alto alcanzable, HH'.

El procedimiento para la solución que hemos descrito, comporta - de tal manera que se haga la utilización del límite del presupuesto para e- liminar una de las variables. Esto equivale a que tomemos una sección ver tical del diagrama que abarque tanto la línea BB' como el arco BHB'. De - esta manera se elimina del diagrama una de las dimensiones y nos queda un - problema sencillo en dos dimensiones.

Pero resulta que este procedimiento no siempre da resultado. La condición no siempre toma la forma sencilla de nuestra ecuación del presu - puesto, de manera que no siempre es posible eliminar directamente una de — las variables. Por ejemplo, si nos encontrásemos con la siguiente restric- ción:

$$\frac{L^M \log LH}{\sqrt{1-\frac{L^2}{M^3}}} = 4$$

nos sería difícil despejar N a base de L, tal como lo hemos hecho antes. Estos casos se han de tratar por el método de multiplicadores de Lagrange, que de todas maneras, son de muchísimo más interés teórico. La demostración la describiremos en forma sencilla e intuitiva.

Cuando un problema contiene más ecuaciones que incógnitas, y por lo tanto no esta determinado, para escapar a esta dificultad introducimos algunas incógnitas artificiales, tantas como restricciones haya, para aumentar así el número de las incógnitas hasta hacerlo igual al de las ecuaciones restringidas. Estas incógnitas artificiales, reciben el nombre de multiplicadores de Lagrange.

Volviendo a trabajar con nuestro sencillo ejemplo veremos la forma en que funciona el método. Ante todo tomamos nuestra restricción que es, $2L + N = 100$ y llevamos los dos términos de la ecuación a un solo lado de la misma para obtener

$$2L + N - 100 = 0.$$

A continuación multiplicaremos la expresión resultante de la izquierda por una constante desconocida, λ, y el resultado lo sumaremos a la función de producción $Q = 5LN$, para obtener el llamado término o expresión de Lagrange

$$Q_{\lambda} = 5LN + \lambda(2L + N - 100).$$

El punto fundamental, burdamente expresado, es que si la restricción se encuentra siempre satisfecha, la expresión contenida dentro del paréntesis será igual a cero, de manera que el término de Lagrange Q_{λ} se comportara exactamente en la forma que lo hace la función de producción. Cualesquiera que sean los valores de L y N que maximicen una de ellas, maximizarán automáticamente la otra. Pero el término de Lagrange contiene tres símbolos cuyos valores son desconocidos, a saber λ, L y M. Podemos pasar a resolver el problema hallando las derivadas parciales con respecto a cada una de las tres incógnitas, fijando los tres resultados iguales a cero, y despejando los tres valores desconocidos de las tres incógnitas. Esto es,

$$\frac{\partial Q_\lambda}{\partial L} = 5M + 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial Q_\lambda}{\partial M} = 5L + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial Q_\lambda}{\partial \lambda} = 2L + M - 100 = 0$$

Las tres ecuaciones pueden resolverse multiplicando toda la segunda ecuación por 2 y restándola luego de la primera, para obtener 10L = 5M ó M = 2L. Si hacemos la correspondiente sustitución nos da M = 50, λ = - 125, osea los mismos resultados que antes, con la sola diferencia de que, ahora, enla suma, hemos obtenido un valor de λ.

Por último, observemos que, si el problema tiene más de una ecuación restrictiva, para obtener el término de Lagrange multiplicamos cada una de las restricciones por un diferente multiplicador de Lagrange y los sumamos todos al término cuyo valor ha de maximizarse.

El siguiente ejemplo, aclarará un poco el método.

Suponiendo que la función de utilidad de un consumidor esté dada por U = 2ab, donde a y b son bienes de consumo. Está sujeta a la siguiente restricción: Y = 5a + 10b, donde Y = ingresos del consumidor y estos ascienden a 100 unidades monetarias.

¿Qué cantidad de A y de B maximizarán la utilidad del consumidor?

Sea $U = 2ab$, y $Y = 5a + 10b - 100$

entonces, $h = U + \lambda Y$.

por tanto, $h = 2ab + \lambda(5a + 10b - 100)$

$$\frac{dh}{da} = 2b + 5\lambda = 0$$

$$\frac{dh}{db} = 2a + 10\lambda = 0$$

$$\frac{dh}{d\lambda} = 5a + 10b - 100 = 0$$

que nos dá el siguiente sistema de ecuaciones

$$2b + 5\lambda = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
$$2a + 10\lambda = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$
$$5a + 10b - 100 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Que resolviendo al sistema, se deben considerar dos casos; uno para a, y el otro para b, los cuales al resolverlos tendrán que llegar al mismo resultado.

caso 1) $5a + 10b = 100$, por tanto, $5a = 100 - 10b$

de donde, $a = \dfrac{100 - 10b}{5}$, $a = \dfrac{100}{5} - \dfrac{10b}{5}$, por tanto,

$a = 20 - 2b$, y sustituyendo enla ecuación (2), tenemos que $2(20 - 2b) + 10\lambda = 0$.

por lo tanto, $40 - 4b + 10\lambda = 0$.

Ahora como queda en función de b, se resuelve con la ecuación (1), y tenemos,

$$\begin{array}{rl} 2b + 5\lambda = 0 \\ -4b + 10\lambda = -40 \end{array} \approx \begin{array}{r} 4b + 10\lambda = 0 \\ -4b + 10\lambda = -40 \\ \hline 20\lambda = -40 \end{array}$$

por tanto, $\lambda = -40/20$, y finalmente, $\lambda = -2$.

caso 2) $5a + 10b = 100$, implica que $10b = 100 - 5a$.

por tanto, $b = \dfrac{100 - 5a}{10}$, implica que, $b = 10 - 1/2a$

y sustituyendo en (1), se tiene que:

$2(10 - 1/2a) + 5\lambda = 0$, por tanto, $20 - a + 5\lambda = 0$.

Ahora como queda en función de a, se resuelve con la ecuación (2).

por tanto, $$\begin{array}{r} -a + 5\lambda = -20 \\ 2a + 10\lambda = 0 \end{array} \sim \begin{array}{r} -a + 5\lambda = -20 \\ a + 5\lambda = 0 \\ \hline 10\lambda = -20 \end{array}$$

por tanto, $\lambda = -20/10$, esto implica que, $\lambda = -2$.

Finalmente se sustituye en (2) la λ, y se llega a que:

$2a - 20 = 0$, $2a = 20$, por tanto , $a = 10$.

aquí sólo resta sustituir los valores de a y b, en $U = 2ab$ y en $Y =$ = $(5a + 10b = 100)$, una vez conocido el valor de $b = 5$, ya que

$2b + 5(-2) = 0$, $2b = 10$ y finalmente, $b = 5$, ya que sustituímos en (1) el valor de λ.

por tanto,

$$U = 100 = 2(5)(10); \quad Y = 5(10) + 10(5) = 100, \quad y$$

finalmete, $U = Y = 100$, como queríamos demostrarlo.

Figura Q.

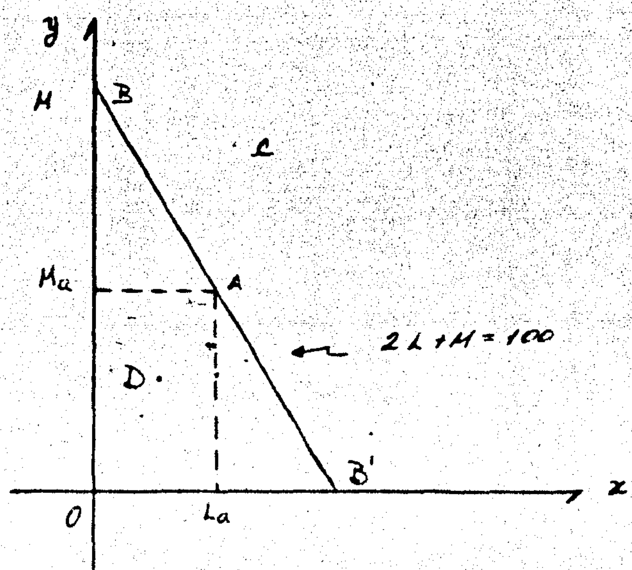
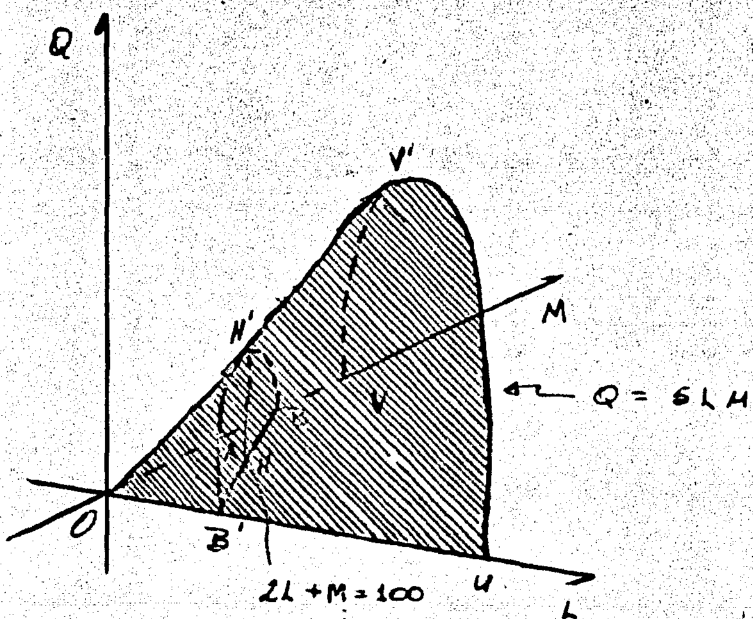


Figura 2.



3.5 Equilibrio General.- El problema del quilibrio general consiste en analizar la interacción de las unidades microeconómicas básicas, economías domésticas y empresas, en la determinación de los precios y cantidades de bienos y de factores de producción. Las economías domésticas, que poseen un conjunto de factores, incluyendo la mano de obra o trabajo, obtienen renta vendiendo estos factores en los mercados de factores, empleando esta renta para comprar bienes en los mercados de bienes. Las empresas utilizan los factores para producir bienes. Los datos del problemas del equilibrio general son pues, los gustos y recursos de las economías domésticas y la tecnología productiva de que disponen las empresas.

Dos tipos de esta interacción dignos de mencionarse son los bienes sustitutivos y los bienos complementarios. Los primero son artículos o mercancías que cumplen con fines similares, de manera que el comprador puede de entre el conjunto de sustitutivos, escoger aquél que le sirva más a sus deseos. Algunos ejemplos de estos bienes serán los paragüas e impermeables; el pollo y el pavo; el carbón y el combustible; los bancos y las sillas; como todos son recursos o bienes similares, el comprador se mostrará indiferente ante ellos. Mientras tanto, los bienes complementarios son aquellos que la gente cuando menos algunas veces desea usar conjuntamente, ejemplos: Queso y vino; camisas y corbatas; agujas e hilos; etc.

Los bienes sustitutivos y complementarios se han definido a base del efecto que un cambio de precio de uno de cada para de tales artículos habrá de surtir en la demanda del otro. Si hacemos caso omiso del ingreso una disminución en el precio de uno de los artículos de una pareja de sustitutivos habrá que disminuir la demanda del otro; por ejemplo, si hubiera una rebaja en el precio de los zapatos de piel, entonces habrá una disminución en la demanda de los zapatos tenis; mientras que, para los artículos complementarios, rige lo contrario, o sea que una disminución en el precio de las camisas, puede a umentar la demanda de corbatas o calcetines. De Ello se infiere que muchas mercancías, son cuando menos sustitutivos leves, debido a que son competidoras a conquistar la reserva limitada del poder adquisitivo de los consumidores.

La esencia de esto, está en que la función de la demanda o de la oferta, según el caso respecto a la mercancía x, no deberá incluir solamente el valor de x, como única variable del precio. Por lo general se incluye en la función de la demanda del equilibrio general a todos los precios posibles, para decir que la demanda de un artículo cualquiera depende cuando menos de manera indirecta, del precio de todos los demás bienes comprendidos en la economía.

Por otra parte, vemos que la Economía del Bienestar, es una rama de la teoría económica, la cual investiga la naturaleza de las recomendaciones de política que el economista formula. La Economía del Bienestar, se ha ocupado principalmente de cuestiones de política que surgen en la asignación de recursos; de la distribución de recursos entre las distintas mercancías y la distribución de las mismas entre los diversos consumidores.

Este es un problema de equilibrio general, ya que si se llevan los recursos a una industria es de suponer que se les ha sacado de otra, y las relaciones entre ambas es lo que constituye la razón principal del problema de determinar las producciones óptimas de los distintos artículos producidos de la economía, se plantea solamente debido a que las cantidades de todos los recursos son limitadas. En estas circunstancias no es correcto decir que lo mejor será producir una cantidad mayor de cualquier bien, ya que por ejemplo, si se producen más chamarras de piel tal vez haya menos mano de obra agrícola para determinada producción de algodón. Puede ser poco aconsejable el aumentar la producción de un producto x, debido a que el producto z, tendría una disminución que fuese según algún criterio más valiosa. La asignación óptima de los recursos entre dos bienes es una importante cuestión relativa a la demanda de los mismos y de su costo relativo de producción. Así pues, para determinar el nivel óptimo de producción de algún artículo haremos una comparación con aquellas mercancías con las que compita para lograr los limitados recursos de la sociedad. Esto es, cuando menos en principio, la conclusión de que la asignación de re cursos es forzosamente una materia propia del Análisis del Equilibrio General.

Una manera de atacar el problema consiste en establecer un número determinado de condiciones que la asignación de recursos debe satisfacer. Habrá por lo tanto, que contestar a las siguientes preguntas ¿Cuánto habrá de producirse de cada mercancía?, ¿Cuánto de cada recurso habrá de utilizarse en la producción? , ¿En que forma se habran de repartir las distintas mercancías entre los consumidores? El Análisi Marginal permite formular ciertas reglas referentes a estas y otras decisiones más específicas implicadas en la asignación de recursos.

Las reglas mencionadas tropiezan con dos graves dificultades, a saber: 1) Con la distribución de ingresos y riqueza. En el Análisis no hay nada que permita asegurar que, óptimamente, el individuo A deba recibir 1.73 veces el ingreso de B. En la práctica vemos que es seguro que casi cualquer decisión económica habrá de afectar el ingreso real de alguna persona. 2) La dificultad para conseguir datos, ya que las reglas marginales a veces reclaman datos que no tienen suficiente información estadística y contable. El costo que para la sociendad tiene la producción de algún bien puede contener elementos que nunca se esperaron que aparecieran en los libros de contabilidad de la empresa productora, es decir, si por ejemplo, la producción de algún producto, causa erosión en el suelo, o contaminación en el agua o el ambiente, todo esto lo debe considerar el economista y deberá decidir si se ha de producir o no un producto y en que cantidad se deberá producir. De igual manera, el producto puede proporcionar beneficios sociales, tales como una técnica mejorada, más producción y mejor calidad de otros recursos, etc., que no aparecen reflejadas en los ingresos de la empresa. Por lo tanto, las cantidades de costos e ingresos que se necesitan para el cálculo de la asignación óptima pueden no existir en los datos de las tablas estadísticas.

Ahora bien, dadas las cantidades de los diversos bienes que se — han producido ¿En qué forma se podran repartir mejor estas mercancías entre el público consumidor? . Para poder entender mejor la solución nos váldre - mos de la regla detallada en el anális marginal llamada asignación óptima - de bienes entre los consumidores: tenemos que para dos productos cualquiera x, y, y para dos consumidores cualquiera 1 y 2, la tasa marginal de sustituir y con x, propia del consumidor 1, tiene que ser la misma que la del — consumidor 2, es decir, para los dos consumidores la razón entre las utilidades marginales de los productos tienen que ser las mismas.

El siguiente ejemplo aclarará lo antes dicho:

1) Supongamos que $U_1 = f_1(x_1, y_1)$ es la función de utilidad del — primer consumidor y que $U_2 = f_2(x_2, y_2)$, es la función de utilidad del segundo, ahora lo que tenemos que ver, es hasta que punto podemos aumentar la primera utilidad sin disminuir la segunda, valiéndonos de cualquier índice ar - bitrario de utilidad congruente con las preferencias de los dos consumidores. Aquí x_1 es la cantidad de x en manos del primer consumidor, y_2 es la cantidad de y que posee el segundo consumidro, etc.

Por lo tanto, debemos maximizar $U_1 = f_1(x_1, y_1)$ sujeto a $f_2(x_2, y_2) = U_2$.

Haciendo de un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, tenemos que:

$$x_1 + x_2 = X$$
$$y_1 + y_2 = Y$$

Para encontrar este máximo formamos la expresión de Lagrange y ...,

$$U_{1\lambda} = f_1(x_1, y_1) + \lambda_a(f_2(x_2, y_2) - U_2) + \lambda_b(x_1 + x_2 - X) + \lambda_c(y_1 + y_2 - Y)$$

Se buscan sus parciales con respecto a x_1, x_2, y_1 y y_2, y se ajustan cada uno de los resultados a cero, y entonces,

$$\frac{\partial U_{1\lambda}}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_b = 0$$

$$\frac{\partial U_{1\lambda}}{\partial x_2} = \lambda_a \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \lambda_b = 0$$

$$\frac{\partial U_{1\lambda}}{\partial y_1} = \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \lambda_c = 0$$

$$\frac{\partial U_{1\lambda}}{\partial y_2} = \lambda_a \frac{\partial f_2}{\partial y_2} + \lambda_c = 0$$

Despejando las ecuaciones anteriores para hallar las utilidades marginales, tenemos:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -\lambda_b \;;\quad \frac{\partial f_1}{\partial y_1} = -\lambda_c \;;\quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{-\lambda_b}{\lambda_a} \;;\quad \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = \frac{-\lambda_c}{\lambda_a}$$

La utilidad marginal de x, para el individuo 1, la llamaremos UM_{x_1}, por lo tanto al sustituirla, tendremos:

$$UM_{x_1} = -\lambda_b \;;\quad UM_{x_2} = \frac{-\lambda_b}{\lambda_a} \;;\quad UM_{y_1} = -\lambda_c \;;\quad UM_{y_2} = \frac{-\lambda_c}{\lambda_a}$$

Así pues por división directa tenemos que:

$$\frac{UM_{x_1}}{UM_{y_1}} = \frac{UM_{x_2}}{UM_{y_2}} = \frac{\lambda_b}{\lambda_c} \;.$$

" LA FUNCION DE PRODUCCION "

Existe dentro de la Teoría Económica una división que podríamos - considerar hasta cierto punto artificial, en la cual se estudian por una parte el proceso de la toma de decisiones ejecutado por las empresas y los sujetos - individuales, división ésta que constituye la materia propia de la Microeconomía y del otro lado de la división, nos encontramos a la Macroeconomía, la cual se refiere al estudio de las relaciones entre grandes conjuntos o agregados e-conómicos.

Los agregados ó magnitudes globales manejados en la Macroeconomía son de dos tipos, unos son los llamados "Stocks", existencias en un momento — determinado, entre las que podríamos citar a las existencias de capital K; se trata de conceptos que especifican una cantidad disponible en un momento concreto. Otros agregados son llamados "Corrientes", flujos, tales como el consumo y la inversión, la renta y la producción. Cada variable de corriente - tiene una dimensión cronológica t, y expresa una cantidad por unidad de tiempo o por período.

Al estudiar el análisis Macroeconómico de un modelo de un sólo sector, nos encontramos con que la tecnología que utiliza la Teoría Económica, se expresa en función de tres factores, a saber, tierra, trabajo y capital; y especifica la cantidad de producto que se puéden obtener con diversas combinaciones de esos factores. Generalmente supondremos que la tierra es un factor — fijo, y por lo tanto será frecuente la producción realizada con rendimientos - decrecientes a escala, y por tanto existirá cierta desigualdad al aplicar un - aumento de trabajo y capital a una cantidad fija de tierra.

Por otra parte cabe considerar al capital como un stock, K, disponible para su empleo en la producción. Ahora bien, deberemos suponer, para - facilitar el desarrollo de este problema (dist. de la prod.), que sólo existe un bien homogéneo y utilizable, tanto como bien de consumo, como bien de capital; además el stock de capital lo podríamos utilizar en forma desagregada, al tratar los modelos en los que el capital toma la forma de máquinas no homogé -

neas, es decir, considerar los modelos para medir el stock total según sea la distribución de las máquinas por edades.

En el caso hipotético de que los factores capital, K, y trabajo, L, sean divisibles y sustituibles entre sí, y suponiendo que a cada combinación (K, L) que corresponde a un volumen de producción único, Q, podemos escribir la función de producción como sigue:

$$Q = F(K, L) \text{ para } K \geq 0, \; L \geq 0.$$

Aquí Q es contínua y posee al menos las dos primeras derivadas; - así $\frac{\partial Q}{\partial K} = F_K$ y $\frac{\partial Q}{\partial L} = F_L$ son las derivadas parciales, y análogamente suponemos que:

$$F_K > 0, \; F_{KK} < 0 \quad y \quad F_L > 0, \; F_{LL} < 0.$$

Cada derivada parcial, que es a sú vez una función de K y L, se - entiende como la productividad marginal de un factor. Así, la productividad marginal de los factores será:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = F_L > 0 \quad y \quad \frac{\partial Q}{\partial K} = F_K > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

En un análisis a corto plazo, K puede suponerse constante ($\bar{K}$), dejando a L como variable independiente, entonces, la función de producción, - será:

$$Q = \phi(L) \quad \text{donde} \quad \phi(L) = F(\bar{K}, L).$$

y las condiciones de productividad marginal de (1), se reducen a:

Producción marginal del trabajo $\phi'(L) > 0$ y, $\phi''(L) < 0$, es decir, la producción marginal es positiva y decreciente al aumentar L.

La función de producción lineal y homogénea (rendimientos constantes), equivale a una función de una variable expresada en términos per cápita;[a] según esto, tenemos que:

$$Q = F(K, L) = Lf\left(\frac{K}{L}\right), \quad \text{siendo} \quad f\left(\frac{K}{L}\right) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$$

Entonces:

$$q = f(k), \quad \text{siendo} \quad q = \frac{Q}{L} \quad y \quad k = \frac{K}{L}$$

Esta forma es peculiar de la función lineal y homogénea, es decir, del caso de los rendimientos constantes.

La productividad marginal del capital es $\frac{dQ}{dK} = \frac{dq}{dK} = f'(k)$, y las condiciones $F_K > 0$, $F_{KK} < 0$, se convierten en $f'(k) > 0$ y $f''(k) < 0$.

Además, es conveniente tomar la forma de f de manera que $f'(k) \to \infty$, según $k \to 0$ (aumento de la productividad hacia infinito según se va disminuyendo al capital per cápita). Si se cumplen todas estas condiciones, se dice que la función de producción $q = f(k)$, para $q = Q/L$ y $k = K/L$, es idónea, y su forma es la que se representa en el plano (k, q) de la figura A. Cuando el capital per cápita es como $k = OM$, la producción per cápita es MP y la productividad marginal del capital es igual a la pendiente de la tangente trazada por el punto P. La productividad marginal disminuye según crece k, alcanzando el valor infinito en $k = 0$ y tendiendo a cero según $k \to \infty$. Así, pues, la función $q = f(k)$ será idónea, en el sentido descrito, si

$$f'(k) > 0; \quad f''(k) > 0; \quad f'(k) \to \infty \text{ según } k \to 0;$$
$$f'(k) \to 0 \text{ según } k \to \infty$$

Nota.- a = Término per cápita = El factor L medido por año de trabajo o bien, por hora de trabajo.

La ventaja de una función de producción que reuna la condiciones antes mencionadas, consiste en que la pendiente de su tangente, que no es otra cosa que la productividad marginal del capital, $f'(k)$ toma todos los valores positivos desde cero hasta otro indefinidamente grande para k suficientemente pequeño.

Supongamos ahora que la producción está basada en el deseo de hacer máximo el beneficio, existiendo competencia perfecta tanto en el mercado de productos como en el de trabajo. Los productores consideran como dados el precio del producto, el salario w, y la tasa de beneficio p, expresándose todos los precios en cantidades de producto. La tasa de beneficio p, está referida al capital empleado.

Como caso primero y apropiado al corto plazo, tomamos $k = \bar{K}$ como dado, y la función de producción es $Q = \phi(L)$. El ingreso neto es:

$$\Pi = Q - wL = \phi(L) - wL$$

y Π será máximo si:

$$\frac{d\Pi}{dL} = \phi'(L) - w = 0 \qquad y \qquad \frac{d^2\Pi}{dL} = \phi''(L) < 0.$$

La segunda condicion está satisfecha (decrecimiento de la productividad marginal), y la primera dá:

$$\phi'(L) = w.$$

es decir, se lleva la producción hasta el punto en que la productividad marginal del trabajo se iguala con el salario, w.

Con más generalidad, si la función de producción $Q = F(K, L)$ está sujeta únicamente a las restricciones detalladas anteriormente, donde Q debe ser contínua y poseer al menos las dos primeras derivadas, el ingreso neto es:

$$\Pi = F(K, L) - pK - wL$$

y las condiciones necesarias para que Π sea máximo, dados w y p son:

$$\frac{d\Pi}{dK} = F_K - p = 0 \quad y \quad \frac{d\Pi}{dL} = F_L - w = 0.$$

Las condiciones suficientes se cumplen en virtud del supuesto del decrecimiento de la relación marginal de sustitución (isocuantas convexas hacia el origen). Por lo tanto, la producción se lleva hasta el punto en que productividades marginales se igualan a sus respectivos precios (dados):

$$F_K = p \quad y \quad F_L = w.$$

El ingreso neto máximo es:

$$\Pi = F(K, L) - F_K K - F_L L.$$

El signo de Π depende de que los rendimientos sean crecientes o decrecientes. Π será cero si los rendimientos constantes a escala lo son, si y sólo si la producción se divide como $Q = F_K K + F_L L = pK + wL$.

El caso de los rendimientos constantes puede examinarse con mayor detalle y representarse gráficamente sin más que expresar la función de producción en términos per cápita:

$$q = f(k), \quad \text{siendo} \quad q = Q/L \quad y \quad k = K/L \; .$$

Necesitamos, en primer lugar, unas expresines explícitas para las productividades marginales, expresiones que se obtienen derivando $Q = Lf(k)$, donde $k = K/L$:

$$\frac{dQ}{dK} = L \frac{d}{dk} f(k) \frac{dk}{dK} = Lf'(k)\, 1/L = f'(k).$$

$$y \; . \; . \; . \; \frac{dQ}{dL} = f(k) + L \frac{d}{dk} f(k) \frac{dk}{dL} = f(k) + Lf'(k)\,(-K/L^2) = f(k) - kf'(k).$$

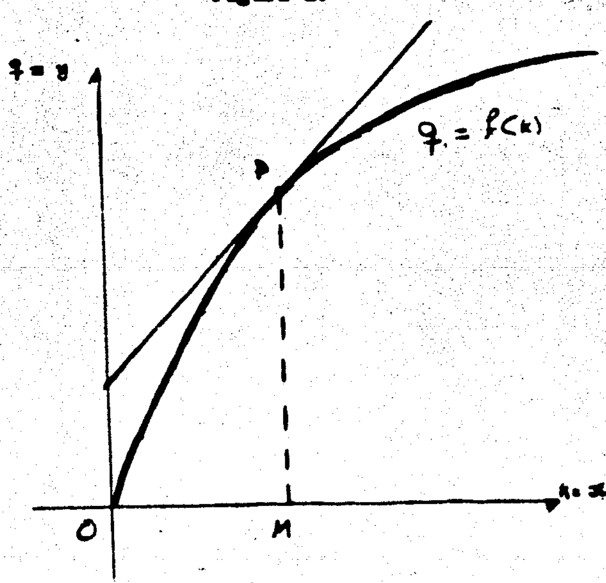
Ambas productividades marginales quedan expresadas en función de $f(k)$ y su — derivada:

$$\frac{dQ}{dK} = f'(k) \quad y \quad \frac{dQ}{dL} = f(k) - kf'(k).$$

Al tratar de hacer máximos los beneficios en régimenade competencia perfecta, las productividades marginales anteriores quedan igualadas con la — tasa de beneficio, p, y con el salario, w, respectivamente: Sí, siendo constantes los rendimientos , designamos por $q = f(k)$ la función de producción expresada en términos per cápita y si la tasa de beneficio p, y el salario w, — están dados a los productores por la competencia perfecta, entonces el volumen óptimo de producción satisface las condiciones relativas a la productividad — marginal:

$$p = f'(k) \qquad \text{y} \qquad w = f(k) - kf'(k). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Figura 1.



Estas condiciones resuelven la división del producto total, y así tenemos que:

$$pk + w = kf'(k) + f(k) - kf'(k) = f(k) = q \; .$$

Por lo tanto, en términos per cápita, el producto se divide así:

$$q = pk + w$$

Multiplicando por L, esta distribución revierte a la conocida forma:

$$Q = pK + wL.$$

Rigiendo la competencia perfecta en ambos mercados, la tasa de beneficio p, y el salario w, vienen dados a los productores desde el exterior. Queda por ver cómo se determinan esas dos variables en los dos mercados para alcanzar el equilibrio. La sola función de producción nos ayudará. A falta de concreción de una oferta de mano de obra que venga a conjugarse con la demanda ejercida por los productores, suponemos dado w. Entonces, k queda determinado en virtud de la segunda condición de (1), de donde se sigue que $q = f(k)$ y $p = f'(k)$ están también determinados. Por tanto, la tasa de beneficio p, la producción por cápita q, y el capital por cápita k, quedan fijados en función de w. Los pasos restantes consisten en determinar w en el mercado de trabajo y la escala de producción (Q, K y L por separado) en el mercado de productos. Este resultado resulta interesante y puede expresarse así:

En competencia perfecta y con rendimientos constantes, la tasa de beneficio p, queda determinada en función del salario w, exclusivamente en virtud de las condiciones técnicas, es decir, por la selección de k (capital per cápita) en función de la producción $q = f(k)$.

Los resultados quedan representados gráficamente en el plano (k,q) de la figura B. Donde P es la situación óptima en cuanto a producción en la curva $q = f(k)$. La pendiente de la tangente en P es $f'(k)$, que es igual a p en el óptimo. Por lo tanto,

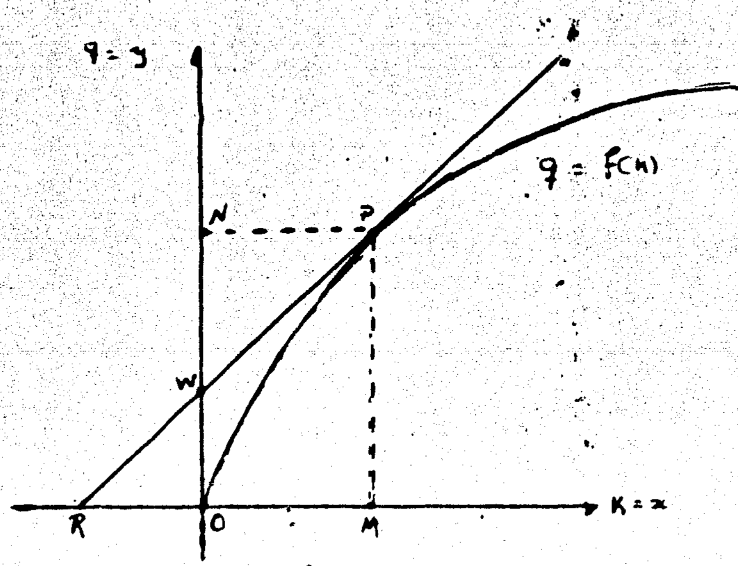
$$p = \frac{WN}{NP} = \frac{WN}{OM} = \frac{WN}{k}$$

es decir, el beneficio por cápita = kp = WN. Como en virtud de la división del producto, w = q − pk, y como q = ON, tenemos: Salrio por cápita = OW.

Por último, de la pendiente de la tangente, resulta:

$$p = \frac{OW}{OR} = \frac{w}{OR}, \text{ o sea } OR = \frac{w}{p}$$

Figura B.



La situación óptima en régimen de competencia perfecta y con rendimientos constantes, la podemos describir en términos de la figura B, como sigue:

La tasa de beneficio p, es la pendiente de la tangente trazada en el punto óptimo P; el salario w, es la ordénada OW, determinada por la tangente sobre el eje q, y la relación por cociente entre el salario y la tasa de beneficio es la abscisa en el origen OR, de esa misma tangente.

Pasemos ahora al proceso de describir las funciones de producción, que con más frecuencia son utilizadas. La llamada función de producción de Cobb-Douglas, tiene la siguiente forma general: $Q = AK^aL^b$, siendo A un coeficiente constante, y a y b, dos parámetros positivos. La constante A se puede absorber por las unidades elegidas para medir el producto, Q, lo que supone cierta simplificación algebraica. Por tanto, la forma de Cobb-Douglas se puede escribir como sigue:

$$Q = K^aL^b \qquad (a > 0,\ b > 0) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

Esta función de producción, $F(K, L) = K^aL^b$ es tal que

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{a+b}F(K, L).$$

Esto quiere decir que, si $a+b > 1$, los rendimientos son crecientes a lo largo de toda la función, mientras que si $a+b < 1$, los rendimientos son siempre decrecientes:

La función (1) es más fácil de manejar tomando logaritmos:

$$\log Q = a \log K + b \log L \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

De esta expresión se deduce que las isocuantas con Q constante del plano L, K vienen dadas por:

$$\log K = \text{constante} - b/a \log L,$$

es decir,

$$K = \text{constante} \times L^{-b/a} .$$

Estas curvas son asintóticas a ambos ejes y convexas hacia el origen de coordenadas. Las productividades marginales se hallan derivando (2)

$$\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{a}{K} \qquad y \qquad \frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{b}{L},$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{aQ}{K} \qquad y \qquad \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{bQ}{L} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

y

$$K\frac{\partial Q}{\partial K} + L\frac{\partial Q}{\partial L} = (a+b)\,Q.$$

Si los factores son remunerados de acuerdo con sus respectivas -- productividades marginales, la suma de ambas remuneraciones superaría a Q, si $a + b > 1$, pero sería inferior a Q si $a + b < 1$.

La función de Cobb-Douglas con rendimientos constantes contiene a sólo un parámetro:

$$Q = K^{a}L^{1-a}, \qquad 0 < a < 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

ya que $a+b = 1$, y entonces, $b = 1 - a$ $(0 < a < 1)$. En virtud de (3), las productividades marginales son:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = a\frac{Q}{K} \qquad y \qquad \frac{\partial Q}{\partial L} = (1-a)\frac{Q}{L} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

y el producto se divide así:

$$Q = K\frac{\partial Q}{\partial K} + L\frac{\partial Q}{\partial L}$$

expresado en términos per cápita:

(4) se reduce a:

$$q = k^{a},$$

siendo $q = Q/L$ y $k = K/L$. . . . . (6)

que es de la forma idónea representada en la figura C, ya que $f(k) = k^{a}$, dá

$$f'(k) = \frac{a}{k^{1-a}} > 0 \; ; \qquad f''(k) = -\frac{a(1-a)}{k^{2-a}} < 0 \; ;$$

$$f'(k) \longrightarrow \infty, \text{ según } k \longrightarrow 0 \; ; \qquad f'(k) \longrightarrow 0, \text{ según } k \longrightarrow \infty \; .$$

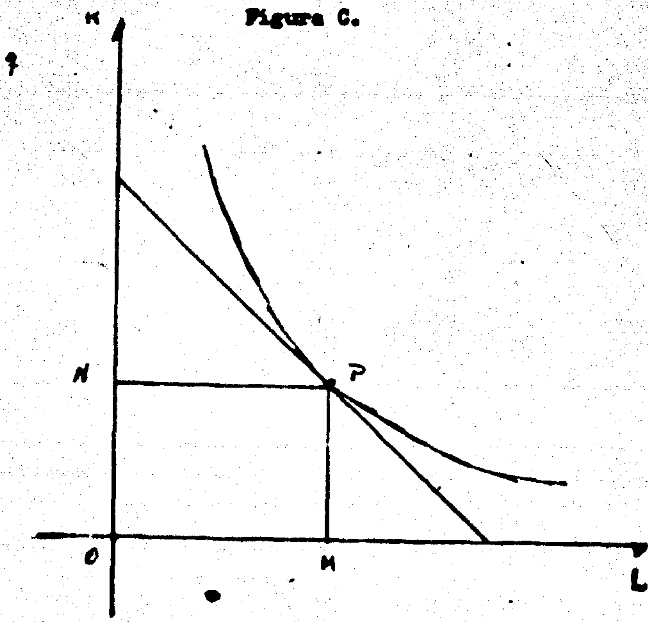
Expresadas en función de k, las productividades marginales (5) - - son:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{a}{k^{1-a}} = f'(k) \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial L} = f(k) - kf'(k) = (1-a)\,k^{a} \; . \; . \; .(7),$$

y la relación marginal de sustitución es:

$$R = \frac{(1-a)\,k^{a}}{ak^{-(1-a)}} = \frac{1-a}{a}\,k \; .$$

Figura C.



Ahora bien, la otra función comúnmente usada, es la llamada función de elasticidad constante de sustitución (E. C. S.), en la que las variables Q^{-b}, K^{-b}, y L^{-b} (siendo b una constante), están relacionadas con Q de forma separada y aditiva:

$$Q^{-b} = mK^{-b} + nL^{-b} \qquad \text{para } m > 0 \text{ , } n > 0 \text{ , constantes} \quad . . . (1)$$

Tenemos dos parámetros: $b \neq 0$, y la relación por cociente m/n, que determina la distribución entre los factores. La magnitud de m o de n por separado carece de interés, ya que en (1) se la puede absorber en la unidad elegida para medir el producto Q. Los rendimientos son siempre constantes, y de la expresión (1), podemos escribir también lo siguiente:

$$q^{-b} = mk^{-b} + n, \quad \text{siendo} \quad q = Q/L \quad y \quad k = K/L \quad . . . . . . (2).$$

Para tener Q o q en forma explícita, podemos escribir (1) y (2) como:

$$Q = (mK^{-b} + nL^{-b})^{-1/b} \qquad y \qquad q = (mK^{-b} + b)^{-1/b} .$$

El parámetro b se interpreta en función de la elasticidad constante de sustitución, s:

$$s = \frac{1}{1+b} \text{ , } \quad \text{o bien} \quad b = \frac{1}{s} - 1.$$

Como $s > 0$, los valores permitidos a b son $b > -1$ ($b \neq 0$). Pueden presentarse todos los valores de s, salvo el $s = 1$ ($b = 0$), que queda excluído.

Derivando (1) con respecto a K, podremos encontrar otras propiedades de la función de producción E. C. S. , tenemos:

$$(-b)Q^{-(1+b)} \frac{dQ}{dK} = (-b)mK^{-(1+b)}$$

o sea: $\frac{\partial Q}{\partial K} = m\left(\frac{Q}{K}\right)^{1+b} = m\left(\frac{Q}{K}\right)^{1/s}$

de manera análoga se obtiene la otra productividad marginal, y tenemos las tres expresiones siguientes:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = m\left(\frac{Q}{K}\right)^{1/s}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial L} = \left(\frac{Q}{L}\right)^{1/s}; \qquad R = \frac{n}{m}\left(\frac{K}{L}\right)^{1/s} \ldots\ldots \quad (3)$$

en competencia perfecta, la relación marginal de sustitución, dada por (3) en función de $k = K/L$ (capital per cápita), es igual al cociente w/p entre el salario y la tasa de beneficio. Es decir,

$$\frac{w}{p} = \frac{n}{m}\, k^{1/s},$$

que pone de manifiesto el parámetro de distibución n/m que figura en la función de producción.

Muchas propiedades dependen de que $s > 1$ ó $s < 1$. Distinguiremos por muchos casos:

Por ejemplo, cuando $s > 1$. Aquí, $-1 < b < 0$. Hacemos $k = -1/b$ y $-1/b > 1$, siendo las isocuantas:

$$mK^{1/k} + nL^{1/k} = \text{constante},$$

convexas hacia el origen y cortado a ambos ejes del plano (L, K). Al variar el capital per cápita k. La producción per cápita es:

$$q = (mk^{1/k} + n)^{k} \qquad y \qquad \frac{dq}{dk} = m\left(\frac{q}{k}\right)^{1-(1/k)} > 0 \text{ de (2) y (3)}$$

La variable dependiente q aumenta con k, y $q \longrightarrow \infty$ cuando $k \longrightarrow \infty$. Según asciende el capital empleado (en comparación al trabajo), la producción per cápita va creciendo indefinidamente. Al contrario, según aumenta la canti dad aplicada de trabajo ($k \longrightarrow 0$), la producción per cápita va declinando - hasta el límite b^{A}.

Tenemos otros caso $\cdot < 1$, aquí, $b > 0$, y las isocuantas son:

$$\frac{m}{K^b} + \frac{n}{L^b} = \text{constante.}$$

Sí $K \longrightarrow 0$, el primer sumando aumenta indefinidamente y, para mantener constante la suma, se tiende a cero al segundo sumando, es decir, $L \longrightarrow \infty$. Así mismo, $K \longrightarrow \infty$ según $L \longrightarrow 0$. Las isocuantas son convexas hacia el origen y asintóticas a ambos ejes. La producción per cápita es :

$$q = \frac{1}{(m/k^b + n)^{1/b}} \quad y \quad \frac{dq}{dk} = m\left(\frac{q}{k}\right)^{1+b} \qquad \text{de (2) y (3)}$$

Igual que antes, q crece con k, pero ahora $q \longrightarrow n^{-1/b}$ según $k \longrightarrow \infty$. Al contrario, cuando $k \longrightarrow 0$, la producción per cápita q, tiende a 0; k y q — descienden juntas a cero.

La elasticidad de sustitución entre los factores de cada una de - las funciones anteriores de producción, queda aquí confirmada, al deducir el valor de s, y su correspondiente significado según sea mayor menor o igual a cero.

Supongamos que existe la siguiente función de producción $Q = F(K, L)$, la relación marginal de sustitución $R = -\frac{dK}{dL} = \frac{F_L}{F_K}$ (para Q constante) — se supone decreciente según avanza la sustitución, es decir, que R disminuye según decrece K/L. La elasticidad de sustitución entre los factores se define como:

$$s = \frac{d \operatorname{Log} (K/L)}{d \operatorname{Log} R} = \frac{L}{K} R \frac{d(K/L)}{dR}$$

y s > 0, ya que R disminuye con K/L. Suponiendo competencia perfecta y con el principio de hacer máximos los beneficios, para el capital óptimo per cápita, K/L, tenemos que la relación marginal de sustitución, R, es la relación por cociente entre el salario y la tasa de beneficio. Pero, en general R y s varían con la combinación de factores (K, L) empleados.

En el caso de los rendimientos constantes, expresamos por $q = f(k)$ la función de producción en términos per cápita y deducimos como sigue R y s en función de $f(k)$ y de sus derivadas. Representamos por f, f' y f'' la función y sus derivadas. De la expresión:

$$\frac{dQ}{dK} = f'(k) \quad y \quad \frac{dQ}{dL} = f(k) - kf'(k),$$

tenemos,

$$R = \frac{F_L}{F_K} = \frac{f(k) - kf'(k)}{f'(k)} = \frac{f - kf'}{f'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

y

$$s = \frac{d \operatorname{Log} k}{d \operatorname{Log} R} = \frac{1/k}{\frac{d \operatorname{Log} R}{dk}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

De (1):

$$\operatorname{Log} R = \operatorname{Log}(f - kf') - \operatorname{Log} f'$$

y

$$\frac{d}{dk} \operatorname{Log} R = \frac{-kf''}{f-kf'} - \frac{f''}{f'} = - \frac{ff''}{f'(f-kf')}$$

De (2):

$$s = -\frac{f'(f - kf')}{kff''} > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Como f y f-kf' son productividades marginales son ambas positivas, mientras que f" es negativa, ya que representa la productividad marginal.

Designamos por w la expresión (f-kf'), función de k. Se interpretará w como salario, suponiendo régimen de competencia perfecta y el principio de beneficio máximo. Según varíe w, podremos observar el consiguiente cambio de k y, por tanto, de $q = f(k)$.

De $w = f - kf'$ tenemos:

$$\frac{dw}{dk} = f' - kf'' - f' = -kf''.$$

De $q = f(k)$ tenemos:

$$\frac{dq}{dk} = f'.$$

Por tanto:

$$\frac{dq}{dw} = -\frac{f'}{kf''},$$

y entonces:

$$\frac{w}{q}\frac{dq}{dw} = \frac{f - kf'}{f}\left(-\frac{f'}{kf''}\right) = -\frac{f'(f-kf')}{kff''} = s.$$

Es decir, si $q = f(k)$ y $w = f(k) - kf'(k)$, la elasticidad de q con respecto a w es:

$$\frac{w}{q}\frac{dq}{dw} = s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

En situasión óptima, sea II la fracción del producto repartida en forma de beneficios:

$$II = p\frac{k}{q} = \frac{kf'(k)}{f(k)}$$

Según w va creciendo, así lo hace k, y la consiguiente variación variación de II es:

$$\frac{dII}{dk} = \frac{d}{dk}\left(\frac{kf'}{f}\right) = \frac{1}{f^2}\left(f(f' + kf'') - kf''\right) = \frac{kf''}{f}\left(\frac{f'(f-kf')}{kf''} + 1\right).$$

De (3) tenemos:

$$\frac{dII}{dk} = \frac{k}{f}(-f'')(s-1).$$

Por tanto, si $s > 1$, la fracción del producto repartida en forma de beneficios aumenta con k y con v; si $s < 1$, la parte de los beneficios disminuye. En el caso particular en que $s = 1$, la parte de los beneficios y de los salarios permanece constante sean cuales fueren las variaciones de v y de k.

Los siguientes ejemplos, nos ilustrarán un camino para utilizar las funciones de producción previstas.

Ejemplo 1.- A continuación, trataremos de encontrar el valor del nivel de trabajo, L, expresado en función del salario w, siendo $K = 4$, y tomando como función de producción $Q = \sqrt{KL}$, deberemos considerar además que existe el régimen de competencia perfecta con rendimientos constantes. Dada la oferta de trabajo $L = 16\, w^2$, calcularemos el salario y la producción en equilibrio.

Respuesta:

Sabemos que al hacer máximos los beneficios en régimen de competencia perfecta, la productividad marginal $\frac{dQ}{dL} = f(k) - kf'(k)$ se iguala con el salario w, por lo tanto:

$$w = \frac{dQ}{dL} = f(k) - kf'(k) = Q/L - \frac{K}{L}\left(\frac{-Q}{L^2}\right)$$

$$= Q/L + \frac{QK}{L^3} = \frac{L^2Q + QK}{L^3} = \frac{L^2Q + L^2(Qk)}{L^3} = \frac{L^2(Q + Qk)}{L^3}$$

$$= \frac{Q + Qk}{L} = \frac{Q - Q/2}{L} = \frac{Q/2}{L} = \frac{Q}{2L} \implies w = \frac{Q}{2L}$$

$\therefore$ al despejar a L tenemos: $w = \frac{\sqrt{KL}}{2L} = \frac{(K)^{1/2}\,(L)^{1/2}\,(L)^{-2/2}}{2}$

$$= \frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{L}} \implies (L)^{1/2} = \frac{(K)^{1/2}}{2w} \implies L = \frac{K}{4w^2}, \text{ pero como } K = 4,$$

ent., $L = 1/w^2$, por tanto, $w^4 = \frac{1}{16} \implies w = \sqrt[4]{1/16}$ y . . . $w = 1/2$.

al sustituir el valor de w en $\frac{1}{w^2} = L$, tenemos $L = 4$, y finalmente, como

$Q = \sqrt{KL} = \sqrt{4x4}$, ent., $Q = 4$, por tanto, el salario $w = \frac{1}{2}$, el nivel de trabajo $L = 4$, y la producción en equilibrio $Q = 4$.

Ejemplo 2.- Ahora encontraremos la siguiente función de producción - , $q = \frac{k}{(1+k)}$ de la forma E.C.S., el valor del parámetro a, de p y del salario w, suponiendo régimen de competencia perfecta.

Respuesta:

Sabemos que $p = \frac{dQ}{dK} = \frac{1}{(1+k)^2}$ ya que; $\frac{dQ}{dK} = \frac{(1+k) - k}{(1+k)^2}$

$$= \frac{1}{(1+k)^2} \quad \text{entonces,} \quad p = \frac{1}{(1+k)^2} \;;$$

Por otra parte,

$$w = q - k(\frac{dQ}{dK}) \text{ , por tanto, } w = \frac{k}{(1+k)} - \frac{k}{(1+k)^2}$$

$$= \frac{(1+k)k - k}{(1+k)^2} = \frac{k^2}{(1+k)^2} \text{ , ent., } \quad w = \frac{k^2}{(1+k)^2} \text{ .}$$

Finalmente,

$$\frac{dQ}{dK} = a\,\frac{Q}{K} \text{ , ent., } \frac{1}{(1+k)^2} = a\left(\frac{k/1+k}{k}\right) = a\left(\frac{k}{k+k^2}\right)$$

$$\frac{(1+k)k}{(1+k)^2} = ka \text{ ent., } a = \frac{1+k}{(1+k)^2} = \frac{(1+k)\,1}{(1+k)(1+k)} = \frac{1}{(1+k)}$$

$$\text{por tanto, } a = \frac{1}{(1+k)} \text{ .}$$

Ahora sabemos que los valores son: $p = \frac{1}{(1+k)^2}$, $a = \frac{1}{(1+k)}$

y $w = \dfrac{k^2}{(1+k)^2}$, suponiendo el régimen de competencia perfecta.

Ejemplo 3.- Demostraremos que si la función de producción de Cobb-Douglas es lineal y homogénea, su elasticidad de sustitución será $s = 1$ en todos sus puntos, si y sólo si, la función es de la forma $Q = K^a L^{1-a}$.

Respuesta:

$$s = \frac{f'(f-kf')}{kff''} \quad , \quad \text{siendo } f(k) = k^a, \quad \text{entonces,}$$

$$f'(f-kf') = \frac{a}{k^{1-a}}\left(k^a - k\frac{a}{k^{1-a}}\right) = \frac{a}{k^{1-a}}(1-a)k^a = $$

$$= a(1-a)k^{2a-1}, \text{ y } kf(-f'') = kk^a \frac{a(1-a)}{k^{2-a}} = $$

$$= a(1-a)\,k^{2a-1}.$$

por tanto, $f'(f-kf') = a(1-a)k^{2a-1}$ y..., $kf(-f'') = -kff'' = a(1-a)k^{2a-1}$

lo cual implica $s = \dfrac{-f'(f-kf')}{kff''} = \dfrac{-a(1-a)k^{2a-1}}{-a(1-a)k^{2a-1}} = 1$

por tanto, $s = 1$ c. q. d.

Para el caso PEMEX, empresa paraestatal del gobierno mexicano, la función de producción fué elaborada en base a la información obtenida en la gerencia de ventas de la misma institución.

La serie de años, fué considerada a partir del año 1938, fecha de la nacionalización del petróleo, hasta el año proximo pasado 1978.

El mecanismo para la construcción de la función de producción fué desarrollado de la siguiente manera: La función dependía de las ventas internas, más la ventas al extranjero, más las existencias al final del ejercicio contable; tanto para el volumne como para el capital se consideraron los índices en año base 1938 y una vez que se tuvo esta información se consideró el cociente del índice de valor entre el índice del volumen para así obtener el índice de precios, el cual a su vez sirvió para elaborar la serie de datos que formó la columna del capital a precios constantes sumada a la columna del índice de la masa laboral, en año base 1938, teniendo la siguiente ecuación:

$$Q = c\, K_a^{\,i}\, L^j ,$$

donde Q es la producción a precios constantes, $K_a^{\,i}$ es el capital a precios constantes, L^j es él índice de la masa laboral, tomando en cuenta, que la letra c es una constante.

Para determinar el valor de los parámetros i, j, fué necesario utilizar un programa de regresión lineal, para así saber si se trataba de una función con rendimientos constantes, decrecientes o crecientes, ya que como hemos visto se trata de una función de producción del tipo Cobb-Douglas donde i, j son mayores que cero.

Es importante hacer la aclaración de que al no contar con la homogeneidad del volumen de la producción, fué necesario utilizar los factores de conversión para los productos petroquímicos, ya que la mayoría están expresados en toneladas métricas y para efectos de este trabajo se consideró al volumen en barriles de los petrolíferos y del crudo, por ser de mayor —

su volumen con respecto a los anteriores. En verdad que al hacer la conversión se desvirtúa la información verdadera, ya que existe pérdida de — energía en dicho proceso; empero fué la mejor alternativa para llegar a - los resultados más satisfactorios, por la sencilla razón de ser más asequible la conversión de toneladas métricas a toneladas cúbicas o como en este caso a barriles, que la operación inversa, es decir de barriles a toneladas métricas.

A continuación listaremos las columnas que sirvieron para obtener la información procesada, la cual a su vez contribuyó a determinar el valor de los parámetros de la ecuación.

Siendo la ecuación la siguiente: $Q = e\, K_a^{\,i}\, L^j$, y considerando la serie de años prevista 1938 - 1978, tenemos la siguiente tabla:

Año	Q	e	K	L
1938	100.0	10.0	100.0	100.0
1939	126.4	10.0	124.7	114.2
1940	121.3	10.0	126.6	124.7
1941	134.6	10.0	152.4	112.3
1942	111.7	10.0	126.6	116.0
1943	122.6	10.0	146.8	120.6
1944	123.6	10.0	160.7	129.9
1945	144.1	10.0	196.3	145.7
1946	162.3	10.0	254.7	165.8
1947	190.2	10.0	356.6	163.8
1948	203.4	10.0	488.3	165.3
1949	221.7	10.0	509.3	165.3
1950	240.0	10.0	671.2	193.8
1951	258.5	10.0	746.4	207.7
1952	266.9	10.0	752.4	253.3
1953	271.8	10.0	767.4	209.8
1954	314.1	10.0	953.9	226.9

Año	Q	e	K	L
1955	332.3	10.0	1190.3	246.3
1956	349.9	10.0	1334.1	241.3
1957	345.6	10.0	1436.3	252.4
1958	367.7	10.0	1488.0	258.7
1959	403.4	10.0	1855.4	259.6
1960	403.4	10.0	2157.3	265.7
1961	456.4	10.0	2412.0	263.3
1962	481.9	10.0	2461.0	269.1
1963	507.6	10.0	2696.3	281.8
1964	549.9	10.0	2979.4	286.2
1965	575.4	10.0	3161.8	306.7
1966	602.1	10.0	3387.3	328.1
1967	644.8	10.0	3760.3	356.1
1968	683.5	10.0	4131.8	384.8
1969	744.3	10.0	4649.8	388.6
1970	818.1	10.0	5030.7	403.8
1971	846.0	10.0	5478.3	428.9
1972	888.9	10.0	6002.6	430.4
1973	947.8	10.0	6941.9	435.5
1974	1061.8	10.0	12092.9	441.3
1975	1283.7	10.0	14398.5	461.4
1976	1372.5	10.0	17034.8	500.3
1977	1551.0	10.0	28541.6	520.9
1978	1927.9	10.0	37582.0	543.5

Como esta función se desea linealizar, tomando logaritmos lo conseguimos; por tanto la nueva función, será la siguiente:

$$\log Q = i \log K + j \log L.$$

El resultado, después de haber corrido la regresión lineal, fué el siguiente:

La desviación standard de las varibles de la columna 1, fué de 1.605, de las variables de la columna 2, fué de 0.484 y de la variable - dependiente fué de 0.810, lo cual demuestra que los datos no se extendie ron demasiado alrededor de su valor medio, i. e., la dispersión fué casi nula. La desviación máxima de la muestra fué de 2.93, siendo su desvia ción promedio de 0.820

Por otra parte existe una correlación, tanto simple como múlti- ple casi perfecta, ya que la correlacion de las variables 1, 2 fué de 0.986, de las variables 2, 3 de 0.990, y de las variables 3, 1 de 0.996, siendo su correlación múltiple de 0.996.

Finalmente, vemos que el valor de los coeficientes de regresión describen el valor de los parámetros i, j, por lo tanto sí $i = 0.375$ y - $j = 0.432$, esto significa que la función de producción de producción para el caso PEMEX, tiene la siguiente nomenclatura:

$Q = e\, K_a^{\,i}\, L^j$, la cual se desea linealizar, por tanto,

$\mathrm{Log}.Q = i \log K_a + j \log L$, y que al sustituir nos dá:

$\mathrm{Log}\ Q = 0.8222 + 0.375\ K + 0.432\ L$,
lo cual implica que al eliminar el logaritmo, queda de la siguiente manera,

$$Q = 2.321\ K^{0.375}\ L^{0.432},$$
donde $e^{0.8222} = 2.321$.

Por tanto, como $i + j < 0$, en este caso podremos afirmar que la función de producción para el caso PEMEX es, de acuerdo a la definición de las páginas anteriores a una función con rendimientos decrecientes para el - período de observación.

CONCLUSIONES.

Los problemas del Análisis Económico, en la actualidad se resuelven a través de métodos matemáticos cada vez más eficaces, dichos métodos o técnicas se han desarrollado en épocas relativamente recientes, y han proporcionado resultados satisfactorios. Así vemos que, la Programación Lineal, por ejemplo, herramienta muy poderosa de la Investigación de Operaciones, forma parte de toda una metodología matemática indispensable para el tratamiento teórico de la empresa.

El Cálculo Diferencial, tiene un origen poco más remoto, pero es indudable que hasta hace poco tiempo, y de una manera más directa tuvo su incursión en problemas del Análisis Económico.

Son innumerables las aplicaciones que del Cálculo Diferencial podemos encontrar para la solución de los problemas del Análisis Económico. En el presente trabajo, sólo tuvimos la oportunidad de observar de una manera general, la aplicación de este instrumento a un contado número de ejemplos sencillos y prácticos , que alguna vez llegara a encontrar al estudiar la materia de Economía Matemática, impartida en ésta facultad.

Hay todavía mucho por hacer en este vasto campo, y espero que en un futuro próximo se lleguen a desarrollar los más posibles métodos de la Teoría Matemática, aplicables a modelos de la tradicional Economía Teórica.

OBRAS DE CONSULTA.

1) Allen, R. G. D.; "Economía Matemática"; Editorial Aguilar; España, 1972.

2) Ayres, Frank Jr.; "Cálculo Diferencial e Integral"; Mc. Grow Hill; México, 1975.

3) Barros de Castro, Antonio y Lessa, Carlos Fco.; "Introducción a la Economía, (un enfoque estructuralista)"; Siglo XXI, Editores; México, 1972.

4) Baumol, William J.; "Teoría Económica y Análisis de Operaciones"; Herrero Hermanos; México, 1977.

5) Dorfman, Samuelson, Solow: "Programación Lineal y Análisis Económico"; México, 1972.

6) Ferguson, C. E.; "Teoría Microeconómica"; Fondo de Cultura Económica; México, 1977.

7) Haser, Norman B.; "Análisis Matemático, Curso Intermedio 2"; Editorial Trillas; México, 1976.

8) Henderson, J. M. y Quant, R. E.; "Teoría Microeconómica"; Editorial Ariel; España 1975.

9) Intriligator, Michel D.; "Optimización Matemática y Teoría Económica"; Editorial Prentice Hall Internacional; España, 1971.

10) Kaufman, A.: "Métodos y Modelos de la Investigación de Operaciones"; México, 1971; C.E.C.S.A.

11) Lancaster, Kelvin; "Economía Matemática"; Mc. Millan Cía.; U.S.A., 1971.

12) Lehmann, Charles H.; "Geometría Analítica"; "UTEHA"; México, 1974.

13) Magee, J. F.; "Production, Planning and Inventory Control, Mc. Grow Hill, New York, 1970.

14) Mandel, Ernest; "Tratado de Economía Marxista"; Serie Popular Era; México, 1975.

15) Mc. Kenna, Joseph; "Curso Medio de Teoria Económica", Editorial Marcombo; España, 1971.

16) Salvatore Dominick; "Microeconomía"; Mc. Grow Hill; México — 1974.

17) Scott, H. M.; "Curso Elemental de Economía"; Fondo de Cultura Económica; México, 1970.

18) Samuelson, Paul Anthony; "Curso de Economía Moderna", Editorial Aguilar: España, 1970.

19) Samuelson, Paul Anthony; "Fundamento del Análisis Económico"; El Ateneo; Argentina, 1970.